國中數學教學疑難問題與解決策略示例 34

【分年細目】8-a-15 能利用配方法解一元二次方程式。

【主題名稱】配方法解一元二次方程式之幾何模式

【困難分析】

配方法的解題構念和技巧，在國中生的數學學習上佔有極重要的成敗關鍵，尤其以配方法解一元二次方程式和求二次函數的頂點座標、極大值或極小值是一個非常好用且結構性、抽象性都很強的解題方法，對大多數國中學生的數學理解是一個很大的挑戰和難題。

【解決策略】

透過幾何圖形溝通代數公式（例如完全平方公式）有一個盲點，就是代數式中所代表的數字一定是正數（長度或面積不可能是負數），所以，以幾何圖形溝通代數公式是透過具體操作澄清公式的一種方法，雖然不是唯一的方法，但卻是讓學生滿容易理解的方法。

在引導學生做配方法的學習時，應注意學生對抽象觀念的認知轉化，以及對於每一個解題步驟間的認知、理解和熟練，不可太早引導學生進入程序性的解題步驟或口訣背誦。

譬如說：x^2-7x+a 是一個完全平方式，則 a＝？

教學重點可以是透過比較活動求出答案。

例如 $x^2-7x+a=(x-p)(x-p)=x^2-2px+p\times p$

由上面的算式可以得到一組聯立方程式『$2p=7$，$p\times p=a$』，

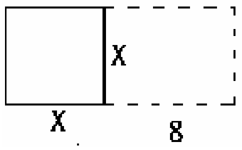
透過解聯立方程式就可以得到答案。

或 $x^2-7x+a=(x+p)(x+p)=x^2+2px+p\times p$

由上面的算式可以得到一組聯立方程式『$2p=-7$，$p\times p=a$』，透過解聯立方程式就可以得到答案。

至於以幾何圖形方式以下，個人覺得彰化師大數學系梁崇惠老師的以幾何模式來解一元二次方程式，也說明了配方法在幾何上的意義，個人頗為欣賞。材料：鉛筆、剪刀、直尺、白紙備用。代數板（X×X 正方形 1 塊、1×X 矩形 8 塊、1×1 正方形 16 塊）。

話說西元 825 年，中亞數學家阿爾花拉子米(Al-Khowarizmi)使用幾何模型展現他解一元二次方程式的代數方法（配方法）



請老師考慮下列的問題：

把某個正方形沿著一邊延伸 8 個單位長（如圖），形成一個面積為 33 平方單位的矩形，問原來的那個正方形邊長為多少？

依照題意列出一個方程式，令原來正方形的邊長為 X，那麼它的面積就是 X^2；延伸出來的那個矩形，邊長分別為 X、8，故其面積為 8X。

因為兩塊面積和為 33，所以得到一元二次方程式 $X^2+8X=33$。

以下介紹兩種解一元二次方程式 $X^2+8X=33$ 的方法。

第一種是純代數的方法(配方法)；

第二種是阿爾花拉子米使用的幾何方法。

一、代數方法（配成完全平方式）：

1．方程式的左式 X^2+8X，並不是一個完全平方式，必須加上哪一個整數才能讓它變成一個完全平方式？

____

2．把這個整數同時加到方程式的左右兩邊。

$X^2 + 8X +$ ________ $= 33 +$ ________

3．把方程式左邊的式子改寫成完全平方式。

$(\qquad)^2 =$ ________

4．因為括號內式子的平方等於右邊的正整數，所以括號內的式子必等於該正整數的正平方根或負平方根。根據上述的話，寫出兩個一元一次方程式

____

5．分別算出兩個一元一次方程式的解

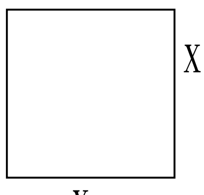
X=________ 或 X=________

6．原來正方形的邊長是多少？（記得 X 的值不能為負數，因為長度永遠為正數）

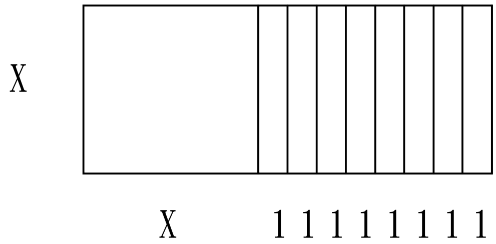
____

二、阿爾花拉子米的幾何模型

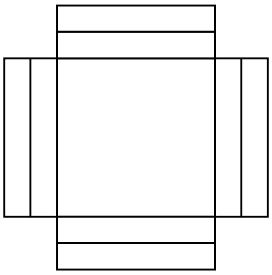
1．阿爾花拉子米解 $X^2 + 8X = 33$ 這個方程的幾何模型，是從一個不知面積多大的正方形開始，拿出一塊 X×X 正方形的代數板代表它。（假如沒有代數板，可以從紙上剪下一個正方形。）



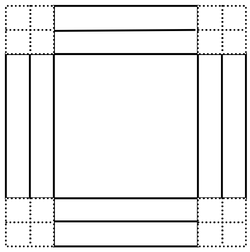
2・ 把 8 塊 1×X 的矩形代數板拼在正方形的右側，代表原來的正方形往右邊延伸 8 個單位，如右圖示。（假如沒有代數板，可以從紙上剪下這八個矩形。）



3・ 把這 8 個 1×X 的矩形代數板重排，如右圖示。



4・ 為了製造一個如右圖示的大正方形，必須補上四個角落的小正方形。用 1×1 小正方形代數板將它們補上去。（假如沒有代數板，可以從紙上剪下小正方形。）



每個角落補上幾個 1×1 的小正方形？面積是多少？

____

四個角落共補上幾個 1×1 的小正方形？面積總和是多少？

____

5・ 大正方形的面積就等於 33 加上補在四個角落的小正方形面積，請問大正方形的面積是多少？

____

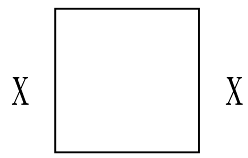
6・ 把前一小題算出的大正方形面積取平方根，就是大正方形的邊長，請問大正方形的邊長是多少？

____

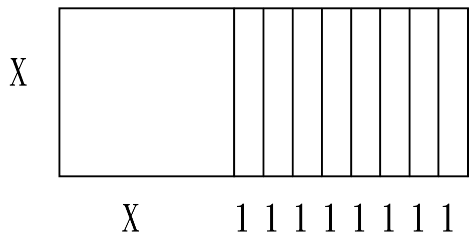
7． 大正方形的邊長減去角落上小正方形（虛線）的邊長，就是原正方形的邊長。

三、另一種幾何方法

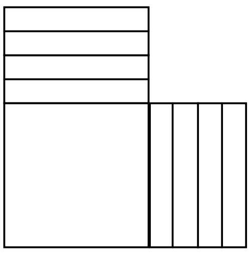
1． 解 $X^2 + 8X = 33$ 這個方程的另一種幾何模型，和阿爾花拉子米的幾何模型一樣，也是從一個不知面積多大的正方形開始，拿出一塊 X×X 正方形的代數板代表它。（假如沒有代數板，可以從紙上剪下一個正方形。）



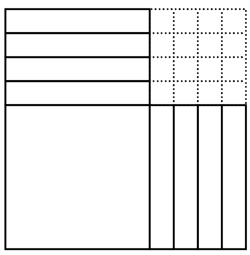
2. 把 8 塊 1×X 的矩形代數板拼在正方形的右側，代表原來的正方形往右邊延伸 8 個單位，如右圖示。（假如沒有代數板，可以從紙上剪下這八個矩形。）



3．把這 8 個 1×X 的矩形代數板重排，如下圖示。



4．為了製造一個如右圖示的大正方形，必須在右上角補上小正方形。用 1×1 小正方形代數板將它們補上去。（假如沒有代數板



，可以從紙上剪下小正方形。）

右上角共補上幾個 1×1 的小正方形？它們的面積總和是多少？

____

5‧大正方形的面積就等於 33 加上補在右上角的小正方形面積，請問大正方形的面積是多少？

____

6‧把前一小題算出的大正方形面積取平方根，就是大正方形的邊長，請問大正方形的邊長是多少？

____

7. 大正方形的邊長減去上面 4 個矩形的寬(或大正方形的邊長減去右邊 4 個矩形的寬)，就是原正方形的邊長。

____

【實務演練】

1. 在下列空格裡填入適當的數，使之成為完全平方式。

（1）x^2+6x+ _____ $=(x+$ ___ $)^2$

（2）x^2-9x+ _____ $=(x-$ ___ $)^2$

（3）$x^2+\frac{4}{3}x+$ _____ $=(x+$ ___ $)^2$

（4）$x^2-\frac{9}{5}x+$ _____ $=(x-$ ___ $)^2$

2. 找出適當的數填入□中，使下列各式變成完全平方式。

(1) $x^2-7x+\square$，則□＝____________。

(2) $x^2+\frac{3}{2}x+\square$，則□＝____________。

(3) $x^2+\frac{2}{5}x+\square$，則□＝____________。

3.利用配方法解下列一元二次方程式。

(1) $x^2-2x-99=0$

(2) $x^2+6x+4=0$

(3) $2x^2-3x-4=0$

4.(1) 利用配方法將 $3x^2-2x-2=0$ 化為 $(x+m)^2=n$ 的形式，求 m、n 之值。

(2) 以配方法解 $x^2-ax+b=0$，可得 $x-\frac{3}{4}=\pm\frac{\sqrt{17}}{4}$，則 a=？b=？

5.(1) 若 $16x^2+ax+49$ 為完全平方式，則a=？

(2) 若 $4x^2-8x+b$ 為完全平方式，則b=？

※簡答

1.(1) 3^2 ，3 。 (2) $(\frac{9}{2})^2$，$\frac{9}{2}$ 。 (3) $(\frac{2}{3})^2$，$\frac{2}{3}$ 。

(4) $(\frac{9}{10})^2$，$\frac{9}{10}$

2.(1) $(\frac{7}{2})^2$ 。 (2) $(\frac{3}{4})^2$ 。 (3) $(\frac{1}{5})^2$

3.(1) x=11或−9。 (2) $x=-3\pm(\sqrt{5})$。 (3) $-\frac{3}{4}\pm\frac{\sqrt{41}}{4}$

4.(1) $m=-\frac{1}{3}$ ， $n=\frac{19}{9}$ (2) $a=-\frac{3}{2}$ $b=-\frac{1}{2}$

5. a= ± 56 ，b=4

【資料來源】彰化師大數學系梁崇惠教授

【提供者】李明蘭

【輔導團】彰化縣國教輔導團數學領域