

國民中學 補強課程模組教學資源手冊

國中數學

八年級

甄曉蘭 —— 總策劃

陳致澄 —— 主編

陳致澄、蘇恭弘、巫佳錚、盧昭雯、江世賓、張廷吉、莊侖達 —— 作者



教育部國民及學前教育署

K-12 Education Administration, Ministry of Education



國民中學
補強課程模組教學資源手冊
國中數學

八年級

甄曉蘭 —— 總策劃

陳致澄 —— 主編

陳致澄、蘇恭弘、巫佳錚、盧昭雯、江世賓、張廷吉、莊佶達 —— 作者



教育部國民及學前教育署

K-12 Education Administration, Ministry of Education

目次

| | | | |
|------------------|---|-----------|-----|
| 導論 | 以學習者為中心之國中八年級 數學學習扶助補強課程模組之規劃與設計 | 陳致澄 | 1 |
| 八年級 補救模組 1 | 二次方根 | 盧昭雯 / 江世賓 | 13 |
| 八年級 補救模組 2 | 畢氏定理 | 張廷吉 / 莊佶達 | 43 |
| 八年級 補救模組 3 | 利用十字交乘因式分解 | 蘇恭弘 / 巫佳錡 | 77 |
| 八年級 補救模組 4 | 平行四邊形 | 盧昭雯 / 江世賓 | 129 |
| 八年級 補救模組 5 | 函數 | 張廷吉 / 莊佶達 | 166 |
| 八年級 補救模組 6 | 數列、等差數列與等差級數 | 蘇恭弘 / 巫佳錡 | 192 |

以學習者為中心之國中八年級數學 學習扶助補強課程模組之規劃與設計

— 國立臺南大學應用數學系 陳致澄教授

《國中數學學習扶助補強課程模組》是國立臺灣師範大學教育學系甄曉蘭教授所主持「學習扶助補強暨適性課程模組研發應用與教師增能研習計畫」的成果之一，此模組歷經三年時間陸續規劃、撰寫與出版，八年級模組是繼七年級出版後完成的內容。撰寫過程中，編寫團隊不斷汲取相關理論，試圖讓模組設計更具理論支持；惟，設計的核心理念不致變化過大。故，本章介紹相關內容時，部分內容大致與七年級補強課程模組教學資源手冊中的導論相同。

壹、緣起：提供教師數學領域學習扶助補強課程模組的重要性

一、體現「公平正義」確保「學力品質」的學習扶助計畫

二十世紀中葉後，追求教育機會均等 (equality of educational opportunity) 與教育品質 (enhancing of educational quality) 提升，逐漸成為世界各國致力實現的教育理想 (甄曉蘭，2007)，而 Rawls (1972) 於《正義論》中也指出，教育應該在「公平正義」的原則下，實現教育機會與結果均等的目標。鑑於國內出現部分地區因位置偏遠、地理環境特殊，導致對外交通不便、文化刺激較少、數位落差較大以及學校教師流動率高…等城鄉教育發展失衡的現象，教育部遂於 2006 年針對家庭弱勢與低學習成就的國中小學生，推動《攜手計畫—課後扶助方案》；針對原住民學生人數比率偏高以及離島…等地域性弱勢的國中小學生，推動《教育優先區計畫—學習輔導》。透過數年實施與成效檢討，於 2013 年整合前述兩項計畫，針對弱勢家庭之低學習成就國中小學生，規劃並推動《國民小學及國民中學補救教學實施方案》，建置國民小學及國民中學學習扶助「科技化評量系統」與「資源平臺」；於 2019 年，更為了彰顯計畫的正向積極意義，遂將「補救教學」更名為「學習扶助」，每年五月以「篩選測驗」，依據各校提報率，大規模

篩選出全國中小學國語、數學、英語文科學習低成就學生：再針對測驗結果未通過的低學習成就學生，進行學習扶助開班、授課、輔導，提供額外的學習機會與資源，設計並實踐符合學生個別需求的學習內容與方法（吳清山，2020）；最後，運用成長測驗追蹤輔導成效，學習扶助政策實踐之體系終於正式形成（林志汀，2022）。其目的即期望能為這群低學習成就的學生，提供多元、適性的學習機會，以彌平學習落差，體現「確保學生學力品質」與「成就每一個孩子」之教育目標（蘇美麗、李永烈，2016）。

二、落實「學生適性發展」符合「彈性學習課程」精神的補強課程模組

基於「教育可提升人力素質，有利國家社會發展」之前提，延長國民接受基本教育的年限，已逐漸成為世界各先進國家（例如：荷蘭、比利時、德國、英國、以色列、澳洲、加拿大、法國、冰島、紐西蘭…等）普遍推行的國民教育政策（楊思偉，2006）。我國也在2010年《中華民國教育報告書》中，將「推動十二年國民基本教育」（簡稱十二年國教）列為重點工作項目之一，於2014年開啟十二年國教的新時代，並於2019年同時於高中、國中與國小等學習階段，分別從一年級、七年級與十年級起，逐年實施十二年國教新課綱（高翠霞、高慧芬、楊嵐智，2018）。而《十二年國民基本教育課程綱要—總綱》於「課程架構」一段中，將國小與國中階段的課程分為「部定課程—領域學習課程」與「校定課程—彈性學習課程」等兩類。其中，又提到「校定課程—彈性學習課程」將課程設計的主權，交由學校進行規劃與安排，期能藉此形塑出符合每一所學校教育願景以及強化學生適性發展的相關課程。而課程的類型可包括：1. 跨領域統整性主題（專題、議題）之探究課程；2. 社團活動與技藝課程；3. 特殊需求之領域課程；4. 其他類課程，包括本土語文、新住民語文、服務學習、戶外教育、班際或校際交流、自治活動、班級輔導、學生自主學習以及領域補救教學等（教育部，2014）。但是，黃琇屏（2020）卻指出，多數教師仍未具備規劃與設計數學學習扶助教學課程之規劃與設計的專業能力，以協助學生學習。故，本計畫為中學需要接受學習扶助教學（補救教學）的學生，設計符合十二年國教「校定課程—彈性學習課程」建議的「數學領域學習扶助補強課程模組」，不僅迎合十二年國教課程的精神，也為這群「有特殊需求」的學生，開闢一條有別於「教科書」的學習徑路。

關於「模組」，Warwick (1988) 指出，「模組化課程」是由一些短程、獨立而完整的學習任務或活動結合而成的一套「學習素材」，能讓學生的學習達到較寬廣、較長程的學習目標。McNeil (1996) 提到，「模組化課程」可依據學習者與教學者的需要，隨意抽換、組合模組中的學習任務或活動，相較於傳統學科教科書來說，有更大的彈性與調整的可能。此外，賴慶三、楊繼正（2001）也提出，所謂「單元模組」、「模組化的教學活動設計」，是指一種適性化的教學活動，其目標明確、方法多樣、教學資源充足且豐富。「單元模組」相較於教科書來說，更以實用、生活化與趣味化的內容作為主軸，

是一種具有建構知識、技能與情意等功能的完整學習教材。本計畫所規劃、設計的補強課程模組，雖以「主題單元」作為一組適合低學習成就學生再次學習的資源，但是，教師可視實際情形下學生的能力與需求，以更彈性的方式調整選擇或刪除部分內容，再進行後續教學，符合賴慶三、楊繼正（2001）以及 McNeil (1996) 所述關於「模組」的意涵與特性。

貳、數學領域補強課程模組之整體圖像、架構與規劃

一、補強課程模組之整體圖像

張新仁（2001）提到，補救教學是一種診療式的教學 (clinical teaching，也稱臨床教學)，在選擇好接受補救教學的對象後，首先瞭解學生的學習困難；接續，精心設計課程內容與慎選教學型態及策略，再進行教學。如此，方能契合學生的個別需求。本次設計的國中八年級「數學領域補強課程模組」，就是依據近年來八年級學生在「學習扶助科技化評量篩選測驗」或「學習能力檢測」等兩份試卷的施測結果進行統計、分析，挑選出錯誤率較高的試題；再依此回推這些較難的試題所屬之學習內容與基本學習內容為何？進而決定本次八年級補強課程模組的「主題單元」。下圖 1 呈現的是本次八年級設計的各「單元模組」，其涉及的學習內容於八年級課程綱要整體學習內容的關係圖，作為本次八年級補強課程模組之整體圖像。

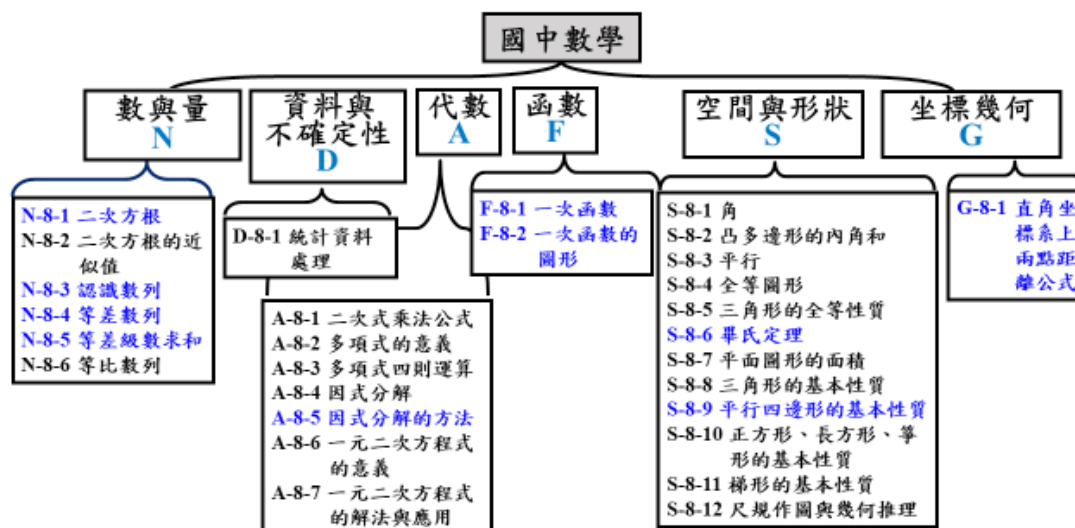


圖 1：八年級補強課程模組涉及的學習內容分析

其次，再以下表 1 呈現八年級數學領域補強課程模組各單元主題涉及的學習內容與基本學習內容的條目內容如下：

表 1：近年來全國七年級學生錯誤率較高之分年細目

| 主題單元 | 學習內容 | | 基本學習內容 | |
|--------------|--------------------------|---|----------|---|
| 數列、等差數列與等差級數 | N-8-3 | 認識數列：生活中常見的數列及其規律性（包括圖形的規律性） | NC-8-3-1 | 數列的意義 |
| | N-8-4 | 等差數列：等差數列；給定首項、公差計算等數列的一般項 | NC-8-4-1 | 等差數列的意義 |
| | | | NC-8-4-2 | 等差數列第 n 項公式 |
| N-8-5 | 等差級數求和：等差級數求和公式；生活中相關的問題 | NC-8-5-1 | 等差級數求和 | |
| 根式運算 | N-8-1 | 二次方根：二次方根的意義；根式的化簡及四則運算 | NC-8-1-1 | 二次方根的意義及化簡 |
| | | | NC-8-1-2 | 根式的四則運算 |
| 利用十字交乘法因式分解 | A-8-5 | 因式分解的方法：提公因式法；利用乘法公式與十字交乘因式分解 | AC-8-5-3 | 十字交乘法作整係數二次多項式的因式分解 |
| 平行四邊形 | S-8-9 | 平行四邊形的基本性質：關於平行四邊形的內角、邊、對角線的幾何性質 | SC-8-9-1 | 平行四邊形的內角、邊、對角線的幾何性質 |
| 函數 | F-8-1 | 一次函數：透過對應關係認識函數（不要出現 $f(x)$ 的抽象型式）、常數函數（ $y = c$ ）、一次函數（ $y = ax + b$ ） | FC-8-1-1 | 函數的意義 |
| | | | FC-8-1-2 | 常數函數與一次函數 |
| | F-8-2 | 一元一次方程式的意義 | FC-8-2-1 | 常數函數在直角坐標平面上的圖形 |
| | | | FC-8-2-2 | 一次函數在直角坐標平面上的圖形 |
| 畢氏定理 | S-8-6 | 畢氏定理：畢氏定理（勾股弦定理、商高定理）的意義及其數學史；畢氏定理在生活上的應用；三邊長滿足畢氏定理的三角形必定是直角三角形 | SC-8-6-1 | 畢氏定理 |
| | G-8-1 | 直角坐標系上兩點距離公式：直角坐標系上兩點 $A(a,b)$ 和 $B(c,d)$ 的距離為 $\overline{AB} = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$ ；生活上相關問題。 | DC-7-2-1 | 直角坐標上兩點距離的公式：若 $A(a,b)$ 和 $B(c,d)$ 則 $\overline{AB} = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$ |

本次規劃與設計八年級數學領域學習扶助補強課程模組的核心單元包括「數列、等差數列與等差級數」（對應 N-8-3, N-8-4, N-8-5）、「二次方根」（對應 N-8-1）、「利用十字交乘法因式分解」（對應 A-8-5）、「平行四邊形」（對應 S-8-9）、「函數」（對應 F-8-1, F-8-2）以及「畢氏定理」（對應 S-8-6, G-8-1）等六個。

二、補強課程模組之架構

關於「模組化課程」，Finch 與 Crunkilton (1999) 界定「模組化課程」的六項基本要素：一、簡介 (introduction)：介紹該模組的學習內容與特點，讓模組使用者知曉學習的步驟，瞭解該模組所需之先備知識以及培養的知識與技能；二、課程目標 (objectives)：此「課程目標」包括教學目標與學習目標。其中，學習目標主要在描述期望學習者完成該課程學習後，能展現的能力與表現；三、前測 (pre-assessment)：此工具可診斷、評估學習者在進行該課程學習前的學習準備度，作為完成學習後能力差異比較的依據；四、教學活動 (teaching activities)：介紹該課程設計的活動與情境（例如：動手做、提問、多元表徵…等），如何引發學習者的期待反應以及參與學習，描述學習的歷程（包括明確的評量方法與回饋方式）；五、資源與教材 (resources & materials)：主要說明課程進行過程中，所使用的教學材料之內容與實施時機、參考使用的線上平臺、…等資訊；六、後測 (post-assessment)：此工具是在學生完成「模組化課程」的學習後所進行的總結式評量，目的在評估學生的學習成效。

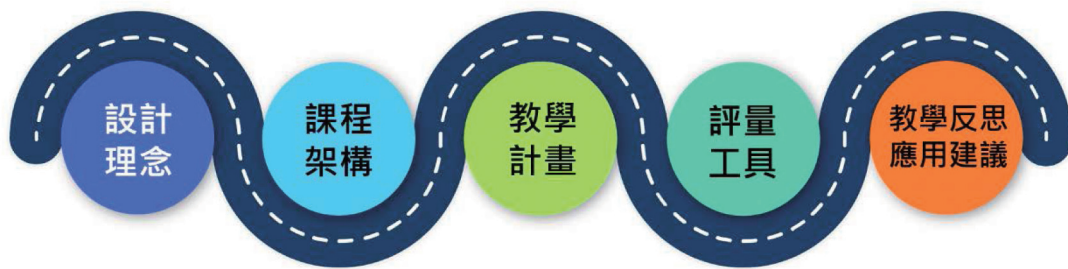


圖 2：數學領域補強課程模組的設計架構

本數學領域補強課程模組是參考 Finch 與 Crunkilton (1999) 的觀點，規劃設計架構如上圖 2 所示：其中，「設計理念」主要說明該模組選擇此「核心概念」的重要性與緣由，也說明該模組設計的「表徵」特色；「課程架構」則呈現模組的整體核心概念之關聯性；「教學計畫」則包括模組名稱、涉及的學習重點（包括學習內容與學習表現）與基本學習內容、學習目標、學習材料與教學資源、教學活動流程與評量策略；「評量工具」則列舉本模組前測、後測的架構以及教學過程中提問的問題；「教學反思與應用建議」則分述本模組在個案學校進行實驗教學的反思，再針對教學的情形進行後續之教學建議。期能讓預備使用本補強課程模組的教師，在進入教學現場前，預先構築課室中可能的圖像。

三、補強課程模組規劃的核心單元

本次提供的八年級數學領域學習扶助補強課程模組，規劃、設計團隊考量其適用的普及性後，參酌 2018 年與 2019 年學習扶助篩選測驗結果中，受測學生錯誤率最高的前五條學習內容 / 分年細目；以及 2020 年國中數學科學習能力檢測中，受測學生錯誤率最高的前五條學習內容 / 分年細目，彙整相關資訊如下表 2 所示：

表 2：近年來全國學生錯誤率較高之分年細目

| 2018 年科技化評量 | | | 2019 年科技化評量 | | | 2020 年學習能力檢測 | | |
|-------------|--|-----|-------------|--|-----|--------------|--|-----|
| 題號 | 分年細目 | 通過率 | 題號 | 分年細目 | 通過率 | 題號 | 分年細目 | 通過率 |
| 19 | A-8-7/8-a-11 一元二次方程式的解法與應用：利用因式分解、配方法、公式解一元二次方程式 | 16% | 11 | A-8-5/8-a-07 因式分解的方法：提公因式法；利用乘法公式與十字交乘因式分解 | 26% | 24 | N81/8-n-02 二次方根：二次方根的意義；根式的化簡及四則運算 | 26% |
| 24 | A-8-5/8-a-08 因式分解的方法：提公因式法；利用乘法公式與十字交乘因式分解 | 18% | 25 | A-8-7/8-a-11 一元二次方程式的解：利用因式分解、配方法、公式解一元二次方程式 | 30% | 15 | S-9-5/ 8-s-21 圓弧長與扇形面積：以 π 表示圓周率；弦、圓弧、弓形的意義；圓弧長公式；扇形面積公式 | 30% |
| 18 | A81/8-a-01 二次式的乘法公式： $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ | 20% | 24 | N-8-4/8-n-05 等差數列：等差數列；給定首項、公差計算等數列的一般項 | 33% | 25 | N-8-3/8-n-04 認識數列：生活中常見的數列及其規律性（包括圖形的規律性） | 33% |
| 20 | N81/8-a-02 二次方根：二次方根的意義；根式的化簡及四則運算 | 21% | 23 | S-8-6/8-s-08 畢氏定理：畢氏定理（勾股弦定理、商高定理）的意義及其數學史；畢氏定理在生活上的應用；三邊長滿足畢氏定理的三角形必定是直角三角形 | 34% | 7 | S-8-6/8-s-08 畢氏定理：畢氏定理（勾股弦定理、商高定理）的意義及其數學史；畢氏定理在生活上的應用；三邊長滿足畢氏定理的三角形必定是直角三角形 | 35% |

| 2018 年科技化評量 | | | 2019 年科技化評量 | | | 2020 年學習能力檢測 | | |
|-------------|--|-----|-------------|--|-----|--------------|---|-----|
| 題號 | 分年細目 | 通過率 | 題號 | 分年細目 | 通過率 | 題號 | 分年細目 | 通過率 |
| 8 | S-9-5/ 8-s-21 圓弧長與扇形面積：以 π 表示圓周率；弦、圓弧、弓形的意義；圓弧長公式；扇形面積公式 | 26% | 3 | A-8-3/8-a-01 多項式的四則運算：直式、橫式的多項式加法與減法；直式的多項式乘法（乘積最高至三次）；被除式為二次之多項式的除法運算 | 42% | 3 | N-8-4/8-n-05 等差數列：等差數列；給定首項、公差計算等數列的一般項 | 35% |

由上表 2 觀之，「一元二次方程式的公式解」（通過率 16%, 30%）、「以十字交乘解因式分解」（通過率 18%, 26%）、「二次方根根式化簡」（通過率 21%, 26%）、「等差數列」（通過率 33%, 35%）、「畢氏定理」（通過率 34%, 35%）為這三年來的測驗中，學生通過率較低且連續出現的概念。再考量幾何單元中「平行四邊形」是延續國小階段所學繼續延伸的單元概念，因此，本計畫決定八年級數學領域學習扶助補強課程模組的核心單元包括「數列、等差數列與等差級數」、「二次方根」、「利用十字交乘法因式分解」、「平行四邊形」、「函數」以及「畢氏定理」等六個。

參、國中八年級數學領域學習扶助補強課程模組設計原則

本計畫規劃、設計的八年級數學科學習扶助補強課程模組，主要目的在於提昇低成就學生的學習成就感以及強化其學習興趣，讓該群學生能夠重拾對於數學學習的動機與信心，透過不同於教科書的學習徑路；再次學習八年級重要的核心概念，以奠定其基礎數學學力為目標。鑑此，提出學習扶助補強課程模組設計的原則如下：

一、落實多元表徵理論於活動與任務之設計

蔣治邦（1994）指出，「表徵」是用某一種型式，將事物或想法重新表現出來，以達成溝通的目的；當學習者能確實掌握其表現的意義後，「表徵」可進一步地成為運思的材料，來簡化解題的過程。Hiebert 與 Carpenter（1992）認為，「表徵」存在的形式可以區分為「外在表徵」（external representation）與「內在表徵」（internal representation）兩類，而這兩類「表徵」分別在人類的溝通活動與心智思考中，扮演重要的角色。個體內在表徵的運作，會影響外在表徵的呈現；而個體也可藉由呈現外在表徵的過程，讓內在表徵得以精煉（蔡興國、陳錦章、張惠博，2010）。而美國數學教師協會（NCTM,

2000) 在《學校數學的原則與標準》(Principles and Standards for School Mathematics) 中也提到，使用「表徵」來詮釋數學概念，可促進學生理解學習內容，有助於與別人溝通想法、連結相關概念。再者，Ainsworth (1999) 提到，若能以多重表徵的方式來表示一個概念，對於學生的學習將有互補 (complement) 的功能。因為，不同表徵方式能互補資訊，避免一種表徵無法表示所有訊息的缺憾 (左臺益、蔡志仁，2001)。對此，相關研究 (例如：Behr, Lesh, Post & Silver, 1983; Lesh, 1981; Lesh, Landau & Hamilton, 1983; Lesh, Post & Behr, 1987) 指出，數學學習與問題解決過程中有具體事物的經驗表徵 (real scripts)、具體操作表徵 (manipulative models)、圖形影像表徵 (static pictures)、口說語言表徵 (spoken language) 與書寫符號表徵 (written symbols) 等五種表徵類型 (參見下圖 3)。

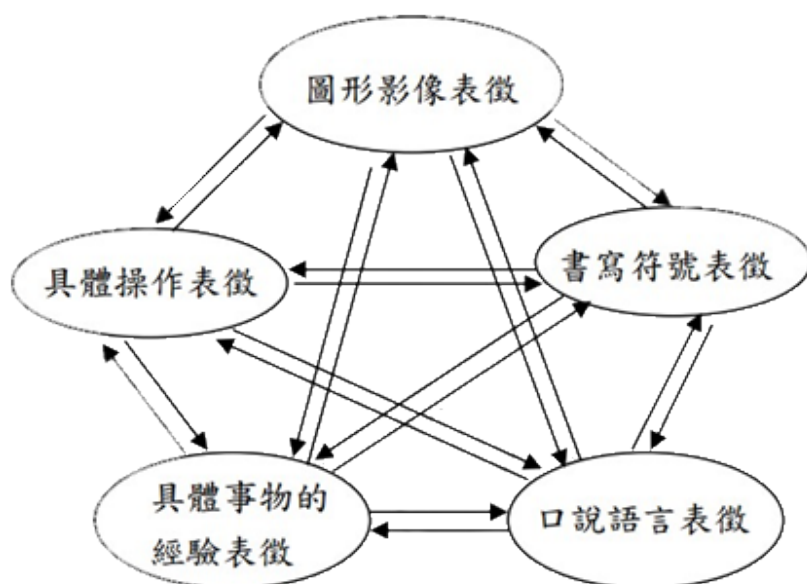
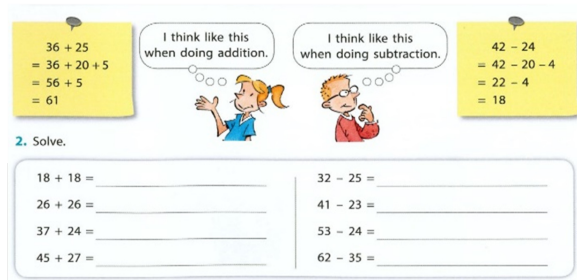
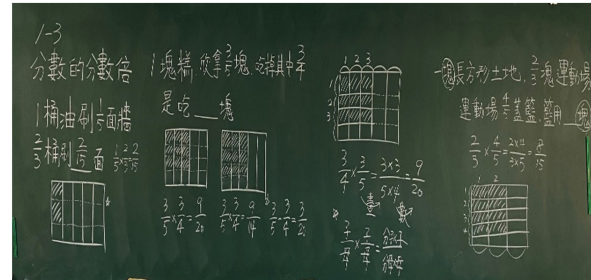


圖 3：數學表徵類型 (Lesh, Post & Behr, 1987)

由圖 3 觀之，教科書以及一般課室教學經常被使用的概念表徵形式，有較多比例落在「書寫符號」、「圖形影像」與「口說語言」的表徵形式 (參見下圖 4)。而本計畫設計的八年級數學領域學習扶助補強課程模組，則試圖從「具體操作」與「具體事物的經驗」等表徵形式著手進行規劃，為低成就學生開闢另一條可再次重新理解相關概念的路徑與管道，期能提升其學習動機與學習成效。



芬蘭 kymppi 版 5A 第 4 頁-書寫符號+口說語言表徵形式
資料來源：Saarelainen (Ed.) (2007)。



課室教學-書寫符號+口說語言+圖形影像表徵形式
資料來源：臺中市國安國小王騰銘教師提供

圖 4：教科書與一般課室教學經常使用的概念表徵形式

二、設計以學習者為中心的多元化、差異化的學習活動

環顧當前臺灣的教學現況，由於入學考試制度的影響，導致許多教師經常為了趕進度、幫學生準備考試，形成「考試領導教學」(teaching to the test) 的氛圍，進而形塑出「以教師為中心」(teacher-centered) 的講述式教學模式 (吳俊憲，2012)。在此教學模式下，教師講授、詮釋數學概念的方式，多以較為抽象的「口說語言」與「書寫符號」等形式為主，這些形式往往超越低成就學生可理解的範疇，導致低成就學生難以「參與學習」甚至成為「數學課室中的客人」。鑑此，本國中數學科學習扶助補強課程模組設計的另一原則，即期望能跳脫「以教師為中心」的傳統課程與教學設計，相反的，「以學習者為中心」(learner-centered)，考量低成就學生的學習風格 (learning style)，重視每位學生的個別差異 (individual differences)。

Dunn 與 Dunn (1992) 指出，「學習風格」是指一個人的學習習慣、方法及態度；並且，「學習風格」會影響學習者對其所處環境的知覺、互動與應對的能力。黃國豪、張仕政、陳冠宏、尤弘志 (2005) 依據「所羅門學習風格測驗」，將學習者的「學習風格」分為四個組對，每一個組對各有兩種類型，因此，共有「活躍型 v.s. 沉思型」、「感悟型 v.s. 直覺型」、「視覺型 v.s. 言語型」、「序列型 v.s. 綜合型」等八種類型。其中，「活躍型」是指學習者須與其他人進行討論或親身體驗，才能產生學習成效；「沉思型」則指學習者獨自思考就能解決問題；「感悟型」是指學習者較能理解日常生活中能接觸的相關事物，較無法想像較為抽象的事物；「直覺型」是指學習者對於太過詳細或重複性的學習會感到不耐煩，須透過親自嘗試，才會產生學習成效；「視覺型」是指學習者需透過圖解的學習過程，才能產生學習成效；「言語型」則是指學習者透過文字敘述的學習過程，即能產生學習成效；而「序列型」是指學習者在學習過程中，必須從最基本的著手，按照順序進行學習；「綜合型」則是指學習者只要對各方面都具備初步認識後，就能自行融會貫通。綜覽上述八種類型的學習風格，低學習成就學生多屬「活躍型」、「感悟型」、「視覺型」與「序列型」等四類學習風格，因此，面對上述不同學習風格偏好的學生，本計畫所設計的七年級數學科學習扶助補強課程模組，盡量於每一個課程模組中設計多元、不

同形式的學習活動，讓學生能在同一節課中使用多重感官與實例進行學習。如此一來，不僅能讓不同學習風格的學生在其偏好的學習管道和方式進行有效學習，也能協助學生在接觸不同學習風格的活動中，累積其經驗，拓展學習風格 (style-stretching)，增加其學習風格的彈性 (Gregersen & MacIntyre, 2014)。

根據上述有關低學習成就學習風格之探討，參與本計畫設計八年級數學科學習扶助補強課程模組的三位教師，會以日常生活中經常接觸的相關事物進行設計（例如：「數列、等差數列與等差級數」單元中的威力彩和月曆；「函數」單元中觀察與反思日常生活裡的對應關係；「畢氏定理」單元中觀察地磚裡的商高定理）；安排親身體驗以及與其他人討論的情境（例如：「數列、等差數列與等差級數」單元中的數字牌卡遊戲培養數感；「畢氏定理」單元中的勾股戰棋遊戲）；也鋪陳操作、拼圖的任務（例如：「平行四邊形」單元中的色紙裁剪；「二次方根」單元中的五片拼圖遊戲；「畢氏定理」單元中的扣條拼接），期能讓學生在教學活動或任務的執行中，達到應用多重感官進行學習的目標。

肆、結語

本書所刊載的六套八年級數學科學習扶助補強課程模組，因 2021 年與 2022 年連續兩年於梅雨季過後隨即出現嚴重特殊傳染性肺炎 (COVID-19) 之疫情，導致部分模組的內容未選定個案班級進行試行、修正與調整。但是，大多數設計的內容，都至少實踐過一次於設計者所開設的學習扶助班級中，堪稱具備理論支持與實務考驗與修正。然而，由於每一個教學現場中班級裡的教學者與學習者都不相同，學生擁有的學習風格與特質也有差異，因此，本計畫在此提醒欲使用本學習扶助補強課程模組的教師，應考量自己任課班級學生的特性與實際需求，適時、滾動調整每一套學習扶助補強課程模組的相關內容；或參考本篇各段落所提列關於學習扶助補強課程模組設計的原則進行修改；以及加入您覺得合適的教學策略，使得本書提供的學習扶助補強課程模組，能更適切地實施於您自己的教學情境，轉化成為更符合您授課學生所需的學習扶助補強課程模組。此外，本書所規劃、設計的學習扶助補強課程模組，雖是以八年級未通過科技化評量之篩選測驗的學生為主要教學對象，但適用的對象可以不限於此範圍，對於那些通過篩選測驗，但仍猶待加強的學生，教師仍然可以依據學生出現的弱勢、迷思概念，挑選學習扶助補強課程模組裡對應的活動內容，加以調整而使用之。當然，教師亦可將此作為一般課室教學的補充式教學媒材。故，本書提供的六套八年級數學領域學習扶助補強課程模組，其使用時機與地點也不限於抽離式的學習扶助班級，只要課程目標符合您學生的需要，這些課程模組皆可運用、補充於您課中的補救教學，甚至可以作為一般數學課室中教師教學的實施與使用。

參考文獻

- 左臺益、蔡志仁（2001）。高中生建構橢圓多重表徵之認知特性。《科學教育學刊》，**9**(3)，281-297。
- 吳清山（2020）。教育名詞：學習扶助。《教育研究月刊》，**310**，135-136。
- 吳俊憲（2012）。推動高中職學校優質化—「學習領導」之觀點分析。《臺灣教育評論月刊》，**1**(10)，39-42。
- 林志汀（2022）。與疫情共存時代學習扶助線上訪視評鑑新渠徑與未來展望—以彰化縣為例。《臺灣教育評論月刊》，**11**(9)，151-159。
- 高翠霞、高慧芬、楊嵐智（2018）。十二年國教議題課程的挑戰—以環境教育為例。《臺灣教育評論月刊》，**7**(10)，68-75。
- 教育部（2014）。十二年國民基本教育課程綱要—總綱。臺北市：作者。
- 黃琇屏（2020）。國中小校訂課程規劃與實施之思考。《臺灣教育評論月刊》，**9**(8)，1-4。
- 黃國豪、張仕政、陳冠宏、尤弘志（2005）。結合所羅門學習風格之適性化學習與評量系統。載於國立臺灣師範大學主辦，2005 臺灣數位學習發展研討會。臺北市：國立臺灣師範大學。【2005.05.06-2005.05.07】
- 張新仁（2001）。實施補救教學之課程與教學設計。《教育學刊》，**17**，85-106。
- 楊思偉（2006）。推動十二年國民教育政策之研究。《教育研究集刊》，**52**(2)，1-31。
- 甄曉蘭（2007）。偏遠國中教育機會不均等問題與相關教育政策初探。《教育研究集刊》，**53**(3)，1-35。
- 蔡興國、陳錦章、張惠博（2010）。高中學生解題歷程之力圖表徵與列式關係之研究。《科學教育學刊》，**18**(2)，155-175。
- 賴慶三、楊繼正（2001）。國小自然資源教學模組的發展研究。《國立臺北師範學院學報》，**14**，673-704。
- 蘇美麗、李永烈（2016）。國中小補救教學實施方案之教學現場省思。《臺灣教育評論月刊》，**5**(11)，28-31。
- 蔣治邦（1994）。由表徵觀點探討新教材數與計算活動的設計。載於臺灣省國民學校教師研習會（主編），《國民小學數學科新課程概說 - 低年級》，60-76。
- Ainsworth, S. E. (1999). The functions of multiple representations. *Computer & Education*, **33**(2/3), 131-152.
- Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R., & Silver, E. A. (1983). Rational-Number Concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes*. New York: Academic Press.
- Dunn, R. & Dunn, K. (1992). *Teaching elementary students through their individual learning styles*. Boston: Allyn & Bacon.
- Finch, C. R., & Crunkilton, J. R. (1999). *Curriculum development in vocational and technical education* (5th ed.). Boston: Allyn & Bancon.
- Gregersen, T., & MacIntyre, P. (2014). *Capitalizing on language learners' individuality*. Bristol, UK: Multilingual Matters.
- Lesh, R. (1981). Applied mathematical problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, **12**, 235-264.

- Lesh, R. A., Landau, M., & Hamilton, E. (1983). Conceptual models and applied mathematical problem solving research. In R. A. Lesh, & M. Landau (Eds.), ***Acquisition of mathematics concepts and processes*** (pp. 263-341). New York, NY: Academic Press Inc.
- Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier, (Ed.), ***Problems of representations in the teaching and learning of mathematics*** (pp. 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), ***Handbook of research on mathematics teaching and learning*** (pp.65-97). New York: Macmillan.
- McNeil, J. D. (1996). ***Curriculum: A comprehensive introduction*** (5th ed.). New York: Harper Collins.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). ***Principles and standards for School Mathematics***. Reston, VA : NCTM.
- Rawls, J. (1972). ***The theory of justice***. Cambridge, MA: Harvard University.
- Saarelainen, P. (Ed.). (2007). ***Laskutaito 5A in English***. Helsinki, Finland: WSOY.
- Warwick, D. (1988). ***The Modular Curriculum***. Oxford: Blackwell.

國中數學領域 補強課程模組 1

八年級 二次方根

- 雲林縣立虎尾國民中學 盧昭雯 退休教師
- 雲林縣立虎尾國民中學 江世賓 主任

設計 理念

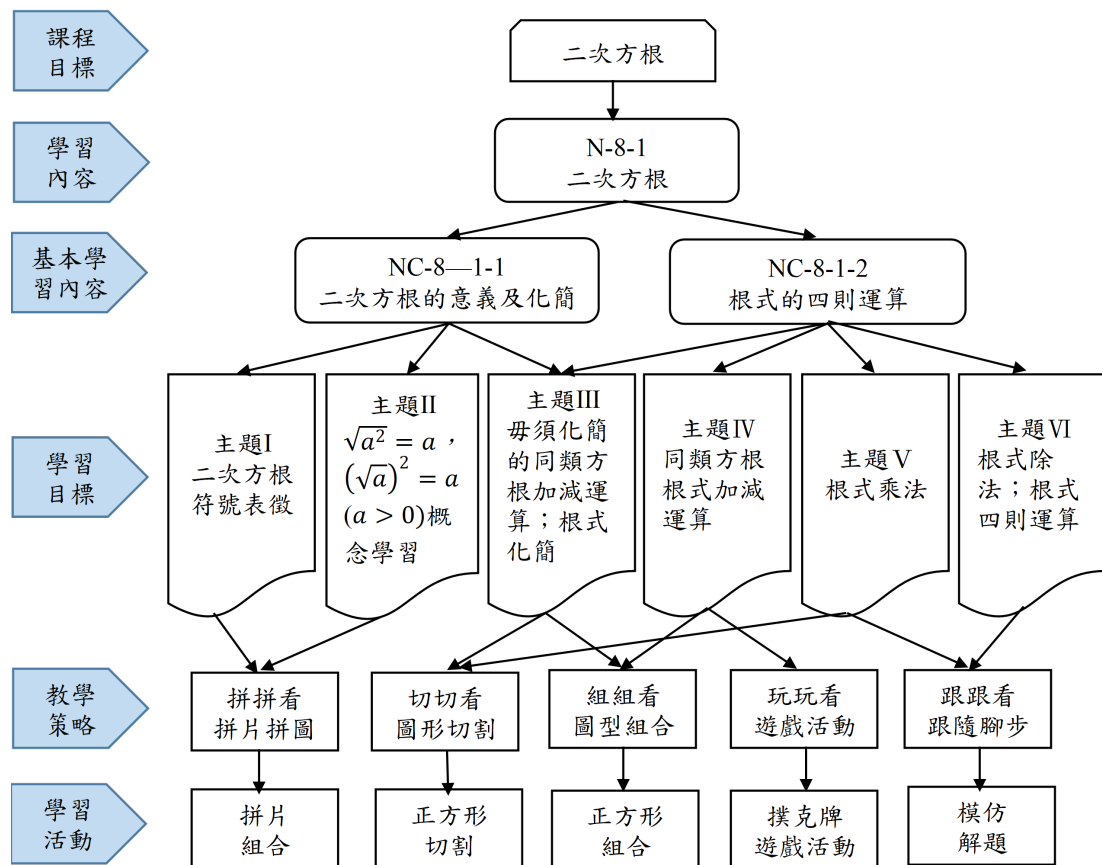


「法國數學家 Charles Hermite 曾說：「在一團亂糟糟得事物中，一條小的規律的覺察，宛如黑暗中摸索的一線光明，常引導我們到達新的數學天地」（取自數學樂園推薦序，何碧燕）。本補強課程模組的主題「二次方根」開始進入無理數的世界，而二次方根此主題包含了符號表徵與計算，在學校課堂教學常著重在二次方根運算，對於二次方根符號表徵，僅以簡單幾句話來介紹。然而二次方根符號表徵看似簡單，對國中生來說卻是個沒接觸過的數學概念，沒有國小舊經驗的襯托，加上上課沒能專心聽課，對要點沒聽到或聽不全，因此學生對二次方根的學習感覺難理解且棘手，學習宛如置身黑暗中。當學生無法接受二次方根的符號時，就排斥所有與「二次方根」相關的學習，近程的影響是「根式化簡」、「根式運算」、「畢氏定理」、…的學習，遠程就影響到高中的「三角函數」、「指數」、「對數」…的學習。



教科書針對「二次方根」的針對「二次方根」的的教學引導主要有兩大學習方針，第一種學習方針：直接以「平方根定義：若 $b^2=a$ ， $a \geq 0$ ，則稱 b 為 a 的平方根，以 $b = \pm\sqrt{a}$ 表示」著手說明根式符號 -- 學生常因記誦平方根定義而無法具體理解「根式符號」的意義，而將「 $\sqrt{\quad}$ 」符號表徵與平方根混淆，例如：將 $\sqrt{4}$ 誤解為 $\sqrt{4} = \pm 2$ ，所以面對根式運算時，更常因不理解根式概念而無法正確進行根式運算，產生學習挫敗感後就放棄學習；第二種學習方針：以「正方形面積與邊長關係：面積為 a 的正方形，其邊長記為 \sqrt{a} 」說明根式符號 -- 此教學法雖較具體，但部分學生仍停留在依賴國小的具體操作期，雖能理解面積為 4 的正方形，其邊長為 2，卻因沒有實體操作面積非完全平方數的正方形，無法理解面積為 2 的正方形，其邊長記為 $\sqrt{2}$ ，反而認為沒有面積為 2 這樣的正方形，或將「 $\sqrt{\quad}$ 」與平方根混淆。

在本補強課程模組的教學地圖中，為避免學生將「 $\sqrt{\quad}$ 」符號表徵與平方根混淆，所以本模組著重在熟悉「 $\sqrt{\quad}$ 」符號表徵後，即說明「根式化簡」再「根式運算」，學生能正確使用二次方根符號後再視教學時間來說明平方根。教學流程為減輕學生對無理數的學習畏懼，運用較具體第二種學習方針：以「正方形面積與邊長關係」佐以「拼圖活動」的操作，利用「四塊拼片」及「五塊拼片」拼圖活動過程中的認知衝突與矛盾，讓學生在做中學中具體感受二次方根表徵的使用，消除學生對「 $\sqrt{\quad}$ 」表徵的陌生感，並破除學生常有的「 $\sqrt{6} = 3$ 」的迷思概念。建立二次方根表徵概念後，再利用「正方形拼圖」活動及撲克牌遊戲活動強化「同類方根」概念，並運用「拼圖活動」的操作過程中產生的概念學習「根式化簡」及「根式運算」，破除學生計算常犯「 $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$ 」的迷思概念。期許透過操作引導，減少敖口的定義背誦，讓學生在有感的學習下，理解二次方根符號表徵，從黑暗中感受一線光明，不再畏懼面對無理數，而能勇於嘗試學習。

課程架構



圖一：課程架構圖

- (一) 主題 I (第 1 節課)：配合學習單一 (附件 1) 將面積為 2 正方形邊長放在直尺刻度上，讓學生觀察長度為何？引發學習動機。再利用「四塊拼片 」(附件 2：學習單二)及「五塊拼片 」(附件 3：學習單三)拼圖活動過程中的認知衝突與矛盾，建立學生二次方根符號表徵的概念。
- (二) 主題 II (第 2 節課)：延伸第 1 節課拼圖概念學習到二次方根符號表徵的概念，配合學習單四 (附件 4) 及學習單五 (附件 5)，建立 $\sqrt{a^2} = a$ ， $(\sqrt{a})^2 = a$ ($a > 0$) 概念學習，以小試身手強化學習。
- (三) 主題 III (第 3 節課)：利用面積分別為 2 平方單位、3 平方單位、5 平方單位的正方形，進行拼圖活動，來介紹母須化簡的同類方根 (如： $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$ 等)。複習質因數分解概念後，延伸第 1 節課拼圖概念配合學習單六 (附件 6) 及正方形切割活動，學習根式化簡。
- (四) 主題 IV (第 4 節課)：延伸第 3 節課再搭配進一步面積分別為 2、3、8、12、18、27 平方單位的正方形，進行拼圖以學習同類方根概念，再利用撲克牌遊戲強化同類方根學習後，配合學習單七 (附件 7) 說明二次方根加減法運算。
- (五) 主題 V (第 5 節課)：以學習單八 (附件 8)，配合乘法結合律，說明 $a \times b\sqrt{c} = ab\sqrt{c}$ 概念。利用第 3 節課學習單六 (附件 6) 根式化簡的圖形切割過程概念，說明 $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ 概念學習，再佐以學習單八，模仿演練計算並強化練習。
- (六) 主題 VI (第 6 節課)：利用第 2 節課 $(\sqrt{a})^2 = a$ 的概念說明分母有理化 $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$ ，以學習單九 (附件 9) 強化計算。複習根式加、簡、乘、除運算，以學習單十 (附件 10) 練習根式四則運算。

教材 分析



(一) 補強課程模組之重要性

「二次方根」是學生是進入無理數概念學習的前哨站，「二次方根」概念形成後，近程影響，國中階段二次方根近似值、畢氏定理、直角坐標系上兩點距離公式等概念的學習；遠程影響，則影響到高中職階段實數、指數、直線方程式的學習。而「二次方根」中 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$ 、 \dots 等數，對學生而言是陌生的數，如何讓學生能有學習的動機，願意學習「二次方根」的概念是非常重要的。本補強課程模組學習內容與其他年段學習內容間的關係圖如圖 2。

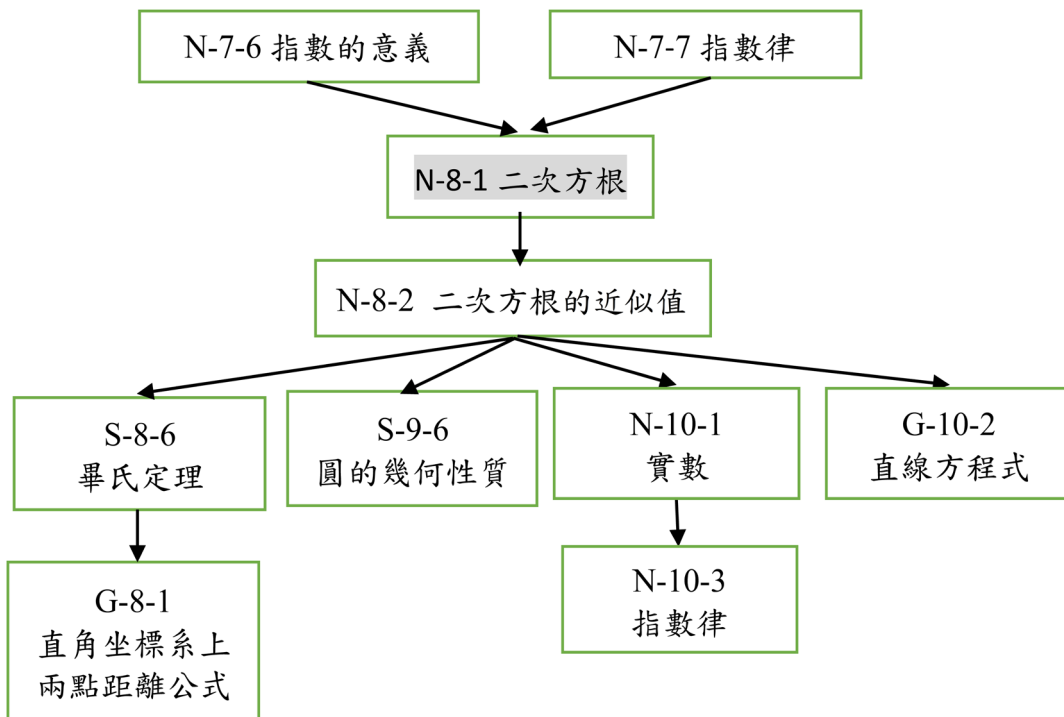


圖 2：補強課程模組學習內容與其他年段學習內容間的關係圖

(二) 本補強課程模組教材學習之內容分析

本補強課程模組「二次方根」教材的學習內容，分為「二次方根的意義」；「根式的化簡」；及「根式的四則運算」三部分，希望學生理解二次方根的意義後，不再畏懼面對無理數，而能勇於嘗試學習。本補強課程模組的核心概念與學習目標架構，如圖 3。

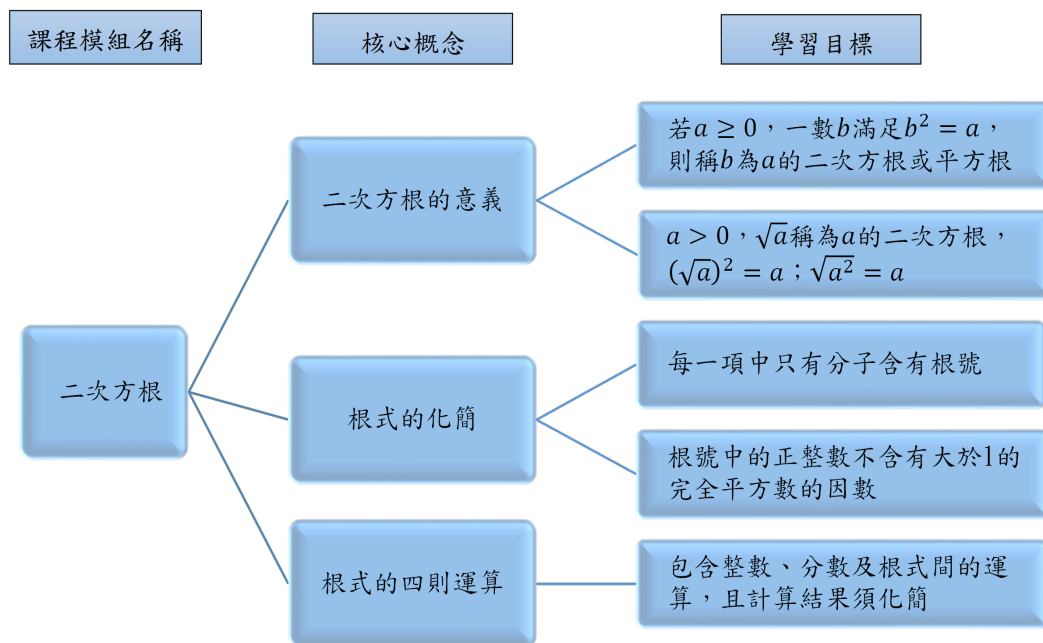


圖 3：本補強課程模組的核心概念與學習目標架構

(三) 教材分析與課程架構的關係

本補強課程模組教材從理解「二次方根的意義」到「根式的運算」，都是環繞著無理數的概念學習及運算，無理數的抽象概念，常讓學生無法理解。因此以拼片拼圖引入概念學習，圖形切割說明根式化簡，運算部分再採用步驟模仿方式，引導學生熟悉運算過程。希望學生在拼片拼圖中理解「二次方根的意義」的抽象概念進而願意嘗試根式運算的學習。本單元教學過程中的教材內容與課程架構的關聯，如表 1。

表 1：本補強課程模組教材分析與課程架構之關係性說明

| 課程模組核心概念 | 學習活動 | 教學策略 | 教學內涵 |
|----------------------------------|-------------|--------------|--|
| 主題 I、II 二次方根的意義 (第 1、2 節課) | 拼拼看 拼片拼圖 | 認知衝突 操作活動 | 利用「四塊拼片」及「五塊拼片」拼圖活動過程中的認知衝突與矛盾，建立學生二次方根符號表徵的概念。 |
| | | 學習單 模仿活動 | 延伸第 1 節課拼圖學習到二次方根符號表徵的概念，配合學習單，建立 $\sqrt{a^2} = a$ $(\sqrt{a})^2 = a$ ($a > 0$) 概念學習。 |
| 主題 III 根式的化簡 (第 3 節課) | 切切看 圖形切割 | 鷹架引導 | 延伸第 1 節課拼圖概念，配合學習單及正方形切割活動，學習根式化簡。 |

| 課程模組核心概念 | 學習活動 | 教學策略 | 教學內涵 |
|----------------------------|-------------|--------------|--|
| 主題IV 根式的加減法運算 (第4節課) | 組組看 圖形組合 | 操作活動遊 戲活動 | 利用面積分別為2、3、8、12、18、27平方單位的正方形，進行拼圖活動，來學習同類方根概念。再利用撲克牌遊戲強化同類方根學習後，配合學習單引導計算二次方根的加減運算。 |
| 主題V 根式的乘法運算 (第5節課) | 跟跟看 跟隨腳步 | 模仿練習 | 以學習單八，配合乘法結合律，學習 $a \times b\sqrt{c} = ab\sqrt{c}$ 概念。利用第3節課根式化簡的圖形切割過程概念，說明 $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ 概念學習，再佐以學習單，引導模仿演練根式乘法計算並強化練習。 |
| 主題VI 根式的四則運算 (第6節課) | 跟跟看 跟隨腳步 | 模仿練習 | 利用第2節課 $(\sqrt{a})^2 = a$ 的概念說明分母有理化 $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$ 佐以學習單強化計算。複習根式加、簡、乘、除運算，以學習單引導練習根式四則運算。 |

教學 計畫



| | |
|------------------------|---|
| 模組名稱 | 根式運算 |
| 授課節數規劃 | 六節課 |
| 學習重點 (內容、概念、 能力) | <p>學習內容</p> <p>N-8-1 二次方根：二次方根的意義；根式的化簡及四則運算 (n-IV-5)。</p> <p>學習表現</p> <p>n-IV-5 理解二次方根的意義、符號與根式的四則運算，並能運用到日常生活的情境解決問題。</p> <p>基本學習內容</p> <p>NC-8-1-1 二次方根的意義及化簡。</p> <p>NC-8-1-2 根式的四則運算。</p> |

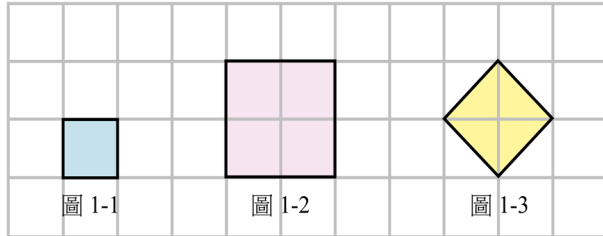
| | |
|--------|--|
| 適用對象 | <p>學習本模組前，學生須學會以下學習內容：</p> <p>N-7-6 指數的意義：指數為非負整數的次方；$a \neq 0$ 時 $a^0=1$；同底數的大小比較；指數的運算。</p> <p>N-7-7 指數律：以數字例表示「同底數的乘法指數律」($a^m \times a^n = a^{m+n}$、$(a^m)^n = a^{mn}$、$(a \times b)^n = a^n \times b^n$，其中 m, n 為非負整數)；以數字例表示「同底數的除法指數律」($a^m \div a^n = a^{m-n}$，其中 $m \geq n$ 且 m, n 為非負整數)。</p> <p>N-7-3 負數與數的四則混合運算(含分數、小數)：使用「正、負」表徵生活中的量；相反數；數的四則混合運算。</p> |
| 教學連結建議 | <p>本模組與未來學習內容的連結：</p> <p>N-8-2 二次方根的近似值</p> <p>S-8-6 畢氏定理</p> <p>G-8-1 直角坐標系上兩點距離公式</p> <p>S-9-6 圓的幾何性質</p> <p>N-10-1 實數</p> <p>N-10-3 指數</p> <p>G-10-2 直線方程式</p> |
| 學習目標 | <ol style="list-style-type: none"> 1. 能透過拼圖活動理解二次方根的意義。 2. 能透過拼圖活動學習根式化簡。 3. 能透過正方形拼圖及遊戲活動理解同類方根。 4. 能熟練根式的加減運算。 5. 能熟練根式的乘法運算。 6. 能熟練根式的四則運算。 |
| 教學策略 | <div data-bbox="518 1556 869 1870" style="text-align: center;"> </div> <ol style="list-style-type: none"> 1. 透過操作活動及討論探究，引導學生進入無理數概念的學習。 2. 以循序漸進的活動引導學習數學概念，讓學生培養用數學的意識。 3. 教學活動中，加入撲克牌遊戲，強化學生的概念學習。 4. 以「模仿教學法」引導學生進行運算。 |

| | |
|----------------------------|---|
| 教學材料 教學資源 | 教學材料 1. 拼片方塊組 (附件 15) 2. 面積分別為 2、3、5、7、8、12、18、27 平方單位的正方形數張 (附件 16) 3. 學習單 (附件 1~10) 教學資源 1. 各版本教科書 2. 2013 年虎尾國中亮點計畫活動資料。 |
|----------------------------|---|

主題 I：根式符號概念引入

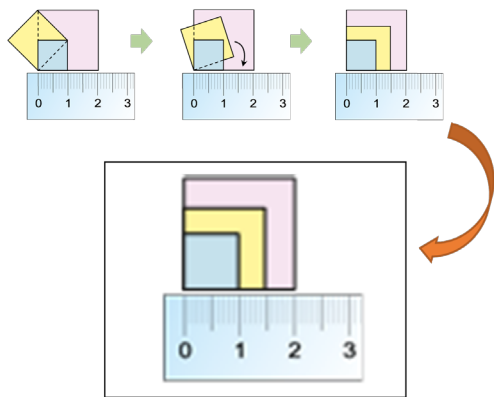
| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|--|---|
| <p>第 1 節</p> <p>一、準備活動</p> <p>複習正方形面積與邊長關係</p> <p><口頭提問></p> <p>提問 1：正方形的邊長為 2 公分，則其面積是多少平方公分？</p> <p>提問 2：正方形的邊長為 3 公分，則其面積是多少平方公分？</p> <p>提問 3：正方形的面積為 4 平方公分，則其每邊長是多少公分？</p> <p>提問 4：正方形的面積為 16 平方公分，則其每邊長是多少公分？</p> <p>二、引起動機</p> <p>1. 請學生先完成學習單一 (附件 1)</p> <p>2. 口頭提問：</p> <p>配合學習單一，隨機點選學生說說看</p> <p>提問 1：</p> <p>(1) 圖 1-1 中的正方形面積為多少平方公分？ 其邊長為多少公分？</p> <p>(2) 圖 1-2 的正方形面積為多少平方公分？ 其邊長為多少公分？</p> <p>(3) 圖 1-3 的正方形面積為多少平方公分？ 其邊長為多少公分？</p> | <p>教師口頭提問 學生口頭回答 (依學生作答狀況增減提問數量)</p> <p>附件一圖形取材自教科書內容圖片</p> <p>教師口頭提問 學生口頭回答 學生對圖 1-1、圖 1-2 兩正方形邊長輕易說出來 對圖 1-3 正方形邊長答案不一 學生無法說出圖 1-3 的正方形面積時？可引導學生剪貼在方格中判斷。</p> |

教學活動流程設計



提問 2：

將上圖 1-1、1-2、1-3 置放在直尺上，如下圖 (二)，說說看邊長各為多少？



(學生對圖 1-3 正方形邊長答案不一爭論時，不給予答案及任何評斷)

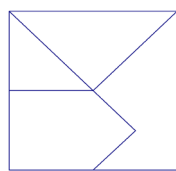
三、拼拼看

(一) 拼片活動一

- 每人一份方塊拼片組 (附件 15) 及學習單二 (附件 2)
(方塊拼片組：2013 年虎尾國中亮點計畫活動彰師大梁崇惠助理教授提供)
(附件 2：改自 2013 年虎尾國中亮點計畫活動彰師大梁崇惠助理教授提供”要拼才會贏：五片拼圖”學習單)
- 請學生閱讀學習單中任務一的活動並完成拼出正方形任務
- 請學生分享所拼成的正方形並互相比較是否有不同拼法



圖例



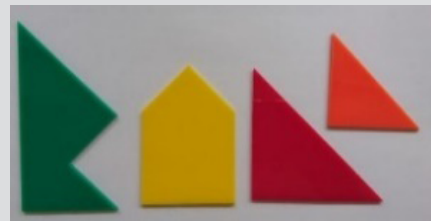
圖示

教學注意事項

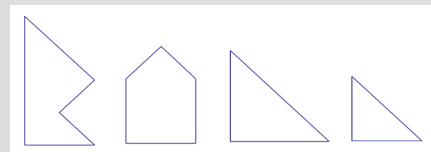
(可使用電腦，放大圖形讓學生一起討論)

附件 15 拼片模板，易因不同電腦，欄寬不同，造成長度誤差，但比例不受影響。

方塊組四片



圖例



圖示

教學活動流程設計

教學注意事項

(二) 拼片活動二

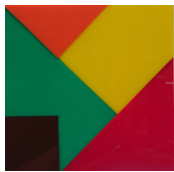
1. 發下第 5 片拼片
2. 請學生閱讀學習單二中任務二的活動並完成任務
(學生會受任務一的排法影響，常會無法拼出正方形)

3. 口頭提問

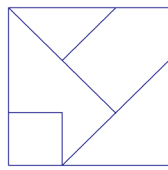
- (1) 你們可以順利拼出正方形嗎？
- (2) 想利用 5 片方塊拼片拼出正方形，需提供哪些條件給你們？
(引導學生提出需面積、邊長等條件)

(三) 拼片活動三

1. 發下學習單三 (附件 3)
2. 請學生閱讀學習三中任務三的條件完成拼出正方形任務及回答問題 3，問題 4



圖例

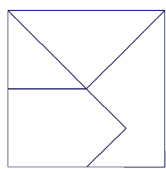
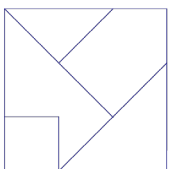


圖示

3. 請學生分享如何拼成的正方形
4. 請學生將 5 號小正方形移除，拼圖復原為任務一的正方形並回答學習單三問題 5 的問題



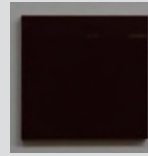
圖例



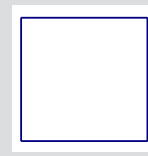
圖示

(學生因無法答出問題 5 的邊長，一開始會認為沒有這樣的正方形，此時引導他們觀察自己拼出的圖形，學生此時較能接受非有理數的正方形邊長表示法)

第 5 片正方形拼片



圖例



圖示

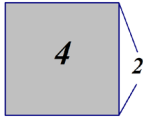
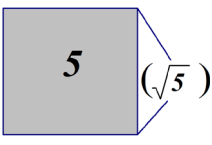
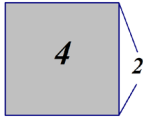
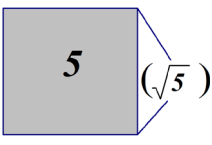
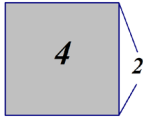
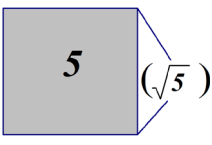
難度增加，不易拼出正方形，學生會說出形形色色條件，學生若不知需要哪些條件時，老師可主動，說出要提供面積、邊長等條件。

學生無法從面積回答出問題 5，引導他們觀察自己拼出的圖形。

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|--|--|
| <p>四、概念說明</p> <p>利用 4 塊拼圖所成正方形面積非完全平方數，引入根式概念及符號表示法，並說明學習單三問題 5 的邊長表示法</p> <p>(面積為 a 的正方形，其邊長記為 \sqrt{a})</p> <p>五、隨堂提問</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 提問學生課堂開始時圖 1-3 正方形的邊長 2. 教師提問，隨機請同學回答 <ol style="list-style-type: none"> (1) 面積為 4 的正方形，其邊長記為？ (2) 面積為 3 的正方形，其邊長記為？ (3) 面積為 7 的正方形，其邊長記為？ (4) 面積為 a 的正方形 ($a > 0$)，其邊長記為？ <p>(第一節課結束)</p> | <p>正方形面積引入根式符號，此時可順帶說明 \sqrt{a}，$a > 0$ 的概念</p> |

主題 II： $\sqrt{a^2} = a$ ， $(\sqrt{a})^2 = a$ ($a > 0$) 概念學習

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|---|---|
| <p>第 2 節</p> <p>一、準備活動</p> <p>(一) 學習回顧</p> <p>利用口頭提問方式，強化學生「二次方根的意義」的學習。</p> <p>教師提問：</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 面積為 5 的正方形，其邊長記為？ 2. 面積為 7 的正方形，其邊長記為？ 3. 邊長為 2 的正方形，其面積記為？ 4. 邊長為 4 的正方形，則面積為何？ 5. 邊長為 $\sqrt{3}$ 的正方形，則面積為何？ 6. 邊長為 $\sqrt{7}$ 的正方形，則面積為何？ 7. 邊長為 \sqrt{a} ($a > 0$) 的正方形，其面積記為？ | <p>複習上節課根式符號概念，以確認需再加強「二次方根的意義」學習或進行下一概念學習。</p> |

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 | | | | | | |
|--|---|---|--|---|---------------------------------|---------------------------|--|
| <p>(二) 概念活用</p> <ol style="list-style-type: none"> 請學生討論 1、$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、$\sqrt{4}$、$\sqrt{5}$ 的大小關係 (利用 (一) 學習回饋所提問的面積與邊長關係，引導學生思考討論) 請學生分享結論並說明理由 教師補充說明 (利用 (一) 學習回饋所提問的面積與邊長關係，引導學生理解：當 $a > b > 0$ 時，$\sqrt{a} > \sqrt{b}$) <p>二、概念說明導入</p> <p>(一) 導入活動一</p> <ol style="list-style-type: none"> 老師依學習單四 (附件 4) 範例做說明 <table border="1" data-bbox="240 954 900 1283"> <tr> <td data-bbox="240 954 459 1283">  </td> <td data-bbox="459 954 683 1283"> 左圖，正方形邊長為 2，則其面積可表示為 $2^2=4$ 左圖，正方形面積為 4，則其邊長可表示為 $\sqrt{4}=2$ </td> <td data-bbox="683 954 900 1283"> 由圖形可知 $2^2=4$，$\sqrt{4}=2$ 所以 $\sqrt{4}=\sqrt{2^2}=2$ </td> </tr> </table> <ol style="list-style-type: none"> 學生完成學習單四 請學生參考範例作答 概念說明 依據學生完成後的學習單四 (附件 4)，引導學生理解 $\sqrt{a^2}=a$ ($a > 0$) 的概念 <p>(二) 導入活動二</p> <ol style="list-style-type: none"> 老師依學習單五 (附件 5) 範例做說明 <table border="1" data-bbox="240 1637 887 1812"> <tr> <td data-bbox="240 1637 475 1812">  </td> <td data-bbox="475 1637 699 1812"> 如圖，正方形面積為 5，則其邊長可表示為 $\sqrt{5}$ </td> <td data-bbox="699 1637 887 1812"> 由圖形可知 $(\sqrt{5})^2=5$ </td> </tr> </table> <ol style="list-style-type: none"> 學生完成學習單五 請學生參考範例完成學習單五 概念說明 依據學生完成的學習單五 (附件 5)，引導學生理解 $(\sqrt{a})^2=a$ ($a > 0$) 的概念 |  | 左圖，正方形邊長為 2，則其面積可表示為 $2^2=4$ 左圖，正方形面積為 4，則其邊長可表示為 $\sqrt{4}=2$ | 由圖形可知 $2^2=4$ ， $\sqrt{4}=2$ 所以 $\sqrt{4}=\sqrt{2^2}=2$ |  | 如圖，正方形面積為 5，則其邊長可表示為 $\sqrt{5}$ | 由圖形可知 $(\sqrt{5})^2=5$ | <p>依學生討論分享狀況，察覺學生是否具備正方形面積轉化邊長表示法的概念。以做適時說明。</p> <p>觀察並檢視學生的情況，在旁隨時指導。</p> <p>學生無法參考範例引導作答時，可由教師帶領學生一起完成學習單四。</p> <p>觀察並檢視學生的情況，在旁隨時指導。</p> <p>學生無法參考範例引導作答時，可由教師帶領學生一起完成學習單五。</p> |
|  | 左圖，正方形邊長為 2，則其面積可表示為 $2^2=4$ 左圖，正方形面積為 4，則其邊長可表示為 $\sqrt{4}=2$ | 由圖形可知 $2^2=4$ ， $\sqrt{4}=2$ 所以 $\sqrt{4}=\sqrt{2^2}=2$ | | | | | |
|  | 如圖，正方形面積為 5，則其邊長可表示為 $\sqrt{5}$ | 由圖形可知 $(\sqrt{5})^2=5$ | | | | | |

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|---|--------|
| <p>四、回顧與總結</p> <p>強化 $\sqrt{a^2} = a$, $(\sqrt{a})^2 = a$ ($a > 0$) 概念 (第二節課結束)</p> | |

主題 III：根式化簡

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|--|--|
| <p>第 3 節</p> <p>一、準備活動</p> <p>(一) 認識沒有化簡前的同類方根：</p> <p>1. 拼圖活動材料：附件 16</p> <p>面積分別為 2、3、5、7 的正方形紙片各 3 張</p> <p>2. 拼圖活動</p> <p>(1) 利用任 2 張正方形紙片，拼出一個長方形 若可以，則有哪些排法；若不可以，為什麼？</p> <p>(2) 利用任 3 張正方形紙片，拼出一個長方形 若可以，則有哪些排法；若不可以，為什麼？</p> <p>(3) 利用任 4 張正方形紙片，拼出一個長方形 若可以，則有哪些排法；若不可以，為什麼？</p> <p>3. 教師說明化簡前的同類方根：</p> <p>(1) 面積分別為 2、3、5、7 的正方形紙片，邊長各為 $\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$、$\sqrt{7}$</p> <p>(2) 面積相同的正方形紙片，才能拼出長方形，因此相同的邊為同類方根</p> <p>(二) 複習一元一次式乘號省略及加法計算</p> <p>例如：$3 \times x = 3x$、$1 \times x = 1x = x$、...</p> $3x + 2x = 3 \times x + 2 \times x = (3+2) \times x = 5 \times x = 5x$ $x + x = 1 \times x + 1 \times x = (1+1) \times x = 2 \times x = 2x$ $5x - 2x = 5 \times x - 2 \times x = (5-2) \times x = 3 \times x = 3x$ <p>(三) 從一元一次式到未化簡同類方根加減法運算</p> <p>1. 概念引導</p> <p>(1) 從 $3 \times x = 3x$ 概念引入 $3 \times \sqrt{a} = 3\sqrt{a}$</p> <p>(2) 從 $3x + 2x = 3 \times x + 2 \times x = (3+2) \times x = 5 \times x = 5x$ 概念引入</p> | <p>引導學生將所拼出的圖形放置桌上觀察，並討論可拼出長方形的邊長關係。</p> <p>a 值可為任意數值。</p> <p>此時只以「未化簡前的同類方根」來引入計算，暫時不說明「同類方根」概念。</p> |

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|--|--|
| <p> $3\sqrt{a} + 2\sqrt{a} = 3 \times \sqrt{a} + 2 \times \sqrt{a} = (3 + 2) \times \sqrt{a} = 5 \times \sqrt{a} = 5\sqrt{a}$ </p> <p>(3) 從 $x+x=1 \times x+1 \times x=(1+1) \times x=2 \times x=2x$</p> <p>概念引入</p> <p>$\sqrt{a} + \sqrt{a} = 1 \times \sqrt{a} + 1 \times \sqrt{a} = (1 + 1) \times \sqrt{a} = 2 \times \sqrt{a} = 2\sqrt{a}$</p> <p>(4) 從 $5x-2x=5 \times x-2 \times x=(5-2) \times x=3 \times x=3x$</p> <p>概念引入</p> <p>$5\sqrt{a} - 2\sqrt{a} = 5 \times \sqrt{a} - 2 \times \sqrt{a} = (5 - 2) \times \sqrt{a} = 3 \times \sqrt{a} = 3\sqrt{a}$</p> <p>2. 概念說明</p> <p>引導學生理解 $b\sqrt{a} + c\sqrt{a} = (b + c)\sqrt{a}$ 運算</p> <p>(四) 小試身手</p> <p>完成小試身手一 (附件 11)</p> <p>--- 方根內數字相同的根式加減法練習</p> <p>二、切割活動</p> <p>(一) 跟著教師動動腦</p> <p>學習單六 (附件 6)</p> <p><教師引導學生作答></p> <p>1. 複習活動</p> <p>(1) 面積為 2 的正方形邊長為? 請填入下圖 () 內</p> <p>(2) 面積為 3 的正方形邊長為? 請填入下圖 () 內</p> <p style="text-align: center;"> () () </p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">2 ()</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">3 ()</div> </div> <p>2. 切割學化簡</p> <p>(1) 寫出 8 的標準分解式:</p> <p>所以 $\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \times 2}$</p> <p>(2) 面積為 8 的正方形邊長為? 請填入下圖 () 內</p> <p style="text-align: center;">()</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; width: 60px; margin: 0 auto; text-align: center;">8 ()</div> <p>(3) 說明正方形面積 8, 可切割為 4 個面積為 2 的小正方形</p> | <p>依學生小試身手作答狀況, 決定重複模仿練習或進行下一概念學習。</p> <p>學習單六 〈跟著教師動動腦〉部分, 由教師引導學生思考並作答。 引導學生填入 $\sqrt{2}$。 引導學生填入 $\sqrt{3}$。</p> <p>引導學生寫出: $8=2^2 \times 2$ 即可</p> <p>引導學生填入 $\sqrt{8}$。</p> <p>也可利用摺紙說明</p> |

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 | | | | | | |
|--|--------|-----|-----|---|---|-----|--|
| <p style="text-align: center;">() ()</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="padding: 5px;">2</td> <td style="padding: 5px;">2</td> <td style="padding: 5px;">()</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">2</td> <td style="padding: 5px;">2</td> <td style="padding: 5px;">()</td> </tr> </table> <p>由 (2)、(3) 圖形，因此可知 $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$</p> <p>(4) 由 (1)、(2)、(3) 可推論出 $\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \times 2} = 2\sqrt{2}$</p> <p>(二) 動手切割討論 學生參考〈跟著老師動動腦〉的方式，共同討論，完成學習單六 (附件 6) 動動腦部分。</p> <p>(三) 總結說明 依據學生完成的學習單六，說明「根式的化簡」：根號中的正整數不含有大於 1 的完全平方數的因數。並引導學生運用標準分解式來完成根式化簡。</p> <p>三、小試身手 完成小試身手一 (附件 12) --- 根式化簡練習 (小試身手練習後，收回，主題 IV 活動中使用) (第三節課結束)</p> | 2 | 2 | () | 2 | 2 | () | <p>引導學生每個 () 都填入 $\sqrt{2}$。</p> <p>引導學生觀察 (1)、(2)、(3) 步驟關係。</p> <p>觀察並檢視學生的情況，在旁隨時指導。 學生無法參考範例引導作答時，可由老師帶領學生一起完成。</p> <p>依學生小試身手作答狀況，決定重複模仿練習或進行下一概念學習。</p> |
| 2 | 2 | () | | | | | |
| 2 | 2 | () | | | | | |

主題 IV：根式的加減法運算

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|---|--|
| <p>第 4 節</p> <p>一、準備活動：建立同類方根概念</p> <p>(一). 圖形組合活動</p> <p>1. 拼圖活動材料：附件 16 面積分別為 2、3、8、12、18、27 的正方形紙片各 2 張。</p> <p>2. 拼圖活動說明</p> <p>(1) 利用任 3 張正方形紙片，拼出一個長方形。 若可以，則有哪些排法；若不可以，為什麼？</p> <p>(2) 利用任 4 張正方形紙片，拼出一個長方形。 若可以，則有哪些排法；若不可以，為什麼？</p> | <p>引導學生將所拼出的圖形放置桌上觀察，並討論可拼出長方形的邊長關係。</p> |

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|--|--|
| <p>(3) 利用任 5 張正方形紙片，拼出一個長方形。 若可以，則有哪些排法；若不可以，為什麼？</p> <p>3. 教師說明同類方根</p> <p>(1) 以面積、邊長關係說明 面積分別為 2、3、8、12、18、27 的正方形紙片， 邊長各為 $\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、$\sqrt{8}$、$\sqrt{12}$、$\sqrt{18}$、$\sqrt{27}$ 可拼成一個長方形的正方形紙片，其邊長為同類方根 例如：$\sqrt{2}$、$\sqrt{8}$、$\sqrt{18}$ 或 $\sqrt{3}$、$\sqrt{12}$、$\sqrt{27}$</p> <p>(2) 以根式化簡後說明 $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$、$\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$、$\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$、$\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ 因此 $\sqrt{2}$、$\sqrt{8}$、$\sqrt{18}$ 為同類方根；$\sqrt{3}$、$\sqrt{12}$、$\sqrt{27}$ 為同類方根</p> <p>(二) 遊戲活動</p> <p>利用主題 III 中「三、小試身手」(附件 12) 化簡結果， 強化同類方根概念。\sqrt{a}、\sqrt{b} 化為最簡根式後，若 根式符號內的數相同，則 \sqrt{a}、\sqrt{b} 稱為同類方根</p> <p>1. 遊戲名稱：抽鬼牌</p> <p>2. 遊戲道具：含鬼牌的撲克牌一副</p> <p>3. 遊戲名詞說明</p> <p>(1) 牌面 A 表數字 1，J 表數字 11，Q 表數字 12，K 表數字 13</p> <p>(2) 一對：牌面點數開根號後為同類方根的兩張牌即為一對 (不考慮花色) 例如：牌面點數 2 視為 $\sqrt{2}$，點數 8 視為 $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$， 則牌面點數 2 與點數 8 即為一對 牌面點數 2 視為 $\sqrt{2}$，點數 6 視為 $\sqrt{6}$，則不是一對</p> <p>4. 遊戲規則</p> <p>(1) 將 52 張有點數的牌，和一張鬼牌混合洗牌後，依照 順序將牌發給每一個人，牌要全部發完</p> <p>(2) 拿到牌後，玩家可先將手上可以湊成一對的牌打出。 當全部玩家手上都沒有相同的牌可湊成一對時，便可 開始「抽鬼牌」</p> | <p>主題 III 中“三、小試身手”化簡部分仍不熟時，可於此時再說明加強。</p> <p>觀察學生是否熟悉規則，在旁隨時指導。</p> |

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|---|--|
| <p>(3) 玩家輪流向自己右手或左手邊的玩家抽一張牌。將抽到的牌和自己原本的牌組合，凡是可組成一對的牌，就可以丟入牌堆裡</p> <p>(4) 最後手上持有鬼牌的參加者便算輸</p> <p>5. 備註：遊戲過程中，學生打出一對的牌點數開根號後非同類方根，須將打出的牌收回。還要抽取其他所有玩家手中的牌一張，放入自己的牌中</p> <p>二、根式加減法運算說明</p> <p>學習單七 (附件 7)</p> <p>(一) 教師引導活動</p> <p>1. 複習第 3 節課分配律概念 (引導活動第 1 題)，教師示範後，學生即練習第 1 題</p> <p>2. 說明根式加減運算時，同類方根利用分配律概念合併，不是同類方根無法合併。(引導活動第 2、3 題)，教師示範後，學生即練習第 2、3 題</p> <p>(二) 小試身手</p> <p>完成小試身手二 (附件 13)</p> <p>--- 根式加減法運算</p> <p>(第 4 節課結束)</p> | <p>學生能正確計算出 1~3 題後，才進行小試身手，若熟悉度不足，可多些示範引導練習。</p> <p>依學生小試身手作答狀況，決定重複模仿練習或進行下一概念學習。</p> |

主題 V：根式乘法運算

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|--|--|
| <p>第 5 節</p> <p>一、模仿解題：根式乘法</p> <p>(一) 教師引導活動一</p> <p>$a \times b\sqrt{c} = ab\sqrt{c}$ 概念學習活動</p> <p>1. 引導練習一：學習單八 (附件 8) 計算練習一</p> <p>(1) 運算概念說明：根式乘法運算</p> $a \times b\sqrt{c} = a \times b \times \sqrt{c} = ab \times \sqrt{c} = ab\sqrt{c}$ <p>例如：$2 \times 3\sqrt{5} = 2 \times 3 \times \sqrt{5} = 6 \times \sqrt{5} = 6\sqrt{5}$</p> | <p>教師示範 1 題，學生立即練習 1 題，確認學生能正確計算後，才示範第 2 題，若第 1 題學生無法正確計算，則再練習同類型題目。直到學生能正確運算。</p> |

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 | | | | | | |
|--|--------|---|---|---|---|---|--|
| <p>(2) 計算引導教學</p> <p>教師引導 $3 \times 2\sqrt{2}$ 的計算步驟後，學生立即練習。 學生能正確計算後，教師再引導 $-\frac{4}{3}\sqrt{2} \times (-6)$ 的計算步驟</p> <p>2. 引導練習二：學習單八 (附件 8) 計算練習二</p> <p>(1) 運算概念說明：混和根式加減乘法運算</p> <p>根式化簡後再進行運算例如：</p> $2\sqrt{8} + \sqrt{18} = 2 \times 2 \times \sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ <p>(2) 計算引導教學：</p> <p>教師引導學習單八 (附件 8) 計算練習二第 1 小題後的計算步驟後，學生立即練習。學生能正確計算後，教師再往下題逐題引導。</p> <p>(二) 教師引導活動二</p> <p>$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ 概念學習活動</p> <p>1. 運算概念說明</p> <p>(1) 利用根式化簡活動過程來說明</p> <p>利用主題 III 中“二、學習活動”之 1. (2) 來說明</p> <p>i 寫出 8 的標準分解式</p> <p>(此時引導學生寫出 $\sqrt{8} = \sqrt{2^2 \times 2}$ 即可)</p> <p>ii 面積為 8 的正方形邊長為？</p> <div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <div style="text-align: center; margin-right: 20px;"> <p>()</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 40px; height: 40px;"></td></tr> <tr><td style="text-align: center;">8</td></tr> </table> <p>()</p> </div> <div style="margin-right: 20px;">或</div> <div style="text-align: center;"> <p>() ()</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 30px; height: 30px; text-align: center;">2</td><td style="width: 30px; height: 30px; text-align: center;">2</td></tr> <tr><td style="width: 30px; height: 30px; text-align: center;">2</td><td style="width: 30px; height: 30px; text-align: center;">2</td></tr> </table> <p>()</p> </div> </div> <p>因此可知 $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$</p> <p>iii 由 i、ii</p> <p>可知 $\sqrt{8} = \sqrt{2^2 \times 2} = 2\sqrt{2}$</p> <p>說明 $\sqrt{2^2 \times 2} = 2\sqrt{2} = 2 \times \sqrt{2} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{2}$</p> $\Rightarrow \sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ <p>(2) 利用指數律來說明</p> $(\sqrt{a \times b})^2 = a \times b$ $(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \times (\sqrt{b})^2 = a \times b$ $\Rightarrow (\sqrt{a \times b})^2 = (\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2$ $\Rightarrow \sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ | | 8 | 2 | 2 | 2 | 2 | <p>引導學生從 $\sqrt{2^2 \times 2} = 2\sqrt{2} = 2 \times \sqrt{2} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{2}$ 過程中學習 $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$。</p> <p>引導學生從指數率計算推論 $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$。</p> |
| | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | |
| 2 | 2 | | | | | | |
| 2 | 2 | | | | | | |

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|---|--|
| <p>(3) 引導練習：學習單八 (附件 8) 計算練習三</p> <p>教師引導學習單八 (附件 8) 計算練習三第 1 小題後的計算步驟後，學生立即練習。學生能正確計算後，教師再往下題逐題引導</p> <p>二、綜合練習</p> <p>計算 $3\sqrt{12} + \sqrt{45} - \sqrt{5} \times \sqrt{15}$，並將結果化為最簡根式</p> <p>(第 5 節課結束)</p> | <p>教師示範 1 題，學生立即練習 1 題，確認學生能正確計算後，才示範第 2 題，若第 1 題學生無法正確計算，則再練習同類型題目。直到學生能正確運算</p> <p>綜合練習題目題數，視時間及學生計算情況增加</p> |

主題 VI：根式除法與四則運算

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|--|--|
| <p>第 6 節</p> <p>一、概念主題：分母有理化與根式除法運算</p> <p>(一) 分母有理化</p> <p>$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$ 概念學習活動</p> <p>1. 引導說明：利用 $(\sqrt{a})^2 = a$ 的概念說明分母有理化</p> <p>$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$</p> <p>(1) 分母擴分練習</p> <p>口頭提問：$\frac{1}{2} = \frac{\square}{4}$，$\square = ?$</p> <p>$\frac{2}{3} = \frac{\square}{9}$，$\square = ?$</p> <p>$(\sqrt{2})^2 = ?$</p> <p>$(\sqrt{5})^2 = ?$</p> <p>(2) 分母有理化說明：$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$</p> <p>$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1 \times \sqrt{a}}{\sqrt{a} \times \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{(\sqrt{a})^2} = \frac{\sqrt{a}}{a}$</p> <p>2. 引導練習：學習單九 (附件 9) 計算練習一</p> <p>教師引導學習單九 (附件 9) 計算練習一第 1 小題後的計算步驟後，學生立即練習。學生能正確計算後，教師再往下題逐題引導</p> <p>備註：學生熟練 $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$ 的分母有理化後，再視學生的學習狀況，決定是否增加 $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ 形式的有理化</p> | <p>引導學生確實知道分子、分母同乘 m。</p> <p>引導學生確實得知 $(\sqrt{a})^2 = a$。</p> <p>教師示範 1 題，學生立即練習 1 題，確認學生能正確計算後，才示範第 2 題，若第 1 題學生無法正確計算，則再練習同類型題目。直到學生能正確運算。</p> |

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|---|--|
| <p>(二) 根式除法運算</p> $\sqrt{a} \div \sqrt{b} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{a \div b} \text{ 概念學習活動}$ <p>1. 引導說明</p> <p>(1) 分數除法概念</p> $\sqrt{a} \div \sqrt{b} = \frac{\sqrt{a}}{1} \div \frac{b}{1} = \frac{\sqrt{a}}{1} \times \frac{1}{b} = \frac{\sqrt{a}}{b}$ <p>(2) 根式除法概念</p> $\sqrt{a} \div \sqrt{b} = \frac{\sqrt{a}}{1} \div \frac{\sqrt{b}}{1} = \frac{\sqrt{a}}{1} \times \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ <p>又 $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}$</p> $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{a}{b}$ $\sqrt{a} \div \sqrt{b} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{a \div b}$ <p>2. 引導練習：學習單九 (附件 9) 計算練習二</p> <p>教師引導學習單九 (附件 9) 計算練習二第 1、2 小題後的計算步驟後，學生立即練習。學生能正確計算後，教師再往下題逐題引導</p> <p>二、概念主題：根式四則運算</p> <p>(一) 概念複習</p> <p>1. 複習整數的四則運算</p> <p>熟練整數四則運算</p> <p>例如：計算 $(3-5) \div (-4) \times [25+4 \times (1-8)]$ 的值</p> <p>2. 複習一元一次式化簡</p> <p>加強去括號概念</p> <p>例如：化簡一元一次式 $3x+1-2(-3x-2)$</p> <p>(二) 根式四則運算練習</p> <p>1. 引導練習：學習單十 (附件 10)</p> <p>教師引導學習單十 (附件 10) 第 1 小題後的計算步驟後，學生立即練習。學生能正確計算後，教師再往下題逐題引導。</p> <p>2. 小試身手</p> <p>完成小試身手二 (附件 14)</p> <p>--- 根式四則運算</p> <p style="text-align: center;">(第 6 節課結束)</p> | <p>教師示範第 1、2 小題，學生立即練習第 1、2 小題，確認學生能正確計算後，再進行下一題。</p> <p>若第 1 題學生無法正確計算，則再練習同類型題目。直到學生能正確運算。</p> <p>依學生小試身手作答狀況，決定重複模仿練習或進行下一概念學習。</p> |

| | |
|----|--|
| 附件 | <ul style="list-style-type: none"> · 附件 1~10：學習單一 ~ 十。 · 附件 11~14：小試身手。 · 附件 15：拼片模板 (搭配主題 II ，學習單二 ~ 三) 。 · 附件 16：面積分別為 2、3、5、7、8、12、18、27 平方單位的正方形紙片 (搭配主題 II 、主題 III) 。 · 附件 17：前測。 · 附件 18：後測。 |
|----|--|



附件

請至「國民小學及國民中學學生學習扶助資源平臺」下載

評量工具



本補強課程模組所使用的評量工具包含：

- (一) 理解學生概念學習狀況的課堂口頭提問。
- (二) 分析學生學習前、後學習效果的前、後測。
- (三) 測驗學生主題單元概念的運算熟悉程度的附件：學習單、小試身手、活動配件及問卷。

針對上述評量工具，說明工具內涵如下：

一、評量工具 (一)：教師提問

| 提問位置 主題 - 節 - 提問順序 | 問題 | 配合物品或附件 |
|-----------------------|-----------------------------|---------|
| 主題 I - 一 - 1-1 | 正方形的邊長為 2 公分，則其面積是多少平方公分？ | |
| 主題 I - 一 - 1-2 | 正方形的邊長為 3 公分，則其面積是多少平方公分？ | |
| 主題 I - 一 - 1-3 | 正方形的面積為 4 平方公分，則其每邊長是多少公分？ | |
| 主題 I - 一 - 1-4 | 正方形的面積為 16 平方公分，則其每邊長是多少公分？ | |

| 提問位置 主題 - 節 - 提問順序 | 問題 | 配合物品或附件 |
|-----------------------|--|---|
| 主題 I - 二 -2-1 | (1) 圖 1-1 中的正方形面積為多少平方公分？ 其邊長為多少公分？ (2) 圖 1-2 的正方形面積為多少平方公分？ 其邊長為多少公分？ (3) 圖 1-3 的正方形面積為多少平方公分？ 其邊長為多少公分？ | 學習單一 (附件 1)  |
| 主題 I - 二 -2-2 | 將上圖 1-1、1-2、1-3 置放在直尺上，如下圖 (二)， 說說看邊長各為多少？ |  |
| 主題 I - 五 -2-1 | 面積為 4 的正方形，其邊長記為？ 面積為 3 的正方形，其邊長記為？ 面積為 7 的正方形，其邊長記為？ 面積為 a 的正方形 ($a > 0$)，其邊長記為？ | |
| 主題 II - 一 -(一)-1 | 面積為 5 的正方形，其邊長記為？ | |
| 主題 II - 一 -(一)-2 | 面積為 7 的正方形，其邊長記為？ | |
| 主題 II - 一 -(一)-3 | 邊長為 2 的正方形，其面積記為？ | |
| 主題 II - 一 -(一)-4 | 邊長為 4 的正方形，則面積為何？ | |
| 主題 II - 一 -(一)-5 | 邊長為 $\sqrt{3}$ 的正方形，則面積為何？ | |
| 主題 II - 一 -(一)-6 | 邊長為 $\sqrt{7}$ 的正方形，則面積為何？ | |
| 主題 II - 一 -(一)-7 | 邊長為 \sqrt{a} ($a > 0$) 的正方形，其面積記為？ | |

二、評量工具 (二)：前測、後測

(一) 前測

| 試題 | 測驗題目 | 建議評量時間 |
|--------|---|--------|
| | 測驗核心概念 | |
| 第 1 大題 | $\sqrt{18} = 3\sqrt{a}$ 、 $\sqrt{24} = 2\sqrt{b}$ ，則 $a+b$ 的值 = ___。 | 進行教學前 |
| | N-8-1 二次方根：根式的化簡 | |
| 第 2 大題 | 計算下列各式的值： $6\sqrt{2} + 3\sqrt{2} =$ _____ $6\sqrt{2} - 3\sqrt{2} =$ _____ | |
| | N-8-1 二次方根：根式的加減法運算 | |

| 試題 | 測驗題目 | 建議評量時間 |
|--------|--|--------|
| | 測驗核心概念 | |
| 第 3 大題 | 計算下列各式的值： $6\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = \underline{\hspace{2cm}}$ $6\sqrt{2} \div 3\sqrt{2} = \underline{\hspace{2cm}}$ | 進行教學前 |
| | N-8-1 二次方根：根式的乘除法運算 | |
| 第 4 大題 | 計算下列各式的值： $\sqrt{10} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) = \underline{\hspace{2cm}}$ $(\sqrt{10} \times \sqrt{15} - \sqrt{6}) \times \sqrt{2} = \underline{\hspace{2cm}}$ | |
| | N-8-1 二次方根：根式的四則運算 | |

(二) 後測

| 試題 | 測驗題目 | 建議評量時間 |
|--------|---|-----------------|
| | 測驗核心概念 | |
| 第 1 大題 | $\sqrt{12} = 2\sqrt{a}$ 、 $\sqrt{175} = 5\sqrt{b}$ ，則 $b-a$ 的值 = $\underline{\hspace{1cm}}$ 。 | 可於第 3 節 課後實施 |
| | N-8-1 二次方根：根式的化簡 | |
| | 計算下列各式的值： $8\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = \underline{\hspace{2cm}}$ $8\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = \underline{\hspace{2cm}}$ | 可於第 4 節 課後實施 |
| | N-8-1 二次方根：根式的加減法運算 | |
| 第 2 大題 | 計算下列各式的值： $8\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = \underline{\hspace{2cm}}$ | 可於第 5 節 課後實施 |
| | N-8-1 二次方根：根式的乘法運算 | |
| | 計算下列各式的值： $8\sqrt{5} \div 2\sqrt{5} = \underline{\hspace{2cm}}$ $\sqrt{15} \times \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - 1\right) = \underline{\hspace{2cm}}$ $(\sqrt{10} \times \sqrt{6} - \sqrt{15}) \times \sqrt{5} = \underline{\hspace{2cm}}$ | 可於第 6 節 課後實施 |
| | N-8-1 二次方根：根式除法及四則運算 | |

三、問卷：

| 問卷內容 | |
|--|--|
| 針對本次上課活動內容，你有何心得看法或建議？有沒有讓你對「二次方根」概念更清楚？ | |

四、附件

| 附件 | 位置 | 核心概念 | 建議使用時間 |
|------------|-------|-----------------------------|-------------------|
| 學習單 | 附件 1 | 準備活動…引起動機 | 主題 I |
| | 附件 2 | 二次方根的意義 | |
| | 附件 3 | | |
| | 附件 4 | $\sqrt{a^2} = a (a > 0)$ 概念 | 主題 II |
| | 附件 5 | $(\sqrt{a})^2 = a (a > 0)$ | |
| | 附件 6 | 根式化簡 | 主題 III |
| | 附件 7 | 根式的加減法運算 | 主題 IV |
| 學習單 | 附件 8 | 根式的乘法運算 | 主題 V |
| | 附件 9 | 分母有理化及根式除法運算 | 主題 VI |
| | 附件 10 | 根式的四則運算 | |
| 小試身手 | 附件 11 | 方根內數字相同的根式加減法 | 主題 III 一、活動準備教學後 |
| | 附件 12 | 根式化簡 | 附件 6 學習活動後 |
| | 附件 13 | 根式的加減法運算 | 附件 7 課堂練習後 |
| | 附件 14 | 根式的四則運算 | 附件 10 課堂練習後 |
| 操作活動 配件 | 附件 15 | 拼片模板…二次方根的意義 | 主題 I 學習單二 ~ 三 |
| | 附件 16 | 正方形模板…同類方根 | 主題 III、主題 IV 準備活動 |

教學反思 應用建議



鑒於以往課本都是從正方形面積反推邊長的方式來幫助學生建立對「根式符號」的概念，但部分學生僅能理解邊長為有理數的正方形，對面積不是完全平方數的正方形沒有認同感，所以以這樣的正方形反推邊長來學習「根式符號」的學習法，讓學生因超出想像而導至學習的排斥。這一次利用寒假下午時段，幫學習成績低落的八年級學生進行根式運算的觀念建立。這一次從拼圖出發、讓學生知道在拼圖中透過根式的意義有助於拼出完整的圖形。希望透過操作的方式，對學生的學習有助益。

本模組選擇雲林縣某一國中進行試行。試行時間為寒假下午時段，由學習成績低落(段考成績皆不到40分)的八年級學生組成學習團隊進行根式運算的學習。因疫情影響，僅有三位學生參與前、後測，其餘學生改採問卷方式。

一、學生表現

(一) 前測成績表現

1. 三位學生的前測成績表現

| 題目 | 學生 A | 學生 B | 學生 C | 正確率 (%) |
|---------------|------|------|------|---------|
| 1. 根式化簡 | X | X | X | 0 |
| 2(1). 根式的加法運算 | O | X | O | 66.7 |
| 2(2). 根式的減法運算 | O | O | X | 66.7 |
| 2(3). 根式的乘法運算 | X | X | X | 0 |
| 2(4). 根式的除法運算 | X | X | O | 33.3 |
| 2(5). 根式的四則運算 | X | X | X | 0 |
| 2(6). 根式的四則運算 | X | X | X | 0 |
| 答對比率 (%) | 28.6 | 14.3 | 28.6 | |

2. 三位學生的後測成績表現

| 題目 | 學生 A | 學生 B | 學生 C | 正確率 (%) |
|---------------|------|------|------|---------|
| 1. 根式化簡 | O | X | O | 66.7 |
| 2(1). 根式的加法運算 | O | O | O | 100 |
| 2(2). 根式的減法運算 | O | O | O | 100 |
| 2(3). 根式的乘法運算 | O | X | X | 33.3 |
| 2(4). 根式的除法運算 | O | X | O | 66.7 |
| 2(5). 根式的四則運算 | O | X | O | 66.7 |
| 2(6). 根式的四則運算 | X | X | X | 0 |
| 答對比率 (%) | 85.7 | 28.6 | 71.4 | |

3. 問卷回饋：

透過活動令我們對數學有種更貼近一步之感 現在才知道根式化簡,是一步一步分解出來的
只要慢慢了解,就不會太難了!

我非常興奮,好久沒有這麼努力的思考了 變得容易懂何為"根式化簡"

根式化簡變得很簡單,雖然數字大的很難計算,但基本都還可以,
我們輪流寫,觀念變得很清楚~

這次活動讓我對根式,這神秘的數字更了解,並且又配著活動來教,更讓人覺得有趣
只是在「根式化簡」中的質因數分解,講的有點快,有些人有點跟不上,而且覺得應該有更適合
的遊戲來了解,不過以整體來看,此次活動十分有趣。

3. 學生前、後測結果比較分析：

- (1) 「根式化簡」部分，學生前測答對率 0%，後測時答對率 66.7%，有顯著的進步，加上問卷學生的回饋，操作活動能讓學生不畏懼數學，同時給予學生足夠思考時間，學生就能理解「根式化簡」。
- (2) 簡易的「根式加減法運算」，不參雜到根式化簡，學生都能正確計算。
- (3) 「根式乘法運算」，前測時發現學生無法理解運算規則，計算 $6\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}$ 所得答案為 $18\sqrt{2}$ ，答對率 0%，後測時雖然答對率僅 33.3%，但錯誤在 $8\sqrt{5} \times 2\sqrt{5}$ 時所得答案為 $16\sqrt{25}$ ，沒有進一步做根式化簡。
- (4) 「根式除法運算」計算過程會將 $6\sqrt{2} \div 3\sqrt{2}$ 計算所得答案寫成 $2\sqrt{2}$ ，教學過後，仍有一位學生將 $8\sqrt{5} \div 2\sqrt{5}$ 寫成 $4\sqrt{5}$ 。
- (5) 「根式四則運算」部分，前、後測表現都很差，從學生作答發現，過多的項，學生就直接放棄，不願動筆計算。

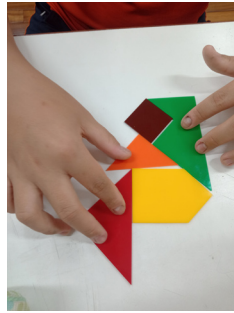
二、教學情形

(一) 拼圖的前導經驗

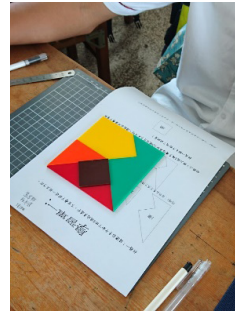
1. 從四片拼塊拼出正方形對學生難度不高，約 5 分鐘內都能試出正確的拼法，容易引起學生動機（學習單二）。但是多加一片，由五片拼圖來拼出正方形，學生嘗試多次都無法完成任務。



四片拼塊拼圖中



嘗試五片拼圖



投機的拼法

2. 這時教師引導學生利用學習單三五個小拼圖的邊長與面積，讓學生思索拼出來正方形的面積應該是多少 (144)，滿足學員直觀的體驗 (學習單三)。學生思考從小拼圖的邊長如何組合，才能湊出大正方形的合理邊長 (12)。引導學生在學習單的紙背上先畫出邊長 12 公分的大正方形，經過十多分鐘的嘗試，開始有學生拼出大正方形。

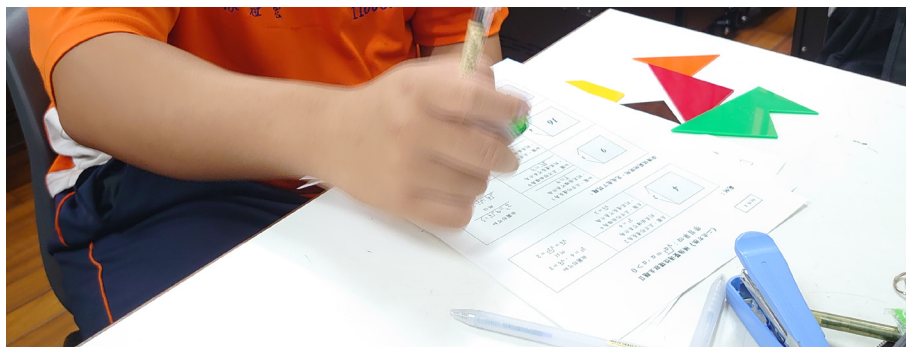


依據學習單三面積邊常條件完成拼圖

3. 當 5 塊拼片活動完成後，讓學生重新將 4 塊拼片拼成的正方形，討論其面積為 128，同時問學生邊長為多少時？學生竟大喊沒有這樣的正方形，請學生看看自己桌上拼出的圖形後，學生又喊那一定有甚麼表示法？

(二) 根式化簡的引入及運算

1. 因為學生已在學期間學過根號。加上第 1 節課的活動操作，因此從正方形面積與邊長關係引導根號數，學生的學習比較順利 (學習單四、五)。



完成學習單四、五

2. 同類項撲克牌遊戲活動，學生跟平常抽鬼牌遊戲一樣玩法，完全沒有運用到同類方根概念。
3. 在方根內同數字的根式加減法運算練習上，從複習一元一次式化簡的舊經驗，讓學生理解根式的加減法運算表徵類似一元一次式化簡，結合舊經驗加深對根式加減及根式化簡的概念。
4. 在根式的乘法運算中，導入的實作經驗對學生幫助很大。以往是利用質因數分解的概念直接跟學生講述化簡的運算規則（根號內的次方數化簡到根號外要少一半），這一次透過主題III（學習單六）面積分別為8、12、48、80的四個正方形分別切割為9個、4個、16個、16個小正方形的過程，讓學生藉由邊長的變化有實際的感受。

（三）根式的四則運算

1. 時間有限，學生練習不足，運算時顯得手忙腳亂。

三、教學反思與建議：

透過拼圖的經驗強化學生對根號的直觀經驗；藉由大正方形切割為小正方形的邊長變化引導學生了解根號化簡的核心概念。具體的操作雖然較花時間，但整個學習過程，學生熱衷操作，也願意跟隨教師的引導，嘗試動筆運算。

（一）反思

1. 拼圖的前導經驗

- (1) 使用5片拼片拼成正方形時，雖然學生拼不出來但仍不放棄，甚至擋著不讓老師給條件，看到學生的學習熱情及不放棄的精神，所以將活動時間延長，但也因此影響到後續活動進行的時間。
- (2) 學習單三已給予五個小拼圖的邊長與面積，但學生對學習單三的邊長、面積數據不信任，仍拿尺測量長度後，才進行拼圖活動，耽誤活動時間。
- (3) 當學生認為沒有面積128這樣的正方形時，可以肯定我們一開始認為學生對面積不是完全平方數的正方形沒有認同感的想法。藉由拼片活動，讓學生認定「一定有甚麼表示法？」時，此時學生就能順利學習「根式符號」概念。
- (4) 附件15的5片拼片模板，列印紙張剪下使用，容易捲角，僅能使用一次，且容易因列印關係，造成長度跑掉；若壓克力開模製作，成本較高，取得較不方便。

2. 根式化簡的引入及運算

- (1) 根據學生的問卷反應，根式化簡示範時，說明稍快，讓他有點跟不上。而透過根式化簡學習活動，學生一致認為根式化簡便容易了。

- (2) 同類項撲克牌遊戲活動中，市售撲克牌取得方便，但撲克牌數字只到 13，能使用的同類項類型不多，學生的挑戰度不高，容易就沒有興趣。另外撲克牌每個數字的張數為偶數，學生即使沒有用到同類方根概念，也可玩鬼牌。
- (3) 同數字方根加減法的練習上，利用複習一元一次式化簡，結合舊經驗以加深對方根加減化簡的概念。在複習一元一次式化簡時，學生學習狀況不同，耗費不少時間。
- (4) 從學生對根式化簡的學習狀況，可知在根式的乘法運算中，導入的實作經驗對學生理解 $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ 的概念，不再只是當口訣背誦，對學生的計算幫助很大。

3. 根式的四則運算

讓學生對根式加、減、乘、除法運算一一熟悉後，我們以為四則運算這部分，學生應該可以很快就熟悉，因此，四則運算部分，就沒有多花時間去引導學生。但從後測的結果，發現學生在這部分仍然處於不知從何計算起的狀況，

(二) 建議

1. 拼圖的前導經驗

- (1) 學生熱衷於拼片活動，為鼓勵學生的學習可增加節數，讓學生享受活動思考的樂趣。或一開始即嚴格掌控時間，以利活動進行；或跳過 4 塊拼片活動，直接給予五塊拼片的面積及邊長，進行學習單三活動。
- (2) 考量學生不信任數據，也可讓學生自行量測拼片邊長，並引導學生計算每塊拼片的面積，讓學生更能有直觀的體驗。
- (3) 學生對正方形的經驗，僅建立在邊長為有理數的時後，建議要藉由操作活動，增加學生對面積不是完全平方數的正方形的認同感。
- (4) 若不方便使用 5 片拼片，則可以七巧板來取代，一樣運用 2 片、3 片、--- 等組成正方形，反推長度概念來學習。

2. 根式化簡的引入及運算

- (1) 「根式化簡」部分 (學習單六)，需依學生學習狀況來調整示範的說明速度，避免讓學生跟不上學習步調。
- (2) 現有撲克牌數字只到 13，質數過多，容易讓學生失去興趣，可使用空白撲克牌，依學生狀況填寫數字。若直接使用撲克牌，可將數字 2、3、8、12 各抽出一張，強迫學生在遊戲中運用到同類方根概念。
- (3) 複習一元一次式化簡時，耗費不少時間，若教學時間有限，依學生的學習狀況，決定是否要從複習一元一次式化簡開始，可省略複習直接談論根式加減運算。
- (4) 計算口訣背誦，學生容易忘記或僅記憶但不會運用，建議逐步引導，能讓學生更熟悉運算的概念。

3. 根式的四則運算

雖然讓學生對根式加、減、乘、除法運算依序熟悉，但面對較複雜計算時，學生仍然會沒信心，因此在四則運算這部分，仍需多些時間帶領學生一步一步練習，加強熟悉度，並且先從簡易算式，建立學生自信心。

國中數學領域 補強課程模組 2

八年級 畢氏定理

- 臺中市立溪南國民中學 張廷吉組長
- 臺中市立五權國民中學 莊估達老師

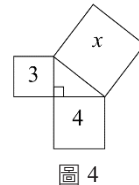
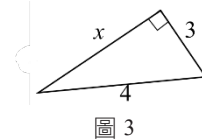
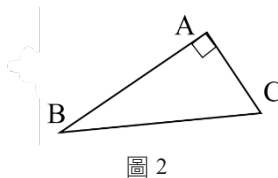
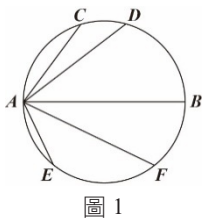
設計 理念



畢氏定理的影響及一般化可應用到相當廣泛的領域，稱其為數學上最重要之基本定理並不為過。天文學家克卜勒（Kepler）認為畢氏定理為幾何學上的黃金，其在幾何學中所佔之份量可見一般。算術和幾何原本是不相關的領域，算術肇基於記數，是一個典型的離散過程。當計算過程結束時，算術的事實可以很清楚的被瞭解。而人們也不會期望從數值本身得到什麼意義。但幾何則不同，幾何處理線段、曲線、面等等問題，它們是連續而不是離散的物件。人們較希望看到的是幾何的事實而不是藉由計算獲致的結果。畢氏定理在這裡對於算術和幾何兩者之間所隱藏的深層關係，給予了第一個暗示，而且在數學史的發展上其在上述二領域之間處於關鍵性的地位歷久而不衰。關於畢氏定理，讀者可以很容易的發現，它對於像 $3^2+4^2=5^2$ 這樣一個純算術的事實，存在於其中一個幾何的解釋。（引自蘇意雯，1999）

在每年的會考與科技化評量系統篩選測驗診斷評量中，學生在學習表現 s-IV-7(理解畢氏定理與其逆敘述，並能應用於數學解題與日常生活的問題) 錯誤率很高，如 111 年 5 月篩選測驗錯最多前五題中第 8 題坐標平面上， $A(-1, 0)$ 、 $B(7, 0)$ 、 $C(7, 6)$ 為直角三角形的三個頂點，求 $\overline{AC} = ?$ 全國答對率為 39%；第 17 題王老先生有一塊直角三角形的農地，比較短的兩邊長度分別為 8 公尺和 10 公尺，請問第三邊的長度為多少公尺？全國答對率為 41%；111 年教育會考第 21 題評量學生是否能根據畢氏定理與圓的性質論證弧長之間的關係，有一直徑為 \overline{AB} 的圓，且圓上有 C 、 D 、 E 、 F 四點，其位置如圖 1 所示，若 $\overline{AC} = 6$ ， $\overline{AD} = 8$ ， $\overline{AE} = 5$ ， $\overline{AF} = 9$ ， $\overline{AB} = 10$ 則下列弧長關係何者正確？全國答對率為 41%。我們再進一步分析學生容易產生的迷失概念有三種，一是學生對

於斜邊的位置有迷思，如右圖 2 所示， $\angle BAC=90^\circ$ ，學生會誤認為 \overline{AB} 是斜邊；二是學生習慣背誦直角三角形三邊長 3，4，5，給定直角三角形的兩邊長，如圖 3 所示，學生容易誤認為 $x=5$ ；三是一直角三角形的三邊分別有三個正方形，如圖 4 所示，已知兩個正方形面積為 3，4，第三個正方形面積學生容易誤判為 5。



綜合以上，這一個單元需要認識形一直角三角形；數一平方數、平方根。直角三角形需要看角也需要量邊，三個角一個是直角、另外兩個是銳角；觀察到直角時其對邊是最長邊（斜邊），而在直角的相鄰的兩邊稱兩股。其三邊長的關係並非直接的加減乘除，需要透過特殊的觀察，才能察覺到是長度的平方關係，而一般想牽扯到長度的平方，會直接聯想到的是面積。畢達哥拉斯當初發現直角三角形邊長特殊關係時，也是看到了面積的因素，才會想到是透過邊長平方可以達到面積間的運算。其公式的推導上可以查詢到的有數十多種，但要讓國中學生能夠理解的方式，還是首推大正方形分割成小正方形加上 4 個直角三角形。

本模組教材學習，分成「畢氏定理」與「距離公式」兩部分，希望學生理解畢氏定理的意義後，能勇於嘗試學習距離公式，進一步利用畢氏定理解決生活中的問題。期望透過下列的順序逐步建立畢氏定理的概念：

- 一、熟練給邊長求面積：熟悉 1~25 的平方數，如 $24^2=576$ ，能夠讓學生迅速連結 24 與 576 兩數間的連結，以便在未來教導平方根時能夠迅速。
- 二、理解角度的分類到其對邊長度的關係：大角對大邊，並進一步透過找高讓學生能夠看到哪裡有直角三角形。
- 三、透過當初畢達哥拉斯所看到的磁磚，從直角三角形的三邊找正方形，看到小正方形面積 + 中正方形面積 = 大正方形面積。
- 四、推導畢氏定理的公式。
- 五、熟悉畢氏定理並完成邊長間的計算。
- 六、給予已知坐標之兩點，能算出兩點的距離。

課程 架構

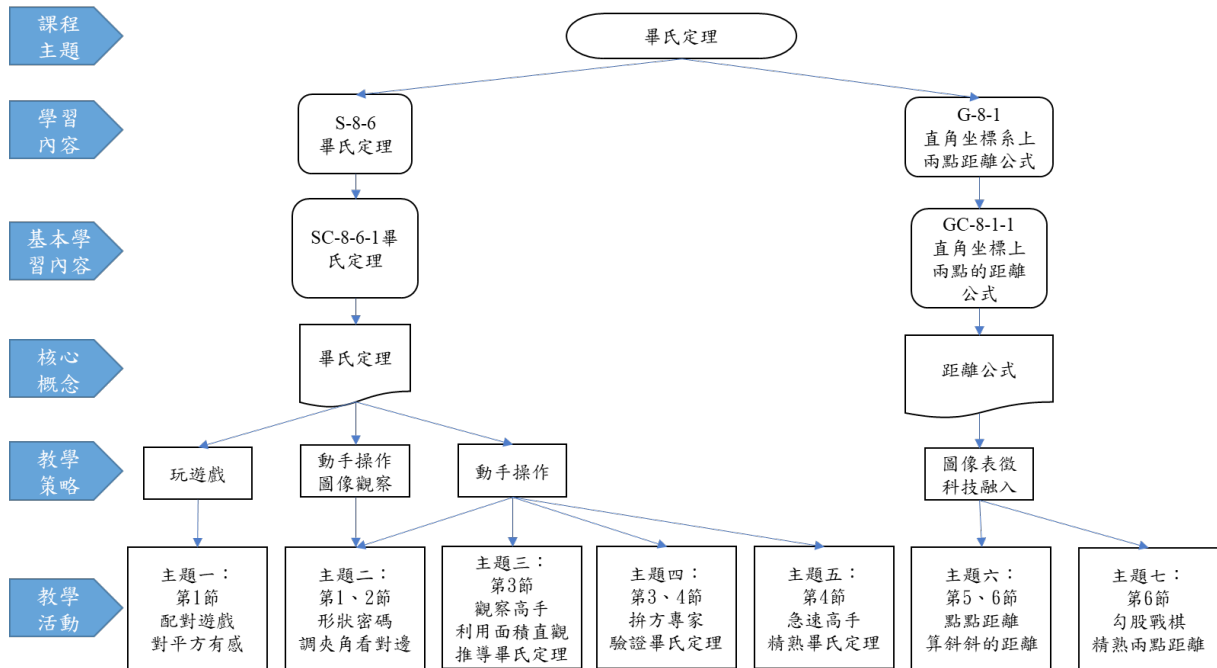


圖 5：單元主題課程架構圖

- (一) 主題一(第1節課)- 配對遊戲: 讓學生對平方有感, 平方跟平方根間的快速轉換, 是根號運算中求快與正確的重要環節, 藉由遊戲化的方式讓學生能熟悉數與平方數之間的關係, 配合活動單(附件1)。
- (二) 主題二(第1、2節課)- 形狀密碼: 藉由扣條組與量角器的操作, 讓學生調夾角看對邊, 發現夾角的增減與對邊長短的關係, 進一步在三角形中找直角, 探討高與垂直的獨特性。最後在等腰直角三角形中, 發現三邊長間的關係, 不是簡單的加減乘除運算, 進一步引出畢氏定理的需求, 配合學習單一(附件2)。
- (三) 主題三(第3節課)- 觀察高手: 透過小小等腰直角三角形框出正方形, 讓學生原汁原味, 體現畢氏定理, 從地磚看到演算法, 藉由操作使得畢氏定理公式成型, 觀察到直角三角形兩邊延伸的兩個小正方形面積和 = 斜邊大的正方形面積, 進而在等腰直角三角形中, 利用面積直觀推導 $(斜邊)^2 = (股長)^2 + (股長)^2$, 配合學習單二(附件3)。

- (四) 主題四 (第 3、4 節課)- 拼方專家：延伸第 3 節課，讓學生動手畫圖，在 3×3 大正方形中，框出小的正方形，利用拼接方式，驗證畢氏定理，配合學習單三 (附件 4) 說明直角三角形三邊長的關係。
- (五) 主題五 (第 5 節課)- 急速高手：以學習單四 (附件 5)，先已知直角三角形兩邊長的情況下，求出第三邊，透過表格整理股長、股長平方、斜邊長、斜邊長平方的關係，從給圖到自己畫圖，希望學生在這單元，藉由競賽遊戲快速算出並且正確回答第三邊邊長，模仿演練計算並強化練習。
- (六) 主題六 (第五、六節課)- 點點距離：藉由循序漸進的方式，從一條數線到兩條交錯的數線，從求直直的距離到算斜斜的距離，讓學生畫出直角三角形，並熟習垂直與水平的距離，進而運用畢氏定理求出兩點的距離，以學習單五 (附件 6) 練習算出兩點的距離。
- (七) 主題七 (第六節課)- 勾股戰棋：結合科技輔助，利用單機版勾股戰棋遊戲強化畢氏定理與兩點距離。

綜合來說，本模組期望學生達成的目標如下：

1. 能理解角度的分類到其對邊長度的關係：大角對大邊，並進一步透過找高讓學生能夠看到哪裡有直角三角形。
2. 能理解以直角三角形三邊分別作出的正方形中，以斜邊為邊長的正方形面積會等於以兩股為邊長的正方形面積之和。
3. 能熟練若 a 、 b 分別為直角三角形的兩股長， c 為斜邊長，則 $c^2 = a^2 + b^2$ 。
4. 能熟練若 a 、 b 、 c 為三角形三邊長且 $c^2 = a^2 + b^2$ ，則該三角形為直角三角形。
5. 能利用畢氏定理解決生活中的問題。
6. 給予已知坐標之兩點，能算出兩點的距離。

教材分析



(一) 本補強課程模組之重要性

畢氏定理是國中數學最重要的基本定理，可應用到相當廣泛的領域，進而看形需要數，有數即判形，畢氏定理對於算術和幾何兩者之間所隱藏的深層關係，給予了直接的橋樑，因此，如何讓學生能有學習的動機，願意學習「畢氏定理」的概念是非常重要的。本模組教材課程內涵與其他教材學習內容間的關係如圖 6。

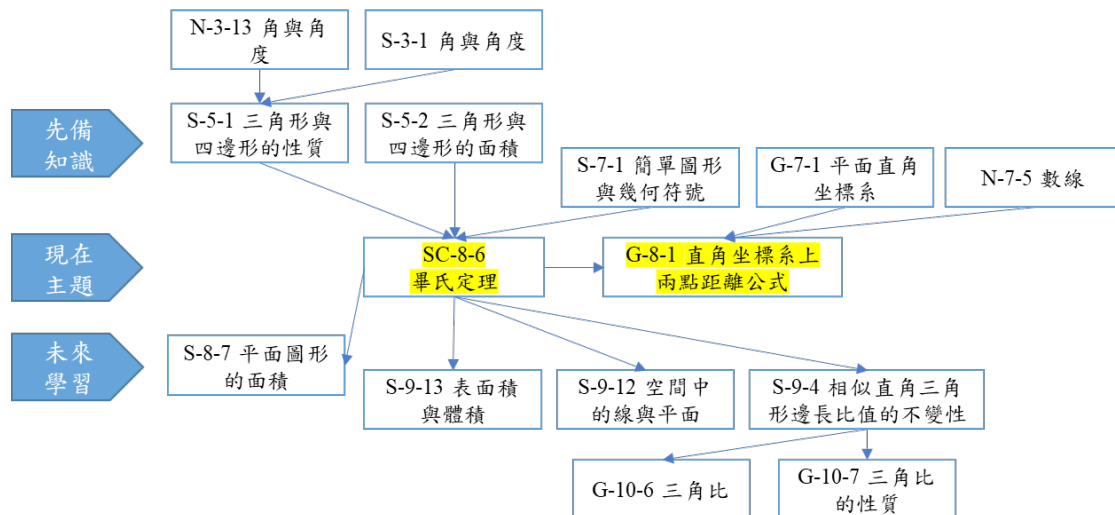


圖 6：課程內涵與其他學習內容間的關係

(二) 本補強課程模組之內容分析

本模組「畢氏定理」教材學習內容，分為「畢氏定理」與「距離公式」兩部分，希望學生理解畢氏定理的意義後，能勇於嘗試學習距離公式，進一步利用畢氏定理解決生活中的問題。本模組教材基本學習內容，如圖 7。

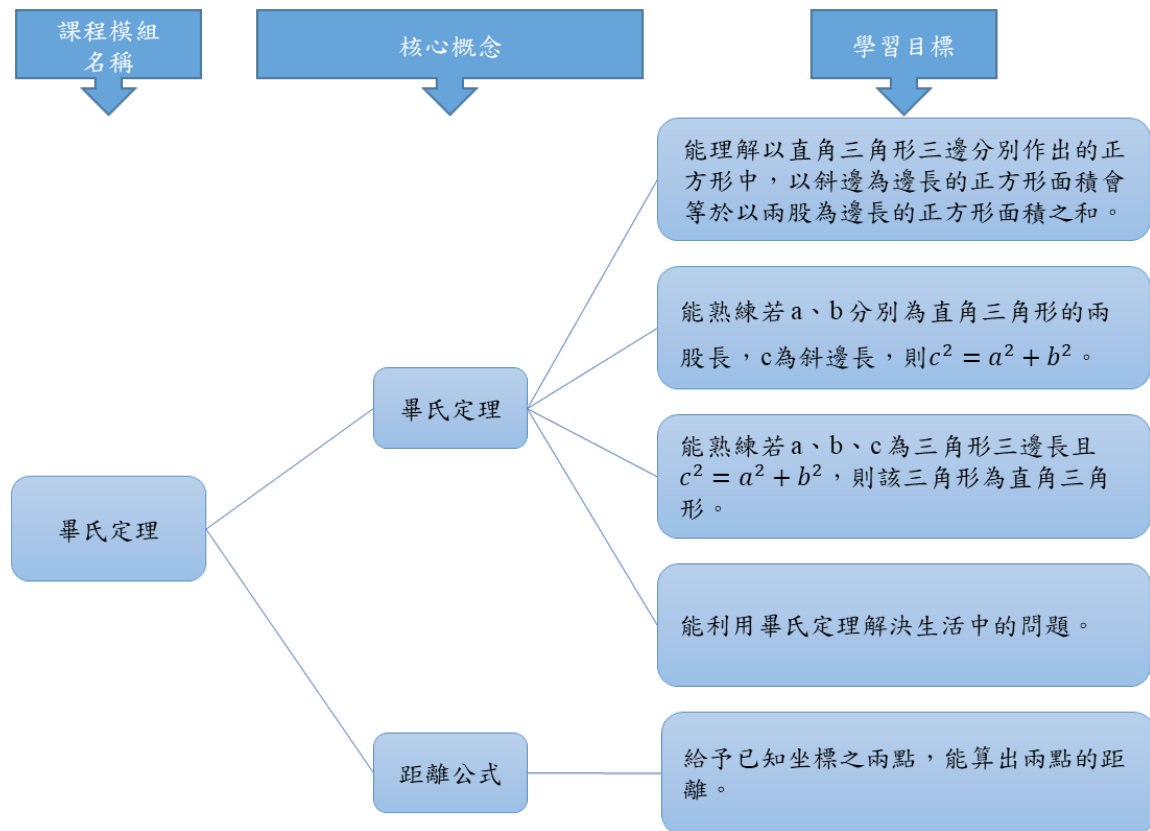


圖 7：單元主題教材內容分析

(三) 教材分析與課程架構的關係

本模組教材從理解「畢氏定理」到「距離公式」，都是環繞著畢氏定理的概念學習及運算，以遊戲化、動手做引入概念學習，讓學生原汁原味，體現畢氏定理，從地磚看到演算法，藉由操作使得畢氏定理公式成型。兩點的距離是讓學生畫出直角三角形，並熟習垂直與水平的距離，進而運用畢氏定理求出距離，最後再以科技融入的方式，運用數位遊戲強化畢氏定理與兩點距離。本單元教學過程中的教材內容與課程架構的關聯，如表 1：

表 1：本補強課程模組教材分析與課程架構之關係性說明

| 課程模組核心概念 | 學習活動 | 教學策略 | 教學內涵 |
|----------|-------------|-----------------|--|
| 畢氏定理 | 玩玩看 配對遊戲 | 主題一 (第 1 節課) | 讓學生對平方有感，平方跟平方根間的快速轉換，是根號運算中求快與正確的重要環節，藉由遊戲化的方式讓學生能熟悉數與平方數之間的關係。 |

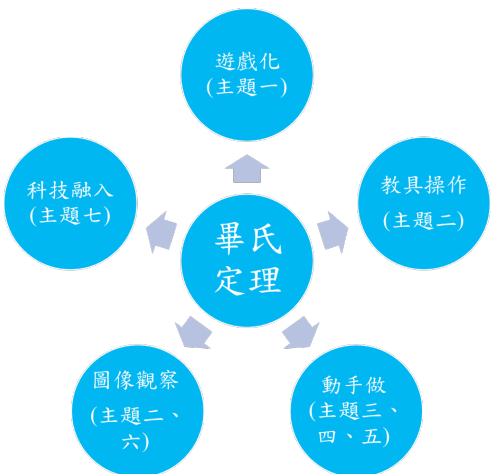
| 課程模組核心概念 | 學習活動 | 教學策略 | 教學內涵 |
|----------|-------------|-------------------|--|
| 畢氏定理 | 做做看 形狀密碼 | 主題二 (第 1、2 節課) | 藉由扣條組與量角器的操作，讓學生調夾角看對邊，發現夾角的增減與對邊長短的關係，進一步在三角形中找直角，探討高與垂直的獨特性，進一步引出畢氏定理的需求。 |
| | 畫畫看 觀察高手 | 主題三 (第 3 節課) | 讓學生原汁原味，體現畢氏定理，從地磚看到演算法，藉由操作使得畢氏定理公式成型，利用面積直觀推導(斜邊) ² =(股長) ² +(股長) ² 。 |
| | 畫畫看 拼方專家 | 主題四 (第 3、4 節課) | 讓學生動手畫圖，在 3×3 大正方形中，框出小的正方形，利用拼接方式，驗證畢氏定理，配合學習單三說明直角三角形三邊長的關係。 |
| | 跟跟看 急速高手 | 主題五 (第 4 節課) | 透過表格整理已知直角三角形兩邊長條件，來求第三邊，從給圖到自己畫圖，並藉由競賽遊戲快速算出並且正確回答第三邊邊長，模仿演練計算並強化練習。 |
| 距離公式 | 做做看 點點距離 | 主題六 (第 5、6 節課) | 讓學生畫出直角三角形，並熟習垂直與水平的距離，進而運用畢氏定理求出兩點的距離，以學習單引導練習算出兩點的距離。 |
| | 玩玩看 勾股戰棋 | 主題七 (第 6 節課) | 結合科技輔助，利用單機版勾股戰棋遊戲強化畢氏定理與兩點距離。 |

教學 計畫



| | |
|----------------------------|--|
| 模組名稱 | 數形關係—畢氏定理 |
| 授課節數規劃 | 六節課 |
| <p>學習重點 (內容、概念、能力)</p> | <p>學習內容</p> <p>S-8-6 畢氏定理：畢氏定理（勾股弦定理、商高定理）的意義及其數學史；畢氏定理在生活上的應用；三邊長滿足畢氏定理的三角形必定是直角三角形。</p> <p>g-IV-1 認識直角坐標的意義與構成要素，並能報讀與標示坐標點，以及計算兩個坐標點的距離。</p> <p>學習表現</p> <p>s-IV-7 理解畢氏定理與其逆敘述，並能應用於數學解題與日常生活的問題。</p> <p>G-8-1 直角坐標系上兩點距離公式：直角坐標系上兩點 $A(a, b)$ 和 $B(c, d)$ 的距離為 $\overline{AB} = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$；生活上相關問題。</p> <p>基本學習內容</p> <p>SC-8-6-1 畢氏定理。</p> <p>GC-8-1-1 直角坐標上兩點的距離公式：若 $A(a, b)$，$B(c, d)$ 則 $\overline{AB} = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$</p> <p>AC-7-2-2 一元一次方程式解的意義。</p> <p>基本學習表現</p> <p>SCP-8-6-1-1 理解以直角三角形三邊分別作出的正方形中，以斜邊為邊長的正方形面積會等於以兩股為邊長的正方形面積之和。</p> <p>SCP-8-6-1-2 熟練若 a、b 分別為直角三角形的兩股長，c 為斜邊長，則 $c^2 = a^2 + b^2$。</p> <p>SCP-8-6-1-3 熟練若 a、b、c 為三角形三邊長且 $c^2 = a^2 + b^2$，則該三角形為直角三角形。</p> <p>SCP-8-6-1-4 能利用畢氏定理解決生活中的問題。</p> <p>GCP-8-1-1-1 給予已知坐標之兩點，能算出兩點的距離。</p> |

| | |
|--------|--|
| 適用對象 | <p>學習本模組前，學生須學會以下學習內容</p> <p>N-3-13 角與角度（同 S-3-1） 以具體操作為主。初步認識角和角度。角度的直接比較與間接比較。認識直角。</p> <p>S-5-2 三角形與四邊形的面積 操作活動與推理。利用切割重組，建立面積公式，並能應用。</p> <p>N-8-1 二次方根 二次方根的意義；根式的化簡及四則運算。</p> <p>N-8-2 二次方根的近似值 二次方根的近似值；二次方根的整數部分；十分逼近法。使用計算機$\sqrt{\quad}$鍵。</p> |
| 教學連結建議 | <p>銜接概念：聯立方程式、線型函數、一元二次方程式、直角坐標系</p> <p>S-8-7 平面圖形的面積：正三角形的高與面積公式，及其相關之複合圖形的面積。</p> <p>S-9-4 相似直角三角形邊長比值的不變性：直角三角形中某一銳角的角度決定邊長比值，該比值為不變量，不因相似直角三角形的大小而改變；三內角為 30°、60°、90° 其邊長比記錄為「$1:\sqrt{3}:2$」；三內角為 45°、45°、90° 其邊長比記錄為「$1:1:\sqrt{2}$」。</p> <p>G-10-6 三角比：定義銳角的正弦、餘弦、正切，推廣至廣義角的正弦、餘弦、正切，特殊角的值，使用計算機的 \sin, \cos, \tan 鍵。</p> <p>G-10-7 三角比的性質：正弦定理，餘弦定理，正射影。連結斜率與直線斜角的正切，用計算機的反正弦、反餘弦、反正切鍵計算斜角或兩相交直線的夾角，（三角測量 #）。</p> |
| 學習目標 | <ol style="list-style-type: none"> 1. 能熟練給邊長求面積，熟悉 1~25 的平方數，如 $24^2=576$，能夠讓學生迅速連結 24 與 576 兩數間的連結，以便在未來教導平方根時能夠迅速。 2. 能在直角、銳角、鈍角探詢角度與邊的關係，和銳角與鈍角三角形畫高。 3. 透過當初畢達哥拉斯所看到的磁磚，從直角三角形的周邊找正方形，看到小正方形面積 + 中正方形面積 = 大正方形面積。 4. 能推導畢氏定理的公式。 5. 能熟悉已知直角三角形兩邊長，推導出第三個邊長。 6. 在直角坐標平面中，算出非垂直或水平的兩點距離。 |

| | |
|-------------|--|
| <p>教學策略</p> |  <ol style="list-style-type: none"> 1. 教學活動中，加入紙牌遊戲、數位遊戲，強化學生的概念學習。 2. 讓學生結合教具操作、動手畫圖，並透過分組合作活動，體驗當初畢達哥拉斯從特定磁磚當中看到直角三角形的面積關係，並進一步驗證畢氏定理。 3. 透過操作活動及討論探究，引導學生進入畢氏定理概念的學習。 4. 以「提問教學法」配合「活動融入教學」的方式進行課程。 5. 以「模仿教學法」引導學生進行運算。 |
| <p>教學材料</p> | <ol style="list-style-type: none"> 1. 活動單 (附件 1) 2. 學習單 (附件 2~ 附件 6) 3. 直尺、三角板、量角器與扣條：各組一副 (搭配主題二、四) |


主題一：【配對遊戲】

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|--|---|
| <p>一、準備活動：口頭提問</p> <p>複習正方形邊長與面積關係</p> <p>提問 1：正方形的邊長為 4 公分，則其面積是多少平方公分？</p> <p>提問 2：正方形的邊長為 5 公分，則其面積是多少平方公分？</p> <p>提問 3：正方形的面積為 14 平方公分，則其每邊長是多少公分？</p> <p>提問 4：正方形的面積為 16 平方公分，則其每邊長是多少公分？</p> <p>提問 5：正方形的面積為 25 平方公分，則其每邊長是多少公分？</p> | <p>教師口頭提問</p> <p>學生口頭回答</p> <p>可依學生回答狀況調整提問數量</p> |

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|---|---|
| <p>二、發展活動</p> <p>(一) 活動說明</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 分組競賽，每組 3~4 人。 2. 印製”邊長 1~25”兩副、與對應邊長之”面積 1~625”（完全平方數）兩副共 100 張。 3. 學生拿到活動單之後，可以用計算機先行計算 1~25 的平方數，計算後給予時間讓學生記憶這些數的平方數。 <p>(二) 活動流程</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 將所有的牌洗一洗後，4 個人一組，每人發下 8 張牌，並在桌面上翻開 6 張牌，剩餘的牌放置在桌子中央。 2. 組內選定第一個抽牌的學生，並依循相同方向順序。每位學生尋找桌上或手上可以完成正確的邊長與面積配對關係，若可以配對就可以捨牌。若不行則在抽牌後，丟出一張手中的牌卡至桌面上。 3. 按照上面的遊戲規則循環至某一位學生將手中的牌全部配對成功，或桌上無牌可抽時遊戲結束。 4. 學生手中的牌最少為贏家、反之為輸家。 <p>三、總結與回顧</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 想請問各位同學，在大於 1 的數當中，其平方數會比平方根（原數）大或小？ 2. 請問這一位獲勝的同學，能夠拿高分的秘訣是甚麼呢？ | <p>紙牌需事先準備，參考附件 1-2</p> <p>遊戲的宗旨在於學生能夠連結迅速連結平方數與完全平方數的概念，讓未來小孩在運作完全平方數時，速度能快一些。</p> |

主題二：【形狀密碼】

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|---|---|
| <p>一、準備活動</p> <p>(一) 發教具</p> <p>GeoStix 扣條組（內容物有 15、14.14、12.24、8.66、7.07、5、2.5 各兩個扣條）、量角器、直尺一個。</p> | <p>待補強學生對學習大部分欠缺學習動力，教學上以引起學生的學習動力為主要考量，藉由操作的觀察作為起點，透過簡單數據的比較看出角度對邊的關係。</p> |

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|---|---|
| <p>(二) 使用方式：</p> <ol style="list-style-type: none"> 給每位同學 8.66 公分的扣條兩隻，並扣在量角器的前與後 (如右圖所示)。  <ol style="list-style-type: none"> 固定 B 扣條旋轉 A 扣條，讓學生了解角度從小角度到大角度，能夠閱讀量角器上面的數字。 拿著一根直尺，量測兩扣條尖端間的長度。並試著完成學習單一的表格內容與下面的提問。 <p>(三) 教師提問：</p> <ol style="list-style-type: none"> 你們在兩扣條的尖端，可以看到線段長嗎？ 哪裡是夾角，哪裡是夾角的對邊？ 當夾角變大時，它的對邊怎麼了呢？ <p>二、發展活動一：找出三角形的高</p> <ol style="list-style-type: none"> 完成學習單一，在三角形中找到各邊上的高，同一個圖形藉由旋轉，讓學生看到底與其對面頂點，利用直尺標示出指定底邊上的高。 教師提問： <ol style="list-style-type: none"> (1) 請問同學一個三角形當中會有幾個高呢？會有幾個邊上的高呢？ (2) 想要畫邊上的高，如果有直尺跟三角板能夠怎麼較精準的畫，如果只有直尺該怎麼畫呢？ 教師總結：三角形的高是形體在算面積時很重要的一個元件。高的作法是將底放置在桌面，唯一離開桌面的點到桌面的鉛直距離，當底邊不夠長時，我們延長底邊就可當成新的桌面了。 <p>三、發展活動二：形狀密碼</p> <ol style="list-style-type: none"> 請你利用直尺與量角器，量一量學習單兩個腰直角三角形的形狀密碼 (角度與長度) 教師提問：直角三角形斜邊的長度，量測出來不是股長 3 公分的整數倍，感覺起來也不是 $\frac{N}{10}$ 倍，感覺長度不是乘出來的，但也不是加出來的，那它們之間的關係為何呢？ | <p>本段概念在鋪陳上，旨在讓學生能有從邊看角，銳角的對邊短，在角度變大的時候其對邊也逐漸在拉長。</p> <p>學生對於量測兩扣條尖端間的長度會有疑問，提醒學生可以扣條凸起來的中心點來進行量測，是一個近似值。</p> <p>三角形有高才能有面積，而高是底邊到頂點的最短距離，最短是垂直。故想求高的長度需要有一組直角三角形。</p> <p>讓學生有感覺進而引發畢氏定理的需求</p> <p>在練習題中希望學生能夠學習，當底不在底面時 (6 點位置)，能否正確畫出高。</p> |

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|--|---|
| <p>四、綜合活動</p> <p>1. 老師講解與重點整理</p> <p>老師藉由巡查將所看到的錯誤，在講臺上統一說明，重點為「想要畫高把底鋪上直尺，在直尺上放上三角板（股的一邊在直尺上，移動三角板若股上的邊過頂點，則描繪股邊即為該邊上的高」。</p> <p>2. 回家作業：完成學習單一第 2 頁中間的【練習】題，畫出指定邊上的高。</p> <p>3. 請學生回家觀看學習影片，並完成自學任務單，網址如下：</p> <p>https://www.youtube.com/watch?v=tijl0c91D7U</p> <p>（第 1、2 節課結束）</p> | <p>自學影片約 6 分多，讓學生能預習畢氏定理的語詞，與初淺的概念，老師將在第 3 節課時在做提點。</p> |

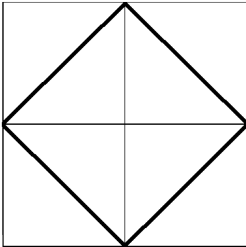
主題三：【觀察高手】

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|---|--|
| <p>一、準備活動</p> <p>1. 班上進行分組，每 4 個人一組，全班共 2~3 小組。</p> <p>2. 回顧第 1、2 節課內容，檢討回家作業學習單一第 2 頁中間的【練習】題及自學任務單（附件 7）。</p> <p>3. 教師提問：</p> <p>(1) 在畫回家作業當中，還記得畫高的技巧嗎？</p> <p>(2) 在回家的影片當中，你看到了哪一些的內容呢？有同學願意分享嗎？</p> <p>4. 教學流程可以參考四學模式</p> <p>(1) 自學：同學已經回家獨立完成學習單。</p> <p>(2) 組內共學：請各組小組長主持組內討論，進行核對答案，哪裡不一樣、不同見解供多元觀點，最後形成共識。</p> <p>(3) 組間互學：老師指定組別組員或抽組別籤發表或舉手搶答。</p> <p>(4) 教師導學：總結整理。</p> | <p>1. 班上進行異質分組，每組 4 人，分組時應注意落單的同學，給予其分組的協助。</p> <p>2. 若學生沒有完成觀看影片及自學任務單，則可在課堂上進行四學模式，程序如下：</p> <p>(1) 教師導讀學習單重點</p> <p>(2) 學生戴耳機看影片寫自學任務單（影片基礎題：1~10；基礎應用題：11~14），提醒學生必要時一定要按暫停或重複看影片。</p> <p>(3) 差異化任務：程度較好的學生可以另外安排均一線上練習，【基礎】利用畢氏定理求直角三角形的第三邊，過關條件為累積對 5 題。</p> <p>(4) 分組討論：請各組小組長主持組內討論，進行核對答案，哪裡不一樣、不同見解供多元觀點，最後形成共識。</p> |

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 | | | | | | | | |
|--|------------|-----|-----|----|-----------|---|---|---|---|
| <p>二、發展活動：概念說明導入一</p> <p>1. 老師依學習單二觀察高手 (附件 3) 第一題做說明，老師示範綠色甲等腰直角三角形三邊的周邊框出正方形，並完成表格。</p> <table border="1" data-bbox="252 1167 842 1339"> <thead> <tr> <th>綠色甲等腰直角三角形</th> <th>股長邊</th> <th>股長邊</th> <th>斜邊</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>等腰直角三角形數量</td> <td>2</td> <td>2</td> <td>4</td> </tr> </tbody> </table> <p>2. 請學生完成紅色乙等腰直角三角形與藍色丙等腰直角三角形任務。</p> <p>3. 請學生分享如何框出正方形。</p> <p>4. 教師提問：</p> <p>(1) 等腰直角三角形中，由三個邊所延伸出的正方形內，小片等腰直角三角形的數量關係為何？</p> <p>(2) 在觀察高手當中，畢達哥拉斯在直角三角形當中看到了正方形的關係式，你們有發現比較大的正方形面積與小的正方形面積的關係？</p> <p>三、發展活動：概念說明導入二</p> <p>若每一個小方格的邊長為 a，則整個大正方形的邊長為 $2a$，整個大正方形的面積為 $(2a)^2$，若中間正方形的邊長為 b，中間小正方形的面積為 b^2，整個大正方形面積 = 中間小正方形 + 4 個等腰直角三角形。</p> | 綠色甲等腰直角三角形 | 股長邊 | 股長邊 | 斜邊 | 等腰直角三角形數量 | 2 | 2 | 4 | <p>(5) 分組分享：1~10 題為老師指定組別回答，該組推派一位孩子回答，如果已經回答過老師提問者即不能再答，答對則該組加一分，答錯則換別組；另外也採用搶答加分的模式，最快舉手的人回答，答對獲得一分，藉此了解孩子們預習的效果。11~14 題為小組上台發表：上台報告的孩子，先報告組別，再將題目敘述一遍，再進行解題說明，其他組別要指出對方回答的正確與否，並適時補充內容。或者是學生寫過程，老師補充說明。</p> <p>觀察並檢視學生的情況，在旁隨時指導。</p> <p>學生無法參考範例引導作答時，可由老師帶領學生一起完成學習單二。</p> <p>小正方形知道面積，但不是完全平方數時，能夠使用平方根的運算概念。</p> |
| 綠色甲等腰直角三角形 | 股長邊 | 股長邊 | 斜邊 | | | | | | |
| 等腰直角三角形數量 | 2 | 2 | 4 | | | | | | |

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|---|-----------------|
| <p>其列式如下：$(2a)^2 = b^2 + 4 \times \frac{a \times a}{2}$</p> <p>稍加整理如下：</p> $4a^2 = b^2 + 2a^2,$ $b^2 = 2a^2,$ $b^2 = a^2 + a^2$ <p>可以想成 (斜邊)² = (股長)² + (股長)² 或是 斜邊 = $\sqrt{2}$ 股長</p> <p>四、回顧與總結：歸納本節所學的重點</p> <p>從大正方形匡列小正方形與四個直角三角形，並能夠列式：大正方形面積 = 小正方形面積 + 4 個直角三角形面積，推得直角三角形的邊長關係為：</p> $(\text{斜邊})^2 = (\text{股長})^2 + (\text{股長})^2$ | <p>可以進行分組搶答</p> |

主題四：【拼方專家】

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|---|---|
| <p>一、準備活動：學習回顧</p> <ol style="list-style-type: none"> 班上進行分組，每 4 個人一組，全班共 2~3 小組。 利用口頭提問方式，強化學生「畢氏定理」的學習。 <div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="flex: 1;"> <ol style="list-style-type: none"> 教師提問 1：根據圖形，整個大正方形面積是由 1 個中間小正方形面積與幾個等腰直角三角形所組合而成。 教師提問 2：面積為 5 的正方形，其邊長記為？ 教師提問 3：面積為 10 的正方形，其邊長記為？ </div> <div style="flex: 1; text-align: center;">  </div> </div> <p>3. 教學流程可以採用四學模式：</p> <ol style="list-style-type: none"> 自學：請同學先獨立完成學習單。 組內共學：請各組小組長主持組內討論，進行核對答案，哪裡不一樣、不同見解供多元觀點，最後形成共識。 組間互學：老師指定組別組員或抽組別籤發表或舉手搶答。 | <p>班上進行異質分組，每組 4 人，分組時應注意落單的同學，給予其分組的協助。</p> <p>教學時採分組合作學習模式，鼓勵學生彼此學習、討論，以達到互教、互學，更深層學習的目的。</p> <p>觀察並檢視學生的情況，在旁隨時指導。</p> <p>學生無法參考老師複習引導作答時，可由老師帶領學生一起完成學習單三任務一。</p> |

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 | | | | | | | | | | | | |
|---|---------|---------|--------------------|--------------------|------|---|---|------------|-------|---|---|---|---|
| <p>(4) 教師導學：總結整理。</p> <p>二、發展活動</p> <p>(一) 組內共學</p> <p>一組 4 人先倆倆共同討論，讓學生完成學習單三任務一。</p> <p>(二) 組間互學</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 學生拿起平板將自己組內的學習單成果 (藉由 padlet、seesaw、或 airDrop) 傳給老師平板，或直接投射到大螢幕方便報告。 2. 由小組程度第 3 位報告，老師請臺下學生查看該組答案及概念是否正確或自身認知相同。 3. 在報告時老師可以提出發問，或在報告完後針對錯誤給予改正。 <p>(三) 教師導學</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 教師提問：畫小正方形有甚麼樣訣竅呢？可以跟同學分享嗎？ 2. 正方形的頂點需要在邊的交點上，應該可以畫出兩種位置不太相同的正方形。 3. 教師提問：畫組成大正方形的時候，會有哪些基本圖形呢？ 4. 教師提問：一個大正方形 = 四個直角三角形 + 小正方形，請問這四個三角形會全等嗎？ 5. 若上面的小方格的邊長都是 1 公分時，大正方形邊長為 3，周邊 4 個直角三角形股長為 1 和 2。 6. 大正方形面積 = 中間正方形面積 + 4 個直角三角形面積，即 $9 = 5 + 4$。 7. 中間正方形面積 = 5。中間正方形邊長 = $\sqrt{5}$。 <table border="1" data-bbox="248 1693 842 1962"> <thead> <tr> <th></th> <th>直角三角形股長</th> <th>直角三角形股長</th> <th>直角三角形斜邊長 = 中間正方形邊長</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>長度數值</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>$\sqrt{5}$</td> </tr> <tr> <td>將數值平方</td> <td>1</td> <td>4</td> <td>5</td> </tr> </tbody> </table> | | 直角三角形股長 | 直角三角形股長 | 直角三角形斜邊長 = 中間正方形邊長 | 長度數值 | 1 | 2 | $\sqrt{5}$ | 將數值平方 | 1 | 4 | 5 | <p>可以運用扣條讓學生操作後再寫學習單。</p> <p>利用指定組別回答與搶答方式進行。老師提問，指定組別回答，該組推派一位同學回答，如果已經回答過老師提問者即不能再答，答對則該組獲得卡片一張，答錯則換別組；另外也採用搶答模式，最快舉手的人回答，答對則該組獲得卡牌一張，藉此了解孩子們學習的效果。</p> |
| | 直角三角形股長 | 直角三角形股長 | 直角三角形斜邊長 = 中間正方形邊長 | | | | | | | | | | |
| 長度數值 | 1 | 2 | $\sqrt{5}$ | | | | | | | | | | |
| 將數值平方 | 1 | 4 | 5 | | | | | | | | | | |

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|--|--------|
| <p>(四) 自學：請同學先獨立完成學習單三任務二、三。</p> <p>(五) 組內共學：請各組小組長主持組內討論，進行核對答案，哪裡不一樣、不同見解供多元觀點，最後形成共識。</p> <p>(六) 組間互學：老師指定組別組員或抽組別籤發表或舉手搶答。</p> <p>三、總結整理</p> <p>教師導學：等等大家可以在看到直角三角形時，說明他們的邊長關係嗎？</p> <p>想要知道直角三角形斜邊的長度，需要知道兩股的長度，它們之間存在下列的關係：</p> $(\text{斜邊})^2 = (\text{股長})^2 + (\text{股長})^2$ <p>(第3節課結束)</p> | |

主題五：【急速高手】

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|---|--|
| <p>一、準備活動：學習回顧</p> <ol style="list-style-type: none"> 想利用正方形面積求邊長時需要用開根號技巧。 教師提問：面積為7的正方形，其邊長記為多少？ 能夠辨別看到直角三角形時，能區分兩股和斜邊。 能夠熟記畢氏定理公式。 教師提問：直角三角形三邊長存在平方的關係，何謂畢氏定理？ <p>二、發展活動</p> <p>(一) 小組討論</p> <p>一組4人先倆倆共同討論，讓學生完成學習單四第1頁。學習單有三種型態題型，包含：</p> <ol style="list-style-type: none"> 已知股求斜邊 已知斜邊求股 邊長不是整數值 | <p>複習的內容希望學生能夠抄寫下來，並反覆默背，因為等會兒在操作時，需要精熟公式與辨識圖形。</p> <p>提醒學生練習時，善加運用學習單的表格。</p> |

教學活動流程設計

教學注意事項

| | | | |
|-----|---|---|----|
| 求斜邊 | 股 | 股 | 斜邊 |
| 長度 | | | |
| 平方 | ↓ | ↓ | ↑ |

| | | | |
|-----|---|---|----|
| 求股長 | 股 | 股 | 斜邊 |
| 長度 | | | |
| 平方 | ↓ | ↑ | ↓ |

希望學生能發現技巧：

- (1) 求斜邊用加的。
- (2) 求股常用減的。
- (3) 知道面積求邊長掛根號。

學生能掌握運算技巧，以便等會進行急速高手時，不需再查看前方算式與概念。

(二) 教師導學

1. 教師提問：在上面練習的題目當中，有學到畢氏定理快速運算的方法嗎？
2. 核對學習單四第 1 頁解答，並請學生提出問題，老師解釋並解惑。可以先讓學生看第 2 頁中的問題，等等將進行急速高手。

(三) 急速高手計時賽

1. 說明競賽規則與獎勵。
老師利用碼表計時，紀錄完成的時間，每答錯一題再加上 20 秒鐘，秒數最少的人就是我們的急速高手，取前三名給予獎勵。
2. 請學生準備好文具。
3. 老師按計時器開始，紀錄每一個孩子紀錄的時間。
4. 當第一個學生完成時，將計時器交給該員，由他記錄其他人的完成時間。
5. 老師進行批閱题目的對或錯。

藉由急速高手，讓學生能夠積極的思考與解決問題，此單元在考試時是一兩個步驟內能解題的課程。希望學習扶助的孩子也能夠達成此要求。

獎品可以是食物或簡單的文具。

知道步驟並精熟學習是這個階段需要學生精練的部分。

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|--|---------------------------|
| <p>三、綜合活動：錯題說明</p> <p>1. 發下已批閱學習單四之【加強練習】急速高手，先公布答案後，請成績較好的學生上臺說明他們的解題方式。老師歸納或讓學生收斂這一部分的解題方式。</p> <p>2. 解題方式</p> <p>(1) 正確畫出圖形</p> <p>(2) 在圖形上標示邊長的平方。</p> <p>(3) 在已知兩邊的情況之下，求斜邊用加、求股用減。</p> <p>(4) 面積換邊長加根號。</p> <p>(5) 答案化成最簡根式。</p> <p style="text-align: right;">(第4節課結束)</p> | <p>可以變換邊或斜邊的數據，請學生熟練。</p> |

主題六：【點點距離】

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|--|--|
| <p>一、準備活動：學習回顧</p> <p>1. 在數線上有三點 $A(-2)$、$B(4)$、$C(-7)$，老師提問：</p> <p>(1) A 點和 B 點的距離為多少個單位長？</p> <p>(2) A 點和 C 點的距離為多少個單位長？</p> <p>2. 教師提問：有哪個同學可以告訴我，在直角坐標平面上，有幾條數線呢？他們有沒有共同的原點呢？</p> <p>3. 在直角坐標平面上有三點 $A(-2,1)$、$B(-2,5)$、$C(3,5)$，老師請問：</p> <p>(1) A 點和 B 點的距離為多少個單位長？</p> <p>(2) B 點和 C 點的距離為多少個單位長？</p> <p>二、發展活動：概念說明導入一</p> <p>1. 教師提問：當你看到斜斜的一個長度，除了用量的之外，給定座標，有辦法用算的嗎？</p> <p>2. 老師依學習單五 (附件 6)【斜直線的長度】一老師講解做說明，將此斜直線想成直角三角形的斜邊長，想求斜邊長需要有兩股。</p> | <p>教學的步驟：給予學生鷹架</p> <p>1. 橫向的數線，位移為右邊減左邊。</p> <p>2. 縱向的數線，位移為上面減下面。</p> <p>3. 想看斜線，可以用橫向的數線和縱向的數線來形容，看出左右位移量與上下位移量。</p> <p>4. 將斜直線及左右位移量和上下位移量類比成直角三角形，由本主題學習成果演算出斜直線距離。</p> |

教學活動流程設計

二、【斜直線的長度】—老師講解

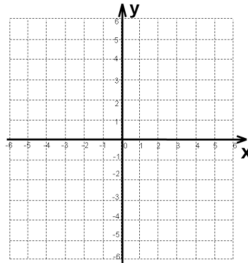
在右圖當中，有三個點 $A(-2, -3)$ 、 $B(-2, 5)$ 、 $C(4, -3)$ ，請問 B 點到 C 點的距離為何？

1、將上面的三個點標示出來
2、將上面三個點，兩兩連接起來會變成甚麼圖形？

3、那些長度可以直接看格子算長度
兩段長度分別為_____和_____。

| 點座標 | 點座標 | 兩點距離 |
|------------|-----------|------|
| $(-2, -3)$ | $(4, -3)$ | 6 |
| | | |

4、利用上面的兩段長度，加上直角三角形的特性，計算出斜斜的長度為多少？



3. 學生完成學習單五第 2 頁【斜直線的長度】—學生練習請學生參考老師講解作答，將複雜步驟進行簡化—學畫直角、學看位移。

二、【斜直線的長度】—老師講解

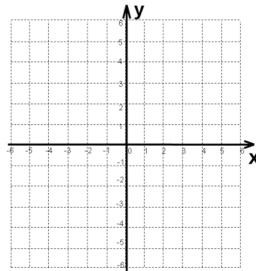
在右圖當中，有三個點 $A(-2, -3)$ 、 $B(-2, 5)$ 、 $C(4, -3)$ ，請問 B 點到 C 點的距離為何？

1、將上面的三個點標示出來
2、將上面三個點，兩兩連接起來會變成甚麼圖形？

3、那些長度可以直接看格子算長度
兩段長度分別為_____和_____。

| 點座標 | 點座標 | 兩點距離 |
|------------|-----------|------|
| $(-2, -3)$ | $(4, -3)$ | 6 |
| | | |

4、利用上面的兩段長度，加上直角三角形的特性，計算出斜斜的長度為多少？



4. 概念說明

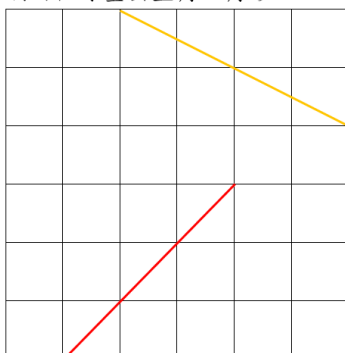
依據學生完成的學生練習（學習單五第 2 頁），引導學生算出斜斜的長度。

三、發展活動：概念說明導入二—面對問題的想法步驟

1. 畫出直角三角形

【已知線段畫出直角三角形】

利用框線畫出直角三角形



教學注意事項

觀察並檢視學生的情況，在旁隨時指導。

學生無法參考老師講解引導作答時，可由老師帶領學生一起完成學習單五。

畫出直立的直線與躺下的直線

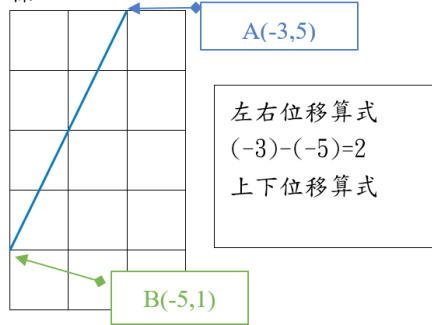
求斜斜的距離第一步是畫出直角三角形

教學活動流程設計

教學注意事項

2. 標示第三點座標。

在下面表格當中，利用已知線段與框線畫出直角三角形，並表示第三點座標。



3. 計算左右位移、上下位移

五、【連連看】將正確的上下對應做連線：

| | | | |
|------------------|------------------|------------------|------------------|
| A(5,8) | C(0,5) | E(0,5) | G(-3,-2) |
| B(3,4) | B(2,2) | F(-1,0) | H(1,3) |
| X 位移 1 Y 位移 5 | X 位移 2 Y 位移 4 | X 位移 4 Y 位移 5 | X 位移 2 Y 位移 3 |

4. 轉化成距離公式並教導演算

想求兩點間距離 (斜邊長度)

$$= \sqrt{\text{股}^2 + \text{股}^2} = \sqrt{X \text{ 位移}^2 + Y \text{ 位移}^2}$$

5. 老師講解學習單五 (附件 6) 第 3 頁算出兩點間的距離

| | |
|--|---|
| 已知 A(5,-2) 和 B(-1,3) 則 \overline{AB} = X 位移()單位、Y 位移()單位 $\overline{AB} = \sqrt{(\quad)^2 + (\quad)^2} = \sqrt{(\quad) + (\quad)}$ = $\sqrt{\quad}$ | 已知 A(2,3) 和 B(7,-2) 則 \overline{AB} = X 位移()單位、Y 位移()單位 $\overline{AB} = \sqrt{(\quad)^2 + (\quad)^2} = \sqrt{(\quad) + (\quad)}$ = $\sqrt{\quad} = \quad$ (視情況最簡根式) |
|--|---|

四、學生進行【快速反應部隊】練習

五、綜合活動：老師檢討並歸納本章節重點

教師提問：大家有掌握到快速從兩個座標轉化成，左右橫移多少，上下升降多少的技巧嗎？能跟我說說嗎？

想要快速做演算，簡單記憶公式不可少。

在快速反應部隊中，所進行的思考就為這一節課的思路歷程。

主題七：【勾股戰棋】

教學活動流程設計

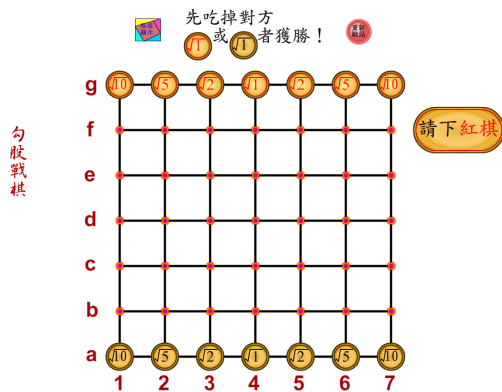
教學注意事項

一、準備活動

- 在中國象棋的規則中，將(帥)是在宮格內前後左右移動，每次1步；士(仕)則是在宮格內斜線行走，每次1步；馬走日、象走田。

2. 教師提問：

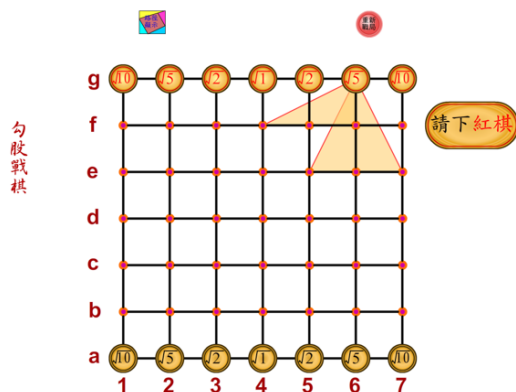
勾股戰棋模仿中國象棋，你覺得在勾股戰棋中， $\sqrt{1}$ 、 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{5}$ 與 $\sqrt{10}$ 應該要怎麼走？為什麼？



二、發展活動：遊戲說明

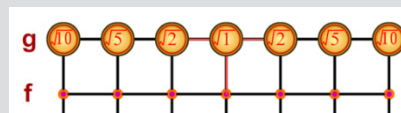
組內兩兩同學進行勾股戰棋對戰活動，一人選擇黑棋，另一人選擇紅棋。

對戰過程中，如果不清楚下一步如何移動，可以點選路徑顯示，每一回合有三次求救機會。如切換路徑顯示模式，將滑鼠移到 $\sqrt{5}$ ，則會顯示 $\sqrt{5}$ 下一步可以走的位置，如下圖所示。

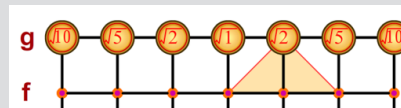


各組需要準備筆電或平板。

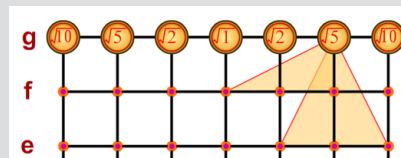
$\sqrt{1}$ ：紅色線段



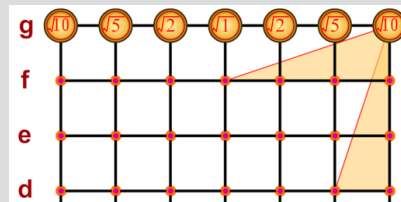
$\sqrt{2}$ ：紅色線段



$\sqrt{5}$ ：紅色線段



$\sqrt{10}$ ：紅色線段



| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|---|----------------------|
| <p>3. 每一回合對戰時間五分鐘，先吃掉對方 $\sqrt{1}$ 者獲勝。若沒有任何一方吃到 $\sqrt{1}$，則由留下棋子最多者獲勝。</p> <p>4. 對戰三個回合，最後統計獲勝最多者給予獎勵。</p> <p>三、回顧與總結</p> <p>教師提問：說說看，在這個遊戲中，你（妳）贏的策略是什麼？如何才能百戰百勝？</p> <p style="text-align: center;">（第 5、6 節課結束）</p> | <p>獎品可以是食物或簡單的文具</p> |

| | |
|----|--|
| 附件 | <ul style="list-style-type: none"> · 附件 1：活動單一（搭配主題一） · 附件 2~6：學習單一 ~ 五（搭配主題二 ~ 六） · 附件 7：前測 · 附件 8：後測 |
|----|--|



附件

請至「國民小學及國民中學學生學習扶助資源平臺」下載

評量工具




評量工具包含有：

1. 理解學生概念學習狀況的課堂口頭提問；
2. 分析學生學習前、後學習效果的前、後測；
3. 測驗學生主題單元概念的運算熟悉程度的附件：學習單。

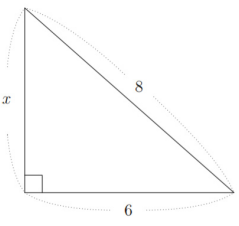
一、口頭提問

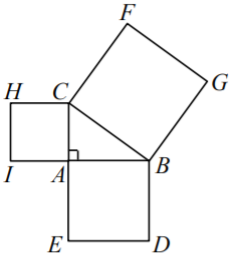
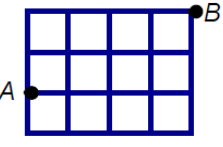
| 提問位置 主題 - 節 - 標題 - 提問順序 | 問題 | 配合物品或附件 |
|----------------------------|--------------------------------------|---------|
| 主題 I-1-2-1 | 想請問各位同學，在大於 1 的數當中，其平方數會比平方根（原數）大或小。 | |
| 主題 I-1-2-2 | 請問這一位獲勝的同學，能夠拿高分的秘訣是甚麼呢？ | |

| 提問位置 主題 - 節 - 標題 - 提問順序 | 問題 | 配合物品或附件 |
|----------------------------|---|---|
| 主題 II-1-4-1 | 你們在兩扣條的尖端，可以看到線段長嗎？ |  |
| 主題 II-1-4-2 | 哪裡是夾角，哪裡是夾角的對邊？當夾角變大時，它的對邊怎麼了呢？ | |
| 主題 II-1-5-1 | 請問同學一個三角形當中會有幾個高呢？會有幾個邊上的高呢？ | |
| 主題 II-1-5-2 | 想要畫邊上的高，如果有直尺跟三角板能夠怎麼較精準的畫，如果只有直尺該怎麼畫呢？ | |
| 主題 III-2-1-1 | 在畫回家作業當中，還記得畫高的技巧嗎？ | |
| 主題 III-2-1-2 | 在回家的影片當中，你看到了哪一些的內容呢？有同學願意分享嗎？ | |
| 主題 III-2-2-1 | 在觀察高手當中，畢達哥拉斯在直角三角形當中看到了正方形的關係式，你們有發現比較大的那兩個了嗎？ | |
| 主題 IV-1-2-1 | 面積為 5 的正方形，其邊長記為？ | |
| 主題 IV-2-3-1 | 畫小正方形有甚麼樣訣竅呢？可以跟同學分享嗎？ | |
| 主題 IV-2-3-2 | 畫組合成大正方形的時候，會有哪些基本圖形呢？ | |
| 主題 IV-2-3-3 | 一個大正方形 = 四個直角三角形 + 小正方形，請問這四個三角形會全等嗎？ | |
| 主題 IV-2-4-1 | 等等大家可以在看到直角三角形時，說明他們的邊長關係嗎？ | |
| 主題 V-3-3-1 | 在上面練習的題目當中，有學到畢氏定理快速運算的方法嗎？ | |
| 主題 VI-4-1-1 | 有哪個同學可以告訴我，在直角坐標平面上，有幾條數線呢？他們有沒有共同的原點呢？ | |
| 主題 VI-4-1-2 | 當你看到斜斜的一個長度，除了用量的之外，給定座標，有辦法用算的嗎？ | |
| 主題 VI-4-3-1 | 大家有掌握到快速從兩個座標轉化成，左右橫移多少，上下升降多少的技巧嗎？能跟我說說嗎？ | |

二、前測、後測

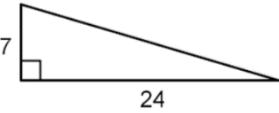
1. 前測

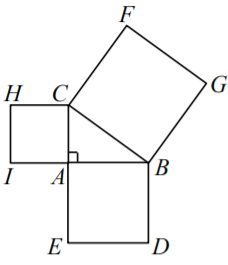
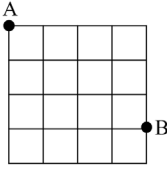
| 試題 | 測驗題目 | 建議評量時間 |
|--------|---|--------|
| | 測驗核心概念 | |
| 第 1 大題 | 1. 下圖為直角三角形，請問 $x = ?$  (A) 4 (B) 10 (C) $\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{28}$ (110 年篩選測驗 8) | 進行教學前 |
| | SCP-8-6-1-2: 熟練若 a 、 b 分別為直角三角形的兩股長， c 為斜邊長，則 $c^2 = a^2 + b^2$ 。 | |
| | 2. 下列哪個選項的三邊長，可以排成直角三角形？ (A) 3、3、5 (B) 5、5、5 (C) $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{5}$ (D) $\sqrt{5}$ 、 $\sqrt{11}$ 、 $\sqrt{14}$ (109 年篩選測驗 17) | |
| 第 3 大題 | SCP-8-6-1-3: 熟練若 a 、 b 、 c 為三角形三邊長且 $c^2 = a^2 + b^2$ ，則該三角形為直角三角形。 | 進行教學前 |
| | 3. 在坐標平面上有 $A(0,3)$ 、 $B(-4,0)$ 兩點，請問 $\overline{AB} = ?$ (A) $\sqrt{7}$ (B) 3 (C) 4 (D) 5 (108 年篩選測驗 18) | |
| | GCP-8-1-1-1: 給予已知坐標之兩點，能算出兩點的距離。 | |

| 試題 | 測驗題目 | 建議評量時間 |
|--------|--|--------|
| | 測驗核心概念 | |
| 第 4 大題 | <p>4. 如圖，$\angle A = 90^\circ$，正方形 ABDE 與正方形 BCFG 的面積分別為 9 和 16，則正方形 HCAI 的面積為何？</p>  <p>(A) 7 (B) 5 (C) $\sqrt{7}$ (D) 25 (108 年篩選測驗 23)</p> | 進行教學前 |
| | <p>SCP-8-6-1-1：理解以直角三角形三邊分別作出的正方形中，以斜邊為邊長的正方形面積會等於以兩股為邊長的正方形面積之和。</p> | |
| 第 5 大題 | <p>1. 某人從一棵大樹出發，向東走 12 公尺，再轉向北走 5 公尺，走到了販賣機，請問販賣機和大樹的距離為多少公尺？</p> <p>(A) 17 (B) 13 (C) 12 (D) 5 (107 年篩選測驗 17)</p> | |
| | <p>SCP-8-6-1-4：能利用畢氏定理解決生活中的問題。</p> | |
| 第 6 大題 | <p>6. 如圖，每個小正方形格子的邊長皆為 1，下列何者可以求出 \overline{AB} 的長？ (106 年篩選測驗 15)</p>  <p>(A) $\sqrt{2^2 + 4^2}$ (B) $\sqrt{3^2 + 5^2}$ (C) $\sqrt{5^2 - 3^2}$ (D) $\sqrt{4^2 - 2^2}$</p> | |
| | <p>SCP-8-6-1-4：能利用畢氏定理解決生活中的問題。</p> | |
| 第 7 大題 | <p>7. 已知一直角三角形，其中斜邊長為 26，下列何者可能為其兩股？ (106 年篩選測驗 19)</p> <p>(A) 10、16 (B) 13、13 (C) 10、24 (D) 20、24</p> | |
| | <p>SCP-8-6-1-2：熟練若 a、b 分別為直角三角形的兩股長，c 為斜邊長，則 $c^2 = a^2 + b^2$。</p> | |

| 試題 | 測驗題目 | 建議評量時間 |
|---------|--|--------|
| | 測驗核心概念 | |
| 第 8 大題 | 8. 若菱形的兩條對角線長分別為 12、16，則此菱形的邊長是多少？ (107 年篩選測驗 22) | 進行教學前 |
| | SCP-8-6-1-4 ：能利用畢氏定理解決生活中的問題。 | |
| 第 9 大題 | 9. 直角三角形的斜邊長為 12 公分，一股長為 9 公分，請問另一股的長是多少公分？(105 年篩選測驗 1) | |
| | SCP-8-6-1-2 ：熟練若 a 、 b 分別為直角三角形的兩股長， c 為斜邊長，則 $c^2 = a^2 + b^2$ 。 | |
| 第 10 大題 | 10. 長方形 ABCD， $\overline{AB} = 3$ ， $\overline{BC} = 1$ ，請問 $\overline{AC} = ?$ (105 年篩選測驗 14) | |
| | SCP-8-6-1-4 ：能利用畢氏定理解決生活中的問題。 | |

2. 後測

| 試題 | 測驗題目 | 建議評量時間 |
|--------|---|-----------------|
| | 測驗核心概念 | |
| 第 1 大題 | 1. 下圖為直角三角形，請問 $x = ?$  (A) $\sqrt{25}$ (B) 17 (C) 25 (D) 31 解：_____。 | 可於第 4 節 課後實施 |
| | SCP-8-6-1-2 ：熟練若 a 、 b 分別為直角三角形的兩股長， c 為斜邊長，則 $c^2 = a^2 + b^2$ 。 | |
| 第 2 大題 | 2. 下列哪個選項的三邊長，可以排成直角三角形？ (A) 3、3、5 (B) 9、12、15 (C) $\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{4}$ 、 $\sqrt{5}$ (D) $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{4}$ 、 $\sqrt{8}$ | 可於第 4 節 課後實施 |
| | SCP-8-6-1-3 ：熟練若 a 、 b 、 c 為三角形三邊長且 $c^2 = a^2 + b^2$ ，則該三角形為直角三角形。 | |

| 試題 | 測驗題目 | 建議評量時間 |
|--------|--|-----------------|
| | 測驗核心概念 | |
| 第 3 大題 | 3. 在坐標平面上有 A(6,0)、B(0,-8) 兩點，請問 \overline{AB} = ? (A) 2 (B) $\sqrt{14}$ (C) 10 (D) 14 | 可於第 6 節 課後實施 |
| | GCP-8-1-1-1 ：給予已知坐標之兩點，能算出兩點的距離。 | |
| 第 4 大題 | 4. 如圖， $\angle A = 90^\circ$ ，正方形 HCAI 與正方形 BCFG 的面積分別為 36 和 64，請問正方形 ABDE 的面積為何？  | 可於第 3 節 課後實施 |
| | (A) 100 (B) 28 (C) 10 (D) $\sqrt{28}$ SCP-8-6-1-1 ：理解以直角三角形三邊分別作出的正方形中，以斜邊為邊長的正方形面積會等於以兩股為邊長的正方形面積之和。 | |
| 第 5 大題 | 5. 小吳在地震園區裡，他從一棵大樹出發，向西走 8 公尺，再轉向南走 15 公尺，走到了販賣機，請問販賣機和大樹的直線距離為多少公尺？ (A) 23 (B) 17 (C) 15 (D) 7 | 可於第 6 節 課後實施 |
| | SCP-8-6-1-4 ：能利用畢氏定理解決生活中的問題。 | |
| 第 6 大題 | 6. 如圖，每個小正方形格子的邊長皆為 1，下列何者可以求出 \overline{AB} 的長？  | 可於第 6 節 課後實施 |
| | (A) $\sqrt{3^2 + 4^2}$ (B) $\sqrt{4^2 + 5^2}$ (C) $\sqrt{5^2 - 4^2}$ (D) $\sqrt{4^2 - 3^2}$ SCP-8-6-1-4 ：能利用畢氏定理解決生活中的問題。 | |
| 第 7 大題 | 7. 已知一直角三角形，其中斜邊長為 26，下列何者可能為其兩股？ (A) 20、24 (B) 10、16 (C) 13、13 (D) 10、24 | 可於第 4 節 課後實施 |
| | SCP-8-6-1-2 ：熟練若 a 、 b 分別為直角三角形的兩股長， c 為斜邊長，則 $c^2 = a^2 + b^2$ 。 | |

| 試題 | 測驗題目 | 建議評量時間 |
|---------|--|-----------------|
| | 測驗核心概念 | |
| 第 8 大題 | 8. 若菱形的兩條對角線長分別為 6、8，則此菱形的邊長是多少？ | 可於第 6 節 課後實施 |
| | SCP-8-6-1-4：能利用畢氏定理解決生活中的問題。 | |
| 第 9 大題 | 9. 直角三角形的斜邊長為 15 公分，一股長為 8 公分，請問另一股的長是多少公分？ | 可於第 4 節 課後實施 |
| | SCP-8-6-1-2：熟練若 a 、 b 分別為直角三角形的兩股長， c 為斜邊長，則 $c^2=a^2+b^2$ 。 | |
| 第 10 大題 | 10. 若長方形的長、寬分別為 5 公分、12 公分，請問此長方形的對角線是多少公分？ | 可於第 6 節 課後實施 |
| | SCP-8-6-1-4：能利用畢氏定理解決生活中的問題。 | |

教學反思 應用建議



本模組選擇臺中市某一國中進行試行，試行時間為學期中第九節時段，幫學習成績低落的九年級學生進行畢氏定理的觀念建立。這一次從理解「畢氏定理」到「距離公式」，都是環繞著畢氏定理的概念學習及運算，以遊戲化、動手做引入概念學習，讓學生原汁原味，體現畢氏定理，從地磚看到演算法，藉由操作使得畢氏定理公式成型。兩點的距離是讓學生畫出直角三角形，並熟習垂直與水平的距離，進而運用畢氏定理求出距離，最後再以科技融入的方式，運用數位遊戲強化畢氏定理與兩點距離，希望透過這一系列的操作方式，對學生的學習是有助益。

一、學生表現

1. 前測成績表現

對象為九位三年級學習扶助學生個案，此為診斷性試題（共 10 題，詳見前測卷），主要目的為了解學生對於學習重點的掌握程度，以便於進行學習扶助教學時，隨學生學習情況調整教學內容。

表 2：前測成績表現表

| 基本學習表現 | 學生 1 | 學生 2 | 學生 3 | 學生 4 | 學生 5 | 學生 6 | 學生 7 | 學生 8 | 學生 9 | 正確率 (%) |
|---|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1. 熟練若 a 、 b 分別為直角三角形的兩股長， c 為斜邊長，則 $c^2=a^2+b^2$ 。 | X | O | X | O | O | O | O | X | X | 55.6 |
| 2. SCP-8-6-1-3 熟練若 a 、 b 、 c 為三角形三邊長且 $c^2=a^2+b^2$ ，則該三角形為直角三角形。 | O | O | X | O | O | O | O | O | O | 88.9 |
| 3. GCP-8-1-1-1 給予已知坐標之兩點，能算出兩點的距離。 | X | X | O | O | O | O | X | X | O | 55.6 |
| 4. SCP-8-6-1-1 理解以直角三角形三邊分別作出的正方形中，以斜邊為邊長的正方形面積會等於以兩股為邊長的正方形面積之和。 | X | O | X | X | X | X | O | X | X | 22.2 |
| 5. SCP-8-6-1-4 能利用畢氏定理解決生活中的問題。 | X | O | O | O | O | O | O | O | O | 88.9 |
| 6. SCP-8-6-1-4 能利用畢氏定理解決生活中的問題。 | X | O | O | X | O | O | O | X | X | 55.6 |
| 7. SCP-8-6-1-2 熟練若 a 、 b 分別為直角三角形的兩股長， c 為斜邊長，則 $c^2=a^2+b^2$ 。 | X | O | O | O | X | O | O | O | X | 66.7 |
| 8. SCP-8-6-1-4 能利用畢氏定理解決生活中的問題。 | X | X | X | O | O | X | X | X | X | 22.2 |
| 9. SCP-8-6-1-2 熟練若 a 、 b 分別為直角三角形的兩股長， c 為斜邊長，則 $c^2=a^2+b^2$ 。 | X | O | X | O | O | O | O | X | O | 66.7 |
| 10. SCP-8-6-1-4 能利用畢氏定理解決生活中的問題。 | X | O | O | O | O | O | O | X | O | 77.8 |
| 答對比率 (%) | 10 | 80 | 50 | 80 | 80 | 80 | 80 | 30 | 50 | 60 |

2. 後測成績表現

表 3：後測成績表現表

| 基本學習表現 | 學生 1 | 學生 2 | 學生 3 | 學生 4 | 學生 5 | 學生 6 | 學生 7 | 學生 8 | 學生 9 | 正確率 (%) |
|---|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1. 熟練若 a 、 b 分別為直角三角形的兩股長， c 為斜邊長，則 $c^2=a^2+b^2$ 。 | O | O | O | O | O | O | O | O | O | 100.0 |
| 2. SCP-8-6-1-3 熟練若 a 、 b 、 c 為三角形三邊長且 $c^2=a^2+b^2$ ，則該三角形為直角三角形。 | X | O | O | O | X | O | O | O | O | 77.8 |
| 3. GCP-8-1-1-1 給予已知坐標之兩點，能算出兩點的距離。 | O | O | O | O | O | O | O | X | O | 88.9 |
| 4. SCP-8-6-1-1 理解以直角三角形三邊分別作出的正方形中，以斜邊為邊長的正方形面積會等於以兩股為邊長的正方形面積之和。 | O | O | X | O | X | X | X | X | X | 33.3 |
| 5. SCP-8-6-1-4 能利用畢氏定理解決生活中的問題。 | X | O | O | O | O | O | O | X | O | 77.8 |
| 6. SCP-8-6-1-4 能利用畢氏定理解決生活中的問題。 | O | O | O | O | O | O | O | O | O | 100.0 |
| 7. SCP-8-6-1-2 熟練若 a 、 b 分別為直角三角形的兩股長， c 為斜邊長，則 $c^2=a^2+b^2$ 。 | X | O | X | O | O | O | O | O | O | 77.8 |
| 8. SCP-8-6-1-4 能利用畢氏定理解決生活中的問題。 | X | X | X | O | O | X | X | X | O | 33.3 |
| 9. SCP-8-6-1-2 熟練若 a 、 b 分別為直角三角形的兩股長， c 為斜邊長，則 $c^2=a^2+b^2$ 。 | X | O | X | X | O | O | O | O | O | 66.7 |
| 10. SCP-8-6-1-4 能利用畢氏定理解決生活中的問題。 | O | O | O | O | O | O | O | O | O | 100.0 |
| 答對比率 (%) | 50 | 90 | 60 | 90 | 80 | 80 | 80 | 60 | 90 | 75.6 |

3. 學生前、後測結果比較分析

根據前後測結果，學生經過學習扶助補強性教學後，整體答對率由 60% 提升至 76%，如果比照會考表現，則由 B 等級提升至 B++ 級。

(1) 在「能理解以直角三角形三邊分別作出的正方形中，以斜邊為邊長的正方形面積

會等於以兩股為邊長的正方形面積之和」的部分，學生前測平均答對率 22.2%，後測平均答對率 33.3%，有顯著的進步，操作活動能讓學生不畏懼數學，同時給予學生足夠思考時間，學生就能理解「畢氏定理」。

- (2) 在「能熟練若 a 、 b 分別為直角三角形的兩股長， c 為斜邊長，則 $c^2=a^2+b^2$ 」的部分，學生前測平均答對率 63%，後測平均答對率 81.5%，有顯著的進步。
- (3) 在「能熟練若 a 、 b 、 c 為三角形三邊長且 $c^2=a^2+b^2$ ，則該三角形為直角三角形」的部分，學生前測平均答對率 88.9%，後測平均答對率 77.8%，有退步的情況，經與學生對話後發現，學生會記憶直角三角形的三邊長有一種情況是 3、4、5，而兩位錯誤的學生只看到 3、4、5 就選了，而忽略了有根號，直接選 $\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{4}$ 、 $\sqrt{5}$ 。
- (4) 在「能利用畢氏定理解決生活中的問題」的部分，學生前測平均答對率 42.2%，後測平均答對率 53.4%，有顯著的進步。
- (5) 在「給予已知坐標之兩點，能算出兩點的距離」的部分，學生前測平均答對率 55.6%，後測平均答對率 88.9%，有顯著的進步。

二、教學反思

本補強課程希望透過遊戲化、動手操作、圖像觀察、科技如入、對話討論等多元策略，逐步說明畢氏定理的概念，避免直接進行抽象的幾何證明，或者流於定理的記憶而無法理解畢氏定理的運用。具體的操作雖然較花時間，但整個學習過程，學生熱衷操作，也願意跟隨教師的引導，嘗試動筆運算。

1. 配對遊戲：遊戲進行前，老師透過表格呈現正方形邊長與對應的面積，讓學生可以快速進入遊戲的預備狀態，有利遊戲活動的進行。
2. 形狀密碼：學生在量測兩扣條尖端間的長度時，會不知道如何測量，因為扣條是一個面，並不是一條線，因此需要提醒學生，可以找扣條凸起來的中心點來進行量測，是一個估計值就可以了。
3. 觀察高手：讓學生原汁原味，體現畢氏定理，從地磚看到演算法是一件不容易做到的事情，所以老師一開始的引導就顯得格外重要，老師可以先選擇紅色紅色乙等腰直角三角形進行引導說明，因為這個直角三角形斜邊做出來的正方形是歪歪斜斜的，這樣可以讓學生清楚明白，框正方形不一定要正正的，也可以斜斜的。
4. 拼方專家：一開始讓學生仿照學習單二的例子，在 3×3 中的大正方形中框出一個小的正方形，學生不知道如何下筆，後來發給每組一包扣條，請學生先拼出四個一樣大小的直角三角形，再請學生利用這四個直角三角形拼出一個正方形，

3. 點點距離：在進行此課程前，可以請學生先自學觀看均一學習影片兩點距離公式與應用 (<https://youtu.be/0ySnFo8p9VI>)，並完成自學任務單，透過有趣狐狸貓動畫，可以增加學生學習動機，並培養自主學習的習慣與能力。
4. 勾股戰棋不適用在生用平板，可以改用 wordwall 遊戲評量模式 (<https://wordwall.net/play/60877/076/699>)，藉由不同遊戲模板提升學生學習動機。

參考文獻

蘇意雯 (1999)。畢氏定理淺談。HPM 通訊，2(7)，1-5。

國中數學領域 補強課程模組 3

八年級

利用十字交乘因式分解

— 臺南市創思與教學研發中心 蘇恭弘研究教師

— 臺南市立永康國民中學 巫佳錚教師

設計 理念



研究者在教學現場中，常常聽到有同學說：「老師，因式分解好難喔！為什麼要學因式分解，尤其是我們常常學會了一個方法之後，只會解決一種題目，此外前面學會的作法，到後面就忘光了」，從同學的回應中，說明了大部份學生學習因式分解時的困境。因為許多學生學習代數運算的概念與會使用的技巧都是純記憶的操作，Gray and Tall(1994) 提出過程概念，說明代數運算中符號所扮演的角色，學生要掌握代數運算的概念需要透過反覆進行代數運算的操作過程，因此要掌握代數的概念，必須透過重複練習運算程序的過程來理解代數概念。但重複練習的過程容易使學生感到無趣，較不易讓學生投入心力進行練習。

鐘惠君（2013）提到因式分解概念有抽象概念時。會有少數學生發生學習上的困難，若教師們不予以協助，對學生立即進行診斷和學習扶助，對學生往後代數的學習會產生障礙，有的學生甚至放棄學習數學，導致未來在數學學習上的低成就。因此讓學生對因式分解單元不感到排斥，願意繼續學習是很重要的事。

因式分解的方法大致分為：提公因式、分組提出公因式、乘法公式、十字交乘等方法，而學生學習的困難常發生的在：一、多項式乘法理解不足或有錯誤概念，二、思維結構上的困難，表現在解題上，可以發現解題者無意義的作答或空白（楊惠雯，2010），常見的因式分解錯誤類型有：一、不會或未分解完全。二、分配律處理不當。三、公式運用錯誤。四、十字交乘法使用錯誤。五、錯誤的運算規則。六、當成方程式求解。七、非使用題目所要求的方式作答。八、其他不正確答案（林宛蓁，2012），學生當然會覺得因式分解很難，所以老師也難以引起學生對因式分解的學習動機，因此本模組想解決的是利用十字交乘法因式分解的問題。

採取「動手操作」讓學生具體地看到因式分解的過程，是不少教學者努力的方向之一，而研究者本人也在碩士論文探討過利用數學步道融入八年級因式分解的教學，對學生學習因式分解成就的影響，研究發現數學步道的動手操作部份，高分組因為本身學習成就較佳，因此，沒有特別的感覺，但是在中分組與低分組部份均覺得有相當的幫助，中分組覺得有幫助同時更瞭解老師上課內容，而低分組覺得有幫助，但對於考試幫助不大，因為之前對於未知數的基礎已不佳，影響他們後續的學習的理解。因此讓學生有適當的動手操作對因式分解的學習有一定的幫助。

在動手操作的部份，先前研究者在論文的研究中採用的活動是類似拼圖的方式，讓學生將以多個正方形、長方形等小物件來拼湊、組合成指定的多項式，這個方式對於二次多項式均是正號時成效相當不錯，也就是對於 $(x+2)(x+3)$ 這樣的類型有很好的效果，但是對於多項式中有負數係出現時，如 $x^2 - 5x - 14$ ，因式分解出來的結果對於 $(x+2)(x-7)$ 這樣的題型，就不容易以拼圖方式呈現，因為會利用到表徵轉換的緣故，有時學生會產生「老師又教了新的做法」的感覺。因此本教材試著不再以拼圖為出發點，直接聚焦在乘法與因式分解的關係，以及多項式因式分解後的因式，與原多項式之間的關係，如此一來不會產生有拼不出圖來的困境，是一個不同的嘗試。

本模組定位在學生的先備知識是已理解因式倍式、二次式的乘法公式、多項式的意義及四則運算、因式分解的意義，並已學會利用提出公因式及乘法公式進行因式分解。學者研究發現遊戲式學習較能吸引學習者專注、投入，因此本模組以數字猜測遊戲切入，「若 p 、 q 為兩整數，知道 $p \times q$ 、 $p + q$ ，求 p 、 q 」，做為十字交乘因式分解法的奠基，讓學生先對數字的「相加」與「相乘」等組合有感，透過全班、分組不同的對戰，在遊戲建立對分解的基本能力；接下來利用已學過的「多項式直式乘法」，將它與「猜數字遊戲」進行連結，使學生感受「多項式乘法」與「因式分解」是一體的兩面，因此不會有學新內容的抗拒；本教材課程的核心思想在於利用「多項式乘法的概念」，讓學生在「玩數字」中簡化紀錄過程，順利完成十字交乘因式分解的目的。

對中小學的學生而言，能夠幫助學生發現學習的內容，讓學生有「我找到了」的成就感，就是鼓勵學生願意繼續主動學習數學最好的動力。本補強教材期望協助學生在操作過程中建構知識，解決學習十字交乘因式分解的困難，試著讓學生只用一種方法，就能完成二次項係數為 1 與不為 1 的因式分解，讓學生能更有信心的迎向解一元二次方程式的學習。

課程 架構



關於本模組涉及的主題及核心概念，如圖 1：

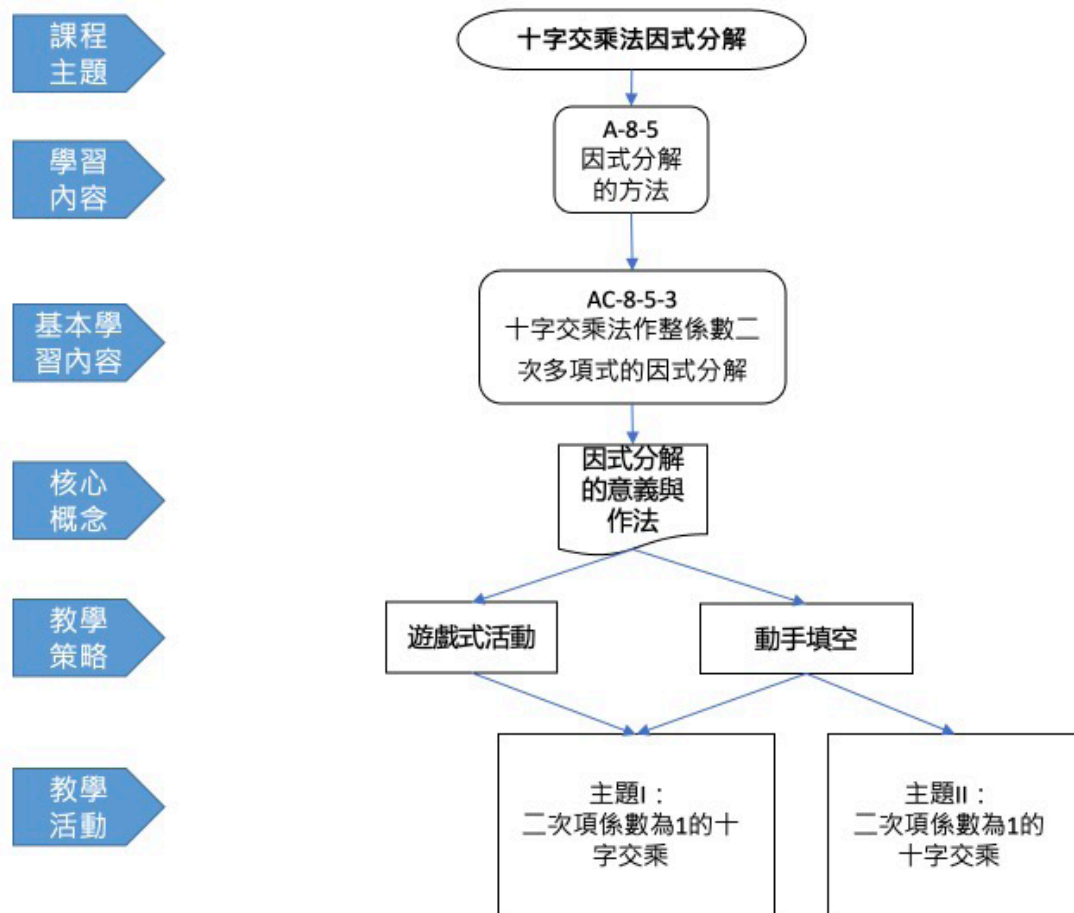


圖 1：課程架構圖

- (一) 主題 I (第 1~2 節課)：配合教師的提問，透過學習單一 (附件 1)，和與積數字猜測遊戲 (附件 5、6)，二人一組，讓學生在遊戲中建立數感，很輕鬆地解決當同學知道兩數的和與兩數的積之後能正確且快速地找出此兩數，為因式分解打好基礎。而且在遊戲中建立學生十字交乘不見得會成功的經驗，為之後引入「配方法」或「公式解」奠立小小的基礎。

- (二) 主題 I(第 3 節課)：延續前 2 節建立的良好經驗，利用筆者自行設計的多項式乘法暨因式分解填空板 A 版(附件 7)，讓學生在處理多項式二次項係數為 1 的十字交乘的過程，逐步幫學生把多項式乘法與多項式的因式分解拉上關係，並從與學生的對話中，使十字交乘因式分解的味道能呈現出來，幫助學生瞭解本做法為何稱為「十字交乘」因式分解法。
- (三) 主題 II(第 4 節課)：當學生可以處理多項式二次項係數為 1 的十字交乘因式分解後，再進入另一個挑戰——多項式二次項係數不為 1 的十字交乘因式分解，配合多項式乘法暨因式分解填空板 B 版(附件 8)，讓學生在嘗試解題的挑戰中，更加穩固多項式乘法與多項式的因式分解的關係。
- (四) 主題 II(第 5 節課)：當學生在進行多項式二次項係數不為 1 的十字交乘因式分解時，會發現不斷嘗試各種數字組合，有點麻煩也有些困難，因此試著將第 3 節所學會的方法進行比較與結合，嘗試讓多項式的十字交乘因式分解的方法統一，配合多項式乘法暨因式分解填空板 B 版(附件 8)，讓第 1 節開始的兩數的和與兩數的積能貫穿整個學習。
- (五) 主題 II(第 6 節課)：當學生已學會多項式二次項係數為 1 與不為 1 的十字交乘因式分解後，提醒學生常見的十字交乘式分解的錯誤類型，使學生在進行十字交乘因式分解時正確率能不斷提升，減少迷思的產生。

教材 分析



(一) 補強課程模組之重要性

本模組主題為「利用十字交乘法因式分解」，學習本單元最終的目的是希望能解一元二次方程式，因式分解正是這個目的的一個重要步驟，國中階段的數學課程中，「因式分解」這個單元安排在八年級的學習內容裡，顏啓麟、羅昭強(1994)與謝豐瑞(1994)及謝豐瑞、屠耀華和洪有情等人(1998)在研究中皆提到因式分解為國中學生數學應學習的一部份，更加凸顯「因式分解」的重要性。

在教學現場發現學生對於因式分解常常陷入解題方法的選擇，例如會用乘法公式因式分解之後，就忘了如何用提出公因式進行因式分解；學會十字交乘因式分解法之後，任何題目都採用十字交乘來因式分解，無怪乎學生會覺得因式分解很難，當然老師也難以引起學生的學習動機，但若教師不予以協助，對學生立即進行診斷和學習扶

助，對學生往後代數的學習會產生障礙，有的學生甚至放棄學習數學，導致未來在數學學習上的低成就。本模組教材課程內涵與其他學習內容間的關係，如圖 2。

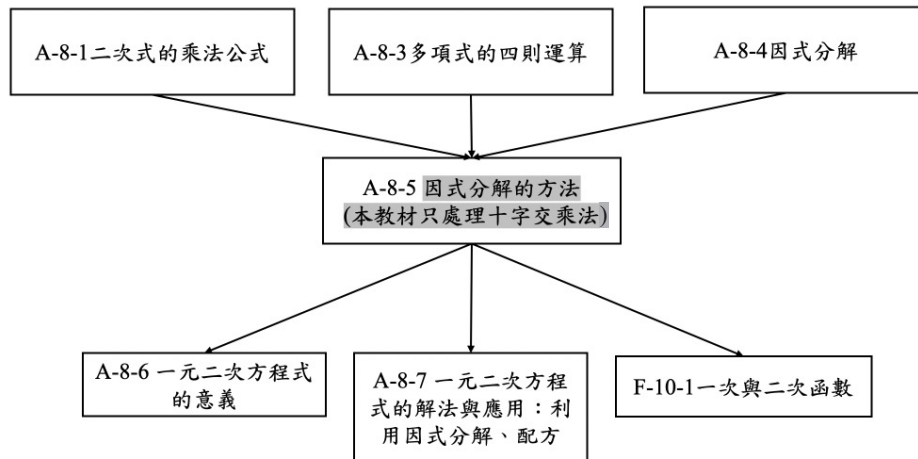


圖 2 課程內涵與其他學習內容間的關係

(二) 補強課程模組之內容分析

本模組「利用十字交乘作因式分解」的教材學習內容，分為「解二次多項式中二次項係數為 1 時的十字交乘因式分解」及「解二次多項式中二次項係數不為 1 時的十字交乘因式分解」二部分，希望學生透過遊戲方式的引入：猜數字遊戲及多項式乘法與因式分解的填空，讓學生不會視因式分解為畏途，反而因為已瞭解多項式乘法與多項式因式分解的關係，而更有解題信心，並為銜接未來解一元二次方程式及接續高中課程的一次與二次函數奠立良好的根基。本模組教材基本學習內容，如圖 3。

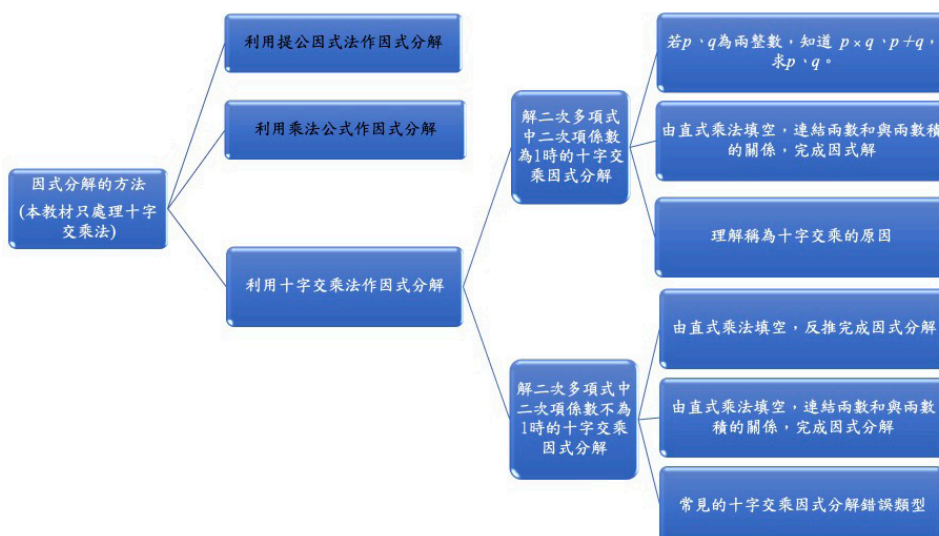


圖 3 本模組教材基本學習內容

(三) 教材分析與課程架構的關係

本補強課程模組教材從「猜數字遊戲」出發，讓學生充滿學習的動力，再與先備知識多項式的乘法進行連結，進而帶出因式分解的概念學習，讓學生理解多項式乘法與因式分解，並不是毫無關連的兩個單元，將多項式的乘法具體化變成填空的式子，讓學生建立學習心像，而不是只有式子乘除的操弄，希望學生在遊戲與填空操作中理解「十字交乘因式分解」的概念後，進而有信心地進入下個學習內容的學習。本單元教學過程中的教材內容與課程架構的關聯，如表 1。

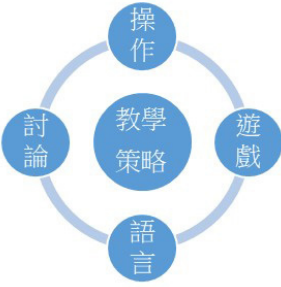
表 1：本模組教材分析與課程架構教學關係

| 課程模組核心概念 | 學習活動 | 教學策略 | 教學內涵 |
|---|------|-------------------------------|--|
| 主題 I 解二次多項式中二次項係數為 1 時的十字交乘法 (第 1~2 節課) | 遊戲操作 | 和與積 猜測遊戲 | 配合教師的提問，透過學習單一 (附件 1) 及和與積數字猜測遊戲 (附件 5、6)，讓學生能夠很輕鬆地解決知道兩數之和與兩數的積後，如何正確且快速地找出此兩數。為接下來的十字交乘奠立良好的基礎，且讓學生有十字交乘不見得會成功的經驗，為公式解作準備。 |
| 主題 I 解二次多項式中二次項係數為 1 時的十字交乘法 (第 3 節課) | 動手填空 | 多項式 乘法暨因式分 解填空 (A 版) | 利用自行設計的多項式乘法暨因式分解填空板 A 版 (附件 7)，幫學生逐步把多項式乘法與多項式的因式分解拉上關係，並從與學生的對話中，讓十字交乘因式分解的味道呈現出來。 |
| 主題 II 解二次多項式中二次項係數不為 1 時的十字交乘法 (第 4 節課) | 動手填空 | 多項式 乘法暨因式分 解填空 (B 版) | 配合多項式乘法暨因式分解填空板 B 版 (附件 8)，讓學生透過乘法填空，嘗試解題的過程中，穩固多項式乘法與多項式的因式分解的關係。 |
| 主題 II 解二次多項式中二次項係數不為 1 時的十字交乘法 (第 5 節課) | 動手填空 | 多項式 乘法暨因式分 解填空 (B 版) | 配合多項式乘法暨因式分解填空板 B 版 (附件 8)，讓第 1 節開始的兩數的和與兩數的積能貫穿整個學習。 |
| 主題 II 解二次多項式中二次項係數不為 1 時的十字交乘法 (第 6 節課) | 動手填空 | 多項式 乘法暨因式分 解填空 (B 版) | 當學生已學會多項式二次項係數為 1 與不為 1 的十字交乘因式分解後，提醒學生常見的十字交乘因式分解的錯誤類型，使學生在進行十字交乘因式分解時正確率能不斷提升，減少迷思的產生。 |

教學 計畫



| | |
|--------------------|--|
| 模組名稱 | 利用十字交乘法因式分解 |
| 授課節數規劃 | 六節課 |
| 學習重點 (內容、概念、能力) | <p>學習內容</p> <p>A-8-5 因式分解的方法：提公因式法；利用乘法公式與十字交乘法因式分解。</p> <p>備註：只處理整係數 ax^2+bx+c 的因式分解或與乘法公式直接相關者，不處理一般二元齊次或二元非齊次式但有一次介入者。</p> <p>學習表現</p> <p>a-IV-6 理解一元二次方程式及其解的意義，能以因式分解和配方法求解和驗算，並能運用到日常生活的情境解決問題。</p> <p>基本學習內容</p> <p>AC-8-5-3 十字交乘法作整係數二次多項式的因式分解。</p> |
| 適用對象 | <ol style="list-style-type: none"> 1. A-8-1 二次式的乘法公式 2. A-8-3 多項式的四則運算 3. A-8-4 因式分解 4. A-8-5 因式分解的方法：已理解利用提出公因式及乘法公式進行因式分解。 |
| 教學連結建議 | <p>A-8-6 一元二次方程式的意義</p> <p>A-8-7 一元二次方程式的解法與應用：利用因式分解、配方</p> <p>F-10-1 一次與二次函數</p> |
| 學習目標 | <ol style="list-style-type: none"> 1. 理解若 p、q 為兩整數，知道 $p \times q$、$p + q$，求 p、q。 2. 能由直式乘法填空，連結兩數和與兩數積的關係，配合學習單理解多項式中二次項係數為 1 時的十字交乘因式分解。 3. 能進行多項式中二次項係數為 1 時的十字交乘因式分解，理解十字交乘因式分解的意義。 4. 能由直式乘法填空，反推完成二次項係數不為 1 時的十字交乘因式分解 |

| | |
|------|--|
| 學習目標 | <p>5. 能由直式乘法填空，連結兩數和與兩數積的關係，進行完成二次項係數不為 1 時的十字交乘因式分解。</p> <p>6. 能理解常見的十字交乘因式分解錯誤類型。</p> |
| 教學策略 | <div style="text-align: center;">  </div> <p>1. 透過操作活動及討論探究，引導學生學習意願。</p> <p>2. 以循序漸進的活動引導十字交乘因式分解概念的學習，讓學生培養進行數學思考的習慣。</p> <p>3. 教學活動中，加入猜數字及乘法填空等活動，建立學生學習概念。</p> <p>4. 強調師生的討論互動，讓學習不再是單向的接受，而是學生在思考與理解之後的結果。</p> |
| 教學材料 | <p>1. 自編學習單。</p> <p>2. 自製教具：和與積猜測遊戲板 (只有正數、含負數)。</p> <p>3. 自製教具：多項式乘法填空暨因式分解板 (A 版、B 版)。</p> |
| 教學資源 | <p>1. 康軒、翰林、南一教科書</p> <p>康軒電子書：https://webtextbook.knsh.com.tw/2/index.html?code_degree=2</p> <p>翰林電子書：https://www.hle.com.tw/inpage02.html</p> <p>南一電子書：https://trans.nani.com.tw/TeacherCloud/jteacher/</p> <p>2. 網路資源：數學生根新世界教材</p> <p>https://www.nhmath.com/NH-MATH/resources</p> |

主題 I：二次項係數為 1 時的十字交乘法

教學活動流程設計

教學注意事項

第 1、2 節

一、準備活動

老師：同學們，在一年級時，我們已學會解一元一次方程式，你有沒有辦法解決，型如 $x^2 + 8x + 16 = 0$ 一元二次方程式的題目呢？

學生：目前還不行，但應該有辦法可以找出一元二次方程式的解。

老師：沒錯，這個解決的方式就是透過因式分解的方法，同學們已經學會利用「提出公因式」及利用「乘法公式」等兩種因式分解的方法。但是型如 $x^2 - 4x - 45$ 這樣的二次多項式，卻無法以「提出公因式」或「乘法公式」來進行因式分解，因此老師要介紹另一種因式分解的方法—十字交乘法。

教師提問 1

請問如果要在下列等式的兩個空格中分別填入兩個整數（此兩數可以相同也可以不同），使等式成立，請問你會怎麼填入這兩個整數？

$$\square + \square = 7$$

學生回答

答案有很多個，例如

$$0+3=7$$

$$1+6=7$$

$$10+(-3)=7$$

$$(-2)+9=7。$$

教師提問 2

現在換另一個等式，同樣地在兩個空格中分別填入兩個整數（此兩數可以相同也可以不同），使等式成立，請問你會怎麼填入這兩個整數？

$$\square \times \square = 10$$

讓學生建立學因式分解的目的是為了未來能解一元二次方程做準備是本單元重要的需要感。

以填空格讓等式成立做為本模組最開始切入的起點，因為每個人都能參與，希望藉此降低學生對多項式的恐懼，並提升學生參與課程的意願。

教學活動流程設計

教學注意事項

學生回答

答案還是有很多個，例如

$$2 \times 5 = 10$$

$$(-2) \times (-5) = 10$$

$$1 \times 10 = 10$$

教師提問 3

如果以這兩題來比較，哪一題比較容易找到答案，說說你的理由？

學生回答

好像是 $\square \times \square = 10$ 比較容易找到答案，因為題目限制是整數，所以透過因數分解很容易可以找到答案。

但是當題目是 $\square + \square = 7$ 時，答案就會有無限多組解。

二、發展活動

• 全班競賽時間 Part I

人數：每組 2 人

器材：每組遊戲板二塊、彩繪用白板筆 2 支、板擦 2 塊、得分牌數張、「這個題目我有答案 (Yes)」、「我覺得這個題目沒有答案 (No)」手拿牌各 2 塊、「分數 $\times 2$ 」2 張、4 個磁鐵。

規則：

1. 每組 2 人，遊戲前先猜拳，贏的人可選擇要拿「兩數的和遊戲板」，還是「兩數的積遊戲板」。

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|--------------------------------|----|----|----|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 兩數的和： <input type="text"/> | 兩數的積： <input type="text"/> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 兩數的積(對方)： <input type="text"/> | 兩數的和(對方)： <input type="text"/> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 我認為這兩數是↓ | 我認為這兩數是↓ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td></tr> <tr><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td></tr> <tr><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td></tr> </table> | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | <table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td></tr> <tr><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td></tr> <tr><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td></tr> </table> | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

2. 遊戲開始後由老師擔任出題者，在黑板上寫下題目，如

兩數的和 = 7

兩數的積 = 10

本模組猜數字遊戲

有 4 個階段：

- (1) 由教師出題，全班競賽，即為 Part I

目的：習慣本遊戲規則

- (2) 分組競賽，組員之間依自己想法，各自出題，即為 Part II

目的：瞭解兩人亂出數字時，不一定會有整數的答案。此時，學生常常會找不到答案。

- (3) 分組競賽，請出題的人先想好一定有答案的「兩數的和」與「兩數的積」的兩個數字，再進行比賽，即為 Part III

目的：讓出題學生擁有設計正確兩數和與兩數積的經驗，且讓對方有找出正確答案的機會。

教學活動流程設計

同學就要在自己的板上填上對應的數字，因為遊戲板有兩種型式，剛好順序顛倒，此時請老師先確認學生沒有填錯格子，可以請同學互相檢查或是舉起板子讓老師檢查是否正確。當確認同學填寫正確後，就可進行正式的活動。

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|----|----|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 兩數的和： <input style="width: 30px;" type="text" value="7"/> 兩數的積(對方)： <input style="width: 30px;" type="text" value="10"/> 我認為這兩數是↓ | 兩數的積： <input style="width: 30px;" type="text" value="7"/> 兩數的和(對方)： <input style="width: 30px;" type="text" value="10"/> 我認為這兩數是↓ | 兩數的積： <input style="width: 30px;" type="text" value="10"/> 兩數的和(對方)： <input style="width: 30px;" type="text" value="7"/> 我認為這兩數是↓ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; height: 100%;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td></tr> <tr><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td></tr> <tr><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td></tr> </table> | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; height: 100%;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td></tr> <tr><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td></tr> <tr><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td></tr> </table> | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; height: 100%;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td></tr> <tr><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td></tr> <tr><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td></tr> </table> | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| ↑ 正確的填法 | ↑ 錯誤的填法 | ↑ 正確的填法 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

- 請同學開始計算符合兩數之和為「7」，兩數之積為「10」的兩數，若計算完成，請同學用磁鐵在遊戲板對應的數字上放置磁鐵，並舉起「我有答案(Yes)」手牌，進行回答，答案正確可得1分。
- 老師可進行數次的出題，讓學生熟悉整個遊戲的流程。

• 分組活動時間 PartII

規則：

- 每組2人，遊戲前先猜拳，贏的人可選擇要拿「兩數的和遊戲板」，還是「兩數的積遊戲板」。

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|--|----|----|----|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 兩數的和： <input style="width: 30px;" type="text"/> 兩數的積(對方)： <input style="width: 30px;" type="text"/> 我認為這兩數是↓ | 兩數的積： <input style="width: 30px;" type="text"/> 兩數的和(對方)： <input style="width: 30px;" type="text"/> 我認為這兩數是↓ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; height: 100%;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td></tr> <tr><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td></tr> <tr><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td></tr> </table> | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; height: 100%;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td></tr> <tr><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td></tr> <tr><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td></tr> </table> | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

- 遊戲開始前，拿「兩數的和遊戲板」的同學，他所選擇的數字就是兩數的和；反之，另一人所選的數字就是兩數的積。

教學注意事項

- 分組競賽，更換遊戲板，題目上有正整數也有負整數，即為PartIV

目的：讓出題學生能設計正確兩數和與兩數積的經驗，且讓對方有找出正確答案可能是正數也可能是負數的機會。

本活動的目的：讓學生瞭解當兩人亂出數字($p \times q$ 、 $p + q$ 為整數)時， p 、 q 不一定會有整數的答案，讓學生熟悉在進行多項式十字交乘時，可能會出現無法分解的情形。

教學活動流程設計

教學注意事項

3. 遊戲開始，請兩人分別從 1~25 之間，各選一個數字當成題目，例如「兩數的和」的同學選「21」，「兩數的積」的同學選「10」，請兩人自行紀錄於遊戲板上，然後開始計算符合這個條件的兩數，計算完成後用磁鐵在遊戲板對應的數字上放置磁鐵，並舉起「我有答案 (Yes)」手牌，進行回答，答案正確可得 1 分。如果兩人同時舉牌則兩人皆可回答。



4. 如果遇到無法分解的狀況時，例如拿「兩數的和」的學生選「11」，「兩數的積」的學生選「20」，此時先舉起「我覺得這個題目沒答案 (No)」手牌的同學可得 2 分，若兩人同時舉牌則兩人皆得分。



5. 答題時也可同時使用「分數 $\times 2$ 」分數倍增功能卡，答對時則分數加倍，答錯時則扣 1 分，每張功能卡只能使用 1 次，使用過後則無法再度使用。



教學活動流程設計

教學注意事項

• 分組活動時間 PartIII

老師：在上一輪的活動中同學們一定會發現，例如「兩數的和」是4，「兩數的積」是8，沒有任何整數符合這組條件，因此出現「我覺得這個題目沒答案 (No)」的次數偏多。所以接下來我們改變規則，請出題的人先想好一定有答案的「兩數的和」與「兩數的積」的兩個數字，再進行第二輪的比賽。

本活動的目的：讓出題學生已有設計正確兩數和與兩數積的經驗，且讓對方有找出正確答案的機會，但是題目加入了負數。



例如：出題學生心裡先想好兩個數字，例如為2、9，那麼出題者就應該在「兩數的和填11」、「兩數的積填18」，才算正確完成出題。

其他規則和前一回合相同，也是各輪流出題5次，計算最後得分狀況。

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|--|--|----|----|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 兩數的和： 11 兩數的積(對方): 18 我認為這兩數是↓ | 兩數的積： 18 兩數的和(對方): 11 我認為這兩數是↓ | 兩數的積： 18 兩數的和(對方): 11 我認為這兩數是↓ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center; width: 100%;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td></tr> <tr><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td></tr> <tr><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td></tr> </table> | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center; width: 100%;"> <tr><td>1</td><td>●</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>●</td><td>10</td></tr> <tr><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td></tr> <tr><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td></tr> <tr><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td></tr> </table> | 1 | ● | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | ● | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center; width: 100%;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>●</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>●</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td></tr> <tr><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td></tr> <tr><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td></tr> </table> | 1 | 2 | ● | 4 | 5 | ● | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | ● | 3 | 4 | 5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | 7 | 8 | ● | 10 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 2 | ● | 4 | 5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| ● | 7 | 8 | 9 | 10 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| ↑ 出題學生 | ↑ 答題學生 (得分) | ↑ 答題學生 (未得分) | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

• 分組活動時間 PartIV

本次的遊戲規則可選擇「個別出題的方式」；意思是一人出「兩數的和」，一人出「兩數的積」進行比賽或是「一次出好兩個條件方式」：意思是一人先將「兩數的和」、「兩數的積」都設計好，再讓對方回答。

本活動的目的：讓出題學生已有設計正確兩數和與兩數積的經驗，且讓對方有找出正確答案的機會，但是題目加入了負數。

在這回合中請同學將遊戲板更換成另一個類型，如下：

教學活動流程設計

教學注意事項

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--|---|-----|-----|-----|---|----|----|----|----|----|---|---|---|---|----|----|----|----|----|-----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|--|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|---|---|---|---|----|----|----|----|----|-----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 兩數的和： <input style="width: 40px;" type="text"/> | 兩數的積： <input style="width: 40px;" type="text"/> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 兩數的積(對方): <input style="width: 40px;" type="text"/> | 兩數的和(對方): <input style="width: 40px;" type="text"/> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 我認為這兩數是！ | 我認為這兩數是！ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>-1</td><td>-2</td><td>-3</td><td>-4</td><td>-5</td></tr> <tr><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><td>-6</td><td>-7</td><td>-8</td><td>-9</td><td>-10</td></tr> <tr><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td></tr> <tr><td>-11</td><td>-12</td><td>-13</td><td>-14</td><td>-15</td></tr> <tr><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td></tr> <tr><td>-16</td><td>-17</td><td>-18</td><td>-19</td><td>-20</td></tr> <tr><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td></tr> <tr><td>-21</td><td>-22</td><td>-23</td><td>-24</td><td>-25</td></tr> </table> | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | -1 | -2 | -3 | -4 | -5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | -6 | -7 | -8 | -9 | -10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | -11 | -12 | -13 | -14 | -15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | -16 | -17 | -18 | -19 | -20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | -21 | -22 | -23 | -24 | -25 | <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>-1</td><td>-2</td><td>-3</td><td>-4</td><td>-5</td></tr> <tr><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><td>-6</td><td>-7</td><td>-8</td><td>-9</td><td>-10</td></tr> <tr><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td></tr> <tr><td>-11</td><td>-12</td><td>-13</td><td>-14</td><td>-15</td></tr> <tr><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td></tr> <tr><td>-16</td><td>-17</td><td>-18</td><td>-19</td><td>-20</td></tr> <tr><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td></tr> <tr><td>-21</td><td>-22</td><td>-23</td><td>-24</td><td>-25</td></tr> </table> | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | -1 | -2 | -3 | -4 | -5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | -6 | -7 | -8 | -9 | -10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | -11 | -12 | -13 | -14 | -15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | -16 | -17 | -18 | -19 | -20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | -21 | -22 | -23 | -24 | -25 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -1 | -2 | -3 | -4 | -5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -6 | -7 | -8 | -9 | -10 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -11 | -12 | -13 | -14 | -15 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -16 | -17 | -18 | -19 | -20 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -21 | -22 | -23 | -24 | -25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -1 | -2 | -3 | -4 | -5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -6 | -7 | -8 | -9 | -10 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -11 | -12 | -13 | -14 | -15 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -16 | -17 | -18 | -19 | -20 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -21 | -22 | -23 | -24 | -25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

【個別出題的方式】：

拿「兩數的和」的同學選「3」，拿「兩數的積」的同學選「-18」，請兩隊自行紀錄於遊戲板上，然後開始計算符合兩數之和為「3」，兩數之積為「-18」的兩數，當計算完成後，則用在遊戲板對應的數字上放置磁鐵，並舉起「我有答案」手牌進行搶答，答案正確可得1分。如果兩人同時舉牌則兩人皆可回答，若是都答對也同時得分。

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|--|-----|-----|-----|---|----|----|---|----|----|---|---|---|---|----|----|----|----|----|-----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|--|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|---|---|---|---|----|----|----|----|----|-----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 兩數的和： <input style="width: 40px; border: 1px solid red;" type="text" value="3"/> | 兩數的積： <input style="width: 40px; border: 1px solid red;" type="text" value="3"/> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 兩數的積(對方): <input style="width: 40px; border: 1px solid red;" type="text" value="-18"/> | 兩數的和(對方): <input style="width: 40px; border: 1px solid red;" type="text" value="-18"/> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 我認為這兩數是！ | 我認為這兩數是！ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>-1</td><td>-2</td><td>3</td><td>-4</td><td>-5</td></tr> <tr><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><td>-6</td><td>-7</td><td>-8</td><td>-9</td><td>-10</td></tr> <tr><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td></tr> <tr><td>-11</td><td>-12</td><td>-13</td><td>-14</td><td>-15</td></tr> <tr><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td></tr> <tr><td>-16</td><td>-17</td><td>-18</td><td>-19</td><td>-20</td></tr> <tr><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td></tr> <tr><td>-21</td><td>-22</td><td>-23</td><td>-24</td><td>-25</td></tr> </table> | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | -1 | -2 | 3 | -4 | -5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | -6 | -7 | -8 | -9 | -10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | -11 | -12 | -13 | -14 | -15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | -16 | -17 | -18 | -19 | -20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | -21 | -22 | -23 | -24 | -25 | <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>-1</td><td>-2</td><td>-3</td><td>-4</td><td>-5</td></tr> <tr><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><td>-6</td><td>-7</td><td>-8</td><td>-9</td><td>-10</td></tr> <tr><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td></tr> <tr><td>-11</td><td>-12</td><td>-13</td><td>-14</td><td>-15</td></tr> <tr><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td></tr> <tr><td>-16</td><td>-17</td><td>-18</td><td>-19</td><td>-20</td></tr> <tr><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td></tr> <tr><td>-21</td><td>-22</td><td>-23</td><td>-24</td><td>-25</td></tr> </table> | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | -1 | -2 | -3 | -4 | -5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | -6 | -7 | -8 | -9 | -10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | -11 | -12 | -13 | -14 | -15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | -16 | -17 | -18 | -19 | -20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | -21 | -22 | -23 | -24 | -25 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -1 | -2 | 3 | -4 | -5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -6 | -7 | -8 | -9 | -10 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -11 | -12 | -13 | -14 | -15 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -16 | -17 | -18 | -19 | -20 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -21 | -22 | -23 | -24 | -25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -1 | -2 | -3 | -4 | -5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -6 | -7 | -8 | -9 | -10 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -11 | -12 | -13 | -14 | -15 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -16 | -17 | -18 | -19 | -20 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -21 | -22 | -23 | -24 | -25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

↑ 正確答案

↑ 錯誤答案

實際操作時，請老師要特別留意有沒有出現，這兩名同學都將「錯誤答案」當成「正確答案」的情形，如下圖，該組學生都誤將答案當成2與-9，但是正確答案卻是-2與9。

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|----------|----------|--|----|----|----|---|---|----|----|----|----|----|----|----|-----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|--|----|-----|-----|-----|-----|-----|--|----|----|----|---|---|----|----|----|----|----|----|----|-----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|--|--|--|--|--|----------|----------|--|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|---|---|---|---|----|----|----|----|----|-----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|--|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|---|---|---|---|----|----|----|----|----|-----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|
| <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 50%;">兩數的和：<input style="width: 40px; border: 1px solid red;" type="text" value="7"/></td> <td style="width: 50%;">兩數的積：<input style="width: 40px; border: 1px solid red;" type="text" value="-18"/></td> </tr> <tr> <td>兩數的積(對方):<input style="width: 40px; border: 1px solid red;" type="text" value="-18"/></td> <td>兩數的和(對方):<input style="width: 40px; border: 1px solid red;" type="text" value="7"/></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center; font-size: small;">我認為這兩數是！</td> <td style="text-align: center; font-size: small;">我認為這兩數是！</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>-1</td><td>-2</td><td>-3</td><td>-4</td><td>-5</td></tr> <tr><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><td>-6</td><td>-7</td><td>-8</td><td>-9</td><td>-10</td></tr> <tr><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td></tr> <tr><td>-11</td><td>-12</td><td>-13</td><td>-14</td><td>-15</td></tr> <tr><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td></tr> <tr><td>-16</td><td>-17</td><td>-18</td><td>-19</td><td>-20</td></tr> <tr><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td></tr> <tr><td>-21</td><td>-22</td><td>-23</td><td>-24</td><td>-25</td></tr> </table> </td> <td style="text-align: center;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>-1</td><td>-2</td><td>-3</td><td>-4</td><td>-5</td></tr> <tr><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><td>-6</td><td>-7</td><td>-8</td><td>-9</td><td>-10</td></tr> <tr><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td></tr> <tr><td>-11</td><td>-12</td><td>-13</td><td>-14</td><td>-15</td></tr> <tr><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td></tr> <tr><td>-16</td><td>-17</td><td>-18</td><td>-19</td><td>-20</td></tr> <tr><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td></tr> <tr><td>-21</td><td>-22</td><td>-23</td><td>-24</td><td>-25</td></tr> </table> </td> </tr> </table> | 兩數的和： <input style="width: 40px; border: 1px solid red;" type="text" value="7"/> | 兩數的積： <input style="width: 40px; border: 1px solid red;" type="text" value="-18"/> | 兩數的積(對方): <input style="width: 40px; border: 1px solid red;" type="text" value="-18"/> | 兩數的和(對方): <input style="width: 40px; border: 1px solid red;" type="text" value="7"/> | 我認為這兩數是！ | 我認為這兩數是！ | <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>-1</td><td>-2</td><td>-3</td><td>-4</td><td>-5</td></tr> <tr><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><td>-6</td><td>-7</td><td>-8</td><td>-9</td><td>-10</td></tr> <tr><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td></tr> <tr><td>-11</td><td>-12</td><td>-13</td><td>-14</td><td>-15</td></tr> <tr><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td></tr> <tr><td>-16</td><td>-17</td><td>-18</td><td>-19</td><td>-20</td></tr> <tr><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td></tr> <tr><td>-21</td><td>-22</td><td>-23</td><td>-24</td><td>-25</td></tr> </table> | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | -1 | -2 | -3 | -4 | -5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | -6 | -7 | -8 | -9 | -10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | -11 | -12 | -13 | -14 | -15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | -16 | -17 | -18 | -19 | -20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | -21 | -22 | -23 | -24 | -25 | <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>-1</td><td>-2</td><td>-3</td><td>-4</td><td>-5</td></tr> <tr><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><td>-6</td><td>-7</td><td>-8</td><td>-9</td><td>-10</td></tr> <tr><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td></tr> <tr><td>-11</td><td>-12</td><td>-13</td><td>-14</td><td>-15</td></tr> <tr><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td></tr> <tr><td>-16</td><td>-17</td><td>-18</td><td>-19</td><td>-20</td></tr> <tr><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td></tr> <tr><td>-21</td><td>-22</td><td>-23</td><td>-24</td><td>-25</td></tr> </table> | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | -1 | -2 | -3 | -4 | -5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | -6 | -7 | -8 | -9 | -10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | -11 | -12 | -13 | -14 | -15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | -16 | -17 | -18 | -19 | -20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | -21 | -22 | -23 | -24 | -25 | <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 50%;">兩數的和：<input style="width: 40px; border: 1px solid red;" type="text" value="-18"/></td> <td style="width: 50%;">兩數的積：<input style="width: 40px; border: 1px solid red;" type="text" value="7"/></td> </tr> <tr> <td>兩數的積(對方):<input style="width: 40px; border: 1px solid red;" type="text" value="7"/></td> <td>兩數的和(對方):<input style="width: 40px; border: 1px solid red;" type="text" value="-18"/></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center; font-size: small;">我認為這兩數是！</td> <td style="text-align: center; font-size: small;">我認為這兩數是！</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>-1</td><td>-2</td><td>-3</td><td>-4</td><td>-5</td></tr> <tr><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><td>-6</td><td>-7</td><td>-8</td><td>-9</td><td>-10</td></tr> <tr><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td></tr> <tr><td>-11</td><td>-12</td><td>-13</td><td>-14</td><td>-15</td></tr> <tr><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td></tr> <tr><td>-16</td><td>-17</td><td>-18</td><td>-19</td><td>-20</td></tr> <tr><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td></tr> <tr><td>-21</td><td>-22</td><td>-23</td><td>-24</td><td>-25</td></tr> </table> </td> <td style="text-align: center;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>-1</td><td>-2</td><td>-3</td><td>-4</td><td>-5</td></tr> <tr><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><td>-6</td><td>-7</td><td>-8</td><td>-9</td><td>-10</td></tr> <tr><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td></tr> <tr><td>-11</td><td>-12</td><td>-13</td><td>-14</td><td>-15</td></tr> <tr><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td></tr> <tr><td>-16</td><td>-17</td><td>-18</td><td>-19</td><td>-20</td></tr> <tr><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td></tr> <tr><td>-21</td><td>-22</td><td>-23</td><td>-24</td><td>-25</td></tr> </table> </td> </tr> </table> | 兩數的和： <input style="width: 40px; border: 1px solid red;" type="text" value="-18"/> | 兩數的積： <input style="width: 40px; border: 1px solid red;" type="text" value="7"/> | 兩數的積(對方): <input style="width: 40px; border: 1px solid red;" type="text" value="7"/> | 兩數的和(對方): <input style="width: 40px; border: 1px solid red;" type="text" value="-18"/> | 我認為這兩數是！ | 我認為這兩數是！ | <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>-1</td><td>-2</td><td>-3</td><td>-4</td><td>-5</td></tr> <tr><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><td>-6</td><td>-7</td><td>-8</td><td>-9</td><td>-10</td></tr> <tr><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td></tr> <tr><td>-11</td><td>-12</td><td>-13</td><td>-14</td><td>-15</td></tr> <tr><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td></tr> <tr><td>-16</td><td>-17</td><td>-18</td><td>-19</td><td>-20</td></tr> <tr><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td></tr> <tr><td>-21</td><td>-22</td><td>-23</td><td>-24</td><td>-25</td></tr> </table> | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | -1 | -2 | -3 | -4 | -5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | -6 | -7 | -8 | -9 | -10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | -11 | -12 | -13 | -14 | -15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | -16 | -17 | -18 | -19 | -20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | -21 | -22 | -23 | -24 | -25 | <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>-1</td><td>-2</td><td>-3</td><td>-4</td><td>-5</td></tr> <tr><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><td>-6</td><td>-7</td><td>-8</td><td>-9</td><td>-10</td></tr> <tr><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td></tr> <tr><td>-11</td><td>-12</td><td>-13</td><td>-14</td><td>-15</td></tr> <tr><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td></tr> <tr><td>-16</td><td>-17</td><td>-18</td><td>-19</td><td>-20</td></tr> <tr><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td></tr> <tr><td>-21</td><td>-22</td><td>-23</td><td>-24</td><td>-25</td></tr> </table> | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | -1 | -2 | -3 | -4 | -5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | -6 | -7 | -8 | -9 | -10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | -11 | -12 | -13 | -14 | -15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | -16 | -17 | -18 | -19 | -20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | -21 | -22 | -23 | -24 | -25 |
| 兩數的和： <input style="width: 40px; border: 1px solid red;" type="text" value="7"/> | 兩數的積： <input style="width: 40px; border: 1px solid red;" type="text" value="-18"/> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 兩數的積(對方): <input style="width: 40px; border: 1px solid red;" type="text" value="-18"/> | 兩數的和(對方): <input style="width: 40px; border: 1px solid red;" type="text" value="7"/> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 我認為這兩數是！ | 我認為這兩數是！ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>-1</td><td>-2</td><td>-3</td><td>-4</td><td>-5</td></tr> <tr><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><td>-6</td><td>-7</td><td>-8</td><td>-9</td><td>-10</td></tr> <tr><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td></tr> <tr><td>-11</td><td>-12</td><td>-13</td><td>-14</td><td>-15</td></tr> <tr><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td></tr> <tr><td>-16</td><td>-17</td><td>-18</td><td>-19</td><td>-20</td></tr> <tr><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td></tr> <tr><td>-21</td><td>-22</td><td>-23</td><td>-24</td><td>-25</td></tr> </table> | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | -1 | -2 | -3 | -4 | -5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | -6 | -7 | -8 | -9 | -10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | -11 | -12 | -13 | -14 | -15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | -16 | -17 | -18 | -19 | -20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | -21 | -22 | -23 | -24 | -25 | <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>-1</td><td>-2</td><td>-3</td><td>-4</td><td>-5</td></tr> <tr><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><td>-6</td><td>-7</td><td>-8</td><td>-9</td><td>-10</td></tr> <tr><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td></tr> <tr><td>-11</td><td>-12</td><td>-13</td><td>-14</td><td>-15</td></tr> <tr><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td></tr> <tr><td>-16</td><td>-17</td><td>-18</td><td>-19</td><td>-20</td></tr> <tr><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td></tr> <tr><td>-21</td><td>-22</td><td>-23</td><td>-24</td><td>-25</td></tr> </table> | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | -1 | -2 | -3 | -4 | -5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | -6 | -7 | -8 | -9 | -10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | -11 | -12 | -13 | -14 | -15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | -16 | -17 | -18 | -19 | -20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | -21 | -22 | -23 | -24 | -25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -1 | -2 | -3 | -4 | -5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -6 | -7 | -8 | -9 | -10 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -11 | -12 | -13 | -14 | -15 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -16 | -17 | -18 | -19 | -20 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -21 | -22 | -23 | -24 | -25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -1 | -2 | -3 | -4 | -5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -6 | -7 | -8 | -9 | -10 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -11 | -12 | -13 | -14 | -15 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -16 | -17 | -18 | -19 | -20 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -21 | -22 | -23 | -24 | -25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 兩數的和： <input style="width: 40px; border: 1px solid red;" type="text" value="-18"/> | 兩數的積： <input style="width: 40px; border: 1px solid red;" type="text" value="7"/> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 兩數的積(對方): <input style="width: 40px; border: 1px solid red;" type="text" value="7"/> | 兩數的和(對方): <input style="width: 40px; border: 1px solid red;" type="text" value="-18"/> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 我認為這兩數是！ | 我認為這兩數是！ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>-1</td><td>-2</td><td>-3</td><td>-4</td><td>-5</td></tr> <tr><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><td>-6</td><td>-7</td><td>-8</td><td>-9</td><td>-10</td></tr> <tr><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td></tr> <tr><td>-11</td><td>-12</td><td>-13</td><td>-14</td><td>-15</td></tr> <tr><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td></tr> <tr><td>-16</td><td>-17</td><td>-18</td><td>-19</td><td>-20</td></tr> <tr><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td></tr> <tr><td>-21</td><td>-22</td><td>-23</td><td>-24</td><td>-25</td></tr> </table> | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | -1 | -2 | -3 | -4 | -5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | -6 | -7 | -8 | -9 | -10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | -11 | -12 | -13 | -14 | -15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | -16 | -17 | -18 | -19 | -20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | -21 | -22 | -23 | -24 | -25 | <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>-1</td><td>-2</td><td>-3</td><td>-4</td><td>-5</td></tr> <tr><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><td>-6</td><td>-7</td><td>-8</td><td>-9</td><td>-10</td></tr> <tr><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td></tr> <tr><td>-11</td><td>-12</td><td>-13</td><td>-14</td><td>-15</td></tr> <tr><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td></tr> <tr><td>-16</td><td>-17</td><td>-18</td><td>-19</td><td>-20</td></tr> <tr><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td></tr> <tr><td>-21</td><td>-22</td><td>-23</td><td>-24</td><td>-25</td></tr> </table> | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | -1 | -2 | -3 | -4 | -5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | -6 | -7 | -8 | -9 | -10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | -11 | -12 | -13 | -14 | -15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | -16 | -17 | -18 | -19 | -20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | -21 | -22 | -23 | -24 | -25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -1 | -2 | -3 | -4 | -5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -6 | -7 | -8 | -9 | -10 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -11 | -12 | -13 | -14 | -15 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -16 | -17 | -18 | -19 | -20 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -21 | -22 | -23 | -24 | -25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -1 | -2 | -3 | -4 | -5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -6 | -7 | -8 | -9 | -10 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -11 | -12 | -13 | -14 | -15 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -16 | -17 | -18 | -19 | -20 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -21 | -22 | -23 | -24 | -25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

教師可視學生的反應及時間考慮進行方式，如果想讓學生進行活動時，不會卡關太多次，則可採以下「一次出好兩個條件方式」，意思就是學生要先想出兩數的和與兩數的積是有正確整數答案的題目。

教學活動流程設計

教學注意事項

【一次出好兩個條件方式】：

例如：出題學生心裡先想好兩數，例如為 -4、6，那麼出題者就應該在「兩數的和填 -2」、「兩數的積填 -24」，才算正確完成出題。

兩數的和：

兩數的積(對方)：

我認為這兩數是：

| | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| -1 | -2 | -3 | -4 | -5 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| -6 | -7 | -8 | -9 | -10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| -11 | -12 | -13 | -14 | -15 |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| -16 | -17 | -18 | -19 | -20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| -21 | -22 | -23 | -24 | -25 |

其他規則與之前相同，兩人各輪流出題 5 次，計算最後得分狀況。

三、總結

教師提問 4

請同學要分享自己得分的秘訣，如何才能快速的找到符合這兩個條件「和」與「積」的兩數呢？請以「兩數的和 = 9」、「兩數的積 = 14」為例。

學生回答

我認為要先考慮「相加為 9」這個條件，這樣的兩數有

$$9 = 1 + 8$$

$$= 2 + 7$$

$$= 3 + 6$$

$$= 4 + 5$$

(1、8)，(2、7)，(3、6)，(4、5) 等 4 種選擇

而「相乘為 14」這個條件。

$$1 \times 8 = 8$$

$$2 \times 7 = 14 \text{---- 符合}$$

$$3 \times 6 = 18$$

$$4 \times 5 = 20$$

因此這兩數是 2 和 7。

這個討論雖然會花掉不少時間，但是會比教師直接告訴同學答案來得有價值，請教師不必太心急。

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|---|--------|
| <p>學生回答</p> <p>我的作法和前一個同學相反，我是先考慮兩數的積，再考慮「兩數的和」，兩數為正整數且相乘為 14，這樣的兩數只有</p> $14=1 \times 14$ $=2 \times 7$ <p>只有 (1、14)，(2、7) 等 2 種選擇</p> <p>再想「相加為 9」這個條件。</p> $1+15=15$ $2+7=9$ <p>符合</p> <p>得到兩數是 2 和 7。</p> <p>教師提問 5</p> <p>你們覺得哪一個方法比較方便且能快速地檢驗出正確答案？</p> <p>學生回答</p> <p>兩個方法好像都有點麻煩，因為要檢驗很多組，條件是相加為 9 時，這樣的兩數有 4 種選擇；相乘為 14 時，這樣的兩數有 2 種選擇。</p> <p>如果一定要選一種方法，我會選先處理「相乘」，因為要檢查的組數少一點。</p> <p>教師提問 6</p> <p>說得很好。大家再想一想，每一種可能性都要找出來才能解決這個題目嗎？</p> <p>學生回答</p> <p>當然一定要都寫出來，才能找到符合兩數相加與兩數相乘，這兩個不同條件的答案。</p> <p>教師提問 7</p> <p>既然要找一組符合相加為 9，相乘為 14 的數字，是不是很像求在二元一次聯立方程式的解，將這個解分別代入二元一次方程式都要符合？在這個前提下，相加為 9，這樣的兩數有 4 種選擇；相乘為 14，這樣的兩數有 2 種選擇。也就是如果有答案的話，正確答案是不是一定在相加 4 個選擇與相乘 2 個選擇中共同的那組數？所以選哪一組的答案來檢查比較簡單？</p> | |

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|--|----------------------|
| <p>學生回答</p> <p>沒錯，要同時符合就是答案。</p> <p>選擇可能組數比較少的那個條件，這個題目來說是「相乘為 14，這樣的兩數有 2 組」，也就是檢驗 (1、14)，(2、7) 這兩種選擇，何者會符合「相加為 9、相乘為 14」即可，因此正確答案是 2 和 7。</p> <p>教師提問 8</p> <p>非常好，我們找到共識了，要優先思考「相乘」的那組數。請同學試試，求出符合「兩數的和 = -2」、「兩數的積 = -24」的兩數，答案應該為何？</p> <p>學生回答</p> <p>先想符合「兩數的積 = -24」的兩個整數。</p> $\begin{aligned} -24 &= (-1) \times 24 \\ &= 1 \times (-24) \\ &= (-2) \times 12 \\ &= 2 \times (-12) \\ &= (-3) \times 8 \\ &= 3 \times (-8) \\ &= (-4) \times 6 \\ &= 4 \times (-6) \text{-----} \end{aligned}$ <p>其中因為 $4 + (-6) = (-2)$ 所以 4 與 (-6) 是正確答案。</p> <p>教師提問 9</p> <p>同學的想法很不錯，有沒有同學還有其他的作法？</p> <p>學生回答</p> <p>我和前一個同學很像，不過我是先想正數，再決定負號，就不必想這麼多次，題目兩數的積 = -24，我先想成 24。</p> $\begin{aligned} 24 &= 1 \times 24 \\ &= 2 \times 12 \\ &= 3 \times 8 \\ &= 4 \times 6 \end{aligned}$ | <p>引導學生思考不同的解決方式</p> |

教學活動流程設計

因為相乘是 -24，所以這兩數必定是「一正、一負」，而且相加是 -2，所以只有 4、-6 符合。

教師說明

謝謝這位同學的分享，綜合以上的討論，我們得到兩個結論：

- (1) 先考慮分解「相乘」的那組數。
- (2) 如果題目是負數時，先用正數來思考，最後加上負號進行檢驗。

《第 1~2 節課結束》

第 3 節

一、準備活動

教師說明

上二節課同學們進行了猜數字的活動，相信同學對於兩數的和與兩數乘積之間已經有一些熟悉的感覺，但是這和我們之前說的因式分解有什麼關係呢？這節課我們要來瞭解兩數和與兩數積他們二者和多項式乘法之間的關係。

• 多項式的乘法與因式分解

1. 請同學完成以下的填空題

$$\begin{array}{r} x+3 \\ x) \quad x+5 \\ \hline \square+15 \\ \square+3x \\ \hline \square+8x+\square \end{array}$$

作法：

$$\begin{array}{r} \begin{array}{l} 5 \cdot x \\ 8x-3x \end{array} \quad x+3 \\ x) \quad x+5 \\ \hline \square+15 \\ \square+3x \\ \hline \square+8x+\square \end{array}$$

2. 請同學完成以下的填空題

$$\begin{array}{r} x+\square \\ x) \quad x+4 \\ \hline 4x+28 \\ x^2+\square \\ \hline x^2+\square+\square \end{array}$$

教學注意事項

學習單 1 的內容是為了進行二次項係數為 1 時的十字交乘因式分解法，包含了多項式乘法與因式分解及二次項係數為 1 的因式分解，等兩個內容，如果教師發現學生對於多項式的乘法不太熟練，在進行以下因式分解單元之前，可適時多出一些乘法練習題，讓學生掌握多項式乘法的基本做法。

(1) $(x+2)(x+7)$

$$\begin{array}{r} x+2 \\ x) \quad x+7 \\ \hline 7x+14 \\ x^2+2x \\ \hline x^2+9x+14 \end{array}$$

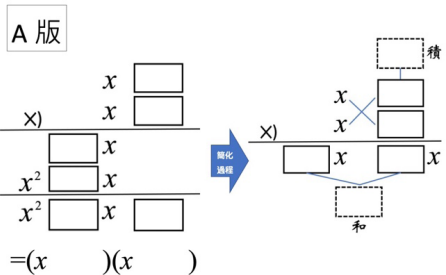
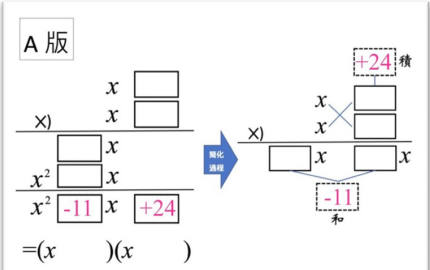
(2) $(x-6)(x+5)$

$$\begin{array}{r} x-6 \\ x) \quad x+5 \\ \hline 5x-30 \\ x^2-6x \\ \hline x^2-x-30 \end{array}$$

(3) $(3x-5)(2x+1)$

$$\begin{array}{r} 3x-5 \\ x) \quad 2x+1 \\ \hline 3x-5 \\ 6x^2-10x \\ \hline 6x^2-7x-5 \end{array}$$

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|---|---|
| <p>作法：</p> $\begin{array}{r} x + \boxed{-7} \\ x) \quad x + 4 \quad \begin{array}{l} \nearrow 4 \times 7 \\ \searrow \end{array} \\ \hline 4x + 28 \\ x^2 + \boxed{7x} \\ \hline x^2 + \boxed{11x} + \boxed{28} \\ \begin{array}{l} \nearrow 4x + 7x \\ \searrow \end{array} \end{array}$ <p>教師提問 1</p> <p>在上面兩個乘法的填空題中，題目是否出現有「兩數的和」與「兩數的積」的地方呢？</p> <p>學生回答</p> <p>「兩數的和」好像出現在題目中一次項係數的地方，「兩數的積」出現在常數項的位置。</p> $\begin{array}{r} x + \boxed{7} \\ x) \quad x + 4 \quad \begin{array}{l} \searrow 28 \div 4 = 7 \\ \nearrow \end{array} \\ \hline 4x + 28 \\ x^2 + \boxed{7x} \rightarrow 7 \cdot x \\ \hline x^2 + \boxed{11x} + \boxed{28} \\ \begin{array}{l} \searrow 4x + 7x \\ \nearrow \end{array} \end{array}$ <p>教師提問 2</p> <p>非常好，假設因式分解 $x^2 + 9x + 14$ 之後可得到 $(x + p)(x + q)$，同學們是否可以透過乘法的計算過程，更清楚地說明剛剛觀察的結論是正確的嗎？</p> <p>學生回答</p> <p>不管是利用橫式乘法，</p> $\begin{aligned} (x + p)(x + q) \\ = x^2 + px + qx + pq \\ = x^2 + (p + q)x + pq \end{aligned}$ <p>或直式乘法，都能得到 $(x + p)(x + q)$ 乘開的結果是 $x^2 + (p + q)x + pq$</p> $\begin{array}{r} x + p \\ x) \quad x + q \\ \hline qx + pq \\ \hline x^2 + px \\ \hline x^2 + (p+q)x + pq \end{array}$ | <p>(4) $(4x - 1)(3x - 2)$</p> $\begin{array}{r} 4x - 1 \\ x) \quad 3x - 2 \\ \hline -8x + 2 \\ \hline 12x^2 - 3x \\ \hline 12x^2 - 11x + 2 \end{array}$ <p>可以適時的停頓，讓學生有練習多項式乘法的機會。</p> <p>練習：計算下列各式</p> <ol style="list-style-type: none"> $(x + 3)(x + 5)$ $(x - 5)(x - 1)$ $(2x - 3)(x + 8)$ $(4x + 3)(7x - 2)$ $(3x + 1)(x - 7)$ <p>讓學生利用多項式的乘法來進行思考，是本教材的目的。</p> |

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|--|--|
| <p>因為 $x^2 + 9x + 14 = (x + p)(x + q)$ 我們算出 $(x + p)(x + q) = x^2 + (p + q)x + pq$ 所以可以得到 $p + q = 9$、$pq = 14$ 當一元二次方程式 x^2 的係數是 1 時， 常數項是兩數乘積，一次項係數是兩數之和 得到驗證。</p> <p>教師說明</p> <p>當二次項係數為 1 時，</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 原來多項式的常數項等於兩個因式的常數項乘積； 2. 原來多項式的一次項係數等於兩個因式常數項之和。 <p>二、發展活動：二次項係數為 1 的因式分解</p> <p>• 活動時間 Part1</p> <p>老師發給學生每人一個多項式乘法暨因式分解填空板 (A 版)，如下圖：</p>  <p>範例 1：因式分解 $x^2 - 11x + 24$</p> <p>以因式分解 $x^2 - 11x + 24$ 為例，請學生在多項式乘法暨因式分解填空板 (A 版) 上填入題目，依照「和」與「積」的位置，填入數字，開始進行因式分解的解題工作。</p>  | <p>本模組安排了一元二次式當二次項係數為 1 時，依係數的變化共 4 個題目類型，教師可依學生程度與教學時間，進行調整。</p> <p>因式分解</p> <ol style="list-style-type: none"> (1) $x^2 - 11x + 24$ (2) $x^2 - 3x - 40$ (3) $x^2 + 8x + 12$ (4) $x^2 + 3x - 88$ <p>這是分解之後的結果是負、負的類型。</p> |

教學活動流程設計

教學注意事項

教師提問 3

請問哪兩個數字相乘後得到 24，但相加得到 -11 呢？

學生回答

可能是 3 和 8，或者是 -3 和 -8，因為相加等於 -11，所以應該是 -3 和 -8 才對。

A 版

$$\begin{array}{r} x \quad -3 \\ x \quad -8 \\ \hline -8 \quad x \\ x^2 - 3x \\ x^2 - 11x + 24 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} x \quad -3 \\ x \quad -8 \\ \hline -3 \quad x \\ x^2 - 11x + 24 \end{array}$$

積: +24
和: -11

$= (x - 3)(x - 8)$

教師說明

由上面的計算過程知道，因為 $x \cdot x = x^2$ ，因此重點在於，由 24 推論得到 $(-3) \times (-8)$ 且符合此兩數符合 $(-3) + (-8) = (-11)$ 。

A 版

$$\begin{array}{r} x \quad \square \\ x \quad \square \\ \hline \square \quad x \\ x^2 - 3x \\ x^2 - 11x + 24 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} x \quad -3 \\ x \quad -8 \\ \hline -3 \quad x \\ x^2 - 11x + 24 \end{array}$$

積: +24
和: -11

$= (x - 3)(x - 8)$

同時，我們可以將紀錄過程進行簡化，直接在 A 版右邊空格中進行紀錄，左邊的空格就能拿來進行驗算。

A 版

$$\begin{array}{r} x \quad -3 \\ x \quad -8 \\ \hline -8 \quad x \\ x^2 - 3x \\ x^2 - 11x + 24 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} x \quad -3 \\ x \quad -8 \\ \hline -3 \quad x \\ x^2 - 11x + 24 \end{array}$$

積: +24
和: -11

$= (x - 3)(x - 8)$

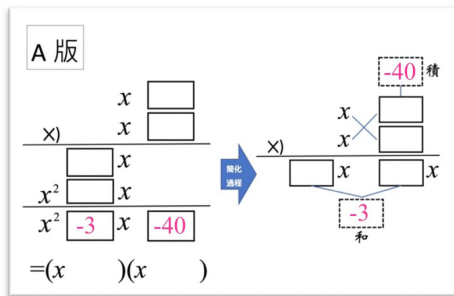
故因式分解 $x^2 - 11x + 24 = (x-3)(x-8)$

教學活動流程設計

教學注意事項

範例 2：因式分解 $x^2 - 3x - 40$ 。

請學生在因式分解練習板上填入題目，找到正確的「和」與「積」的位置，並填入數字，開始進行因式分解的解題。



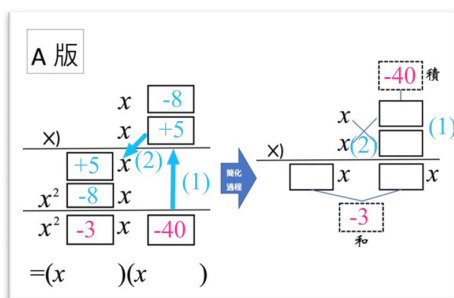
這個題目的類型是因式分解結果是一正、一負，一次項係數為負的類型。

教師提問 4

請問同學，哪兩個數字相乘後得到 -40，但相加得到 -3 呢？再試著依照乘法的運算規則，填入對應的格子內。

學生回答

以相乘為 -40 來思考，這兩數可能是 5 和 -8，也可能是 -5 和 8，不過因為要符合第二個條件，相加等於 -3，因此兩數是 5 和 -8。



教師說明

請觀察上面的計算過程， $x \cdot x = x^2$ ，很明確，重點是由 -40 推得 $5 \times (-8)$ 且符合 $5 + (-8) = -3$ 我們可以將紀錄過程進行簡化，只紀錄成右邊的形式。

同時，我們可以將紀錄過程進行簡化，直接在 A 版右邊空格中進行紀錄，左邊的空格就能拿來進行驗算。

由多項式乘法來發現簡化乘法的過程，進而與因式分解緊密連結。

教學活動流程設計

教學注意事項

A 版

$$\begin{array}{r} x \quad \square \\ x) \quad x \quad \square \\ \square x \quad \square \\ \hline x^2 \quad \square x \\ x^2 \quad -3x \quad -40 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x \quad \square \\ x) \quad x \quad \square \\ \square x \quad \square \\ \hline x^2 \quad \square x \\ x^2 \quad -8x \quad +5x \\ \hline \end{array}$$

$$=(x - 3)(x - 8)$$

故因式分解 $x^2 - 11x + 24 = (x-3)(x-8)$

範例 3：因式分解 $x^2 + 8x + 12$

A 版

$$\begin{array}{r} x \quad \square \\ x) \quad x \quad \square \\ \square x \quad \square \\ \hline x^2 \quad \square x \\ x^2 \quad +8x \quad +12 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x \quad \square \\ x) \quad x \quad \square \\ \square x \quad \square \\ \hline x^2 \quad \square x \\ \square x \quad \square \\ \hline \end{array}$$

$$=(x + 2)(x + 6)$$

說明：

A 版

$$\begin{array}{r} x \quad +2 \\ x) \quad x \quad +6 \\ +6x \quad \square \\ \hline x^2 \quad +2x \\ x^2 \quad +8x \quad +12 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x \quad +2 \\ x) \quad x \quad +6 \\ +2x \quad \square \\ \hline x^2 \quad +2x \\ +2x \quad \square \\ \hline \end{array}$$

$$=(x + 2)(x + 6)$$

範例 4：因式分解 $x^2 + 3x - 88$

A 版

$$\begin{array}{r} x \quad \square \\ x) \quad x \quad \square \\ \square x \quad \square \\ \hline x^2 \quad \square x \\ x^2 \quad +3x \quad -88 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x \quad \square \\ x) \quad x \quad \square \\ \square x \quad \square \\ \hline x^2 \quad \square x \\ \square x \quad \square \\ \hline \end{array}$$

$$=(x + 11)(x - 8)$$

本題是因式分解結果是一正、一負，一次項係數為正的類型。

教學活動流程設計

教學注意事項

說明：

A 版

$$\begin{array}{r} x \quad -8 \\ x \quad +11 \\ \hline +11x \\ x^2 - 8x \\ \hline x^2 + 3x - 88 \\ = (x - 8)(x + 11) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \quad \quad \quad -88 \text{ 積} \\ x \quad -8 \\ x \quad +11 \\ \hline -8x \quad +11x \\ \hline \quad \quad \quad +3 \text{ 和} \end{array}$$

本題是因式分解結果是一正、一負，一次項係數為正的類型。

練習：因式分解下列各式

1. $x^2 + 4x + 4$

$= (x \quad)(x \quad)$

相加 4 相乘 4

$$\begin{array}{r} \quad \quad \quad \square \text{ 積} \\ x \quad \square \\ x \quad \square \\ \hline \square x \quad \square x \\ \hline \quad \quad \quad \square \text{ 和} \end{array}$$

2. $x^2 - 8x + 16$

$= (x \quad)(x \quad)$

相加 -8 相乘 +16

$$\begin{array}{r} \quad \quad \quad \square \text{ 積} \\ x \quad \square \\ x \quad \square \\ \hline \square x \quad \square x \\ \hline \quad \quad \quad \square \text{ 和} \end{array}$$

3. $x^2 + 5x - 14$

$= (x \quad)(x \quad)$

相加 5 相乘 -14

$$\begin{array}{r} \quad \quad \quad \square \text{ 積} \\ x \quad \square \\ x \quad \square \\ \hline \square x \quad \square x \\ \hline \quad \quad \quad \square \text{ 和} \end{array}$$

4. $x^2 - 4x - 24$

$= (x \quad)(x \quad)$

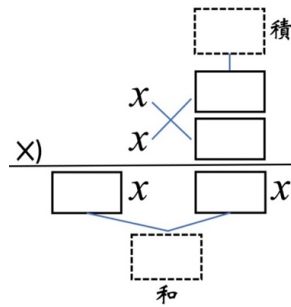
相加 -8 相乘 -24

$$\begin{array}{r} \quad \quad \quad \square \text{ 積} \\ x \quad \square \\ x \quad \square \\ \hline \square x \quad \square x \\ \hline \quad \quad \quad \square \text{ 和} \end{array}$$

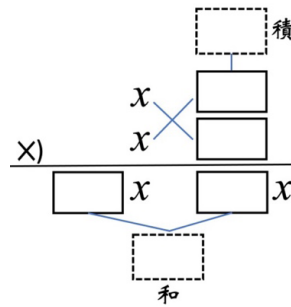
教學活動流程設計

教學注意事項

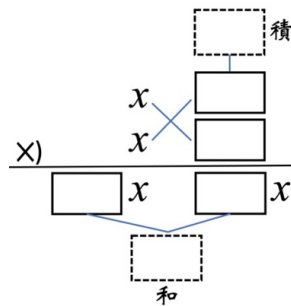
5. $x^2 - 11x + 18$
 $= (x \quad)(x \quad)$
 相加 $\underline{\quad}$ 相乘 $\underline{\quad}$



6. $x^2 + x - 42$
 $= (x \quad)(x \quad)$
 相加 $\underline{\quad}$ 相乘 $\underline{\quad}$

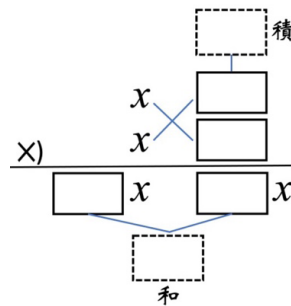


7. 因式分解 $x^2 - 6x + 9$
 相加 $\underline{\quad}$ 相乘 $\underline{\quad}$



$x^2 - 6x + 9 = (\quad)(\quad)$

8. 因式分解 $x^2 - 16$
 相加 $\underline{\quad}$ 相乘 $\underline{\quad}$



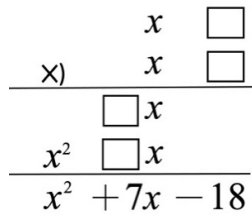
$x^2 - 16 = (\quad)(\quad)$

三、總結

教師說明

我們進行解題回顧，可以讓同學們對解題的過程更加理解，更掌握因式分解的作法。

例：因式分解 $x^2 + 7x - 18$



從直式乘法的填空中發現，

意思就是要找出兩數：

兩數相乘等於 -18

兩數相加等 7

$(-2) \times 9 = -18 \rightarrow$ 先考慮

$(-2) + 9 = 7 \rightarrow$ 後驗算

$x^2 + 7x - 18 = (x - 2)(x + 9)$

利用解題回顧讓學生更清楚地看到解題的過程，並將多項式乘法的運算與分解的結果進行比較與結合。

教學活動流程設計

教學注意事項

| | | |
|---|---------|---|
| $\begin{array}{r} x \quad \boxed{-2} \\ x \quad \boxed{+9} \\ \hline x^2 \quad \boxed{-2}x \\ \hline x^2 + 7x - 18 \end{array}$ <p>↑ 直式乘法</p> | 簡記為 | $\begin{array}{r} x \quad -2 \\ x \quad +9 \\ \hline -2x \quad +9x = 7x \end{array}$ <p>↑ 十字交乘法</p> |
|---|---------|---|

教師提問 5

各位同學，從上面的操作過程，我們利用的工具好像只有直式乘法，為什麼老師的標題要稱作「十字交乘法」，它和十字有什麼關係？為什麼老師會一直提及「十字交乘因式分解」呢？

學生回答

我覺得在做直式乘法時，如果把相乘的方向標記出來，標記的記號勉強算是個斜斜的十字。

教師說明

很棒的觀察，由 $x^2 + 9x + 14 = (x + 2)(x + 7)$ 知， $(x + 2)$ 和 $(x + 7)$ 都是 $x^2 + 9x + 14$ 的因式，將 $x^2 + 9x + 14$ 變成 $(x + 2)(x + 7)$ ，稱之為因式分解。接下來讓我們用直式乘法的角度，審視計算 $(x + 2)(x + 7) = x^2 + 9x + 14$ 的過程。

| |
|---|
| $\begin{array}{r} x \quad +2 \\ x \quad +7 \\ \hline 7x + 14 \\ x^2 + 2x \\ \hline x^2 + 9x + 14 \end{array}$ |
| |
| $x^2 = x \cdot x \quad \left \begin{array}{r} x \quad +2 \\ x \quad +7 \end{array} \right \quad 2 \times 7 = 14$ <hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> $+2x \quad +7x = 9x$ |
| |
| $\begin{array}{r} x \quad +2 \\ x \quad +7 \\ \hline +2x \quad +7x = 9x \end{array}$ |

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|--|--------|
| <p>因為二次項係數為 1，所以 x^2 必定是由 $x \cdot x$ 得到，我們在思考 p、q 之值時，通常會先將乘積（常數項）分解之後，再驗算這些數字之和是否符合一次項的係數，這個驗算過程會出現一個斜的十字，所以我們把這種因式分解的方法稱為「十字交乘因式分法」。</p> <p>《第 3 節結束》</p> | |

主題二：二次項係數不為 1 時的十字交乘法

| 教學活動流程設計 | 教師注意事項 |
|--|---|
| <div style="background-color: #333; color: white; padding: 5px; margin-bottom: 10px;">第 4 節</div> <p>一、準備活動</p> <p>教師提問 1</p> <p>經過了第 3 節的討論與練習，相信同學已經可以完成二次多項式中二次項係數為 1 時的十字交乘，在繼續進行下一個主題之前，老師想給同學一個小挑戰：請同學在空格中填入適當的答案，讓它成為一個正確的多項式乘法算式。</p> $ \begin{array}{r} \\ x^2 \\ \hline x \\ \\ \hline x^2 \\ x \\ \hline x^2 - 35 \end{array} $ <p>學生回答</p> <p>這問題好像很簡單，可是我的答案和隔壁的同學答案不同耶？</p> <p>教師說明</p> <p>沒錯，這個題目並不是只有一種答案喔。利用先分解常數項，再驗算一次項係數這個小技巧，應該能幫助同學們完成這題多項式的乘法。</p> | <p>這個提問是在結合兩數和與兩數積的題目，到十字交乘因式分解時可能出現的組合情形，學習單 2 前半段的學習內容為了讓學生能感受到由多項式要往回推因式時，當有部份的係數是未知的時候，其因式會有很多種的可能。</p> |

教學活動流程設計

教師注意事項

$$\begin{array}{r}
 x \quad \boxed{-7} \\
 x) \quad x \quad \boxed{+5} \\
 \hline
 \quad \boxed{+5}x \\
 x^2 \quad \boxed{-7}x \\
 \hline
 x^2 \quad \boxed{-2}x - 35
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 x \quad \boxed{+7} \\
 x) \quad x \quad \boxed{-5} \\
 \hline
 \quad \boxed{-5}x \\
 x^2 \quad \boxed{+7}x \\
 \hline
 x^2 \quad \boxed{+2}x - 35
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 x \quad \boxed{+1} \\
 x) \quad x \quad \boxed{-35} \\
 \hline
 \quad \boxed{-35}x \\
 x^2 \quad \boxed{+1}x \\
 \hline
 x^2 \quad \boxed{-34}x - 35
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 x \quad \boxed{-1} \\
 x) \quad x \quad \boxed{+35} \\
 \hline
 \quad \boxed{+35}x \\
 x^2 \quad \boxed{-1}x \\
 \hline
 x^2 \quad \boxed{+34}x - 35
 \end{array}$$

它的答案不是只有一個，而是有 4 個可能呢！

教師說明

透過這個題目，同學是不是更清楚地感受到「常數項」和「一次項係數」，這兩個數字的關係相關密切呢？

教師提問 2

結束二次項係數為 1 的因式分解之前，老師要提醒同學一件重要的觀念，請想一想，『求 $(x + 2)(x + 7) = ?$ 』與『求 $x^2 + 9x + 14 = () ()$ 』這兩個題目有什麼不同？

學生回答

一個是有括號，要求把答案乘出來，一個是有題目，要求我們算出答案。

教師說明

同學觀察得很仔細，這正是我們學到的兩個主題內容，我們將它們區分如下：

求 $(x + 2)(x + 7) = ?$

答： $(x + 2)(x + 7) = x^2 + 9x + 14$

→由 $(x + 2)(x + 7)$ 變成 $x^2 + 9x + 14$

稱為「多項式的乘法」

例如：

求 $x^2 + 9x + 14 = () ()$

答： $x^2 + 9x + 14 = (x + 2)(x + 7)$

由多項式的除法，我們已經知道

| 教學活動流程設計 | 教師注意事項 |
|---|--|
| <p>$(x + 2)$、$(x + 7)$ 都是 $x^2 + 9x + 14$ 的因式 \rightarrow 由 $x^2 + 9x + 14$ 變成 $(x + 2)(x + 7)$ 稱為「多項式的因式分解」</p> <p>所以因式分解和乘法展開，其實是一體的兩面，當同學熟練了多項式的乘法，對我們要進行逆推、思考因式分解的題目時，就不會覺得是那麼困難的事情嘍。</p> <p>二、發展活動：二次項係數不為 1 的因式分解</p> <p>教師提問 3 如果想要分解二次項係數不為 1 的二次多項式，例如：因式分解 $3x^2 + 10x + 8$，同學們會如何處理呢？</p> <p>學生回答 將它的直式乘法列出來填空！</p> <p>教師說明 的確是可行的想法，那就請同學試著試填填看。 請同學拿出因式分解練習板 (B 版)，右邊的空格可以先用別的紙蓋住，或者先不管它，找注意力放在左邊的空格，試著找到符合題目要求的數字組合。</p> <div data-bbox="341 1447 794 1738" data-label="Complex-Block"> <p>B 版</p> $\begin{array}{r} \square x \square \\ \times) \square x \square \\ \hline \square x \square \\ \square x^2 \square \\ \hline 3x^2 + 10x + 8 \end{array}$ <p>$= (\quad x \quad) (\quad x \quad)$</p> </div> <p>依據之前的經驗，經由常數項 8，我們知道要找出某兩數相乘等於 8；而由 x^2 項係數 3，我們知道要找到另兩數相乘等於 3 且中間經過兩個 x 項的係數相加之後，要得到 10，統整以上的資訊，我們開始填空：</p> | <p>處理二次項係數不為 1 的二次多項式，建議仍由多項式的乘法下手，才不會讓學生出現「又要學一種新作法」的感覺。</p> <p>學習單 2 內容是說明二次項係數不為 1 時的十字交乘法</p> <p>讓學生感受這些數字的組合有多種的變化是重要的事，有的學生會享受這個過程，但是有的學生則產生困擾。對於無法處理這個部份的學生會在第 5 節做進一步的說明與引導。</p> |

教學活動流程設計

因為 $3=1\times 3$ 只有一種可能，而 8 的分解
有 $8=1\times 8=2\times 4$ 二種可能

所以填入空格，有以下幾種情形：

$$\begin{array}{r} \boxed{1}x \quad \boxed{1}8 \\ \times) \boxed{3}x \quad \boxed{8}1 \\ \hline \boxed{}x \\ \boxed{3}x^2 \quad \boxed{}x \\ \hline 3x^2 + 10x + 8 \end{array} \quad \text{或} \quad \begin{array}{r} \boxed{1}x \quad \boxed{2}4 \\ \times) \boxed{3}x \quad \boxed{4}2 \\ \hline \boxed{}x \\ \boxed{3}x^2 \quad \boxed{}x \\ \hline 3x^2 + 10x + 8 \end{array}$$

哪一種安排才會讓兩個一次項係數的和變成 10 呢？

同學們經過嘗試後，會發現有蠻多種數字的組合，而其中只有一種組合會符合 $3x^2 + 10x + 8$ 的數字，是正確的安排。

【錯誤的安排】

$$\begin{array}{r} \cancel{1x} + 1 \\ \cancel{3x} + 8 \\ \hline 3x + 8x = 11x \end{array} \quad \begin{array}{r} \cancel{1x} + 8 \\ \cancel{3x} + 1 \\ \hline 24x + x = 25x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \cancel{1x} + 4 \\ \cancel{3x} + 2 \\ \hline 12x + 2x = 14x \end{array}$$

【正確的安排】

$$\begin{array}{r} \cancel{1x} + 2 \\ \cancel{3x} + 4 \\ \hline 6x + 4x = 10x \end{array}$$

因式分解得到 $3x^2 + 10x + 8 = (x + 2)(3x + 4)$

教師說明

同學或許會覺得有點麻煩，因為要試好多次才能找到正確的數字組合，不過這正是這個單元同學們要多多練習的地方。

教師注意事項

鼓勵學生多加嘗試與練習，教師要多一點耐心。

教學活動流程設計

教師注意事項

練習 1：因式分解 $2x^2 - 5x - 3$

B 版

$$\begin{array}{r} \square x \quad \square \\ \times) \square x \quad \square \\ \hline \square x \\ \square x^2 \quad \square x \\ \underline{2x^2 \quad -5x \quad -3} \end{array}$$

$= (\quad x \quad) (\quad x \quad)$

練習 2：因式分解 $4x^2 + 12x + 5$

B 版

$$\begin{array}{r} \square x \quad \square \\ \times) \square x \quad \square \\ \hline \square x \\ \square x^2 \quad \square x \\ \underline{4x^2 \quad +12x \quad +5} \end{array}$$

$= (\quad x \quad) (\quad x \quad)$

練習 3：因式分解 $3x^2 - 5x - 12$

B 版

$$\begin{array}{r} \square x \quad \square \\ \times) \square x \quad \square \\ \hline \square x \\ \square x^2 \quad \square x \\ \underline{3x^2 \quad -5x \quad -12} \end{array}$$

練習 4：因式分解 $7x^2 - 9x - 10$

B 版

$$\begin{array}{r} \square x \quad \square \\ \times) \square x \quad \square \\ \hline \square x \\ \square x^2 \quad \square x \\ \underline{7x^2 \quad -9x \quad -10} \end{array}$$

練習 5：因式分解 $6x^2 + 13x - 15$

B 版

$$\begin{array}{r} \square x \quad \square \\ \times) \square x \quad \square \\ \hline \square x \\ \square x^2 \quad \square x \\ \underline{6x^2 \quad +13x \quad -15} \end{array}$$

《第 4 節結束》

教學活動流程設計

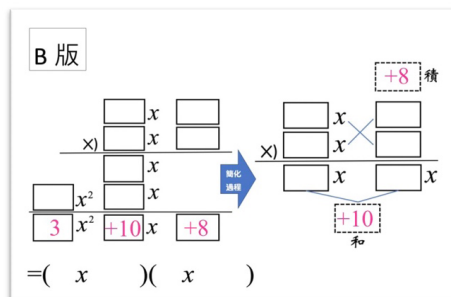
教師注意事項

第 5 節

一、準備活動

教師提問 1

請問各位同學，因式分解 $3x^2 + 10x + 8$ 利用二次項係數等於 1 時的作法，為什麼在我們的填空板中將「積」填入 8，「和」填入 10，透過這個組合卻找不到正確的分解的數字呢？



學生回答

因為這個作法只適合用在因式分解二次項係數等於 1 的題目，但是因式分解 $3x^2 + 10x + 8$ 時，它的 x^2 的係數是 3，並不符合要求。

教師提問 2

太棒了，同學已經掌握到二次項係數等於 1 的多項式連行十字交乘因式分解的重點了。當二次項係數不等於 1 時，同學們要更有耐心去尋找符合題目的數字組合，在沒有試過之前會覺得這些數字的組合都有可能，但是，因式分解 $3x^2 + 10x + 8$ 時，同學們有沒有發現這些安排有沒有什麼原則呢？

學生回答

我覺得要思考一次項係數與二次項係數及常數項的乘積之間的大小，例如：

$$3x^2 + 10x + 8$$

$$\begin{array}{r} 1x \quad + 8 \\ 3x \quad + 1 \\ \hline 24x \quad + x = 25x \end{array}$$

本節課的目的是嘗試利用第 3 節時已建立的因式分解方式與當多項式二次項係數不等於 1 的因式分解方法，兩者拉上關係。

| 教學活動流程設計 | 教師注意事項 |
|--|---|
| <p>一次項係數是 10，而 $3 \times 8 = 24$，會發現 10 與 24 兩者相差太多，所以是不太可能的一個選擇。</p> <p>教師提問 3 很好的觀察，的確利用這個觀念，可能幫助同學排除掉一些不太可能的數字組合。但老師要問的是，我們之前學會的方法：透過「兩數的和」、「兩數的積」，真的無法解出這種類型的因式分解，派不上用場了嗎？</p> <p>學生回答 沒錯，方法沒用，只能不斷嘗試在錯誤中找答案。</p> <p>教師提問 4 別這麼快放棄！同學是否還記得在第 4 節課剛開始，我們說明了「多項式的乘法」與「多項式的因式分解」是一體的兩面，可以透過多項式的乘法，逆推進行思考因式分解的題目，請問 $(ax+b)(cx+d)$ 乘開，會得到哪一個多項式？</p> <p>學生回答 透過橫式乘法，也就是分配律，可以得到： $(ax+b)(cx+d) = acx^2 + adx + bcx + bd$ $= acx^2 + (bc + ad)x + bd$ 如果透過直式乘法，乘開之後也會得到：</p> $\begin{array}{r} \begin{array}{cc} ax & + & b \\ \times) & cx & + & d \end{array} \\ \hline adx & + & bd \\ acx^2 & + & bcx \\ \hline acx^2 & + & (bc + ad)x & + & bd \end{array}$ <p>教師提問 5 我們想要沿用「兩數的和」與「兩數的積」這個因式分解的作法。可是 $acx^2 + (bc + ad)x + bd$ 除了明顯的二次項係數不是 1 之外，一次項係數是 $(bc + ad)$，常數項是 bd，並不符合我們之前要求要符合「兩數的積」與「兩數的和」的原則。</p> | <p>學生若是對乘法分配律不熟悉，教師可適時幫學生複習。</p> <p>本模組在二次項係數不為 1 時，採用的因式分解方式，與課本並不相同，因此本做法可做學生解題的另一種參考，可用來解決二次項係數不為 1 時因式分解其他解決方式。</p> |

教學活動流程設計

教師注意事項

學生回答

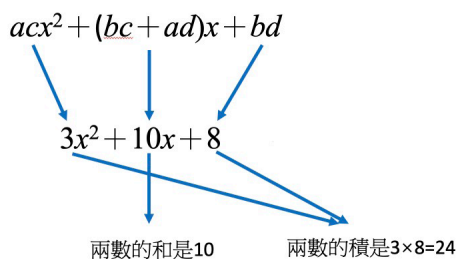
由一次項係數是 $(bc + ad)$ ，我們可看成是 bc 與 ad 等兩數相加，依據之前的作法，只要再找出此兩數的乘積即可，也就是 $bc \cdot ad$ 即可。

然後，我們又發現題目中二次項的係數是 ac ，常數項是 bd ，將兩數 ac 與 bd 相乘後，就可以算出 $bcad$ 之值了呀。

教師說明

太棒的發現了，當我們利用「二次項的係數」×「常數項」就得到兩數的積 $(bcad)$ 之值，題目就能符合之前「兩數乘積」與「兩數的和」的要求。

所以同學們就能採用填空格的方式完成十字交乘法的因式分解嘍。



我們已經得到一個因式分解二次項係數不等於 1 多項式的方法，現在來回顧因式分解 $3x^2 + 10x + 8$ 的過程。

請同學拿出因式分解練習板 (B 版)，這次注意力則放在右邊的空格，請試著找到符合題目要求的數字組合。

準備事項：

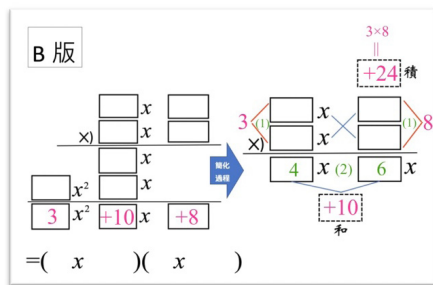
先填好兩數的和 (10)、兩數的積 ($3 \times 8 = 24$)

這裡的思考與先前在第 4 節中嘗試錯誤法類似，只不過我們將注意力聚焦於「兩數和與兩數積」可能出現的結果。

教學活動流程設計

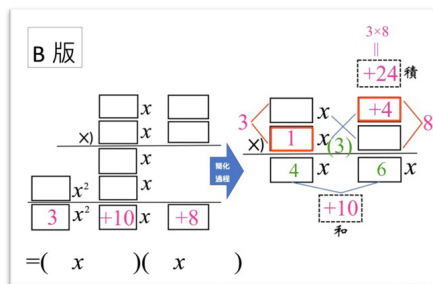
教師注意事項

第一步：思考有哪兩數相加 10，相乘 24? 經過思考得到兩數應是 4、6，將 4、6 填入 x 的空格中。

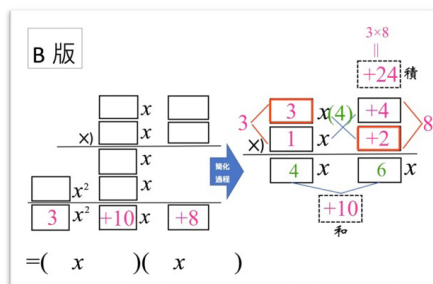


第二步：思考 $4x$ 上方的空格，十字相乘後要得到 4，且符合二次項係數 3 的數字可以是誰？只能填 1，十字交乘另一邊相乘的數必定是 4。因此完成十字的第一條線，寫常數項時我們會將它的正、負號也一併標出。

第三步：另外兩個空格中，只要思考何者能符合二次項係數 3 與常數項 8，就可以得到另兩格應該要填入 3 和 2，完成了十字交乘因式分解。



可以將右邊空格內的數字，填到左邊的空格中進行驗算，答案正確無誤。



最後填入因式分解

$$3x^2 + 10x + 8 = (3x + 4)(x + 2)$$

教學活動流程設計

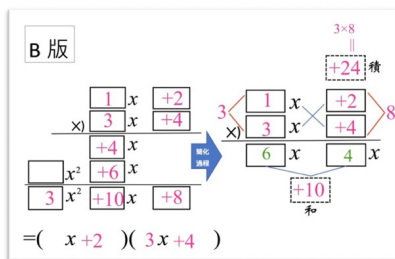
教師注意事項

教師提問 6

在第 1 步中，兩數是 4、6，將 4、6 填入 x 的空格的方法，一定是先寫 4，再寫 6 嗎？能不能對調，先寫 6，再寫 4 呢？

學生回答

經過嘗試，可以對調，只是因式分解之後的寫法，兩個因式上下對調了。

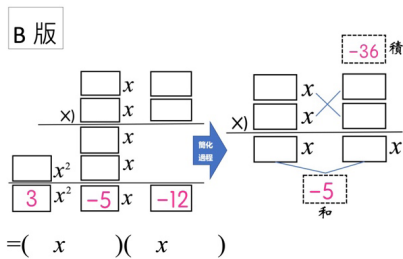


因式分解 $3x^2 + 10x + 8 = (x+2)(3x+4)$

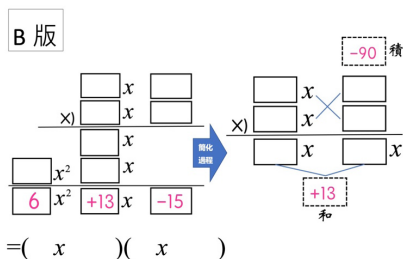
教師說明

太棒了，同學們應該再次驗證，多項式的因式分解就是多項式乘法的反向思維。利用上述的想法，同學們在進行填空時，可以使用右方的簡化版寫法，方便我們進行因式分解，最後用左方的乘法來驗證自己的分解法結果是否正確。

練習：因式分解 $3x^2 - 5x - 12$



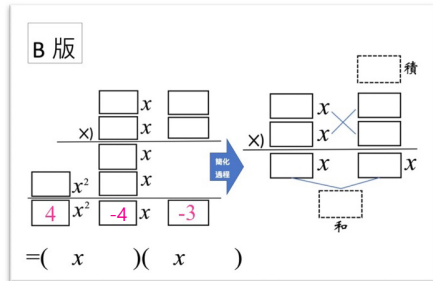
練習：因式分解 $6x^2 + 13x - 15$



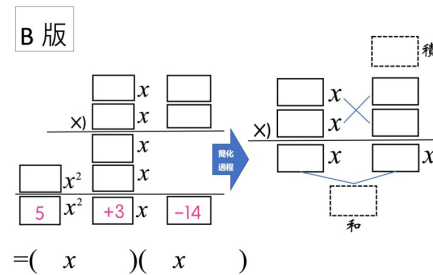
教學活動流程設計

教師注意事項

練習：因式分解 $4x^2 - 4x - 3$



練習：因式分解 $5x^2 + 3x - 14$



《第 5 節結束》

第 6 節

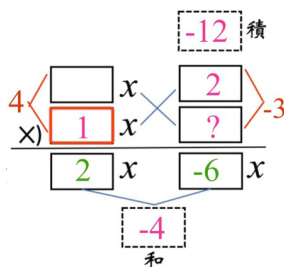
一、準備活動

教師提問 1

請同學回顧解因式分解 $4x^2 - 4x - 3$ 過程，是否有發現十字交乘進行因式分解時，哪些步驟常常容易出錯？或是有哪些觀念常常出現錯誤？

學生回答

在十字交乘時對於數字的选择，有時候一不注意，很容易想錯數字，不但用掉很多的時間，最後還產生因式分解無法成功的情形，如下圖：



↑ 「1」是不正確的選擇

這是一個重要的提問，可以讓學生知道，分解時數字的安排，可以有不一樣的寫法，但是只要分解正確，都能成功完成因式分解。

並讓學生看到

$$3x^2 + 10x + 8 = (3x+4)(x+2) = (x+2)(3x+4)$$

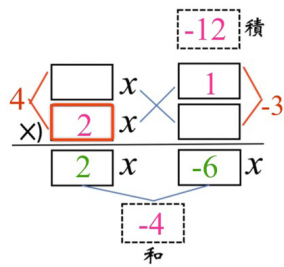
教學活動流程設計

教師注意事項

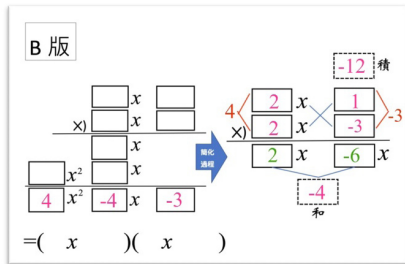
教師說明

同學已經發現在進行十字交乘因式分解時，很容易發生的問題所在，因為在填紅色那格數字時，我們可以選 1 或 2，但是若選 1，另一邊要十字交乘的數字只能填 2，可是卻找不到適當的整數，符合得到常數項為 -3，至此我們才能確定在紅色的空格填「1」是不正確的選擇。

只有當我們在紅色的空格填入「2」之後，才有辦法順利完成十字交乘因式分解，要如何克服這個問題呢？透過同學自己的課餘練習，熟能生巧後就會得到改善。



↑ 「2」是正確的選擇



↑ 正確的選擇

教師提問 2

當我們完成十字交乘的過程後，寫出最後因式分解的答案時，請問 $4x^2 - 4x - 3 = (2x+1)(2x-3)$ ，這個寫法是否正確？

學生回答

不對，1 的前面少了運算符號，應該是 $(2x+1)$ 。

在以下的題目要提醒學生常常出錯的步驟或是容易出現的錯誤類型。

- (1) 分解時數字的選擇搞不清楚
- (2) 分解時，漏寫數字的性質符號
- (3) 分解完成，被十字交乘影響，依十字交乘的方向抄寫答案，出現錯誤

錯誤類型：分解時數字的選擇無法做出正確的選擇。

錯誤類型：因式分解後，漏寫數字的性質符號。

教學活動流程設計

教師注意事項

教師說明

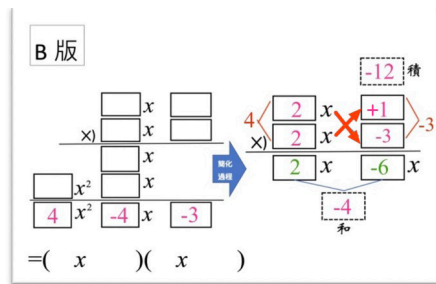
同學說得很好，在進行因式分解時，除了思考數字之間的關係外，第二個要小心的地方是最後答案的寫法。所以要特別注意因式中常數項的正負符號。

此題因式分解正確的寫法為

$$4x^2 - 4x - 3 = (2x + 1)(2x - 3)$$

教師提問 3

很好，同學已經解決一個常見的錯誤，同樣的題目，請問沿著箭頭的方向寫出因式分解的答案，如下圖，請問 $4x^2 - 2x - 3 = (2x+1)(2x - 3)$ ，這個寫法是否正確？



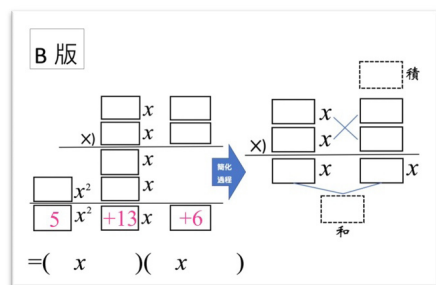
錯誤類型：因式分解完成，受到十字交乘的影響，依十字交乘的方向抄寫答案，出現錯誤。

學生回答

反正十字交乘答案對，就是答案就對了嘛。

教師提問 4

請同學因式分解 $5x^2 + 13x + 6$ ，並以沿著箭頭的方向寫出因式分解的答案。



學生回答

$$\text{因式分解 } 5x^2 + 13x + 6 = (5x + 2)(x + 3)$$

教學活動流程設計

教師注意事項

B 版

$= (5x + 2)(1x + 3)$

教師提問 5

我們將 $(5x + 2)(x + 3)$ 乘開之後，得到的是 $5x^2 + 17x + 6$ ，不是 $5x^2 + 13x + 6$ 耶，答案為什麼錯了呢？

學生回答

我發現只要將十字交乘的過程，抄到左邊的乘法空格裡再乘開之就會發現，不能依照箭頭的方向斜著抄答案，因為乘開之後的答案不同。

B 版

$5x^2 + 13x + 6 \neq (5x + 2)(x + 3)$

教師說明

在利用十字交乘進行因式分解時，當完成分解後要小心因式的寫法。

1. 小心分解時，數字的正負號。
2. 理解因式分解後的因式寫法。
3. x 前面的係數若是 1，則 1 可以省略。

B 版

$= (+5x + 3)(+1x + 2)$

$5x^2 + 13x + 6 = (5x + 3)(x + 2)$

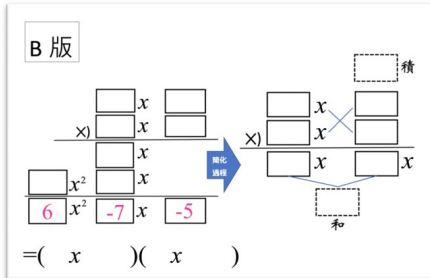
練習：將下列各多項式進行因式分解

教學活動流程設計

教師注意事項

1. 因式分解 $6x^2 - 7x - 5$

B 版



$$\begin{array}{r} \square x \square \\ \square x \square \\ \hline \square x^2 \square \\ 6x^2 \quad -7x \quad -5 \end{array} \xrightarrow{\text{十字交乘}} \begin{array}{r} \square x \square \\ \square x \square \\ \hline \square x^2 \square \\ \square x \square \end{array}$$

和

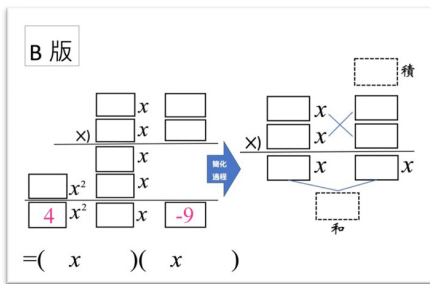
積

$= (2x + 1)(3x - 5)$

$6x^2 - 7x - 5 = (\quad)(\quad)$

2. 因式分解 $4x^2 - 9$

B 版



$$\begin{array}{r} \square x \square \\ \square x \square \\ \hline \square x^2 \square \\ 4x^2 \quad \quad -9 \end{array} \xrightarrow{\text{十字交乘}} \begin{array}{r} \square x \square \\ \square x \square \\ \hline \square x^2 \square \\ \square x \square \end{array}$$

和

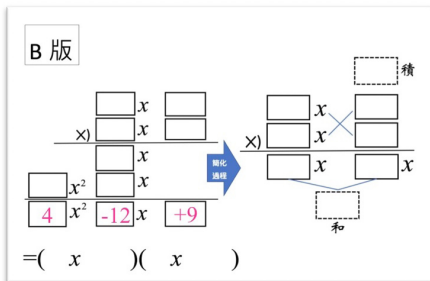
積

$= (2x + 3)(2x - 3)$

$4x^2 - 9 = (\quad)(\quad)$

3. 因式分解 $4x^2 - 12x + 9$

B 版



$$\begin{array}{r} \square x \square \\ \square x \square \\ \hline \square x^2 \square \\ 4x^2 \quad -12x \quad +9 \end{array} \xrightarrow{\text{十字交乘}} \begin{array}{r} \square x \square \\ \square x \square \\ \hline \square x^2 \square \\ \square x \square \end{array}$$

和

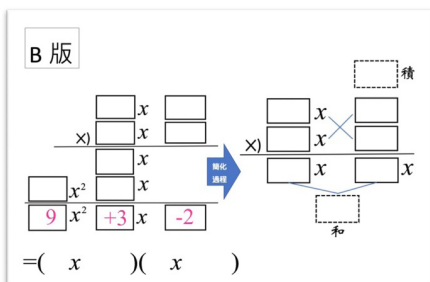
積

$= (2x - 3)(2x - 3)$

$4x^2 - 12x + 9 = (\quad)(\quad)$

4. 因式分解 $9x^2 + 3x - 2$

B 版



$$\begin{array}{r} \square x \square \\ \square x \square \\ \hline \square x^2 \square \\ 9x^2 \quad +3x \quad -2 \end{array} \xrightarrow{\text{十字交乘}} \begin{array}{r} \square x \square \\ \square x \square \\ \hline \square x^2 \square \\ \square x \square \end{array}$$

和

積

$= (3x + 2)(3x - 1)$

$9x^2 + 3x - 2 = (\quad)(\quad)$

《第 6 節結束》

練習題的部份也將乘法公式之平方差與完全平方公式的題型加入，讓學生以十字交乘因式分解法進行練習，希望同學對因式分解這個單元有統整的觀念。

| | |
|----|--|
| 附件 | <ul style="list-style-type: none"> · 附件 1：學習單。 · 附件 1~2：自編學習單。 · 附件 3：前測卷。 · 附件 4：後測卷。 · 附件 5：和與積猜測遊戲板(只有正數)(第 1~2 節，二次項係數為 1 的十字交乘)。 · 附件 6：和與積猜測遊戲板(含負數)(第 1~2 節，二次項係數為 1 的十字交乘)。 · 附件 7：多項式乘法填空暨因式分解板(A 版)(第 3 節，二次項係數為 1 的十字交乘)。 · 附件 8：多項式乘法填空暨因式分解板(B 版)(第 4~6 節，二次項係數不為 1 的十字交乘)。 |
|----|--|



附件

請至「國民小學及國民中學學生學習扶助資源平臺」下載

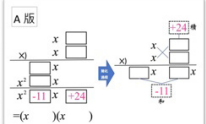
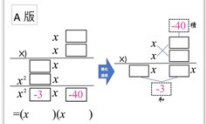
評量 工具

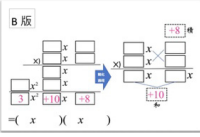


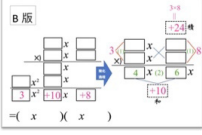
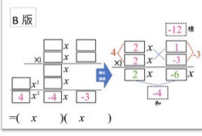
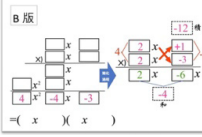
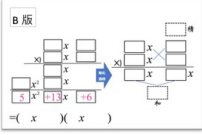
1. 理解學生概念學習狀況的課堂口頭提問；
2. 測驗學生主題單元概念的運算熟悉程度的附件：學習單。

一、口頭提問

| 提問位置 主題 - 節 - 標題 - 提問順序 | 問題 | 配合物品或附件 |
|----------------------------|---|---------------------------------|
| 主題 I -12-1 | 請問如果要在下列等式的兩個空格中分別填入兩個整數(此兩數可以相同也可以不同)，使等式成立，請問你會怎麼填入這兩個整數？ | 學習單一 $\square + \square = 7$ |
| 主題 I -12-2 | 現在換另一個等式，同樣地在兩個空格中分別填入兩個整數(此兩數可以相同也可以不同)，使等式成立，請問你會怎麼填入這兩個整數。 | $\square \times \square = 10$ |

| 提問位置 主題 - 節 - 標題 - 提問順序 | 問題 | 配合物品或附件 |
|----------------------------|---|---|
| 主題 I-12-3 | 如果以這兩題來比較，哪一題比較容易找到答案，說說你的理由？ | |
| 主題 I -12-4 | 請同學要分享自己得分的秘訣，如何才能快速的找到符合這兩個條件「和」與「積」的兩數呢？請以「兩數的和 = 9」、「兩數的積 = 14」為例。 | |
| 主題 I -12-5 | 你們覺得哪一個方法比較方便且能快速地檢驗出正確答案？ | |
| 主題 I-12-6 | 說得很好。大家再想一想，每一種可能性都要找出來才能解決這個題目嗎？ | |
| 主題 I-12-7 | 既然要找一組符合相加為 9，相乘為 14 的數字，是不是很像求在二元一次聯立方程式的解，將這個解分別代入二元一次方程式都要符合？在這個前提下，相加為 9，這樣的兩數有 4 種選擇；相乘為 14，這樣的兩數有 2 種選擇。也就是如果有答案的話，正確答案是不是一定在相加 4 個選擇與相乘 2 個選擇中共同的那組數？所以選哪一組的答案來檢查比較簡單？ | |
| 主題 I-12-8 | 非常好，我們找到共識了，要優先思考「相乘」的那組數。請同學試試，求出符合「兩數的和 = -2」、「兩數的積 = -24」的兩數，答案應該為何？ | |
| 主題 I-12-9 | 同學的想法很不錯，有沒有同學還有其他的作法？ | |
| 主題 I-3-1 | 在上面兩個乘法的填空題中，題目是否出現有「兩數的和」與「兩數的積」的地方呢？ | $\begin{array}{r} x + \square \\ x + 4 \\ \times) \quad \quad \quad \\ \hline 4x + 28 \\ x^2 + \square \\ \hline x^2 + \square + \square \end{array}$ |
| 主題 I-3-2 | 非常好，假設因式分解 $x^2 + 9x + 14$ 之後可得到 $(x + p)(x + q)$ ，同學們是否可以透過乘法的計算過程，更清楚地說明剛剛觀察的結論是正確的嗎？ | |
| 主題 I-3-3 | 請問哪兩個數字相乘後得到 24，但相加得到 -11 呢？ |  |
| 主題 I-3-4 | 請問同學，哪兩個數字相乘後得到 -40，但相加到 -3 呢？再試著依照乘法的運算規則，填入對應的格子內。 |  |

| 提問位置 主題 - 節 - 標題 - 提問順序 | 問題 | 配合物品或附件 |
|----------------------------|--|--|
| 主題 I-3-5 | 各位同學，從上面的操作過程，我們利用的工具好像只有直式乘法，為什麼老師的標題要稱作「十字交乘法」，它和十字有什麼關係？為什麼老師會一直提及「十字交乘因式分解」呢？ | |
| 主題 II-4-1 | 請同學在空格中填入適當的答案，使它成為一個正確的多項式乘法算式。 | $\begin{array}{r} x \quad \square \\ x) \quad x \quad \square \\ \underline{\square x} \\ x^2 \quad \square x \\ \underline{x^2 \quad \square x - 35} \end{array}$ |
| 主題 II-4-2 | 結束二次項係數為 1 的因式分解之前，老師要提醒同學一件重要的觀念，請想一想，『求 $(x+2)(x+7)=?$ 』與『求 $x^2+9x+14=(\quad)(\quad)$ 』這兩個題目有什麼不同？ | |
| 主題 II-4-3 | 如果想要分解二次項係數不為 1 的二次多項式，例如：因式分解 $3x^2+10x+8$ ，同學們會如何處理呢？ | |
| 主題 II-5-1 | 為什麼因式分解 $3x^2+10x+8$ 利用二次項係數等於 1 時的作法，在我們的填空板中將「積」填入 8，「和」填入 10，透過這個組合卻找不到正確的分解的數字呢？ |  |
| 主題 II-5-2 | 當二次項係數不等於 1 時，同學們要更有耐心去尋找符合題目的數字組合，在沒有試過之前會覺得這些數字的組合都有可能，但是，因式分解 $3x^2+10x+8$ 時，同學們有沒有發現這些安排有沒有什麼原則呢？ | |
| 主題 II-5-3 | 但老師要問的是，我們之前學會的方法：透過「兩數的和」、「兩數的積」，真的無法解出這種類型的因式分解，派不上用場了嗎？ | |
| 主題 II-5-4 | 我們說明了「多項式的乘法」與「多項式的因式分解」是一體的兩面，可以透過多項式的乘法，逆推進行思考因式分解的題目，請問 $(ax+b)(cx+d)$ 乘開，會得到哪一個多項式？ | |
| 主題 II-5-5 | 我們想要沿用「兩數的和」與「兩數的積」這個因式分解的作法。可是 $acx^2+(bc+ad)x+bd$ ，除了明顯的二次項係數不是 1 之外，一次項係數是 $(bc+ad)$ ，常數項是 bd ，並不符合我們之前要求要符合「兩數的積」與「兩數的和」的原則。雖然如此，但是請仔細觀察 $acx^2+(bc+ad)x+bd$ ，它的係數部份有沒有部份符合「兩數的和」或「兩數的積」其中一個條件呢？ | |

| 提問位置 主題 - 節 - 標題 - 提問順序 | 問題 | 配合物品或附件 |
|----------------------------|---|---|
| 主題 II-5-6 | 在第 1 步中，兩數是 4、6，將 4、6 填入 x 的空格的方法，一定是先寫 4，再寫 6 嗎？能不能對調，先寫 6，再寫 4 呢？ |  |
| 主題 II-6-1 | 請同學回顧解因式分解 $4x^2 - 4x - 3$ 過程，是否有發現十字交乘進行因式分解時，常常哪些步驟常常容易出錯？或是有哪些觀念常常出現錯誤？ | |
| 主題 II-6-2 | 當我們完成十字交乘的過程後，寫出最後因式分解的答案時，請問 $4x^2 - 4x - 3 = (2x+1)(2x-3)$ ，這個寫法是否正確？ |  |
| 主題 II-6-3 | 請問沿著箭頭的方向寫出因式分解的答案，如下圖，請問 $4x^2 - 4x - 3 = (2x+1)(2x-3)$ ，這個寫法是否正確？ |  |
| 主題 II-6-4 | 請同學因式分解 $5x^2 + 13x + 6$ ，並以沿著箭頭的方向寫出因式分解的答案。 |  |
| 主題 II-6-5 | 我們將 $(5x+2)(x+3)$ 乘開之後，得到的是 $5x^2 + 17x + 6$ ，不是 $5x^2 + 13x + 6$ 耶，答案為什麼錯了呢？ | |

教學反思 應用建議



本模組主題為「利用十字交乘因式分解」，同學一般認為學習因式分解的過程就是——一直在計算，不同的題目就要記不同的算法，尤其是學過提出公因式與乘法公式這兩種進行因式分解類型後，再接觸到本單元，這種想法就會更加強烈，所以本模組希望介紹十字交乘進行因式分解時，讓學生能回到多項式的乘法，透過遊戲與討論的引導，讓學生體會多項式的乘法與多項式的因式分解，其實只是解題方向不同的概念，本質上並不難，希冀能降低學生對學習的焦慮與挫折感。本模組選擇臺南市某國中八年級學生進行模組的試行，參與課程的八年級學生經過本補強課程模組的教學多數已能掌握十字交乘因式分解的意義與解題方法，更期待對學生後續相關單元的學習也有所助益。

一、學生表現

第一次教學有 9 位同學參與試行，第二次教學有 3 位同學參與，因疫情之故，只有第二次教學時能完整進行前後測，其學習成效分析如下：

1. 學生的前測成績表現

| 內容/ 學生 | 二次項係數為 1 (完全平方) | | 二次項係數為 1 | | 二次項係數不為 1 | | | 二次項係數不為 1 (完全平方) | 正確 率% |
|-----------|--------------------|------|----------|------|-----------|------|------|---------------------|----------|
| | 題 1 | 題 2 | 題 3 | 題 4 | 題 5 | 題 6 | 題 8 | 題 7 | |
| 學生 1 | ○ | × | × | × | × | × | × | × | 12.5 |
| 學生 2 | ○ | ○ | ○ | × | × | ○ | ○ | ○ | 75 |
| 學生 3 | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | × | ○ | ○ | 87.5 |
| 正確率% | 100 | 66.7 | 66.7 | 33.3 | 66.7 | 66.7 | 33.3 | 33.3 | |

2. 學生的後測成績表現

| 內容/ 學生 | 二次項係數為 1 (完全平方) | | 二次項係數為 1 | | 二次項係數不為 1 | | | 二次項係數不為 1 (完全平方) | 正確 率% |
|-----------|--------------------|-----|----------|-----|-----------|------|------|---------------------|----------|
| | 題 1 | 題 2 | 題 3 | 題 4 | 題 5 | 題 6 | 題 8 | 題 7 | |
| 學生 1 | ○ | ○ | ○ | ○ | × | × | × | × | 50 |
| 學生 2 | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | 100 |
| 學生 3 | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | 100 |
| 正確率% | 100 | 100 | 100 | 100 | 33.3 | 33.3 | 33.3 | 33.3 | |

3. 學生前、後測結果比較分析：

- (1) 「二次項係數為 1」部分，在乘法公式完全平方的類型上，由 1 名學生部份未通過進步至 3 名學生全數通過；在二次項係數為 1 十字交乘類型上，由 2 名學生部份未通過進步至 3 名學生全數通過，其中學生 1 由完全不會處理二次項係數為 1 的十字交乘因式分解到全部答對本類型，說明經過本模組的教學後已能讓學生掌握二次項係數為 1 十字交乘因式分解的做法。
- (2) 「二次項係數不為 1」部分，在乘法公式完全平方的類型上，3 名學生裡有 1 名學生沒有通過；在二次項係數不為 1 的十字交乘類型上，由 3 名學生部份未通過進步至 2 名學生全數通過，顯示經過本模組的教學後對學生掌握二次項係數不為 1 十字交乘因式分解的題目有幫助。
- (3) 教學者也發現有一名學生經過本模組的教學後「在二次項係數不為 1」的題目上仍然無法掌握，除了再個別指導之外，從最後學生留下的學習心得可看到，她雖然無法完全掌握十字交乘的所有題目，但是在學習信心上已有提升。

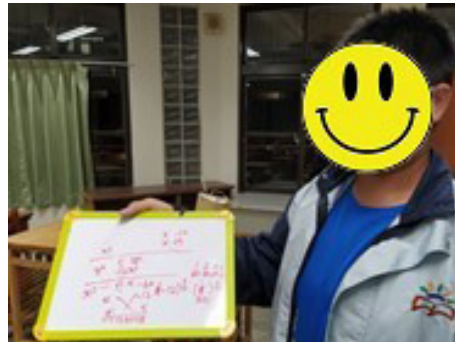
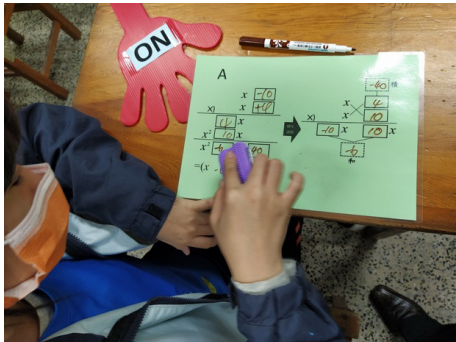
二、教學情形：

(一)「兩數和與兩數積」部份

1. 在第 1 節課利用遊戲 -- 兩數和與兩數積來建立學生的「數感」，在試行模組就發現一個有趣的現象，同學單純地想讓對手猜不出數字，所以出的題目都會偏難，而且常常找不到符合的整數，後來教學者發現這對學生而言，也是一個很好的經驗，並不是每一次都能找到整數的答案，剛好讓可學生連結至十字交乘因式分解的題目不一定能夠順利分解出來，那怎麼辦呢？引入配方法或公式解就有它的需求出現。
2. 在課程進行時因為會出現常常猜不出數字的情形，第 2 次試行課程時已將猜數字活動修正為 4 階段，全班練習→亂出題目→出正確的題目（正整數）→出正確的題目（正負整數混合）

(二)在「二次項係數為 1」部分

1. 有了猜數字遊戲的經驗，此時回到多項式的乘法，除了能讓學生複習乘法計算的步驟外，也是希望透過乘法計算的過程，讓學生感受多項式乘法與因式分解緊密的關係，學會多項式乘法就能學會處理因式分解，不需太多的記憶。教學者發現讓學生自己發現乘法與因式分解的關聯，會比教師直接告知來得有效，因此透過填空板的練習後，學生遇到不會因式分解的題目，他也會試著回到乘法去思考該如何解決，而不是只有單純的進行文字、數字的分解。



2. 此外讓學生理解為何稱之為「十字交乘因式分解」，讓學生能減化乘法記錄的過程，最後只留下「十字交乘」的型式是重要的，老師可以慢慢來，不必急於告訴學生最後的記錄方式。

從直式乘法出發 \longrightarrow 十字交乘

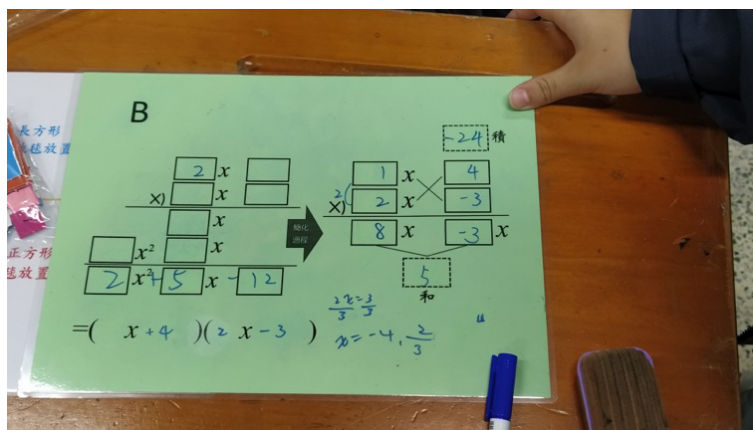
$$\begin{array}{r}
 x) \begin{array}{l} \cancel{x+2} \\ \cancel{x+7} \end{array} \\
 \hline
 7x+14 \\
 x^2+2x \\
 \hline
 x^2+9x+14
 \end{array}
 \quad \longrightarrow \quad
 \begin{array}{l}
 x^2=x \cdot x \quad \left| \begin{array}{l} \cancel{x}+2 \\ \cancel{x}+7 \end{array} \right| \quad 2 \times 7 = 14 \\
 \hline
 +7x \\
 +2x \\
 \hline
 = 9x
 \end{array}
 \quad \longrightarrow \quad
 \begin{array}{r}
 \cancel{x}+2 \\
 \cancel{x}+7 \\
 \hline
 2x \quad +7x = 9x
 \end{array}$$

(二) 在「二次項係數不為 1」部分

1. 當學生能夠因式分解「二次項係數為 1」的二次三項式後，另一個挑戰就是因式分解「二次項係數不為 1」的二次三項式，因為需要檢驗多種的數字組合，學生常常會出現錯誤或者常常找不到正確的組合而失去解題的信心，這裡提醒教師可以多給學生鼓勵，讓學生願意多嘗試，容許他犯錯。
2. 本模組在「二次項係數不為 1」的因式分解方式與課本的作法不太相同，嘗試貫徹只用「多項式乘法」與「兩數和及兩數積」這兩大概念來說明，所以在建立「二次項係數不為 1」二次三項式中，因式分解後「兩數和及兩數積」與题目的關聯時，可以講解慢一點，或是多舉幾個例子透過數字來驗證，讓學生建立這個概念。

因式分解 $acx^2 + (bc + ad)x + bd = (ax+b)(cx+d)$

$$\begin{array}{r}
 ax \quad + \quad b \\
 x) \quad \begin{array}{l} \cancel{cx} \quad + \quad d \\ \hline adx + bd \\ acx^2 + bcx \\ \hline acx^2 + (bc + ad)x + bd \end{array}
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 acx^2 + (bc + ad)x + bd \\
 \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\
 3x^2 + 10x + 8 \\
 \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\
 \text{兩數的和是10} \quad \text{兩數的積是} 3 \times 8 = 24
 \end{array}$$



三、教學反思

(一) 依據學生學習情形進行滾動調整



在進行主題一的猜數字遊戲時，沒有預期到同學會很想讓對方答不出來，所以把兩個人出的數字放在一起後，常常是很難找到符合的整數，這時反而讓遊戲的精神出不來，所以修正為猜數字的 4 階段，分別是 Part I，由教師出題，全班競賽，目的：習慣本遊戲規則。Part II 為分組競賽，組員之間依自己想法，各自出題，此時，學生常常會找不到答案，能讓同學瞭解兩人亂出數字時，不一定會有整數的答案。Part III、Part IV 分組競賽，請出題的人先想好一定有答案的「兩數的和」與「兩數的積」的兩個數字，再進行比賽，讓出題學生擁有設計正確兩數和與兩數積的經驗，且讓對方有找出正確答案的機會。

(二) 重視每一個學生的任何回應



在教學的過程中，因為每個學生的程度不一，所以有的學生會有跟不上，有的學生會覺得太簡單，因此，依學生的回應適時調整學生上課時練習內容的難度，同時建立學生的信心很重要。當學生主動回應自己終於能在考卷上答對題目時，這對於學習信心的建立有相當正向的幫助。

以下是 3 位學生的學習心得


| |
|---|
| <p>學習心得：</p> <p>上課過程中的活動都很有趣，例如：使用平板看教學影片邊寫題目、用題目板來教學...等，這些方式都使我對數學更有興趣，也對解題方式更了解，也對數學有更大的自信了。</p> |
|---|

| | |
|--|--|
| <p>1.你覺得數學像什麼動物，為什麼？</p> <p>獅子，獅子在動物界所有科目中最大的魔王，就像獅子是森林之王一樣。</p> | <p>畫出此動物圖像</p>  |
| <p>2.你覺得你自己像什麼動物，為什麼？</p> <p>樹懶，很懶惰，很簡單的專能拖很久，不太喜歡動。</p> | <p>畫出此動物圖像</p>  |





| |
|---|
| <p>學習心得：</p> <p>在這短短 45 分鐘內練習了一堆的題目，有時覺得很燒腦，在一開始時甚至無法完成，但是在學習的過程中也漸漸適應。</p> |
|---|

| | |
|---|--|
| <p>1.你覺得數學像什麼動物，為什麼？</p> <p>狐狸，very smart 我沒辦法解題。</p> | <p>畫出此動物圖像</p>  |
| <p>2.你覺得你自己像什麼動物，為什麼？</p> <p>貓，貓是寵物球也，很懶，所以不想算數學。</p> | <p>畫出此動物圖像</p>  |

學習心得：
一開始我覺得數學覺得把我不可能學會的東西，可是我現在來上這個課，忽然又覺得其實沒有想像的那麼困難。

| | |
|----------------------------------|--|
| 1.你覺得數學像什麼動物，為什麼？ 毒蛇。我覺得數學可怕。 | 畫出此動物圖像  |
| 2.你覺得自己像什麼動物，為什麼？ 毒蛇。我覺得自己很醜。 | 畫出此動物圖像  |

以下是之前 9 位學生的部份學生心得：

| | | |
|--|---|--|
| <p>二、請寫下你對本學期學習扶助課程上課的心得</p> <p>學習心得：我覺得上老師的課很開心，本來什麼都不會的我，被老師教過後，就好像有一點進步，老師教的某一些在考卷上都對！！</p> | <p>三、經過本學期的學習，請回答下面問題，並畫出動物圖像：(歡迎同學幫圖案上色)</p> <p>1.你覺得「數學」像什麼動物？為什麼？ 蚊子。因為蚊子很煩，常常來叮我，就像數學一樣，明明很討厭他，但一直靠近我。</p> <p>動物圖像：</p> | <p>三、經過本學期的學習，請回答下面問題，並畫出動物圖像：(歡迎同學幫圖案上色)</p> <p>1.你覺得「數學」像什麼動物？為什麼？ 大象。因為有很多的公式、題目。</p> <p>動物圖像：</p> |
| <p>2.你覺得「自己」像什麼動物？為什麼？ 青蛙。因為青蛙喜歡吃蚊子，吃了就治了，牠就不跑了，就像蚊子靠近我就把牠吃掉。</p> <p>動物圖像：</p> | <p>2.你覺得「自己」像什麼動物？為什麼？ 老鼠。因為我的頭腦很小，做過的是自己就忘記了。</p> <p>動物圖像：</p> | |

(三) 多元教學策略增進成效

這個模組建立在遊戲的奠基與學生操作上的理解與熟練，但是適時透過網路上之教學平臺的多元教學，更能讓學生有主動學習與自我練習的機會，因此本模組進行的過程中也讓學生透過科技輔助來學習，例如利用因材網、均一教育平臺、myViewBoard、PearDeck...等進行練習與診斷。



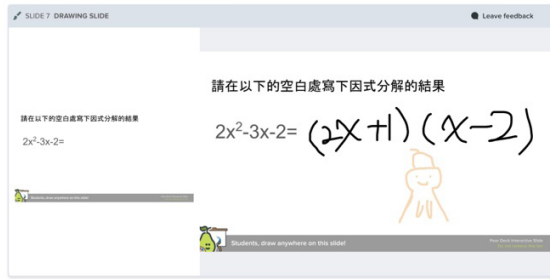
SLIDE 6 DRAGGABLE SLIDE Leave feedback

下面的因式分解中，有2題是正確的，2題是錯誤的
請將★放在正確的題目前
請將✗放在錯誤的題目前

$x^2-3x+12=(x-6)(x-2)$
 $x^2+2x-24=(x-6)(x+4)$
 $x^2-5x+14=(x+2)(x-7)$
 $x^2-6x-27=(x+3)(x-9)$

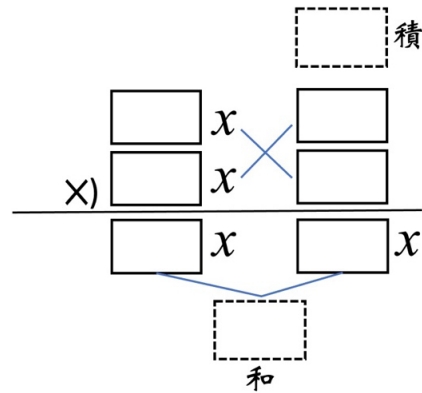
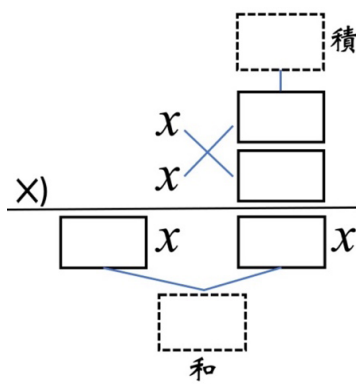
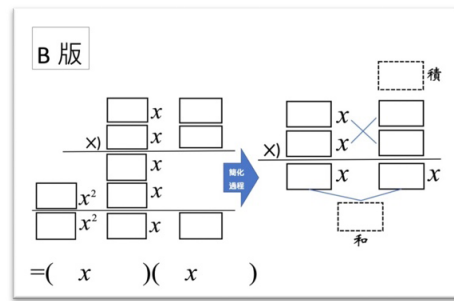
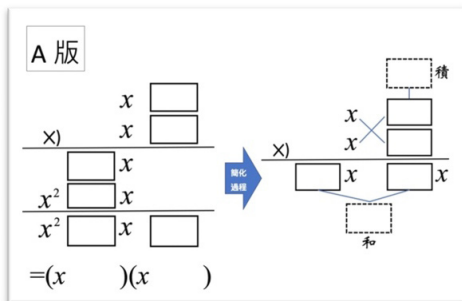
good



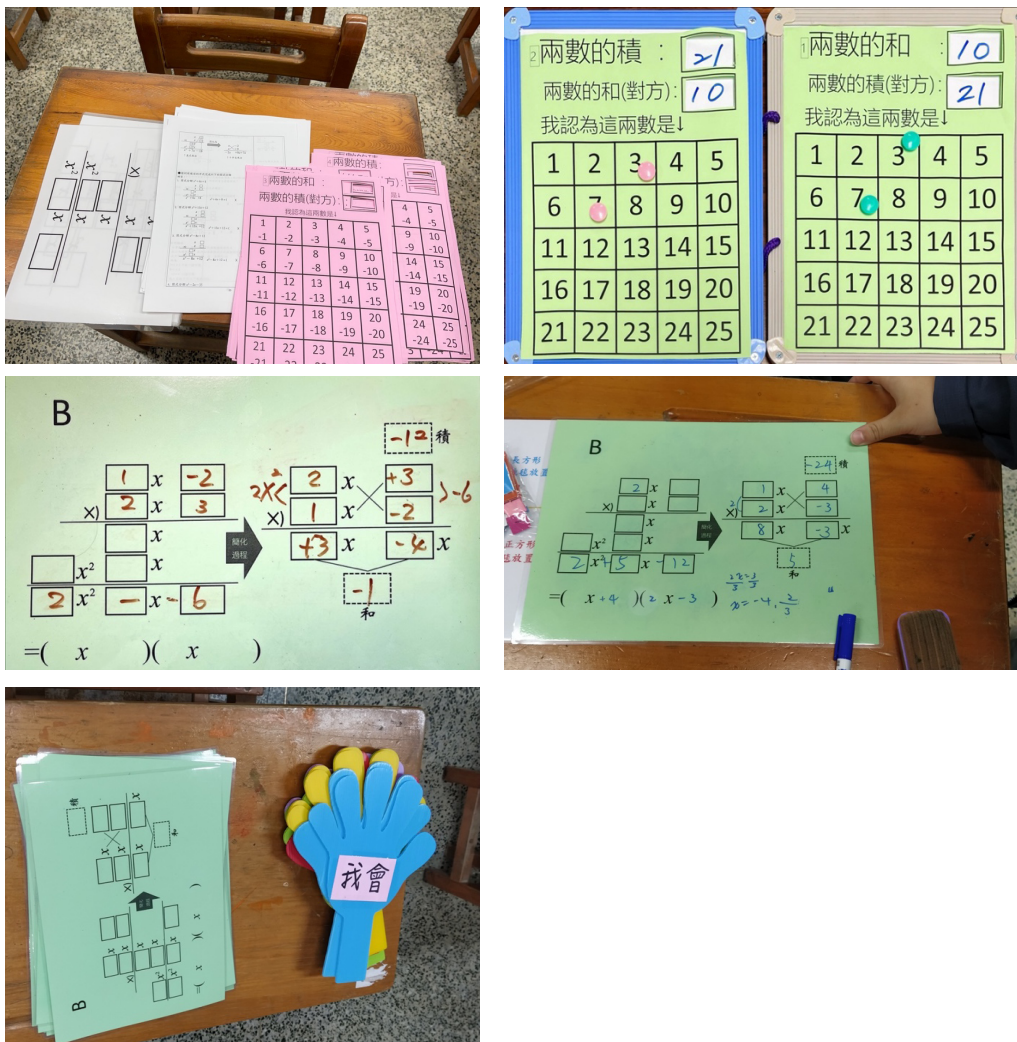


四、教學建議

- (一) 因式分解的方式除了十字交乘法之外，還有提出公因式法與利用乘法公式，利用這個教學法的確能有效地讓學生學會十字交乘法進行因式分解，但學習本單元的目的是為了下一個單元：「解一元二次方程式」而作準備，老師可以適時幫同學建立這個概念。
- (二) 這個模組課程引導學生利用「因式分解遊戲板」學會十字交乘法進行因式分解，遊戲板分為二次項係數為 1 的 A 版與二次項係數不為 1 的 B 版，因為主要設計理念是由直式乘法的簡化而來，有些學生會習慣地只思考直式乘法的填空來解題，教師可鼓勵學生慢慢簡化流程，達到學習十字交乘法的目的。



(三) 本教學模組遊戲板的製作剛開始是在有磁性的白板上，放印有遊戲規則的色紙，讓學生在上面以白板紙作答，再以板擦擦掉。實際操作時也可改成將有遊戲規則的色紙護貝後，直接在上面以「彩繪白板筆」作答再以板擦擦掉，如此能減少準備許多小白板的麻煩。



參考文獻

楊惠雯 (2010)。虛擬教具應用於國中學生學習多項式展開與因式分解之影響 [未出版碩士論文]。國立交通大學理學院科技與數位學習學程研究所，新竹市。

林宛蓁 (2012)。八年級學生因式分解單元錯誤類型之分析研究 [未出版碩士論文]。國立臺南大學應用數學研究所。臺南市。

鐘惠君 (2013)。高雄市國二學生因式分解錯誤類型分析及其補救教學成效研究 [未出版碩士論文]。國立高雄師範大學數學系。高雄市。

Gray, E. M., & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A "proceptual" view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(2), 116-140.

國中數學領域 補強課程模組 4

八年級

平行四邊形

— 雲林縣立虎尾國民中學 盧昭雯退休老師

— 雲林縣立虎尾國民中學 江世賓主任

設計 理念



「數學」向來是學生最怕也最討厭的科目，若問學生為何不喜歡數學，不外乎是作業多，考試多；為何最怕數學，那就是聽不懂，學不來。觀看國中幾何部分教學現場，教師最常引導學生使用「程序計算」或「推理證明」來學習幾何概念。「程序計算」是藉由記憶解題技巧，反覆練習，達到學習目的，學生常感到孤躁乏味，喪失學習興趣；「推理證明」常讓學生不知從何下手，而教師也不知如何引導，只能從讓學生記憶證明過程達到學習目的，但學生在學習不知所云，頭昏腦脹狀況下，乾脆倒成一片。可知學生在幾何學習上沒有感覺及動力，是因為很多圖形關係及觀念學習都是用黑板上談兵來的。因此要讓學生願意面對數學學習，就是要讓學生聽得懂，跟得上，不再感覺數學是抽象的。

為引起學生學習興趣，近幾年來教學觀念逐漸改變，從幾何、數、量、到空間，不管是繁複難背的公式，還是抽象難理解的概念學習，逐漸引用各式教具、遊戲、操作活動…，讓問題在動手做的過程中，能自然化解，使更多學生除了能用平面思考，也可以用空間概念來思考數學。

「平行四邊形的性質」概念學習時，若只靠死記性質的方法，那學生只能「直觀地」以圖形的姿態來判斷，但無法連結後續特殊四邊形基本性質的學習，而平行四邊形在實際生活中有著廣泛的應用，若無法啟發學生用數學的眼光去觀察、去思考，則學生就學不會將數學與生活作聯絡。總而言之，概念和公式，不是靠死記硬背來學的。應讓學生結合自身經驗內化後才能去理解和運用的。「思考與構想」是教學上相當需要被重視的一環，學生學習數學知識概念，除了計算、證明…之外，應具備思考與推理的

能力，因此教學上，只灌輸學生記憶書本上的知識是不夠的。「幾何教學活動中，摺紙及剪紙是一種非常重要的教學工具，不但有助於教學活潑化，更能使學生由操作及觀察中，心領神會幾何性質」（謝豐瑞，摺摺稱奇：初登大雅之堂的摺紙數學 P26）。低成就的學生往往對自己沒有期待，不理解的概念根本不想學習，更不用說去記憶性質關係，有鑑於此，本補強課程模組的設計理念如下特點：

一、動手操作，引導學生自主建構知識

運用剪紙重疊操作引導學生從直觀角度觀察出平行四邊形的基本性質，同時理解平行四邊形的判別性質，建立學習概念後，再利用操作圖形關係過程中，推理引導學生將性質條件說明以文字敘述，學生透過思考過程，能強化概念。

二、幾何教學活潑化，引發學生學習興趣

學生的理解難點，往往是對概念理解不夠透徹，希望利用剪紙拼貼活動，鼓勵學生從觀察、操作中，產生推理。期待透過操作活動，能增強學生學習的興趣，並加深學生對於知識點的理解。

課程 架構

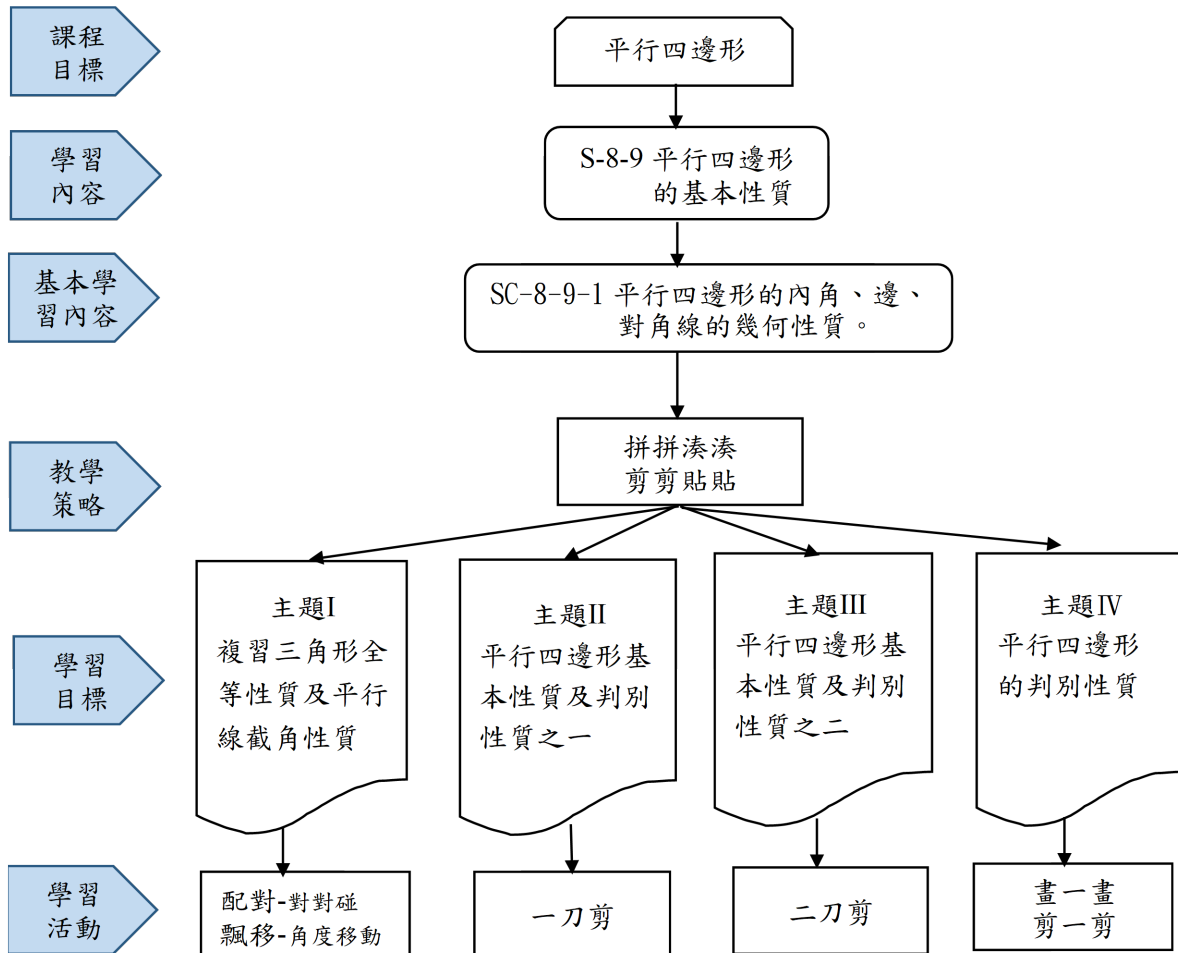
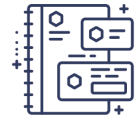


圖 1 課程架構圖

配合「平行四邊形基本性質」的活動引導，學生須能理解三角形全等性質及平行線截角性質，因此本補強課程模組設計方向從複習三角形全等性質及平行線截角性質開始

(一) 主題 I (第 1 節課)：利用「對對碰」遊戲活動，驗證是否為全等三角形，再依三角形上的邊長或角度說明全等是依據哪個全等性質，若不全等，也說明其理由，從遊戲活動中，引導學生複習三角形全等性質。再利用竹筷排列，口頭提問，及透過使用描圖紙移動角度，複習平行線截角性質。

(二) 主題 II (第 2、3、4 節課)：

直觀學習：(第 2 節課) 沿著平行四邊形的任一條對角線剪成兩個三角形後，將剪下的兩個三角形疊合，理解三角形的全等，再從對應邊等長、對應角相等概念直觀說明平行四邊形對邊等長、對角相等。

(第 4 節課) 將第 1 節課所使用的所有三角形紙片，任意兩兩組合，拼成四邊形。並依其條件，觀察是否為平行四邊形。

理解說明：(第 3 節課) 操作三角形紙張，引導學生運用條件以畫圖輔助文字，來紀錄說明全等性質，並得知對邊等長、對角相等。

(第 4 節課) 利用疊合的三角形條件並協助學生以文字記錄。說明四邊形若兩組對邊相等或兩組對角相等，則為平行四邊形。

(三) 主題 III (第 5 節課)：

直觀學習：將主題 II 所剪下的三角形紙片，剪下第二刀，利用觀察三角形的疊合，學習平行四邊形兩條對角線互相平分。

理解說明：操作三角形紙張，帶領學生運用條件以文字來紀錄說明全等性質，並得知對應邊等長，即兩條對角線互相平分。反之，利用疊合的三角形條件並協助學生以文字記錄。說明四邊形若兩條對角線互相平分，則此四邊形必為平行四邊形。

(四) 主題 IV (第 6 節課)：利用方格，引導學生畫下等長線段後，連接端點，使其形成一個四邊形，再引導學生利用直觀學習及理解說明來學習若四邊形的一組對邊平行且相等，則此四邊形必為平行四邊形。

教材分析



(一) 本補強課程模組教材重要性

平行四邊形的特性時常在生活中被運用，如伸縮門、活動衣架等都是。然而學生對平行四邊形概念的學習，往往只「直觀地」以圖形的樣式來判斷，對其特性總是一知半解，也無法將所學概念與生活運用結合。讓學生理解平行四邊形的幾何性質，是後續幾何學習的基礎。

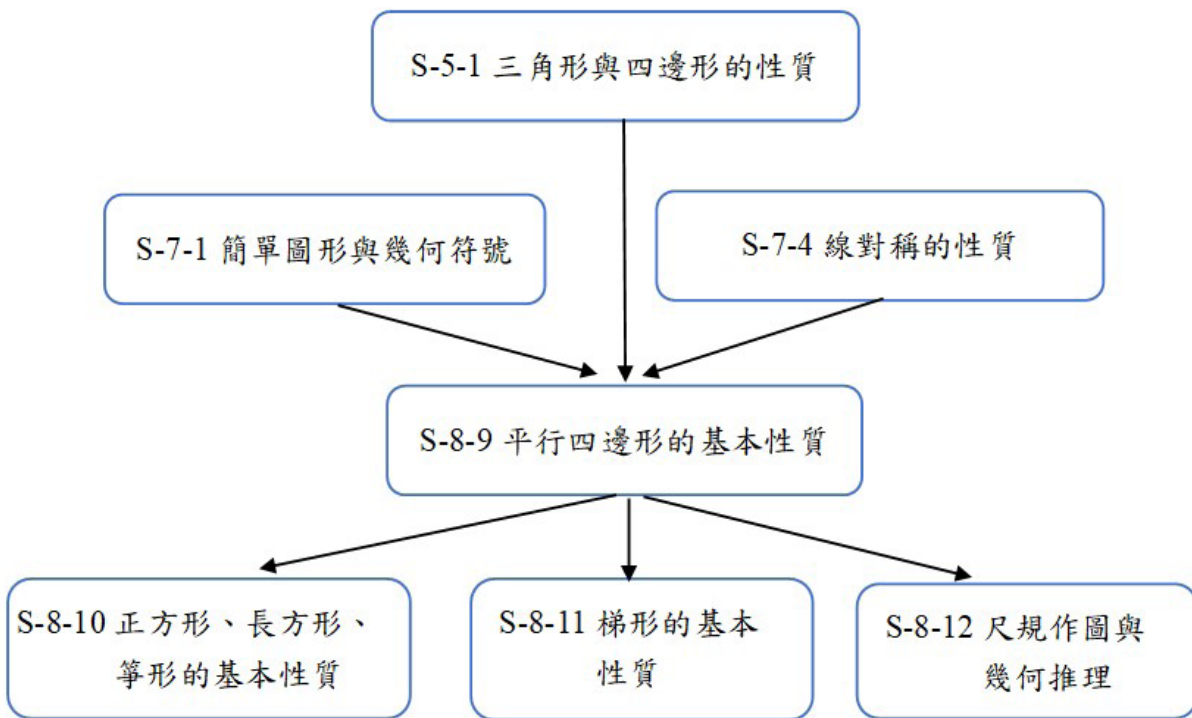


圖 2：補強課程模組學習內容與其他年段學習內容間的關係圖

(二) 本補強課程模組教材學習內容分析

本補強課程模組「平行四邊形」教材的學習內容，分為理解「平行四邊形的幾何性質」及「平行四邊形的判別性質」兩部分，希望透過剪紙操作引導學生學習外，也希望學生能透過操作，理解概念說明的過程運用。

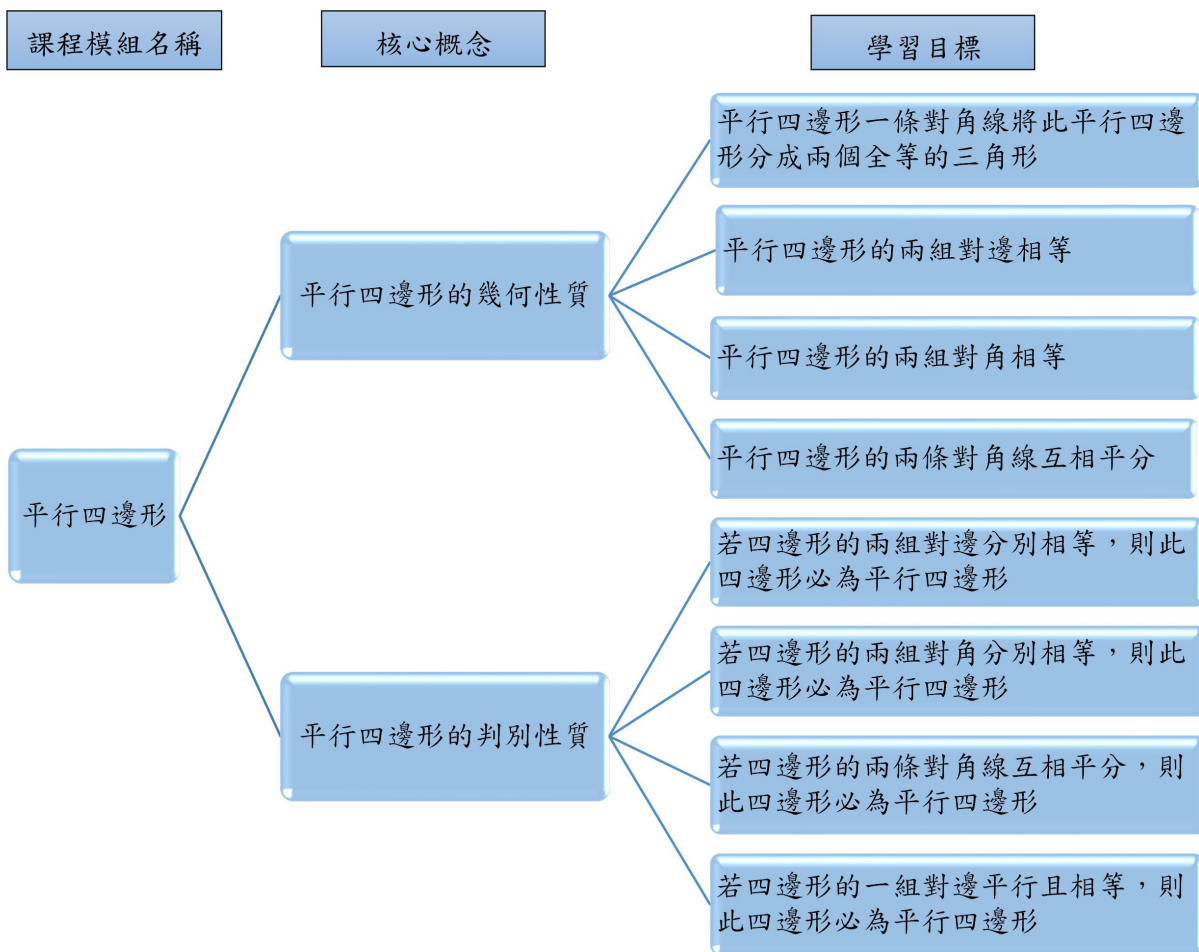


圖 3：本補強課程模組的核心概念與學習目標架構

(三) 教材分析與課程架構的關係

本補強課程模組教材從理解「平行四邊形的幾何性質」到「平行四邊形的判別性質」，都是環繞著抽象的幾何概念，而概念說明過程常讓學生感到不知所云。因此以剪紙疊合操作引入概念學習後，透過觀察，直觀理解「平行四邊形的幾何性質」及「平行四邊形的判別性質」，再透過操作三角形紙張，引導學生運用條件，以畫圖輔助文字來紀錄說明「平行四邊形的幾何性質」及「平行四邊形的判別性質」。本單元教學過程中的教材內容與課程架構的關聯，如表 1。

表 1：本模組教材分析與課程架構教學關係

| 課程模組核心概念 | 學習活動 | 教學策略 | 教學內涵 |
|--|--------------|-------------------|--|
| 主題 I 複習三角形全等性質 及平行線截角性質 (第 1 節課) | 配對 - 對對碰 | 遊戲 提問 動手做 | 將附件中的三角形置放桌面，利用「對對碰」遊戲來驗證是否為全等三角形。再請學生依三角形上的邊長或角度說明全等是依據哪個全等性質，引導學生複習三角形全等性質。 |
| | 飄移 - 角度移動 | 提問 動手做 | 利用竹筷排列、描圖紙及口頭提問，複習平行線截角性質。 |
| 主題 II 平行四邊形的幾何性質 及判別性質 (第 2-4 節課) | 一刀剪 | 提問 動手做 鷹架引導 | 沿著平行四邊形的任一條對角線所剪成的兩個三角形，透過操作疊合過程，引導學生從直觀觀察且能輔以文字說明三角形全等，得知對邊等長、對角相等。再利用疊合的三角形條件並協助學生以文字記錄，反向說明四邊形若兩組對邊相等或兩組對角相等，則為平行四邊形。 |
| 主題 III 平行四邊形的幾何性質 及判別性質 (第 5 節課) | 二刀剪 | 提問 動手做 鷹架引導 | 將主題 II 剪下的三角形紙片，剪下第二刀，透過操作疊合過程，引導學生從直觀觀察且能輔以文字說明平行四邊形兩條對角線互相平分。反之，利用疊合的三角形條件並協助學生以文字記錄。說明四邊形若兩條對角線互相平分，則此四邊形必為平行四邊形。 |
| 主題 IV 平行四邊形的 判別性質 (第 6 節課) | 畫一畫 剪一剪 | 動手做 | 利用方格，引導學生畫下等長線段後，連接端點，使其形成一個四邊形，再引導學生利用直觀學習及理解說明來學習若四邊形的一組對邊平行且相等，則此四邊形必為平行四邊形。 |

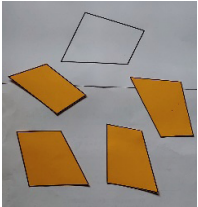
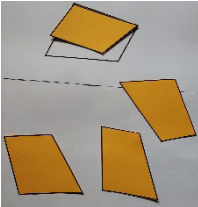
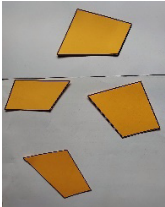
教學 計畫




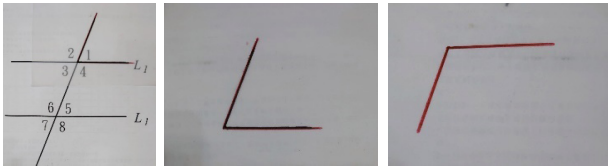
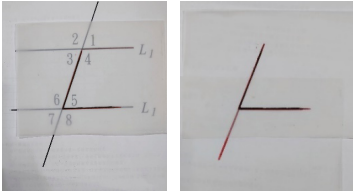
| | |
|--------------------|--|
| 模組名稱 | 平行四邊形 |
| 授課節數規劃 | 六節課 |
| 學習重點 (內容、概念、能力) | <p>學習內容</p> <p>S-8-9 平行四邊形的基本性質：關於平行四邊形的內角、邊、對角線等的幾何性質。(s-IV-8)。</p> <p>學習表現</p> <p>s-IV-8 理解特殊三角形(如正三角形、等腰三角形、直角三角形)、特殊四邊形(如正方形、矩形、平行四邊形、菱形、箏形、梯形)和正多邊形的幾何性質及相關問題。</p> <p>基本學習內容</p> <p>SC-8-9-1 平行四邊形的內角、邊、對角線的幾何性質。</p> |
| 適用對象 | <p>學習本模組前，學生須學會以下學習內容</p> <p>S-5-1 三角形與四邊形的性質：操作活動與簡單推理。含三角形三內角和為 180 度。三角形任意兩邊和大於第三邊。平行四邊形的對邊相等、對角相等。</p> <p>S-7-1 簡單圖形與幾何符號：點、線、線段、射線、角、三角形與其符號的介紹。</p> <p>S-7-4 線對稱的性質：對稱線段等長；對稱角相等；對稱點的連線段會被對稱軸垂直平分。</p> |
| 教學連結建議 | <p>1. 銜接概念：</p> <p>S-8-10 正方形、長方形、箏形的基本性質。</p> <p>S-8-11 梯形的基本性質。</p> <p>S-8-12 尺規作圖與幾何推理。</p> <p>2. 跨學科應用：略</p> |

| | |
|--------------|--|
| 學習目標 | <ol style="list-style-type: none"> 1. 能透過操作活動複習三角形全等性質、平行線性質。 2. 能透過剪紙及操作活動理解平行四邊形的基本性質。 3. 能透過剪紙及操作活動理解平行四邊形判別性質。 4. 能透過操作活動理解平行四邊形不是線對稱圖形且其對角線不是內角角平分線。 |
| 教學策略 | <div data-bbox="518 616 965 1041" data-label="Diagram"> </div> <ol style="list-style-type: none"> 1. 透過操作活動及討論探究，引導學生學習意願。 2. 以循序漸進的活動引導平行四邊形概念的學習，讓學生培養用數學的意識。 3. 教學活動中，加入剪紙及描圖活動，強化學生建立學習概念。 4. 以「操作引導教學法」引導學生能以文字記錄說明操作過程的概念。 |
| 教學材料 教學資源 | 教學材料 <ol style="list-style-type: none"> 1. 剪刀、三角形圖片、平行四邊形圖片、學習單。 2. 描圖紙。 教學資源 <ol style="list-style-type: none"> 1. 各版本教科書。 2. 數學領域課程手冊。 |

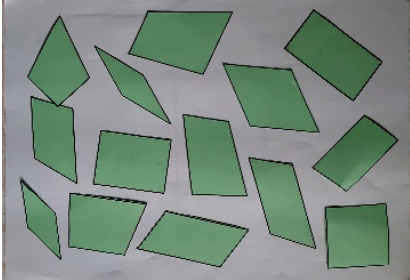
主題 1：複習三角形全等性質及平行線截角性質

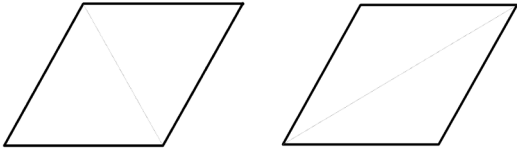
| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|---|--|
| <p>第 1 節</p> <p>一、準備活動</p> <p>(一) 挑戰活動 --- 複習三角形全等性質</p> <ol style="list-style-type: none"> 活動名稱：四選一 (附件 12，如下圖一) 活動道具：畫有任意四邊形的紙張，形狀不一的四邊形紙片 4 張 活動規則：從 4 張形狀不一的四邊形紙片，選取 1 張，若能與紙張上的四邊形重合，則挑戰成功。如下圖 <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  <p>附件 12</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>挑戰失敗</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>挑戰成功</p> </div> </div> <p>(二) 概念說明</p> <p>複習全等圖形的意義</p> <p>二、複習三角形全等性質</p> <p>(一) 遊戲活動</p> <ol style="list-style-type: none"> 活動名稱：對對碰 活動道具：大小不一的三角形片數片 (附件 13) 活動規則： <ol style="list-style-type: none"> 將三角形隨意置於桌面上 (如圖一，需將沒有標示線段長度及角度的面朝上) 學生依順序輪流，每人每次可翻開桌上 2 張紙片，成功配對為兩個全等三角形，並正確說出全等性質，則可得到該組牌 (如圖二)，並再翻 2 張，以此類推 若 2 張紙片不全等 (如圖三)，則需將牌覆蓋回去，並輪到下位玩家 得到配對卡牌數量最多的玩家獲勝 | <p>依學生程度來確認，四邊形紙片的置放方向，是否需旋轉或翻面。</p> <p>可放大使用，以方便操作。</p> <p>學生數過多時，可先依人數將學生分組或將多印幾份附件 13 裁剪使用，再進行活動，以增加活動趣味性。</p> <p>引導學生觀察三角形的邊長及角度，來說明三角形全等性質。</p> |


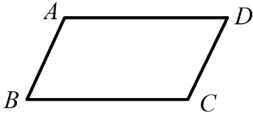
| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|---|---|
| <div data-bbox="244 376 837 609" data-label="Image"> </div> <div data-bbox="300 622 783 654" data-label="Caption"> <p>圖一 圖二 圖三</p> </div> <div data-bbox="209 680 359 714" data-label="Section-Header"> <p>(二) 總結：</p> </div> <div data-bbox="209 728 904 860" data-label="List-Group"> <ol style="list-style-type: none"> 1. 教師以學生手中及桌上剩餘三角形片複習三角形全等性質 2. 說明 SSA 不能為全等三角形判別性質的理由 </div> <div data-bbox="209 893 523 929" data-label="Section-Header"> <p>三、複習平行線截角性質</p> </div> <div data-bbox="209 945 676 981" data-label="Section-Header"> <p>(一) 口頭提問：隨機點選學生說說看</p> </div> <div data-bbox="236 994 767 1030" data-label="Text"> <p>教師拿出兩支竹棍，擺成如圖(一)等樣式</p> </div> <div data-bbox="255 1059 828 1198" data-label="Image"> </div> <div data-bbox="510 1218 574 1249" data-label="Caption"> <p>圖一</p> </div> <div data-bbox="236 1263 906 1344" data-label="Text"> <p>放置另一支竹棍在圖一圖形上，使其為圖一兩支竹棍的截線，如圖二)</p> </div> <div data-bbox="250 1355 392 1496" data-label="Image"> </div> <div data-bbox="459 1464 523 1496" data-label="Caption"> <p>圖二</p> </div> <div data-bbox="209 1507 900 1585" data-label="Text"> <p>提問 1：指指看，那些角為同位角？那些角為內錯角？ 那些角為同側內角？</p> </div> <div data-bbox="209 1601 496 1635" data-label="Text"> <p>提問 2. 什麼是平行線？</p> </div> <div data-bbox="311 1648 745 1684" data-label="Text"> <p>(學生常回答說：不相交的兩直線)</p> </div> <div data-bbox="209 1700 793 1736" data-label="Text"> <p>提問 3：那這兩支竹棍沒有相交，是平行線嗎？</p> </div> <div data-bbox="223 1753 871 1933" data-label="Image"> </div> <div data-bbox="319 1948 904 1986" data-label="Text"> <p>(學生此時常回答說：延長後永不相交的兩直線)</p> </div> | <div data-bbox="938 763 1390 840" data-label="Text"> <p>活動結束，收回三角形片，第 4 節課使用。</p> </div> <div data-bbox="938 994 1281 1030" data-label="Text"> <p>竹棍可以手中原子筆替代。</p> </div> <div data-bbox="938 1538 1398 1742" data-label="Text"> <p>學生能正確判斷同位角、內錯角、同側內角相關位置，才進行下一步驟。 學生若能正確說出平行線定義，則省略提問 3、4，直接進行操作活動。</p> </div> |

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|--|--|
| <p>提問 4：怎麼表示延長後永不相交？ (利用竹棍擺放，讓學生能理解「垂直於同一直線的兩直線互相平行」)</p>  <p>(二)、操作活動：</p> <ol style="list-style-type: none"> 活動器材：平行線圖形 (附件 14)、描圖紙 (可利用出版社教具，或利用剪貼) 活動步驟： <ol style="list-style-type: none"> (1) 將 $\angle 1$、$\angle 4$ 描繪在描圖紙上 (如下圖三)，移動描圖紙上的 $\angle 1$、$\angle 4$，與其他角做比較  <p>圖 (三)</p> <ol style="list-style-type: none"> (2) 將描圖紙描下的 $\angle 1$、$\angle 4$ 角度以一邊重疊方式排列，請學生觀察角度間產生甚麼關係？ (如下圖四) (若為剪貼活動，則讓學生將剪下角度重疊比較)  <p>圖 (四)</p> <p>(三) 總結 教師複習「兩平行線被一截線所截，則同位角相等、內錯角相等、同側內角互補」</p> <p>三、小試身手 小試身手一 (附件 11) --- 「三角形全等性質」與「平行線性質」 (第一節課結束)</p> | <p>引導學生重新思考平行線的定義。</p> <p>描圖紙可使用透明投影片代替。</p> <p>此時讓學生觀察到平行線同位角相等、內錯角相等。</p> <p>此時讓學生觀察到平行線同側內角互補。</p> <p>依學生小試身手作答狀況，決定再複習或進行下一概念學習。</p> |

主題 II：平行四邊形基本性質及判別性質

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|--|--|
| <p>課程內容</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 平行四邊形一對角線將此平行四邊形分成兩個全等三角形 2. 平行四邊形兩組對邊相等、兩組對角相等 3. 若四邊形兩組對邊分別相等，則此四邊形必為平行四邊形 4. 若四邊形兩組對角分別相等，則此四邊形必為平行四邊形 <p>第 2 節 直觀教學</p> <p>一、準備活動</p> <p>※ 口頭提問：隨機點選學生說說看</p> <p>提問 1：何謂平行四邊形？ (學生常回答：對邊等長)</p> <p>提問 2：名稱為平行四邊形，沒有提到等長喔！所以從名稱來想何謂平行四邊形？ (引導學生理解兩組對邊分別平行的四邊形稱為平行四邊形)</p> <p>提問 3：怎麼說明兩直線互相平行？ (引導學生說出同位角相等，內厝角相等、同側內角互補的概念)</p> <p>二、操作活動 --- 平行四邊形性質直觀教學</p> <p>(一) 概念學習一：平行四邊形兩組對角相等</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 選一選：將四邊形紙片數張，請學生選出他認為是平行四邊形的紙片(一式 3 張)。(附件 15) (為了避免學生可能選取 3 張不一樣的四邊形，將全等的四邊形放置一起，或由老師任意發下全等的四邊形紙片 3 張)  | <p>國小 5 年級時，學生已習得平行四邊形，但著重在對邊等長的概念，所以學生會只認為對邊等長即為平行四邊形，容易忽略平行四邊形兩組對邊分別平行的概念。</p> |

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|---|---|
| <p>2. 說一說：請學生說說看怎麼知道他手中的四邊形紙片是平行四邊形？</p> <p>3. 驗證：請學生利用量角器量測量手中四邊形紙片的四個內角角度後，運用平行線性質（同側內角互補）及平行四邊形定義（兩組對邊分別平行），來說明其所選的四邊形紙片是否為平行四邊形 （驗證後，若不是平行四邊形，則換一組，再驗證）</p> <p>4. 結論：教師說明「平行四邊形的定義」</p> <p>5. 觀察：請學生觀察其測量的角度關係，並說說看有甚麼發現 （引導學生能說出對角相等）</p> <p>6. 概念說明：利用學生驗證步驟所測量的角度，說明平行四邊形的兩組對角相等</p> | <p>學生常回答說：看起來像是平行四邊形。</p> <p>測量手中紙片 3 張中，其中 1 張即可。教師提供量角器或請學生自行準備，並提醒學生，測量會有些微誤差。</p> <p>確定學生手中四邊形為平行四邊形時，再進行結論及觀察部分說明。</p> |
| <p>（二）概念學習二：平行四邊形一對角線將此平行四邊形分成兩個全等三角形且其兩組對邊相等</p> <p>1. 摺一摺：請學生將其手中 3 張平行四邊形紙片，其中 1 張摺出一條對角線，另一張平行四邊形紙片，需摺出另一條對角線。第 3 張留待第 3 節課使用</p> <p>2. 剪一剪：將有摺痕的 2 張平行四邊形，沿著其所摺對角線剪開分成兩個三角形 （2 張平行四邊形都須剪，但需分 2 組放）</p> | <p>摺完後，此時可複習平行四邊形不是線對稱圖形的概念。 第 3 張平行四邊形，留著第 3 節課使用。</p> |
|  | |
| <p>3. 疊一疊：請學生將其剪下的兩個三角形重疊在一起，觀察是否有完全重合。（2 組都疊疊看）</p> <p>4. 說一說：請學生說說他們的發現 （引導學生發現重合線段，即平行四邊形的對邊）</p> <p>5. 概念說明</p> <p>(1) 教師利用學生手中重合的三角形，說明平行四邊形任一對角線將此平行四邊形分成兩個全等三角形</p> <p>(2) 教師利用學生手中重合的三角形重疊線段，說明平行四邊形兩組對邊相等</p> | <p>利用重疊三角形，觀察不同對角線所剪下的三角形重疊也會重合。</p> |

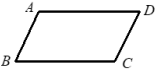
| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|---|---|
| <p>三、延伸活動</p> <p>請學生將桌上剩餘的四邊形紙片，重複二(二)的1~3步驟，引導學生觀察理解箏形僅有一條對角線能將其分成兩個全等三角形；不是平行四邊形的四邊形紙片(非箏形)，對角線不能將其分成兩個全等三角形(第二節課結束，收回學生手中剪下三角形)</p> <p>第3節 推理說明教學</p> <p>一、準備活動</p> <p>(一) 複習</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 平行線定義 2. 全等三角形性質 3. 平行線性質 <p>(二) 標示頂點</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 活動器材：第二節課剪下三角形紙片及第3張平行四邊形、學習單一(附件1) 2. 活動前置作業 <ol style="list-style-type: none"> (1) 將上節課所保管的第3張平行四邊形，依學習單一範例的引導，張貼在學習單步驟一上，並標示其頂點 <p>範例：依下圖(一)圖形方向，將手中平行四邊形張貼在〈推理活動張貼處〉格子內，並依圖(二)位置標示頂點</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  <p>圖(一)</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>圖(二)</p> </div> </div> <ol style="list-style-type: none"> (2) 引導學生將第二節課剪下的兩組三角形，拼成平行四邊形，複習平行四邊形任一對角線將此平行四邊形分成兩個全等三角形，且兩組對邊等長、兩組對角相等 <p>二、平行四邊形基本性質推理說明</p> <p>(一) 測量誤差說明</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 觀察：觀察第二節課二-(一)-3 驗證時所測量的角度 2. 疊合：重疊第二節課二-(二)-3 三角形紙片 3. 總結：引導學生理解測量、剪貼或摺紙方式僅是直觀觀察，利用概念知識推理說明，才能嚴謹地說明兩個三角形全等 | <p>操作時，可複習線對稱概念。</p> <p>依兩個三角形為一組，分開收回。</p> <p>依學生狀況採用提問方式或直接口頭複習。</p> <p>運用概念時，隨時複習以加深學生的學習。</p> <p>學生測量角度沒有偏差時，可利用不同量角器重新測量，觀察測量誤差。 說明剪紙後重疊，會因剪法產生些微誤差。</p> |

教學活動流程設計

教學注意事項

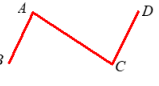
(二) 推理引導：學習單一 (附件 1)

1. 引導步驟一：(步驟完成後，如下圖三)
- (1) 確實將第 3 張平行四邊形，張貼在學習單步驟一圖形分析張貼處上，並依指示標示其頂點
- (2) 複習平行四邊形定義，引導學生填入 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 、 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$
- (3) 引導學生回想，在第二節課時，如何將平行四邊形剪成兩個三角形
- (4) 請學生連接 \overline{AC}

| 步驟 | 圖形分析 | 推理說明步驟 | 引導說明 |
|-----|---|--|---------|
| 步驟一 |  | 1. ∵ 四邊形 ABCD 為平行四邊形 ∴ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 、 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ 2. 連接 \overline{AC} | 平行四邊形定義 |

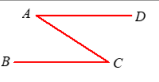
圖(三)

2. 引導步驟二：(步驟完成後，如下圖四)
- (1) 引導學生根據 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ， \overline{AC} 為截線的條件拆解圖形，並將拆解後的圖形，畫在學習單步驟二的圖形分析上
- (2) 複習平行線性質，引導學生觀察拆解圖形後，依 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 條件，寫出 $\angle BAC = \angle ACD$

| 步驟 | 圖形分析 | 推理說明步驟 | 引導說明 |
|-----|---|--|------------------------------|
| 步驟二 |  | ∵ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ∴ $\angle BAC = \angle ACD$ | 平行線性質 \overline{AC} 為截線 |

圖(四)

3. 引導步驟三：(步驟完成後，如下圖五)
- (1) 引導學生根據 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， \overline{AC} 為截線的條件拆解圖形，並將拆解後的圖形，畫在學習單步驟三的圖形分析上
- (2) 複習平行線性質，引導學生觀察拆解圖形後，依 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ 條件，寫出 $\angle DAC = \angle ACB$

| 步驟 | 圖形分析 | 推理說明步驟 | 引導說明 |
|-----|---|--|------------------------------|
| 步驟三 |  | ∵ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ∴ $\angle DAC = \angle ACB$ | 平行線性質 \overline{AC} 為截線 |

圖(五)

視學生學習狀況及教學時間，來決定是否進行推理引導。

必要時，可拿出第二節課剪成的三角形紙片說明。

學習單上填空位置的紅字筆跡，提供參考。

學生已理解平行線性質。

學習單上畫圖及填空位置的紅色筆跡，提供參考。

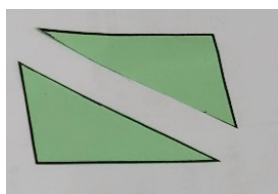
學習單上畫圖及填空位置的紅色筆跡，提供參考。

教學活動流程設計

教學注意事項

4. 引導步驟四：(步驟完成後，如下圖六)

- (1) 引導學生將平行四邊形一對角線分成的兩個三角形畫在學習單步驟四的圖形分析上



- (2) 引導學生觀察步驟二、步驟三共同的線段 \overline{AC} 。說明 \overline{AC} 為共用邊

- (3) 引導學生將步驟二、三所得條件及 \overline{AC} 共用邊作記號 (參考下圖六圖形分析) 後，寫出三角形全等性質

| 步驟 | 圖形分析 | 推理說明步驟 | 引導說明 |
|-----|------|--|---------|
| 步驟四 | | $\overline{AC} = \overline{AC}$ (共用邊) $\therefore \triangle ABC \cong \triangle CDA$ (ASA 全等) | 三角形全等性質 |

圖 (六)

5. 引導步驟五：(步驟完成後，如下圖七)

- (1) 引導學生將步驟四圖形分析的兩個三角形，其中一個三角形依對應邊、對應角的對應位置旋轉後，畫在學習單步驟五的圖形分析上

(如下圖七圖形分析)

- (2) 利用全等三角形對應邊長相等、對應角相等，說明平行四邊形兩組對邊等長及兩組對角相等

| 步驟 | 圖形分析 | 推理說明步驟 | 引導說明 |
|-----|------|---|---------------------|
| 步驟五 | | $\because \triangle ABC \cong \triangle CDA$ $\therefore \overline{AD} = \overline{BC}, \overline{AB} = \overline{CD}$ $\angle ABC = \angle ADC$ $\angle BAD = \angle BAC + \angle DAC$ $= \angle ACD + \angle ACB$ $= \angle DCB$ | 全等三角形對應邊等長 對應角相等 |

圖 (七)

(三) 總結

引導學生將平行四邊形基本性質之 (1)、(2)、(3) 及圖形對應關係。填在學習單一總結上 (如下圖八)

畫圖不夠精準時，可以手中的三角形，協助判別。

學生在相等線段、角度上作記號，方便三角形全等性質的判別。

學習單上畫圖及填空位置的紅色筆跡，提供參考。

圖形旋轉後，需協助學生能正確標示頂點。

學習單上畫圖及填空位置的紅色筆跡，提供參考。

讓學生書寫平行四邊形基本性質，以加深印象。

教學活動流程設計

※總結：

| 平行四邊形基本性質 | 圖形 | 圖形對應關係 |
|---|----|--|
| 平行四邊形 (1)任一對角線將此平行四邊形分成兩個全等三角形。 (2)其兩組對邊相等。 (3)兩組對角相等。 | | 四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形，則： (1) $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ (2) $\overline{AD} = \overline{BC}$ 、 $\overline{AB} = \overline{CD}$ (3) $\angle ABC = \angle ADC$ $\angle BAD = \angle DCB$ |

圖(八)

三、引導練習

教師示範引導練習一(附件7)計算第1小題後，學生立即練習。學生能正確計算後，教師再往下題逐題引導

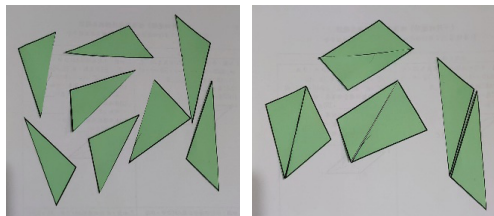
(第三節課結束)

第4節 判別性質教學

一、直觀操作

(一) 操作活動

- 請學生將第一節課所有三角形紙片任意兩兩一組，拼成一個任意四邊形(如圖)



- 請學生將平行四邊形與非平行四邊形分類成兩邊

(二) 觀察說明

- 觀察：引導學生一一觀察組成平行四邊形與非平行四邊形的三角形邊長或角度關係
- 說明：利用學生觀察的邊長或角度關係，說明平行四邊形判別性質之
 - 若四邊形兩組對邊分別相等，則此四邊形必為平行四邊形
 - 若四邊形兩組對角分別相等，則此四邊形必為平行四邊形

二、推理說明一：學習單二(附件2)

若四邊形兩組對邊分別相等，則此四邊形必為平行四邊形

教學注意事項

而對應圖形寫出關係位置，希望學生不僅記住基本性質口訣，且能理解。

引導學生能利用所學概念解題，逐題練習。

若沒有任何一組可組成平行四邊形，說明無法形成平行四邊形的原因後，挑出可拼成平行四邊形的三角形，拼成圖形後再說明。

視學生學習狀況及教學時間，決定是否進行推理引導。

教學活動流程設計

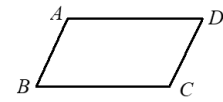
教學注意事項

(一) 條件分析

1. 協助學生分析已知條件及目標並記錄在學習單二條件分析內。(如下圖九)

※條件分析：

說明若四邊形兩組對邊分別相等，則此四邊形必為平行四邊形



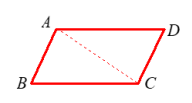
已知條件： $\overline{AD} = \overline{BC}$ 、 $\overline{AB} = \overline{CD}$
 目標：四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形

圖(九)

2. 將第 2 節課剪下三角形，張貼在學習單二 ※ 反推思考圖形分析張貼處上，並依條件分析圖形標示其頂點
3. 教師提問
 教師提問後，引導學生依張貼圖形將相關位置條件記錄在學習單二 ※ 反推思考內。(如下圖十)

- (1). 提問 1：平行四邊形的定義？
 (引導學生說出兩組對邊分別平行後記錄)
- (2). 提問 2：平行線的判別性質？
 (引導學生說出同位角相等、內錯角相等、同側內角互補)
- (3). 提問 3：如何說明角度相等？
 (引導學生說出三角形全等，則對應角相等)

※反推思考：

| 圖形 | 提問 | 依圖形寫下提問條件 |
|---|--------------|---|
|  | 1. 平行四邊形的定義？ | $\overline{AB} // \overline{CD}$ 、 $\overline{AD} // \overline{BC}$ |
| | 2. 平行線的判別性質？ | 同位角相等、內錯角相等、同側內角互補 |
| | 3. 如何說明角度相等？ | 三角形全等($\triangle ABC \cong \triangle CDA$) |

圖(十)

(二) 推理引導

1. 引導步驟一：(步驟完成後，如下圖十一)
- (1) 引導學生將平行四邊形一對角線分成的兩個三角形畫在學習單步驟一的圖形分析上並將條件分析的已知條件及 \overline{AC} 共用邊作記號
- (2) 引導學生依據條件，寫出三角形全等性質

學習單上填空位置的紅色筆跡，提供參考。

提問目的是引導學生反推思考，需引導出所需的答案，或由老師直接說明。

學習單上畫圖及填空位置的紅色筆跡，提供參考。

圖形分析中的圖形學生若畫不好，可利用手中的三角形協助觀察。

教學活動流程設計

教學注意事項

※推理活動：

| 步驟 | 圖形分析 | 推理說明步驟 | 引導說明 |
|-----|------|--|---------|
| 步驟一 | | 1. 連接 \overline{AC} 2. $\because \overline{AD} = \overline{BC}$ 、 $\overline{AB} = \overline{CD}$ 又 $\overline{AC} = \overline{AC}$ (共用邊) $\therefore \triangle ABC \cong \triangle CDA$ (____全等) | 三角形全等性質 |

圖(十一)

2. 引導步驟二：(步驟完成後，如下圖十二)

- (1) 引導學生根據要說明 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 的條件拆解圖形，並將拆解後的圖形，畫在學習單步驟二的圖形分析上
- (2) 複習平行線的判別性質，引導學生觀察拆解圖形後，依 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 所需條件，寫出 $\angle BAC = \angle ACD$

| 步驟 | 圖形分析 | 推理說明步驟 | 引導說明 |
|-----|------|--|-------------------------------|
| 步驟二 | | 3. $\because \triangle ABC \cong \triangle CDA$ $\therefore \angle BAC = \angle ACD$ $\Rightarrow \overline{AB} \parallel \overline{CD}$ | 平行線的判別 \overline{AC} 為截線 |

圖(十二)

3. 引導步驟三：(步驟完成後，如下圖十三)

- (1) 引導學生根據要說明 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ 的條件拆解圖形，並將拆解後的圖形，畫在學習單步驟三的圖形分析上
- (2) 複習平行線的判別性質，引導學生觀察拆解圖形後，依 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ 所需條件，寫出 $\angle DAC = \angle ACB$

| 步驟 | 圖形分析 | 推理說明步驟 | 引導說明 |
|-----|------|--|-------------------------------|
| 步驟三 | | $\angle DAC = \angle ACB$ $\Rightarrow \overline{AD} \parallel \overline{BC}$ | 平行線的判別 \overline{AC} 為截線 |

圖(十三)

4. 引導步驟四

以平行四邊形定義說明結論

5. 總結

教師藉由觀察三角形紙片及推理引導說明：若四邊形兩組對邊分別相等，則此四邊形必為平行四邊形

三、推理說明二：學習單三(附件3)

若四邊形兩組對角分別相等，則此四邊形必為平行四邊形

學習單上畫圖及填空位置的紅色筆跡，提供參考。

步驟二之(2)與步驟三之(2)，學生容易混淆，務必要求學生畫圖分析。引導學生能理解， \overline{AC} 為 \overline{AB} 、 \overline{CD} 截線時， $\angle BAC$ 與 $\angle ACD$ 為內錯角關係。

學習單上畫圖及填空位置的紅色筆跡，提供參考。

引導學生能理解， \overline{AC} 為 \overline{AD} 、 \overline{BC} 截線時， $\angle DAC$ 與 $\angle ACB$ 為內錯角關係。

學習單上畫圖及填空位置的紅色筆跡，提供參考。

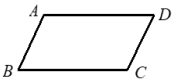
教學活動流程設計

教學注意事項

(一) 條件分析

1. 協助學生分析已知條件及目標並記錄在學習單三條件分析內。(如下圖十四)

說明若四邊形兩組對角分別相等，則此四邊形必為平行四邊形



已知條件： $\angle DAB = \angle DCB$ 、 $\angle ABC = \angle ADC$
目 標：四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形

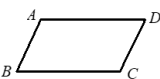
圖(十四)

2. 教師提問

教師提問後，引導學生依張貼圖形將相關位置條件記錄在學習單三 ※ 反推思考內。(如下圖十五)

- (1) 提問 1：四邊形內角和為多少度？
- (2) 提問 2：四邊形 $ABCD$ 圖形中，那那些角為同側內角？
- (3) 提問 3：若同側內角互補，則角度關係如何表示？

※反推思考：

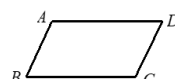
| 圖形 | 提問 | 依圖形紀錄提問的條件 |
|---|-----------------------------|--|
|  | 1. 四邊形內角和多少度？ | 內角和 360° $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$ |
| | 2. 四邊形 $ABCD$ 圖形中，那些角為同側內角？ | $\angle A$ 和 $\angle B$ ； $\angle A$ 和 $\angle D$ ； $\angle B$ 和 $\angle C$ ； $\angle C$ 和 $\angle D$ |
| | 3. 若同側內角互補，則角度關係如何表示？ | 兩個角度相加 180° ； 例： $\angle A + \angle B = 180^\circ$ |

圖(十五)

(二) 推理引導

1. 引導步驟一：(步驟完成後，如下圖十六)

引導學生根據反推思考 1 的條件，在推理說明步驟上，寫出 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$

| 步驟 | 圖形分析 | 推理說明步驟 | 引導說明 |
|-----|---|--|-------|
| 步驟一 |  | 1. 四邊形 $ABCD$ 中 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$ | 內角和定理 |

圖(十六)

2. 引導步驟二：(步驟完成後，如下圖十七)

- (1) 引導學生根據 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ 拆解圖形，並將拆解後的圖形，畫在學習單步驟二的圖形分析上
- (2) 引導學生觀察拆解圖形關係，再根據平行線的判別，得出須推論 $\angle A + \angle B = 180^\circ$
- (3) 引導學生完成學習單步驟二

學習單上填空位置的紅色筆跡，提供參考。

學生若無法回答，可進行複習或概念說明。


一邊提問，一邊指導學生在學習單上作紀錄。

學習單上填空位置的紅色筆跡，提供參考。

引導學生參考反推思考，說出四邊形內角和 360° 。

學習單上填空位置的紅色筆跡，提供參考。


教學活動流程設計

| 步驟 | 圖形分析 | 推理說明步驟 | 引導說明 |
|-----|---|--|------|
| 步驟二 |  | 3. 又 $\angle A = \angle C$ 、 $\angle B = \angle D$ $\therefore 2\angle A + 2\angle B = 360^\circ$ $\Rightarrow \angle A + \angle B = 180^\circ$ $\Rightarrow AD \parallel BC$ | |

圖(十七)

3. 引導步驟三：(步驟完成後，如下圖十八)

- (1) 引導學生根據 $AB \parallel DC$ 拆解圖形，並將拆解後的圖形，畫在學習單步驟三的圖形分析上
- (2) 引導學生觀察拆解圖形關係，再根據平行線的判別，得出須推論 $\angle A + \angle D = 180^\circ$
- (3) 引導學生完成學習單步驟二

| 步驟 | 圖形分析 | 推理說明步驟 | 引導說明 |
|-----|--|---|------|
| 步驟三 |  | 同理 $2\angle A + 2\angle D = 360^\circ$ $\Rightarrow \angle A + \angle D = 180^\circ$ $\Rightarrow AB \parallel CD$ | |

圖(十八)

4. 引導步驟四

以平行四邊形定義說明結論

5. 總結

教師藉由觀察三角形紙片及推理引導說明：若四邊形兩組對角分別相等，則此四邊形必為平行四邊形

四、引導練習

教師示範引導練習二(附件8)計算後，學生立即練習
(第四節課結束)

教學注意事項

學習單上畫圖及填空位置的紅色筆跡，提供參考。

引導學生能畫出所拆解的圖形。

引導學生能說出同側內角互補。

學習單上畫圖及填空位置的紅色筆跡，提供參考。

引導學生能利用所學概念解題。

主題 III：平行四邊形基本性質

教學活動流程設計

第5節 平行四邊形的兩條對角線互相平分

一、平行四邊形基本性質直觀教學

(一) 準備活動

1. 畫一畫：請學生將其剪下的另一組三角形拼回平行四邊形形狀後，畫出另一條對角線

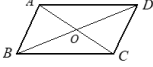
教學注意事項

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|---|---|
| <p>2. 剪一剪：將每一個三角形沿著所畫的線剪成兩個小三角形。（共有四張小三角形紙片）</p> <p>(二) 操作活動</p> <p>1. 操作 將手中 4 張小三角形紙片互相重疊，觀察是否會重合？</p> <p>2. 圖形組合 將剪下的四張小三角形紙片拼回平行四邊形形狀</p> <p>3. 觀察 拼成平行四邊形後，觀察重合的三角形紙片的位置關係（引導學生能發現上、下兩張三角形重疊在一起，會完全重合；左、右兩張三角形重疊在一起，會完全重合）</p> <p>4. 結論： 利用學生手中重合的三角形，先說明上、下兩張三角形重合，所以全等，再以全等三角形對應邊等長來說明平行四邊形除兩組對邊相等外，兩條對角線互相平分</p> <p>二、平行四邊形基本性質推理說明教學：學習單四（附件 4）</p> <p>(一) 分析條件</p> <p>1. 教師提問 教師提問後，引導學生將提問相關條件記錄在學習單三 ※ 推理思考內（如下圖十九）</p> <p>(1) 提問 1：根據第二、三節所學，我們學到平行四邊形的基本性質有那些？ （引導學生說出「平行四邊形一對角線將此平行四邊形分成兩個全等三角形」及「平行四邊形兩組對邊相等、兩組對角相等」</p> <p>(2) 提問 2：如何說明線段等長？ （引導學生說出「三角形全等」。）</p> <p>(3) 提問 3：依學習單上圖形及操作經驗，我們的目標是哪兩個三角形全等？</p> | <p>學生確實拼回平行四邊形，畫出另一條對角線後，再沿線剪開。</p> <p>引導學生觀察相鄰的兩個小三角形不一定會全等。</p> <p>引導學生發現重合線段，除了有平行四邊形的對邊外，還有對角線的一部份。</p> <p>一邊提問，一邊指導學生在學習單上作紀錄。 學生若無法回答，可進行複習或概念說明。</p> |

教學活動流程設計

教學注意事項

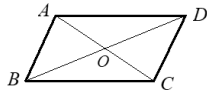
※推理思考：

| 圖形 | 提問 | 依圖形紀錄提問的條件 |
|---|---------------------------------|---|
|  | 1. 根據第二、三節所學，我們學到平行四邊形的基本性質有那些？ | $\overline{AB} = \overline{CD}$ 、 $\overline{AD} = \overline{BC}$ $\angle DAB = \angle DCB$ $\angle ABC = \angle ADC$ |
| | 2. 如何說明線段等長？ | 三角形全等對應邊長相等 |
| | 3. 依學習單上圖形及操作經驗，我們的目標是哪兩個三角形全等？ | $\triangle OAD \cong \triangle OCB$ $\triangle OAB \cong \triangle OCD$ |

圖(十九)

2. 協助學生分析已知條件及目標並記錄在學習單四條件分析內(如下圖二十)

※條件分析：

| | |
|---|---|
| 說明平行四邊形的兩條對角線互相平分 | |
|  | 已知條件： $\overline{AB} // \overline{CD}$ 、 $\overline{AD} // \overline{BC}$ $\overline{AB} = \overline{CD}$ 、 $\overline{AD} = \overline{BC}$ $\angle DAB = \angle DCB$ 、 $\angle ABC = \angle ADC$ |
| | 目標： $\overline{OA} = \overline{OC}$ 、 $\overline{OB} = \overline{OD}$ |

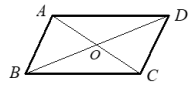
圖(二十)

(二) 推理思考

1. 引導步驟一：(步驟完成後，如下圖二十一)

複習平行四邊形定義及基本性質，引導學生填入

$$\overline{AD} // \overline{BC}、\overline{AD} = \overline{BC}$$

| 步驟 | 圖形分析 | 推理說明步驟 | 引導說明 |
|-----|---|--|------------|
| 步驟一 |  | 1. \because 四邊形 ABCD 為平行四邊形 $\therefore \overline{AD} // \overline{BC}$ 、 $\overline{AD} = \overline{BC}$ | 平行四邊形定義及性質 |

圖(二十一)

2. 引導步驟二：(步驟完成後，如下圖二十二)

- (1) 引導學生根據 $\overline{AD} // \overline{BC}$ 拆解圖形，並將拆解後的圖形，畫在學習單步驟二的圖形分析上
- (2) 引導學生觀察拆解圖形關係，再根據平行線內錯角相等性質，推論出 $\angle DAO = \angle OCB$ 、 $\angle ADO = \angle OBC$
- (3) 引導學生完成學習單步驟二

學習單上填空位置的紅色筆跡，提供參考。

可利用提問方式引導。

學習單上填空位置的紅色筆跡，提供參考。

引導學生能畫出所拆解的圖形。

引導學生能說出內錯角。

教學活動流程設計

| 步驟 | 圖形分析 | 推理說明步驟 | 引導說明 |
|-----|------|---|-------|
| 步驟二 | | 2. $\because \overline{AD} \parallel \overline{BC}$ $\therefore \angle DAO = \angle OCB$ $\angle ADO = \angle OBC$ (內錯角相等) | 平行線性質 |

圖(二十二)

3. 引導步驟三：(步驟完成後，如下圖二十三)

- (1) 引導學生寫出步驟一、步驟二構成三角形全等的三個條件，並將分析的已知條件作記號畫在圖形分析上
- (2) 引導學生完成學習單步驟三

| 步驟 | 圖形分析 | 推理說明步驟 | 引導說明 |
|-----|------|---|---------|
| 步驟三 | | 3. $\because \overline{AD} = \overline{BC}$ $\angle DAO = \angle OCB$ $\angle ADO = \angle OBC$ $\therefore \triangle AOD \cong \triangle COB$ (ASA全等) | 三角形全等性質 |

圖(二十三)

4. 引導步驟四

結論說明

(三) 引導練習

教師示範引導練習三(附件9)計算第1小題後，學生立即練習。學生能正確計算後，教師再往下題逐題引導

(第五節課結束)

教學注意事項

學習單上畫圖及填空位置的紅色筆跡，提供參考。

學習單上畫圖及填空位置的紅色筆跡，提供參考。

引導學生能利用所學概念解題，依學生作答狀況，決定複習或進行下一概念學習。

主題IV：平行四邊形的判別

教學活動流程設計

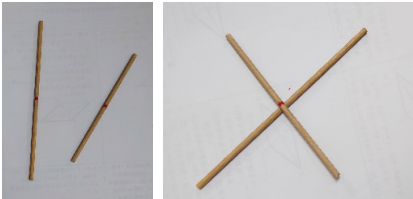
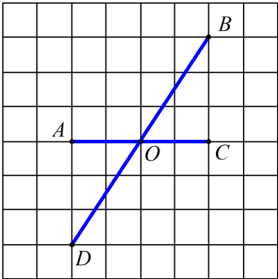
1. 若四邊形的兩對角線互相平分，則此四邊形必為平行四邊形
2. 若四邊形的一組對邊平行且相等，則此四邊形必為平行四邊形

一、直觀教學

※ 觀察活動：引發學生討論動機

- (一) 觀察一：若四邊形的兩對角線互相平分，則此四邊形必為平行四邊形

教學注意事項

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|---|--|
| <p>1. 將長短不一的兩根竹籤描出中點位置</p> <p>2. 在空白紙上，以中點重疊方式，將兩根竹籤任意交叉擺放</p>  <p>3. 引導學生將竹籤 4 個端點標在紙上後，將四個點依序連成四邊形</p> <p>4. 觀察所畫四邊形是否為平行四邊形？</p> <p>(二) 觀察二：若四邊形的一組對邊平行且相等，則此四邊形必為平行四邊形</p> <p>1. 將長短一樣的兩根竹籤平行擺放</p> <p>2. 引導學生將竹籤 4 個端點標在紙上後，將四個點依序連成四邊形</p> <p>3. 觀察所畫四邊形是否為平行四邊形？</p> <p>二、計算既推理說明</p> <p>(一) 計算既推理說明一</p> <p>1. 範例說明：老師依學習單五 (附件 5) 範例做說明</p> <p>(1) 在附件 16 表格上，畫出以 O 點為中點的 \overline{AC}、\overline{BD} 兩條線段，且使 A、B、C、D 四點在格子點上 (如範例圖形)。並計算 \overline{OA}、\overline{OC}、\overline{OB}、\overline{OD} 的長度</p>  <p style="text-align: center;">範例圖</p> <p>(2) 連接 \overline{AB}、\overline{BC}、\overline{CD}、\overline{AD}，並利用畢氏定理計算 \overline{AB}、\overline{BC}、\overline{CD}、\overline{AD} 的長度</p> <p>(3) 引導學生觀察 \overline{AB}、\overline{BC}、\overline{CD}、\overline{AD} 的長度關係</p> <p>(4) 引導學生以活動 II 的第 4 節課所學，「若四邊形兩組對邊分別相等，則此四邊形必為平行四邊形」的概念下結論</p> | <p>竹籤可用吸管或長條紙張代替。 中點位置可由老師先做好記號。</p> <p>依學生的觀察結果，讓學生嘗試說明理由。</p> <p>依學生的觀察結果，讓學生嘗試說明理由。</p> <p>範例僅提供參考，老師可隨機畫圖。</p> <p>必要時，複習如何利用畢氏定理來計算長度。</p> |

教學活動流程設計

教學注意事項

※範例圖形：方格為1×1單位

※步驟計算說明：請依步驟做法在方格上完成圖形，並依指示計算線段長度

| | 步驟做法 | 線段長度 |
|-----|--|--|
| 步驟一 | 任意畫出以O點為中點的 \overline{AC} 、 \overline{BD} 兩條線段，且使A、B、C、D四點在格子點上。 計算 \overline{OA} 、 \overline{OC} 、 \overline{OB} 、 \overline{OD} 的長度。 | $\overline{OA} = \overline{OC} = 2$ $\overline{OB} = \overline{OD} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ |
| 步驟二 | 連接 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CD} 、 \overline{AD} ， 計算 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CD} 、 \overline{AD} 的長度 | $\overline{AB} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$; $\overline{BC} = 3$ $\overline{CD} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$; $\overline{AD} = 3$ |
| 步驟三 | 觀察所畫四邊形ABCD及所計算線段長，可知四邊形ABCD為哪種四邊形？ $\because \overline{AB} = \overline{CD}$ ， $\overline{AD} = \overline{BC}$ \therefore 四邊形ABCD為平行四邊形 | |

學習單六範例說明參考

- 練習活動：學生完成學習單五的 [學生練習] 區塊
請學生參考範例作答完成學習單五的 [學生練習] 區塊
- 推理說明：依據學生完成的附件 16 圖形，帶領學生完成學習單五的 [推理引導] 區塊
- 概念說明：依據直觀觀察、計算既推理說明，引導學生理解「若四邊形的兩對角線互相平分，則此四邊形必為平行四邊形」的概念

(二) 計算既推理說明二

- 範例說明：老師依學習單六 (附件 6) 範例做說明
 - 在附件 16 表格格子點上，任取 A、B、C、D 四點，使 \overline{AD} 、 \overline{BC} 兩條線段等長且平行 (如範例圖形所示)。並紀錄 \overline{AD} 、 \overline{BC} 的長度
 - 連接 \overline{AB} 、 \overline{CD} ，並利用畢氏定理計算 (AB)、(CD) 的長度
 - 引導學生觀察 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CD} 、 \overline{AD} 的長度關係
 - 引導學生以活動 II 的第 4 節課所學，「若四邊形兩組對邊分別相等，則此四邊形必為平行四邊形」概念下結論

長度依所示範圖形有所改變，學習單五的範例僅供參考。

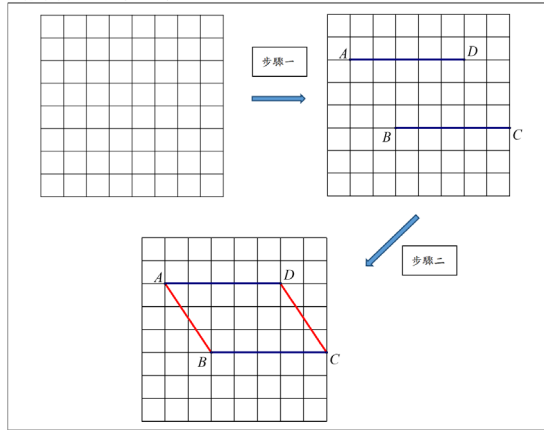
觀察並檢視學生的情況，在旁隨時指導。
學生無法參考範例引導作答時，可由老師帶領學生一起完成學習單。

範例僅提供參考，老師可隨機畫圖。

必要時，複習如何利用畢氏定理來計算長度。

教學活動流程設計

[範例說明]:

※範例圖形：方格為 1×1 單位

※步驟計算說明：請依步驟做法在方格上完成圖形，並依指示計算線段長度

| | 步驟做法 | 線段長度 |
|-----|--|--|
| 步驟一 | 任取A、B、C、D四點，使 \overline{AD} 、 \overline{BC} 兩條線段等長且平行(如範例圖形所示)，並紀錄 \overline{AD} 、 \overline{BC} 的長度。 | $\overline{AD} = \overline{BC} = 5$ |
| 步驟二 | 連接 \overline{AB} 、 \overline{CD} ，並計算 \overline{AB} 、 \overline{CD} 的長度。 | $\overline{AB} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ $\overline{CD} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ |
| 步驟三 | 觀察所畫四邊形ABCD及所計算線段長，可知四邊形ABCD為哪種四邊形？ ∵ $\overline{AB} = \overline{CD}$ 、 $\overline{AD} = \overline{BC}$ ∴ 四邊形ABCD為平行四邊形 | |

學習單六範例說明參考

- 練習活動：學生完成學習單六(附件6)的[學生練習]區塊請學生參考範例作答完成學習單六的[學生練習]區塊
- 推理說明：依據學生完成的附件17圖形，帶領學生完成學習單六的[推理引導]區塊
- 概念說明：依據直觀觀察、計算既推理說明，引導學生理解若四邊形的一組對邊平行且相等，則此四邊形必為平行四邊形的概念

三、引導練習

教師示範引導練習四(附件10)計算第1小題後，學生立即練習。學生能正確計算後，教師再往下題引導

(第六節課結束)

教學注意事項

長度依所示範圖形有所改變，學習單五的範例僅供參考。

觀察並檢視學生的情況，在旁隨時指導。

學生無法參考範例引導作答時，可由老師帶領學生一起完成學習單。

引導學生能利用所學概念解題，依學生作答狀況，決定複習或進行下一題目學習。

附件

- 附件 1~ 6：學習單一 ~ 六。
- 附件 7~10：引導練習 ~ 四。
- 附件 11：小試身手一。
- 附件 12：活動附件(第1節課，複習全等及平行線性質)。
- 附件 13：活動附件(第1節課，複習三角形全等性質)。

| | |
|----|--|
| 附件 | <ul style="list-style-type: none"> · 附件 14：活動附件 (第 1 節課，複習平行線性質)。 · 附件 15：活動附件 (第 2 節課，平行四邊形性質直觀觀察)。 · 附件 16：活動附件 (第 6 節課，平行四邊形的判別)。 · 附件 17：活動附件 (第 6 節課，平行四邊形的判別)。 · 附件 18：前測。 · 附件 19：後測。 |
|----|--|



附件

請至「國民小學及國民中學學生學習扶助資源平臺」下載

評量 工具

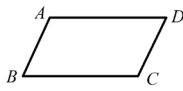
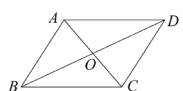


本補強課程模組所使用的評量工具包含有：

1. 理解學生概念學習狀況的課堂口頭提問
2. 分析學生學習前、後學習效果的前、後測
3. 測驗學生主題單元概念的運算熟悉程度的附件：學習單、小試身手、引導練習。


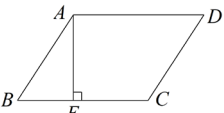
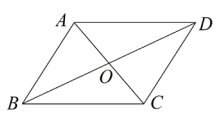
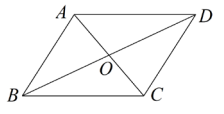
一、口頭提問

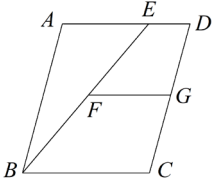
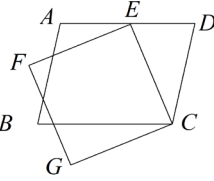
| 提問位置 主題 - 節 - 提問順序 | 問題 | 配合物品或附件 |
|-----------------------|-------------------------------|---------|
| 主題 I- 一 - 一 (二)-1-1 | 指指看，那些角為同位角？那些角為內錯角？那些角為同側內角？ | |
| 主題 I- 一 - 一 (二)-1-2 | 什麼是平行線？ | |
| 主題 I- 一 - 一 (二)-1-3 | 那這兩支竹棍沒有相交，是平行線嗎？ | |
| 主題 I- 一 - 一 (二)-1-4 | 怎麼表示延長後永不相交？ | |
| 主題 II- 二 - 一 -1-1 | 何謂平行四邊形？ | |
| 主題 II- 二 - 一 -1-2 | 怎麼說明兩直線互相平行？ | |
| 主題 II- 四 - 二 (一)3-1 | 平行四邊形的定義？ | |
| 主題 II- 四 - 二 (一)3-2 | 平行線的判別性質？ | |
| 主題 II- 四 - 二 (一)3-3 | 如何說明角度相等？ | |
| 主題 II- 四 - 三 (一)2-1 | 四邊形內角和為多少度？ | |

| 提問位置 主題 - 節 - 提問順序 | 問題 | 配合物品或附件 |
|-----------------------|------------------------------|---|
| 主題 II- 四 - 三 (一)2-2 | 四邊形 ABCD 圖形中，那那些角為同側內角？ |  |
| 主題 II- 四 - 三 (一)2-3 | 若同側內角互補，則角度關係如何表示？ | |
| 主題 III- 五 - 二 (一)1-1 | 根據第二、三節所學，我們學到平行四邊形的基本性質有那些？ |  |
| 主題 III- 五 - 二 (一)1-2 | 如何說明線段等長？ | |
| 主題 III- 五 - 二 (一)1-3 | 依學習單上圖形及操作經驗，我們的目標是哪兩個三角形全等？ | |


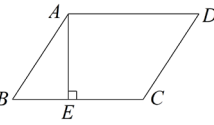
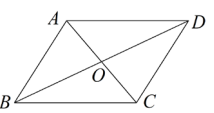
二、前測、後測

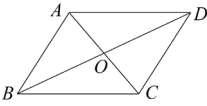
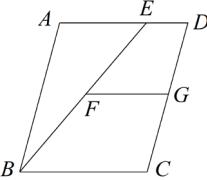
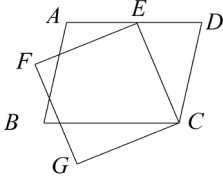
1. 前測

| 試題 | 測驗題目 | 建議評量時間 |
|--------|---|--------|
| | 測驗核心概念 | |
| 第 1 大題 | 如圖，平行四邊形 ABCD 中， $\angle A + \angle C = 130^\circ$ ，則 $\angle B$ 度數 = _____ 度。  | 進行教學前 |
| | S-8-9 平行四邊形的基本性質：平行四邊形的兩組對角相等 | |
| 第 2 大題 | 如圖，平行四邊形 ABCD 周長 36 公分， $\overline{AE} \perp \overline{BC}$ ，且 $\overline{AB} = 8$ 公分， $\overline{AE} = 7$ 公分， 則平行四邊形 ABCD 的面積為 _____ 平方公分。  | |
| | S-8-9 平行四邊形的基本性質：平行四邊形的兩組對邊相等 | |
| 第 3 大題 | 如圖，平行四邊形 ABCD 中，兩對角線交於 O 點，若 $\overline{OA} = 3$ 公分， $\overline{OD} = 4$ 公分， 則 $(AC) + (BD)$ 長為 _____ 公分。  | |
| | S-8-9 平行四邊形的基本性質：平行四邊形的兩組對邊相等 | |
| 第 4 大題 | 四邊形 ABCD 中，根據下列選項所給的條件， 判斷那一個選項條件所構成的四邊形 ABCD， 不是平行四邊形？ (A) $\overline{AB} = \overline{CD}$ ， $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ (B) $\overline{AB} = \overline{CD}$ ， $\overline{BC} = \overline{AD}$ (C) $\overline{OA} = \overline{OC}$ ， $\overline{OB} = \overline{OD}$ (D) $\angle BAD = \angle BCD$ ， $\angle ABC = \angle ADC$  | |
| | S-8-9 平行四邊形的基本性質：平行四邊形的判別性質 | |

| 試題 | 測驗題目 | 建議評量時間 |
|--------|---|--|
| | 測驗核心概念 | |
| 第 5 大題 | 如圖，平行四邊形 ABCD 中， $\overline{DE} \parallel \overline{FG}$ ， $\angle D = 75^\circ$ ， $\angle ABE = 25^\circ$ ，則 $\angle GFB + \angle GCB$ 度數 = ? <<93 基測 (一)>> (A) 155° (B) 210° (C) 235° (D) 270° |  |
| | S-8-9 平行四邊形的基本性質：平行四邊形的兩組對角相等、鄰角互補 | |
| 第 6 大題 | 如圖，平行四邊形 ABCD，正方形 CEFG，其中 E 點在 \overline{AD} 上，若 $\angle ECD = 35^\circ$ ， $\angle AEF = 15^\circ$ ，則 $\angle B$ 度數 = ? <<105 會考>> (A) 50° (B) 55° (C) 70° (D) 75° |  |
| | S-8-9 平行四邊形的基本性質：平行四邊形的兩組對角相等應用 | |

2. 後測

| 試題 | 測驗題目 | 建議評量時間 |
|--------|--|--|
| | 測驗核心概念 | |
| 第 1 大題 | 如圖，平行四邊形 ABCD 中， $\angle A = (x + 35)^\circ$ ， $\angle C = (2x + 15)^\circ$ ，則 $\angle B$ 度數 = _____ 度。 |  |
| | S-8-9 平行四邊形的基本性質：平行四邊形的兩組對角相等 | |
| 第 2 大題 | 如圖，平行四邊形 ABCD 面積 42 平方公分， $\overline{AE} \perp \overline{BC}$ ，且 $\overline{AB} = 8$ 公分， $\overline{AE} = 6$ 公分，則平行四邊形 ABCD 的周長為 _____ 公分。 |  |
| | S-8-9 平行四邊形的基本性質：平行四邊形的兩組對邊相等 | |
| 第 3 大題 | 如圖，平行四邊形 ABCD 中，兩對角線交於 O 點，若 $\overline{AC} = 8$ 公分， $\overline{BD} = 10$ 公分，且 $\overline{BC} = 6$ 公分，則 $\triangle OBC$ 的周長為 _____ 公分。 |  |
| | S-8-9 平行四邊形的基本性質：平行四邊形的兩條對角線互相平分 | |

| 試題 | 測驗題目 | 建議評量時間 | |
|--------|---|--|---------------------------|
| | 測驗核心概念 | | |
| 第 4 大題 | 四邊形 ABCD 中，根據下列選項所給的條件，判斷那一個選項條件所構成的四邊形 ABCD，不是平行四邊形？ (A) $\overline{AB} = \overline{CD}$ ， $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ (B) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ， $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ (C) $\overline{OA} = \overline{OC}$ ， $\overline{OB} = \overline{OD}$ (D) $\angle BAC = \angle DAC$ ， $\angle ABD = \angle BDC$ |  | 可於第 6 節課後實施 |
| | S-8-9 平行四邊形的基本性質：平行四邊形的判別性質 | | |
| 第 5 大題 | 如圖，平行四邊形 ABCD 中， $\overline{DE} \parallel \overline{FG}$ ， $\angle D = 80^\circ$ ， $\angle DEB = 125^\circ$ ，則 $\angle CBE + \angle CGF$ 度數 = ? << 仿 93 基測 (一)>> (A) 125° (B) 135° (C) 165° (D) 205° |  | 可於第 2 節課、第 3 節課或第 6 節課後實施 |
| | S-8-9 平行四邊形的基本性質：平行四邊形的兩組對角相等、鄰角互補 | | |
| 第 6 大題 | 如圖，平行四邊形 ABCD，正方形 CEFG，其中 E 點在 \overline{AD} 上，若 $\angle ECD = 45^\circ$ ， $\angle AEF = 20^\circ$ ，則 $\angle A$ 度數 = ? << 仿 105 會考 >> (A) 165° (B) 135° (C) 115° (D) 110° |  | |
| | S-8-9 平行四邊形的基本性質：平行四邊形的兩組對角相等應用 | | |

三、附件

| 附件 | 位置 | 核心概念 | 建議使用時間 |
|-----|------|---|----------------|
| 學習單 | 附件 1 | 平行四邊形基本性質 -- 平行四邊形一對角線將其分成兩個全等三形且其兩組對邊等長、兩組對角相等 | 主題 II (第 3 節課) |
| | 附件 2 | 平行四邊形判別性質 -- 若四邊形的兩組對邊分別相等，則此四邊形必為平行四邊形 | 主題 II (第 4 節課) |
| | 附件 3 | 平行四邊形判別性質 -- 若四邊形的兩組對角分別相等，則此四邊形必為平行四邊形 | |

| 附件 | 位置 | 核心概念 | 建議使用時間 |
|------------|-------|--|----------------|
| 學習單 | 附件 4 | 平行四邊形基本性質 -- 平行四邊形的兩條對角線互相平分 | 主題 III |
| | 附件 5 | 平行四邊形判別性質 -- 若四邊形的兩條對角線互相平分，則此四邊形必為平行四邊形 | 主題 IV |
| | 附件 6 | 平行四邊形判別性質 -- 若四邊形的一組對邊平行且相等，則此四邊形必為平行四邊形 | |
| 引導練習 | 附件 7 | 平行四邊形基本性質 -- 兩組對邊相等、兩組對角相等 | 主題 II (第 3 節課) |
| | 附件 8 | 若四邊形的兩組對邊或兩組對角分別相等，則此四邊形必為平行四邊形 | 主題 II (第 4 節課) |
| | 附件 9 | 平行四邊形基本性質兩條對角線互相平分 | 主題 III |
| | 附件 10 | 綜合練習 | 主題 IV |
| 小試身手 | 附件 11 | 全等三角形與平行線截角性質 | 主題 I 複習概念後 |
| 操作 活動配件 | 附件 12 | 四邊形紙片 --- 複習全等概念 | 主題 I 複習 |
| | 附件 13 | 三角形紙片 --- 複習全等三角形 | |
| | 附件 14 | 平行線操作活動 | |
| | 附件 15 | 平行四邊形紙片 | 主題 II (第 2 節課) |
| | 附件 16 | 活動方格一 -- 平行四邊形操作活動 | 主題 IV |
| | 附件 17 | 活動方格二 -- 平行四邊形操作活動 | 主題 IV |

教學反思 應用建議



課堂中的教學都是從定義 - 特性 - 證明來學習「平行四邊形的基本性質」及「平行四邊形的判別性質」，對扶助補強學生來說，來不及將特性記熟就被證明過程搞得頭昏腦脹，因此這次從藉由從操作紙張關係複習全等三角形基礎概念實作出發，再利用剪紙疊合過程讓學生理解平行四邊形性質，同時從操作疊合過程，引導學生理解推導的過程。期待學生從全等三角形的判別性質為基礎，透過平行四邊形性質的推導，對之後學習幾何推論證明的學習有所助益。

本模組選擇數學測驗呈現明顯落後（段考成績皆不到 30 分），且之前也參與過扶助補強課程的九年級三位學生來進行試行。

一、學生表現

1. 三位學生的前測成績表現

| 題目 | 學生 A | 學生 B | 學生 C | 正確率 (%) |
|----------------------|------|------|------|---------|
| 1. 平行四邊形的兩組對角相等 | X | X | X | 0 |
| 2. 平行四邊形的兩組對邊相等 | X | X | X | 0 |
| 3. 平行四邊形的兩條對角線互相平分 | X | O | X | 33.3 |
| 4. 平行四邊形的判別性質 | O | O | X | 66.7 |
| 5. 平行四邊形的兩組對角相等、鄰角互補 | X | X | X | 0 |
| 6. 平行四邊形的兩組對角相等應用 | O | X | X | 33.3 |
| 答對比率 (%) | 33.3 | 33.3 | 0 | |

2. 三位學生的後測成績表現

| 題目 | 學生 A | 學生 B | 學生 C | 正確率 (%) |
|----------------------|------|------|------|---------|
| 1. 平行四邊形的兩組對角相等 | X | O | X | 33.3 |
| 2. 平行四邊形的兩組對邊相等 | X | O | X | 33.3 |
| 3. 平行四邊形的兩條對角線互相平分 | O | O | O | 100 |
| 4. 平行四邊形的判別性質 | O | O | O | 100 |
| 5. 平行四邊形的兩組對角相等、鄰角互補 | X | X | X | 0 |
| 6. 平行四邊形的兩組對角相等應用 | O | O | X | 66.7 |
| 答對比率 (%) | 50 | 83.3 | 33.3 | |

3. 學生前後測比較：

- (1) 「平行四邊形的兩組對角相等」及「平行四邊形的兩組對邊相等」概念，學生前測答對率 0%，雖然操作過程，學生能參與且依提問回答，但後測僅學生 B 有進步。

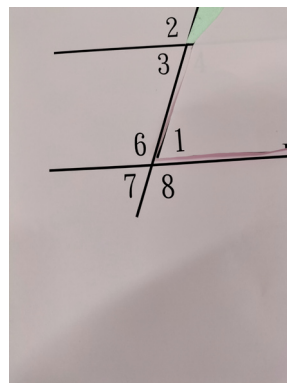
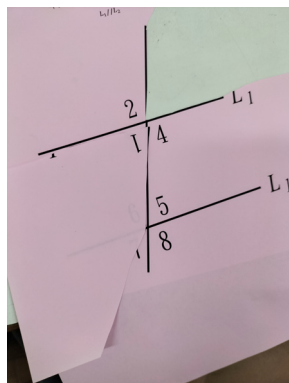
- (2) 「平行四邊形的兩條對角線互相平分」及「平行四邊形的判別性質」，透過模組教學的實作，學生對性質的印象深刻，後測時能全數答對。
- (3) 「平行四邊形的兩組對角相等、鄰角互補」，需運用到對角關係及鄰角關係，且圖形不是學生熟悉的，所以不管前、後測，學生都抓不到解題方向而無法作答。
- (4) 「平行四邊形的兩組對角相等應用」，學生對正方形角度熟悉，所以敢嘗試作答。

二、教學情形：

(一) 課程的前導經驗

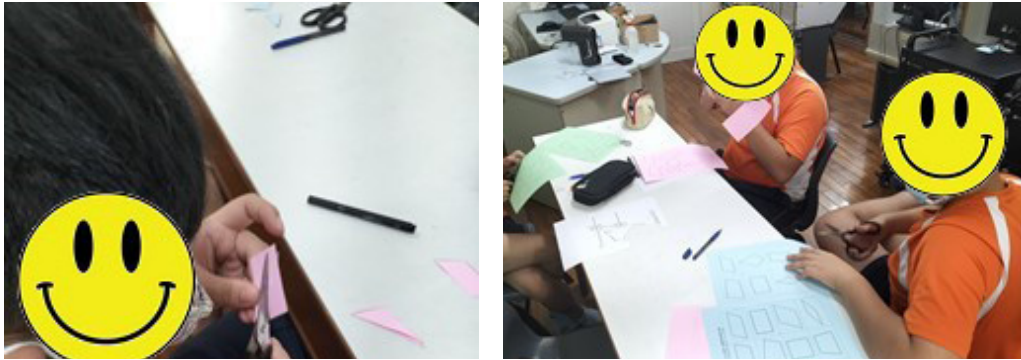
為能順利引導平行四邊形的模組課程，一開始以實作方式帶領學生複習：

1. 藉由選取附件 12 中可能的兩個全等三角形，再利用疊合方式判斷是否真為全等三角形。幫學生建立複習先備概念 (三角形判別性質)。沒有計算跟說明，所以學生非常願意嘗試，且不怕判別錯誤。
2. 學生對「平行」只停留在國小所學的「不相交」概念中，因此針對 [平行]，透過提問、對談，來釐清學生的觀念 (不會相交 → 距離處處相等 → 同時垂直於另一直線)，引導學生能更清楚「平行」概念。
3. 利用移動角度來加強平行線的同位角、內錯角、同側內角的基本性質，沒有引入推理，學生參與度高。



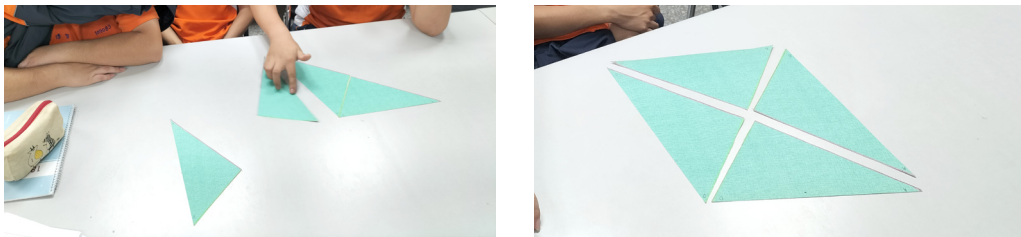
(二) 平行四邊形基本性質及判別性質的引入

1. 直觀的操作：請學生選取他認為的平行四邊形 (正方形及長方形都沒被選入)，再從對角線切割成兩個三角形後，進行疊合驗證全等性質：對角相等、對邊等長，學生全程自己操作，印象深刻。
2. 有了具體經驗的操作後，學生就 [對邊等長] 和 [對角相等] 能有直觀上的接受。再進一步透過操作過程說明推理論證的方式，從全等三角形來演繹這兩個性質的證明，結合具體經驗與抽象思考，學生能依老師帶領，透過對談，完成學習單。



3.[對角線互相平分]性質的教學上，請學生先將平行四邊形沿著兩條對角線剪成四個小三角形，再仿上述流程結合具體經驗與抽象思考，學生覺得剪剪拼拼過程很好玩，沒有感到學幾何的恐懼感。

4. 透過學生剪紙的圖形反向引導學生思考平行四邊形的判別性質，學生覺得有趣。



三、教學反思與建議

以往在班級教學上，常是直接在黑板上進行演繹推理證明。針對學習扶助學生的特性(學得慢、記不牢)，透過舊經驗(全等三角形的判別性質)的複習、實際操作建立直觀印象，最後加上邏輯推理演繹的過程，為接下來的推理證明進行奠基。這樣的操作模式，適合學習扶助的小班制教學，更對數學學習落後的學生有很大的幫助。

(一) 反思

1. 課程的前導經驗

- (1) 以直觀來選取任 2 個全等三角形活動中，學生為了能選取成功，一直猶豫不決，耽誤活動所設定的時間。
- (2) 複習平行線截角性質的飄移活動，當學生將角度描在描圖紙上時，學生將邊畫得歪七扭八的，影響到移動角度後的判斷

2. 平行四邊形基本性質直觀操作與推理說明引入

- (1) 第 2 節課在附件 14 四邊形中，選取認為是平行四邊形的紙片後，在使用量角器測量角度，以直觀操作判別四邊形是否為平行四邊形時，學生操作量角器時，狀況百出，導致角度測量誤差很大，影響正確判別及平行四邊形對角相等的觀察。

- (2) 依學生直觀操作的過程，逐步引入推理說明，學生非常喜歡，覺得很容易理解，但學生動手操作時，所花的時間比預期的還多，導致引導說明過程太倉促。
- (3) 學生概念理解，但在引導練習的題目時，無法將概念運用到解題上，需老師邊提問邊引導，才能順利完成解題。

3. 平行四邊形的判別性質

在學習單五（若四邊形兩條對角線互相平分則此四邊形必為平行四邊形）、學習單六（若四邊形一組對邊平行且相等，則此四邊形必為平行四邊形），利用紙片畫圖，配合長度計算，過程中運用到畢氏定理的概念，學生已忘記如何使用畢氏定理概念。

（二）建議

1. 課程的前導經驗

- (1) 以直觀選取任 2 個全等三角形活動中，可依學生狀況選擇直接將富有長度、角度條件那面朝上，讓學生可參考條件選取，以提升學生選取成功的機會。
- (2) 老師可事先在描圖紙畫好角度，提供學生移動觀察；或要求學生以直尺畫線，降低角度的不準確性。

2. 平行四邊形基本性質直觀操作與推理說明引入

- (1) 使用量角器測量時，可先複習量角器的正確使用方法，或事先將附件 14 中的四邊形每個內角標示角度，再讓學生依其所選取的四邊形來說明選取的理由。
- (2) 推理說明對扶助補強學生是非必要的學習，若學生能在操作過程中，有學習意願並且能理解概念，則可省略推理說明的部分。
- (3) 可直接省略推理說明的部分，將時間用於解題練習。

3. 平行四邊形的判別性質

運用到畢氏定理概念計算長度，而學生已忘記如何使用時，若學習時間允許，可協助學生複習畢氏定理概念後，再讓學生自行計算長度；若教學時間有限，則以理解平行四邊形的判別性質為優先，長度部分，可直接帶領學生做計算。

國中數學領域 補強課程模組 5

八年級
函數

- 臺中市立溪南國民中學 張廷吉組長
- 臺中市立五權國民中學 莊佶達教師

設計
理念

一般認為，函數（function）一詞首先是由數學家萊布尼茲（Leibniz, 1646 – 1716）在 1692 年提出的。最初，他用函數只表示冪 x 、 x^2 、 x^3 ……，然後，還用函數表示曲線上點的橫坐標、縱坐標、切線長等與曲線上的點有關係的某些幾何量。中文對函數一詞的使用是從清代數學家李善蘭開始的，他在《代數學》譯本（1859）中，把“function”譯為「函數」，「凡式中有天，為天之函數」，我國古代以天、地、人、物表示未知數 x 、 y 、 z 、 w ，所以這個函數定義相當於：若一式中含有 x ，則稱為關於 x 的函數。「函」有包含的意思（我國古代「函」與「含」可以通用），這正是李善蘭用「函數」一詞翻譯“function”的原因（引用自傅海倫、韓群，2004）。

然而在現在的線型函數課程中，線型函數往線形走一兩點構成一直線；而不是往函數走—先找出固定變化，再轉化成為函數式。主要是因為學生在一年級時下學期學過二元一次方程式，也利用兩點畫出一條線、利用兩點寫出直線方程式 $y=ax+b$ 的形式，想用這一種方式簡單跨過看變化的歷程，直接在教導函數的對應（一對一、多對一）之後，將對應的數值關係轉化成直角座標系上的點，藉由點和座標系的歷程回到七年級下學期的歷程。

本課程模組想要讓學生從兩組數據中找到對應關係，以此介紹出函數關係。再細看每一單位的 x 變化，對應 y 的變化是不變的、穩定的、沒有規律的，將前面的數據刻劃在函數圖形時，可以看到不變的是水平線、穩定的是斜直線、沒有規律的有連起來必要並且有能力探討嗎？數據若是不變的非常好進行推論、若是穩定的變化讓學生摸索規律，在八年級下學期的一開頭學過了等差數列，感受出項與值依循著公差穩定

增加或減少，在線型函數中也可以比照辦理，等差數列解題的關鍵點在公差；類比於函數解題的關鍵點在單位的變化量，掌握好變化量就容易推導出數值。最後教導找出起始值加上單位變化量，就可以寫出函數式。

找規律的方式較聯立方程式的歷程讓學生有感，而此份教材希望與函數創立者萊布尼茲當初的想法貼近，讓學生面臨到線形函數題目時，能利用掌握規則的變化就可以推導出，題目所要求的答案。最後透過遊戲，讓學生在遊戲中，透過成功的「配對」經驗，再次看清楚函數的全貌，藉由遊戲觸發學生對函數有所感覺、有所想法，讓生活情境、數值對應表、函數式、函數圖形的呈現方式能夠充分了解它們之間的關係，進而知道其中一種類而能類推其他三種。期許透過多元教學策略引導，降低學生在學習函數時的恐懼，讓學生在有感的情境中，理解函數的意義與圖形表徵，不再畏懼面對抽象的函數概念，願意嘗試學習、樂於學習。

課程架構

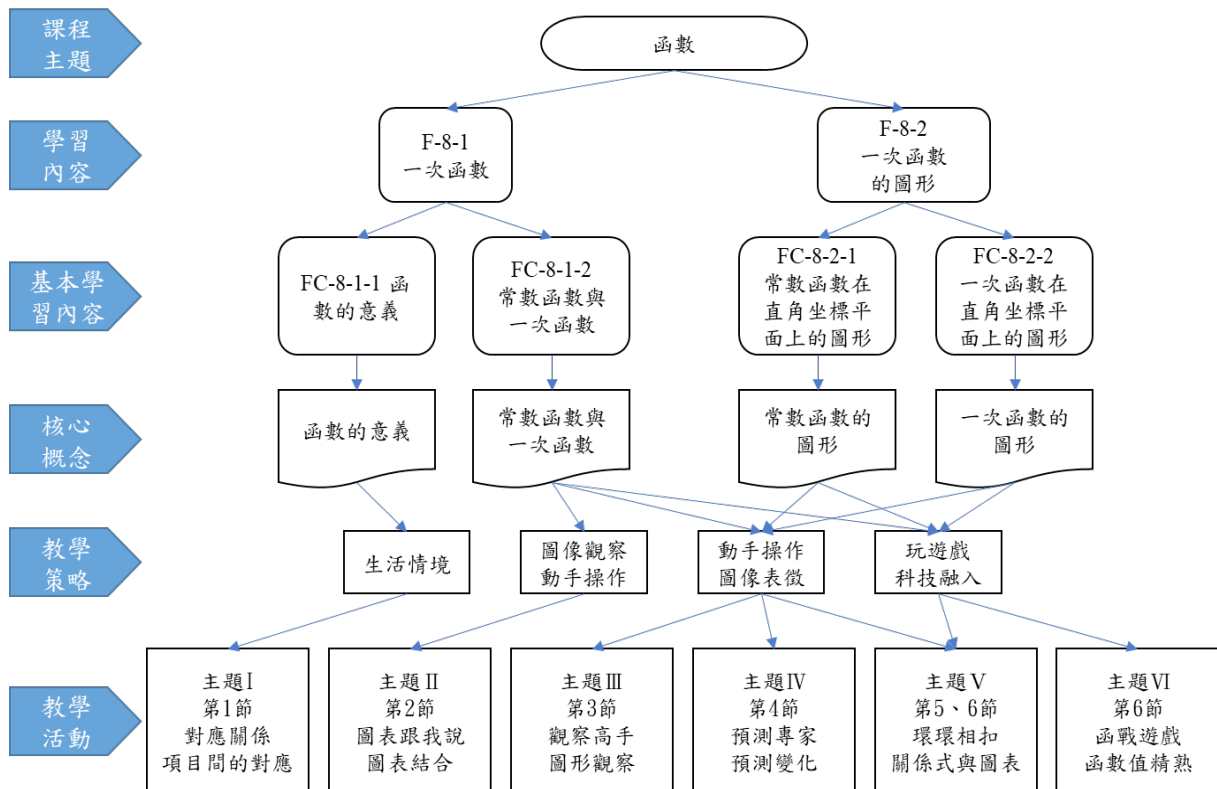


圖 1：課程架構圖

- (一) 主題 I (第 1 節課)- 項目間的對應關係：透過生活情境的表徵方式，讓學生能找到兩種項目間的對應關係，並探討項目內的數值能否有清楚的對應，配合學習單一 (附件 1) 讓學生建立有清楚對應關係就是函數關係的概念。
- (二) 主題 II (第 2 節課)- 圖表跟我說：延伸第 1 節課生活情境學習到函數表徵的概念，配合學習單二 (附件 2)，讓學生在圖中找對應的數值，利用數值畫函數圖形。直接在教導函數的對應 (一對一、多對一) 之後，將對應的數值關係轉化成直角座標系上的點，藉由點和座標系的歷程回到七年級下學期的歷程 (二元一次方程式圖形)。
- (三) 主題 III (第 3 節課)- 觀察高手：配合學習單三 (附件 3)，透過圖形，讓學生再細看每一單位的 X 變化，對應 Y 的變化是不變的、穩定的、沒有規律的，將前面的數據刻劃在函數圖形時，可以看到不變的是水平線、穩定的是斜直線，順順的圖形 (斜直線) 找出單位變化量。
- (四) 主題 IV (第 4 節課)- 我是預測專家：以學習單四 (附件 4) 配合學生學過的等差數列，感受出項與值依循著公差穩定增加或減少，在線型函數中也可以比照辦理，等差數列解題的關鍵點在公差；類比於函數解題的關鍵點在單位的變化量，掌握好變化量就容易推導出數值。藉由單位變化量，推出起始值與寫出函數式。
- (五) 主題 V (第 5 節課)- 環環相扣：配合學習單五 (附件 5)，回顧真實生活情境，推算自變量中的應變量，找出單位變化量與寫出函數式，畫出圖形。讓數值對應表、函數式、函數圖形的呈現方式能夠知一種類推兩種 (環環相扣)。
- (六) 主題 VI (第 6 節課)- 函數配對遊戲：透過遊戲「函數接龍」、「函戰遊戲」，讓學生在遊戲中成功的「接龍」與「配對」，便可以一點一滴地再一次看清函數的全貌，讓生活情境、數值對應表、函數式、函數圖形的呈現方式能夠充分了解它們之間的關係，進而知道其中一種類而能類推其他三種。

教材分析



(一) 本補強課程模組教材重要性

「函數」是國中數學相當重要的概念之一，也是學生第一次接觸的主題，對學生而言是陌生且抽象的概念，如何讓學生能有學習的動機，願意學習「函數」的概念是非常重要的。本模組教材課程內涵與其他教材學習內容間的關係如圖 2。

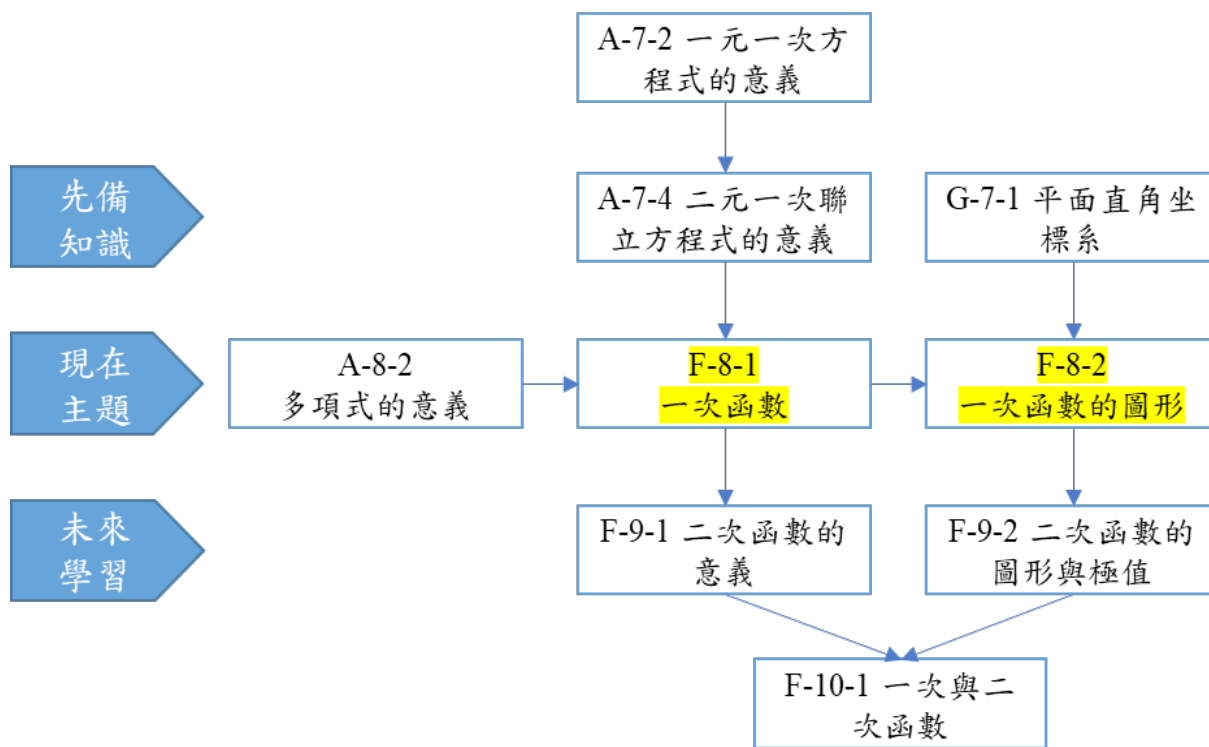


圖 2：課程內涵與其他學習內容間的關係

(二) 本補強課程模組教材學習內容分析

本模組「函數」教材學習內容，分為「函數的意義」、「常數函數與一次函數」、「常數函數在直角坐標平面上的圖形」及「一次函數在直角坐標平面上的圖形」四部分，希望學生理解函數的意義與圖形表徵後，不再畏懼面對抽象的函數概念，願意嘗試學習、樂於學習。本模組教材基本學習內容，如圖 3。

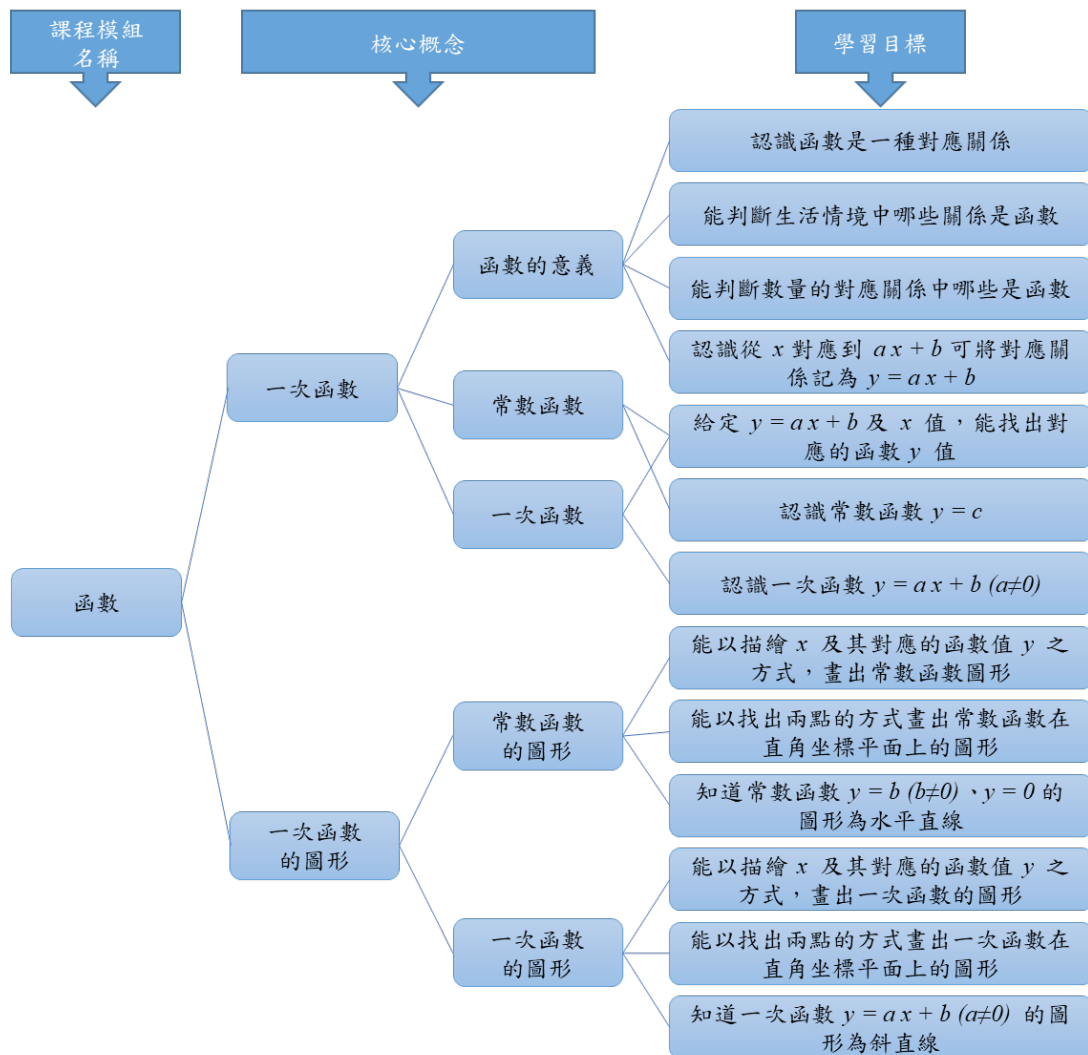


圖 3：單元主題教材內容分析

(三) 教材分析與課程架構的關係

本模組教材從理解「函數的意義」到「一次函數在直角坐標平面上的圖形」，都是環繞著函數的概念學習，函數的抽象概念，常讓學生無法理解。因此此份模組希望與函數創立者萊布尼茲當初的想法貼近，讓學生面臨到線形函數題目時，能利用掌握規則的變化就可以推導出，題目所要求的答案。最後透過遊戲，讓學生在遊戲中，透過成功的「配對」經驗，再次看清楚函數的全貌，藉由遊戲觸發學生對函數有所感覺、有所想法，讓生活情境、數值對應表、函數式、函數圖形的呈現方式能夠充分了解它們之間的關係，進而知道其中一種類而能類推其他三種。期許透過多元教學策略引導，降低學生在學習函數時的恐懼，讓學生在有感的情境中，理解函數的意義與圖形表徵，不再畏懼面對抽象的函數概念，願意嘗試學習、樂於學習。本單元教學過程中的教材內容與課程架構的關聯，如表 1。

表 1：本補強課程模組教材分析與課程架構教學關係




| 教材分析 | 課程架構 | | 教學關聯 |
|------------------|-----------------------------|--------------------|--|
| 函數的意義 | 找找看 項目間的 對應關係 | 主題 I (第 1 節課) | 透過生活情境的表徵方式，讓學生能找到兩種項目間的對應關係，並探討項目內的數值能否有清楚的對應，讓學生建立有清楚對應關係就是函數關係的概念。 |
| 一次函數的圖形 | 畫畫看 圖表結合 跟我 | 主題 II (第 2 節課) | 讓學生在圖中找對應的數值，利用數值畫函數圖形。直接在教導函數的對應（一對一、多對一）之後，將對應的數值關係轉化成直角座標系上的點，藉由點和座標系的歷程回到七年級下學期的歷程（二元一次方程式圖形）。 |
| 常數函數與 一次函數 | 寫寫看 觀察高手 圖形觀察 | 主題 III (第 3 節課) | 透過圖形，讓學生再細看每一單位的 x 變化，對應 y 的變化是不變的、穩定的、沒有規律的，將前面的數據刻劃在函數圖形時，可以看到不變的是水平線、穩定的是斜直線，順順的圖形（斜直線）找出單位變化量。 |
| 常數函數與 一次函數 | 說說看 預測專家 預測變化 | 主題 IV (第 4 節課) | 配合學生學過的等差數列，感受出項與值依循著公差穩定增加或減少，在線型函數中也可以比照辦理，等差數列解題的關鍵點在公差；類比於函數解題的關鍵點在單位的變化量，掌握好變化量就容易推導出數值。藉由單位變化量，推出起始值與寫出函數式。 |
| 一次函數與 常數函數的圖形 | 組組看 環環相扣 關係式與 圖表結合 | 主題 V (第 5 節課) | 回顧真實生活情境，推算自變量中的應變量，找出單位變化量與寫出函數式，畫出圖形。讓數值對應表、函數式、函數圖形的呈現方式能夠知一種類推兩種。 |
| 常數函數與 一次函數 | 玩玩看 函戰遊戲 函數精熟 | 主題 VI (第 6 節課) | 透過遊戲「函數接龍」、「函戰遊戲」，讓學生在遊戲中成功的「接龍」與「配對」，便可以一點一滴地再一次看清函數的全貌，讓生活情境、數值對應表、函數式、函數圖形的呈現方式能夠充分了解它們之間的關係，進而知道其中一種類而能類推其他三種。 |

教學 計畫



| | |
|---------------------------------|--|
| 模組名稱 | 函數 |
| 授課節數規劃 | 六節課 |
| <p>學習重點 (內容、概念、 能力)</p> | <p>學習內容</p> <p>F-8-1 一次函數：透過對應關係認識函數（不要出現 $f(x)$ 的抽象型式）、常數函數 ($y = c$)、一次函數 ($y = ax + b$)。</p> <p>F-8-2 一次函數的圖形：常數函數的圖形；一次函數的圖形。</p> <p>學習表現</p> <p>f-IV-1 理解常數函數和一次函數的意義，能描繪常數函數和一次函數的圖形，並能運用到日常生活的情境解決問題。</p> <p>基本學習內容</p> <p>FC-8-1-1 函數的意義。</p> <p>FC-8-1-2 常數函數與一次函數。</p> <p>FC-8-2-1 常數函數在直角坐標平面上的圖形。</p> <p>FC-8-2-2 一次函數在直角坐標平面上的圖形。</p> <p>基本學習表現</p> <p>FCP-8-1-1-1 認識函數是一種對應關係。</p> <p>FCP-8-1-1-2 能判斷生活情境中哪些關係是函數。</p> <p>FCP-8-1-1-3 能判斷數量的對應關係中哪些是函數。</p> <p>FCP-8-1-1-4 認識從 x 對應到 $ax+b$ 可將對應關係記為 $y = ax+b$。</p> <p>FCP-8-1-2-1 給定 $y=ax+b$ 及 x 值，能找出對應的函數 y 值。</p> <p>FCP-8-1-2-2 認識一次函數 $y=ax + b$ ($a \neq 0$)。</p> <p>FCP-8-1-2-3 認識常數函數 $y=c$。</p> <p>FCP-8-2-1-1 能以描繪 x 及其對應的函數值 y 之方式，畫出常數函數在直角坐標平面上的圖形。</p> <p>FCP-8-2-1-2 能以找出兩點的方式畫出常數函數在直角坐標平面上的圖形。</p> <p>FCP-8-2-1-3 知道常數函數 $y=b$ ($b \neq 0$)、$y=0$ 在直角坐標平面上的圖形為水平直線。</p> <p>FCP-8-2-2-1 能以描繪 x 及其對應的函數值 y 之方式，畫出一次函數在直角坐標平面上的圖形。</p> |

| | |
|---------------------------------|---|
| <p>學習重點 (內容、概念、 能力)</p> | <p>FCP-8-2-2-2 能以找出兩點的方式畫出一次函數在直角坐標平面上的圖形。</p> <p>FCP-8-2-2-3 知道一次函數 $y = ax + b$ ($a \neq 0$) 在直角坐標平面上的圖形為斜直線。</p> |
| <p>適用對象</p> | <p>學習本模組前，學生須學會以下學習內容</p> <p>A-7-2 一元一次方程式及其解的意義：具體情境中列出一元一次方程式。</p> <p>A-7-4 二元一次聯立方程式的意義：二元一次方程式及其解的意義；具體情境中列出二元一次方程式；二元一次聯立方程式及其解的意義；具體情境中列出二元一次聯立方程式。</p> <p>A-7-6 二元一次聯立方程式的幾何意義：$ax+by=c$ 的圖形；$y=c$ 的圖形（水平線）；$x=c$ 的圖形（鉛垂線）；二元一次聯立方程式的解只處理相交且只有一個交點的情況。</p> <p>G-7-1 平面直角坐標系：以平面直角坐標系、方位距離標定位置；平面直角坐標系及其相關術語（縱軸、橫軸、象限）。</p> |
| <p>教學連結建議</p> | <p>銜接概念：聯立方程式、線型函數、一元二次方程式、直角坐標系</p> <p>F-9-1 二次函數的意義：二次函數的意義；具體情境中列出兩量的二次函數關係。</p> <p>F-9-2 二次函數的圖形與極值：二次函數的相關名詞（對稱軸、頂點、最低點、最高點、開口向上、開口向下、最大值、最小值）；描繪 $y=ax^2$、$y=ax^2+k$、$y=(x-h)^2$、$y=a(x-h)^2+k$ 的圖形；對稱軸就是通過頂點（最高點、最低點）的鉛垂線；$y=ax^2$ 的圖形與 $y=a(x-h)^2+k$ 的圖形的平移關係；已配方好之二次函數的最大值與最小值。</p> <p>F-10-1 一次與二次函數：從方程式到 $f(x)$ 的形式轉換，一次函數圖形與 $y=mx$ 圖形的關係，數線上的分點公式與一次函數求值。用配方將二次函數化為標準式，二次函數圖形與 $y=ax^2$ 圖形的關係，情境中的應用問題。</p> |
| <p>學習目標</p> | <ol style="list-style-type: none"> 1. 能列出想要探討的項目，並能在項目之間找到正確的關聯與數值。 2. 能查看兩項目間的關係（表），並能將關係利用函數圖呈現。 3. 能從圖形當中觀察與分類出，沒有變化、穩定變化與沒有規律的變化。 4. 能感受直線方程式與 x、y 列表及直角座標系中的圖形間的關係。 5. 能找到每單位量間的變化並做預測。 6. 能夠利用變化與起始值，直接寫出函數式。 |

| | |
|-------------|---|
| <p>教學策略</p> | <div data-bbox="507 324 960 757" data-label="Diagram"> </div> <ol style="list-style-type: none"> 1. 以循序漸進的活動引導學習數學概念，讓學生培養用數學的意識。 2. 生活情境：以「提問教學」配合「生活情境融入教學」的方式進行課程。 3. 動手做：以「動手操作」配合「表格與圖像表徵」引入函數的概念。 4. 以「科技融入」配合「表格與圖像表徵」呈現函數的特性，讓數值對應表、函數式、函數圖形的呈現方式能夠知一知類推兩種。 5. 以「遊戲教學」配合「圖像與操作表徵」強化學生的概念學習。 |
| <p>教學材料</p> | <ol style="list-style-type: none"> 1. 學習單 (附件 1~ 附件 5)。 2. 卡牌 (附件 6) |
| <p>教學資源</p> | <ol style="list-style-type: none"> 1. 翰林繪圖大師 https://jmathtools.hle.com.tw/?item=content&name=coordinate  2. Desmos https://www.desmos.com/calculator?lang=zh-TW  3. 數學新世界 https://www.nhmath.com/NH-MATH/  |

主題 I：項目間的對應關係

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|--|---|
| <p>第 1 節</p> <p>一、準備活動</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 提出問題：老師如果要將班上同學分類，請問可以如何分類呢？ 2. 說明：分類的方法有很多種，如「男生女生」、「長髮短髮」…，不同的分類就會有不同的結果。 3. 接著說明接下來要學習的函數會有不同的分類表徵方式，如表格、圖形等。 <p>二、發展活動：概念活動一</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 請同學先獨立完成學習單第 1 頁項目間的對應關係【題一】～【題三】。 2. 共學：請各組小組長主持組內討論，進行核對答案，哪裡不一樣、不同見解供多元觀點，最後形成共識。 3. 互學：教師提問，隨機請同學回答。 <ol style="list-style-type: none"> (1) 當我問你星期三時，你能回答我數學課是第幾節嗎？ (2) 當我問你第三節有數學課，你能回答是星期幾嗎？ (3) 若點東坡鮮肉包，能確定要付多少元？ (4) 小華付 12 元，肯定吃了多少個饅頭？ 4. 小結：從上面三個例子中，看得是兩者物間 (A、B) 存在肯定的對應關係。當先看 A 項目再觀察 B 項目時，每一個 A 的子項目都能對應到 B 的子項目，我們說項目 B 是項目 A 的函數。 <p>三、發展活動：概念活動二</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 請同學先獨立完成學習單第 2 頁項目間的對應關係【類題】、【動動腦】、【題四】。 2. 共學：請各組小組長主持組內討論，進行核對答案，哪裡不一樣、不同見解供多元觀點，最後形成共識。 | <p>教師口頭提問。 學生口頭回答。 (依學生作答狀況增減提問數量) 班上進行異質分組，每組 4 人，分組時應注意落單的同學，給予其分組的協助。</p> <p>教學時採分組合作學習模式，鼓勵學生彼此學習、討論，以達到互教、互學，更深層學習的目的。 教師口頭提問。 學生口頭回答。</p> |

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|---|-------------------------------|
| <p>3. 互學：教師提問，隨機請同學回答。</p> <p>(1) 請問身高是名字的函數嗎？</p> <p>(2) 請問星座是生日的函數嗎？</p> <p>(3) 請問生日是星座的函數嗎？</p> <p>(4) 身高是星座的函數嗎？</p> <p>4. 小結：對於我們所探討的事物（函數），需要有討論的意義，在抓取兩個項目資料時，較少人想要探詢哪個星座的人身高比較高，所以挑選正確的兩個項目，並且知道從這個項目看那個項目，子項目間明確對應，是函數的關鍵所在。</p> <p>四、綜合活動：回顧與總結</p> <p>在兩個變數 x 與 y 的關係式中，如果給定一個 x 的值，就恰有一個 y 的值，便稱 y 是 x 的函數，也就是當 x 的值確定時（例如 $x = a$），對應的 y 值就隨之確定。</p> <p style="text-align: center;">（第一節課結束）</p> | <p>教師口頭提問。</p> <p>學生口頭回答。</p> |

主題 II：圖表跟我說

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|---|-------------------------------|
| <p style="background-color: #eee; padding: 5px;">第 2 節</p> <p>一、準備活動</p> <p>1. 提出問題：在一年級學習過利用資料畫折線圖，畫圖的技巧是先看橫坐標，並在橫坐標的正上方標示出所對應的高度量，再想想看各點間是否需要連接起來？為什麼想要將各點連起來呢？</p> <p>2. 說明：主要是想看數據間的趨勢變化，是往上、往下、或持平，而我們習慣看圖表數據，是從下到上、然後由左到右，找到所對應的資料。</p> <p>二、發展活動</p> <p>1. 概念複習：老師引導學生完成【題一】的畫圖與問題，透過表格轉化成圖形，讓我們藉由函數圖表的對應關係，尋找到所應的資料。</p> | <p>教師口頭提問。</p> <p>學生口頭回答。</p> |

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|--|---|
| <p>(1) 標示出來的各個點可以連接起來嗎？</p> <p>(2) 連起來的圖形是一條什麼線。(橫、直、曲)</p> <p>(3) 請問彈簧長度 10cm，重物為多少公克？</p> <p>(4) 請問在彈性限度內，彈簧掛 45g 的物品長度為多少公分？</p> <p>2. 老師引導學生完成【題二】將圖轉成表格的問題。</p> <p>3. 請同學先獨立完成學習單第 4 頁練習題，圖表跟我說。</p> <p>4. 共學：請各組小組長主持組內討論，進行核對答案，哪裡不一樣、不同見解供多元觀點，最後形成共識。</p> <p>5. 互學：教師提問，隨機請同學回答。</p> <p>(1) 教師提問：在【練習二】的表格中，有對到點的數值只有 7/1 日的 230 和 7/6 日的 220，我們能填入 7/2 為 228 是因為什麼原因呢？因為這一個因素，我們可以說每一天下降多少公尺？抓住這一個關鍵可以用來估算其他的值。</p> <p>(2) 教師提問：在【練習二】的表格中，請問時間 25 分時，溫度為何？</p> <p>三、綜合活動：回顧與總結</p> <p>在上面的表格當中，不知道你有沒有發覺表格當中的不一樣。在直角坐標平面，目的想用這種平面重建圖樣；其橫座標和縱座標單位要相等，形狀才不會變形。</p> <p>(第二節課結束)</p> | <p>教師口頭提問。 學生口頭回答。 可以進行分組搶答。</p> <p>教師口頭提問。 學生口頭回答。 可以進行分組搶答。</p> |

主題 III：觀察高手

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|--|----------------------------|
| <p>第 3 節</p> <p>一、準備活動</p> <p>1. 提出問題：下列圖表當中，那些圖形所呈現的是直線呢？</p> | <p>教師口頭提問。 學生口頭回答。</p> |

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|--|---|
| <p>二、發展活動</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 概念複習：老師引導學生完成第二題圖形轉化成表格的問題，讓我們藉由函數圖表的對應關係，尋找到所應的資料。 2. 教師提問 <ol style="list-style-type: none"> (1) 每往右邊 (X) 位移 (增加) 1 單位，對應座標 Y 往上 (增加) 多少個單位？ (2) 每往右邊 (X) 位移 (增加) $1/2$ 單位，對應座標 Y 往上 (增加) 多少個單位？ 3. 請同學先獨立完成學習單觀察高手第 6~7 頁。 4. 共學：請各組小組長主持組內討論，進行核對答案，哪裡不一樣、不同見解供多元觀點，最後形成共識。 5. 互學：教師提問，隨機請同學回答。 <ol style="list-style-type: none"> (1) 每往右邊 (X) 位移 (增加) 1 單位，對應座標 Y 往上 (增加) 多少個單位？ (2) 每往右邊 (X) 位移 (增加) $1/2$ 單位，對應座標 Y 往上 (增加) 多少個單位？ (3) 第六題每一小題的單位變化量？ <p>三、綜合活動：回顧與總結</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 由右向左如果是上升，當 X 座標增加時，y 座標的值會有何變化？反之由右向左如果是在_____，當 X 座標增加時，y 座標的值在減少。(上升 y 在加、下降 y 在減) 2. 順順的感覺是，在斜直線當中取 X 座標相同間隔時，其 y 座標的變化量相同。 3. X 間隔取 1，y(增加、減少) 了多少個單位，就是函數中的單位變化量。 <p style="text-align: center;">(第三節課結束)</p> | <p>教師口頭提問。 學生口頭回答。 可以進行分組搶答。</p> <p>利用指定組別回答與搶答方式進行。老師提問，指定組別回答，該組推派一位同學回答，如果已經回答過老師提問者即不能再答，答對則該組獲得一分，答錯則換別組；另外也採用搶答模式，最快舉手的人回答，答對則該組獲得一分，藉此了解孩子們學習的效果。</p> <p>可以進行分組搶答。</p> |

主題IV：我是預測專家

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|--|---|
| <p>第 4 節</p> <p>一、準備活動</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 教師提問：常常我們到農產品的產地旅遊，可以看到路旁有很多的果農擺攤，希望遊客可以購買當作伴手禮。阿達芒果攤去年與今年皆出產品質差異不大的芒果，單價因為月份的差異而有所不同，若總價與重量成線型函數，請觀察這四個表格，聰明的同學請問哪時候芒果的價格最貴？ 2. 教師提問：哪時候沒有芒果也需要費用？為什麼？ 3. 說明：透過表格的引導，讓學生算出單位變化量與起始值。 <p>二、發展活動</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 每年的六月份是大學畢業的季節，所以每一年的七、八月份是社會新鮮人進入職場的日子，小 A、小 B、小 C 和小 E 是四個同一個系所畢業的同學並且同時間找到工作，若每人的淨收入四人不相同，但同一人每幾個月間都一樣，以下是他們存簿當中的金額（以 8 月底當第 0 月、9 月當第 1 個月以此類推），老師先用問答方式帶寫小 A 與小 B 的表格與函數式，其餘小 C 與小 D 讓學生練習。 2. 教師提問 <ol style="list-style-type: none"> (1) 誰每月淨收入最多？誰每月淨收入最少？ (2) 誰在成為社會新鮮人時是有積蓄的？ (3) 誰在成為社會新鮮人時是有貸款的？ 3. 請同學先獨立完成學習單我是預測專家第 9~10 頁。 4. 共學：請各組小組長主持組內討論，進行核對答案，哪裡不一樣、不同見解供多元觀點，最後形成共識。 5. 互學：教師提問，隨機請同學回答。 | <p>教師口頭提問。 學生口頭回答。</p> <p>利用指定組別回答與搶答方式進行。老師提問，指定組別回答，該組推派一位同學回答，如果已經回答過老師提問者即不能再答，答對則該組獲得一分，答錯則換別組；另外也採用搶答模式，最快舉手的人回答，答對則該組獲得一分，藉此了解孩子們學習的效果。</p> <p>教師口頭提問。 學生口頭回答。</p> <p>可以進行分組搶答</p> |

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|--|--------------------------------|
| <p>(1) x 的變化量是 1 時，y 的變化量為多少？其函數式是什麼？</p> <p>(2) 在一次函數中變化量為 2 且起始值為 5，其函數式是什麼？</p> <p>(3) 誰在成為社會新鮮人時是有貸款？</p> <p>(4) 在一次函數中變化量為 $\frac{1}{2}$ 且起始值為 -3，其函數式為是什麼？</p> <p>三、綜合活動：回顧與總結</p> <p>1. 想要寫出函數式有兩個數值是重要的，一個是單位變化量，另外一個 $x=0$ 時 y 所對應到的值（可想成起始值），若單位變化量的數值是 a、所對應到的起始值為 k，則函數式可寫成為 $y=ax+k$。</p> <p>2. 寫出一次函數式（線型函數）的方式：圈出題目當中的單位變化量，且在表格或情境當中找到起始值（做記號），整合出變化量與起始值，寫出上方题目的函數式。</p> <p style="text-align: center;">（第四節課結束）</p> | <p>教師也可以用提問方式加上分組搶答的模式來進行。</p> |

主題 V：環環相扣

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|---|----------------------------|
| <p>第 5 節</p> <p>一、準備活動</p> <p>1. 提出問題：請問 A 水杯每一分鐘變化為上升還是下降幾度呢？這杯水正處於加熱、冷卻、恆溫哪一種狀態呢？</p> <p>2. 說明：透過表格的資訊，我們可以發現隨著時間增加一分鐘，溫度下降 5 度。</p> <p>二、發展活動一：概念活動一</p> <p>1. 請同學先獨立完成學習單環環相扣第 11~12 頁。</p> <p>2. 共學：請各組小組長主持組內討論，進行核對答案，哪裡不一樣、不同見解供多元觀點，最後形成共識。</p> | <p>教師口頭提問。 學生口頭回答。</p> |

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|---|--|
| <p>3. 互學：教師提問，隨機請同學回答。</p> <p>(1) 請問 B 水杯每一分鐘變化為上升還是下降幾度呢？這杯水正處於加熱、冷卻、恆溫哪一種狀態呢？</p> <p>(2) 請問 C 水杯每一分鐘變化為上升還是下降幾度呢？這杯水正處於加熱、冷卻、恆溫哪一種狀態呢？</p> <p>(3) A 圖形的直線是條(上升、水平、下降)的直線。</p> <p>(4) B 圖形的直線是條(上升、水平、下降)的直線。</p> <p>(5) C 圖形的直線是條(上升、水平、下降)的直線。</p> <p>三、概念活動二：</p> <p>1. 請同學先獨立完成學習單環環相扣第 13~14 頁。</p> <p>2. 共學：請各組小組長主持組內討論，進行核對答案，哪裡不一樣、不同見解供多元觀點，最後形成共識。</p> <p>3. 互學：教師提問，隨機請同學回答。</p> <p>(1) 【A 函數表格】單位變化量為多少？函數式多少呢？</p> <p>(2) 【B 函數表格】單位變化量為多少？函數式多少呢？</p> <p>(3) 【C 函數表格】單位變化量為多少？函數式多少呢？</p> <p>四、綜合活動：回顧與總結</p> <p>1. 我們可以從上面得到一些的結論，溫度持平的是一條水平線，溫度穩定增加是一條左下右上的上升直線，溫度穩定減少是一條左高右低的下降直線。</p> <p>2. 當變化相同時，直線在畫時傾斜的感覺一樣，在寫方程式 $y = \frac{1}{2}x$ 與 $y = \frac{1}{2}x - 3$ 和 $y = \frac{1}{2}x + 2$，在函數式後面的常數項，就是函數式在 $x=0$ 時 y 的函數值。常數項的數值可以在圖形中直線與 y 軸的交點，可以發覺(常數值正，交點在上方、常數值 0，交點在原點、常數值負，交點在下方)，另外在表格中也可以推算出來。</p> <p style="text-align: center;">(第五節課結束)</p> | <p>利用指定組別回答與搶答方式進行。老師提問，指定組別回答，該組推派一位同學回答，如果已經回答過老師提問者即不能再答，答對則該組獲得一分，答錯則換別組；另外也採用搶答模式，最快舉手的人回答，答對則該組獲得一分，藉此了解孩子們學習的效果。</p> <p>可以進行分組搶答。</p> |

主題VI：函戰遊戲

教學活動流程設計

一、函數接龍

- (一) 材料：函數式卡牌 12 張、撲克牌一副。
- (二) 分組：每組 2 ~ 4 人。
- (三) 規則：
1. 每組人數相同，若人數不足時，自己選擇一位組員多輪一次。
 2. 將 12 張函數式卡牌放在 12 張學生的桌子上，牌面朝上，12 位學生入座，入座後不可以調換卡牌，但是學生可以針對函數式的難易度換座位，即人動牌不動，學生須自備筆與紙。
 3. 老師抽取一張撲克牌當起始值，讓每組的最後一位學生知道，學生知道後將 x 用此數值帶入函數式，算出函數值。
 4. 將答案傳給前面一位組員，依此方式，每一位組員都是以後面組員的答案當作 x 值帶入自己的函數式，計算出答案後再往前傳。
 5. 第一位組員算出答案後，起身將答案交給老師。
 6. 最快將正確答案交給老師的組別獲得 3 分，第二名得 2 分、第三名加得 1 分。
 7. 活動進行三輪，統計積分。

卡牌配置圖

| | | |
|--|----|--|
| | 講桌 | |
| | | |
| | | |
| | | |

二、函戰遊戲

- (一) 材料：有函數式卡牌、函數值卡牌、數值對應表卡牌、函數圖形卡牌各 13 張，共 52 張。
- (二) 分組：每組 2 ~ 4 人。

教學注意事項

班上進行異質分組，每組 4 人，分組時應注意落單的同學，給予其分組的協助。

班上進行異質分組，每組 4 人，分組時應注意落單的同學，給予其分組的協助。

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|--|--------|
| <p>(三) 規則：</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 將 52 張牌充分洗牌，每位玩家發 6 張當手牌，剩餘的牌堆放置於中央，並且翻開 4 張牌當公牌分別置於 4 個角落。 2. 猜拳贏的先出牌，按照順時針輪流出牌，玩家需要從手上的牌與場上的公牌進行配對，如函數式卡牌是 $y=3x+1$，函數值卡牌是 $x=0$，函數值是 1，這兩張牌即完成配對，亦即函數式卡牌、函數值卡牌、數值對應表卡牌、函數圖形卡牌有互相符合即可以形成配對。 3. 如果自己手上的牌沒辦法與桌面上的公牌配對時，則需從手牌中丟任一張牌到桌面上當公牌用，再從牌面朝下的牌堆中補一張牌成為自己的手牌，直到無牌可以補為止，手上的牌維持 6 張。 4. 如果從牌堆中抽回的手牌，恰好可以跟公牌進行配對，則可吃牌。 5. 所有玩家依序進行配對活動。 6. 遊戲結束時機：所有玩家皆出完手牌或無牌可出。 7. 遊戲結束後每位玩家計算總分，每組完成配對牌卡的牌一張可得 1 分。 8. 活動進行兩輪，統計積分。 <p>三、個人結算函數接龍與函戰遊戲總積分，全班取前三名給予獎勵。</p> <p>(第六節課結束)</p> | |

| | |
|----|--|
| 附件 | <ul style="list-style-type: none"> · 附件 1~5：學習單一 ~ 五。 · 附件 6：函戰遊戲卡牌 (搭配主題 VI)。 · 附件 7：前測。 · 附件 8：後測。 |
|----|--|



附件

請至「國民小學及國民中學學生學習扶助資源平臺」下載

評量 工具



本補強課程模組所使用的評量工具包含有：

1. 理解學生概念學習狀況的課堂口頭提問；
2. 分析學生學習前、後學習效果的前、後測；
3. 測驗學生主題單元概念的運算熟悉程度的附件：學習單。

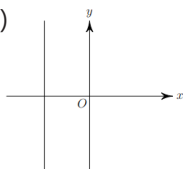
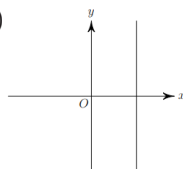
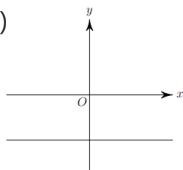
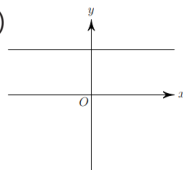
一、口頭提問

| 提問位置 主題 - 節 - 標題 - 提問順序 | 問題 |
|----------------------------|--|
| 主題 I - 一 -1-1 | 老師如果要將班上同學分類，請問可以如何分類呢？ |
| 主題 I - 二 -3-1 | (1) 當我問你星期三時，你能回答我數學課是第幾節嗎？ (2) 當我問你第三節有數學課，你能回答是星期幾嗎？ (3) 若點東坡鮮肉包，能確定要付多少元？ (4) 小華付 12 元，肯定吃了多少個饅頭？ |
| 主題 I - 三 -3-1 | (1) 請問身高是名字的函數嗎？ (2) 請問星座是生日的函數嗎？ (3) 請問生日是星座的函數嗎？ (4) 身高是星座的函數嗎？ |
| 主題 II - 一 -1-1 | 在一年級學習過利用資料畫折線圖，畫圖的技巧是先看橫坐標，並在橫坐標的正上方標示出所對應的高度量，在想想看各點間是否需要連接起來。為什麼想要將各點連起來呢？ |
| 主題 II - 二 -1-1 | (1) 標示出來的各個點可以連接起來嗎？ (2) 連起來的圖形是一條____線。(橫、直、曲) (3) 請問彈簧長度 10cm，重物為多少公克？ (4) 請問在彈性限度內，彈簧掛 45g 的物品長度為多少公分？ |
| 主題 II - 二 -1-2 | 在上表中，有對到點的數值只有 7/1 日的 230 和 7/6 日的 220，我們能填入 7/2 為 228 是因為直線_____。因為這一個因素，我們可以說每一天下降__公尺，抓住這一個關鍵可以用來估算其他的值。 |
| 主題 III - 一 -1-1 | 下列圖表當中，那些圖形所呈現的是直線呢？ |
| 主題 III - 二 -2-1 | (1) 每往右邊(X)位移(增加) 1 單位，對應座標 Y 往上(增加)多少個單位？ (2) 每往右邊(X)位移(增加) 1/2 單位，對應座標 Y 往上(增加)多少個單位？ |

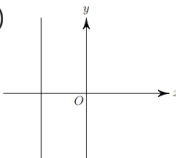
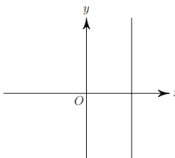
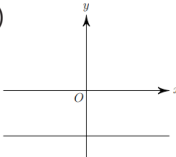
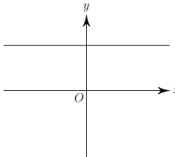
| 提問位置 主題 - 節 - 標題 - 提問順序 | 問題 |
|----------------------------|---|
| 主題 III - 三 -1-1 | 由右向左如果是上升，當 X 座標增加時，y 座標的值會有何變化？反之由右向左如果是在 $_$ ，當 X 座標增加時，y 座標的值會 $_$ 。(上升 y 在加、下降 y 在減) |
| 主題 IV - 一 -1-1 | 觀察這四個表格，聰明的同學請問哪時候芒果的價格最貴？ |
| 主題 IV - 一 -1-2 | 哪時候沒有芒果也需要費用？為什麼？ |
| 主題 IV - 二 -2-1 | (1) 誰每月淨收入最多？誰每月淨收入最少？ (2) 誰在成為社會新鮮人時是有積蓄的？ (3) 誰在成為社會新鮮人時是有貸款的？ |
| 主題 V - 一 -1-1 | 請問 A 水杯每一分鐘變化為上升還是下降幾度呢？這杯水正處於加熱、冷卻、恆溫哪一種狀態呢？ |
| 主題 V - 二 -3-1 | (1) 請問 B 水杯每一分鐘變化為上升還是下降幾度呢？這杯水正處於加熱、冷卻、恆溫哪一種狀態呢？ (2) 請問 C 水杯每一分鐘變化為上升還是下降幾度呢？這杯水正處於加熱、冷卻、恆溫哪一種狀態呢？ (3) A 圖形的直線是條 (上升、水平、下降) 的直線。 (4) B 圖形的直線是條 (上升、水平、下降) 的直線。 C 圖形的直線是條 (上升、水平、下降) 的直線。 |
| 主題 V - 四 -3-1 | (1) 【A 函數表格】單位變化量為多少？函數式多少呢？ (2) 【B 函數表格】單位變化量為多少？函數式多少呢？ (3) 【C 函數表格】單位變化量為多少？函數式多少呢？ |

二、前測、後測

1. 前測

| 試題 | 測驗題目 | 建議評量時間 |
|--------|--|--------|
| | 測驗核心概念 | |
| 第 1 大題 | 1. 下列何者可能為常數函數 $y = 3$ 的圖形？ (A)  (B)  (C)  (D)  (110 年篩選測驗 2) | 進行教學前 |
| | FC-8-2-1 ：常數函數在直角坐標平面上的圖形 | |
| 第 2 大題 | 2. 已知一次函數 $y = -4x$ 。當 $x = 0$ 時， $y = ?$ (A) -40 (B) -4 (C) 0 (D) 4 (110 年篩選測驗 18) | |
| | FC-8-1-2 ：常數函數與一次函數 | |
| 第 3 大題 | 3. 已知一次函數 $y = 2x - 5$ ，在 $x = a$ 時的函數值為 1，求 a 的值為何？ (A) 1 (B) 0 (C) 2 (D) 3 (105 年篩選測驗 18) | |
| | FC-8-1-2 ：常數函數與一次函數 | |
| 第 4 大題 | 4. 若有一函數 $y = 2x + 5$ ，當 $x = 2$ 時，函數值 $y = ?$ (110 年成長測驗 2 類題) | |
| | FC-8-1-2 ：常數函數與一次函數 | |
| 第 5 大題 | 5. 請畫出一次函數 $y = x - 2$ 的圖形 (110 年成長測驗 23 類題) | |
| | FC-8-2-2 ：一次函數在直角坐標平面上的圖形 | |

2. 後測

| 試題 | 測驗題目 | 建議評量時間 |
|--------|--|-----------------|
| | 測驗核心概念 | |
| 第 1 大題 | 1. 下列何者可能為常數函數 $y = -3$ 的圖形？ (A)  (B)  (C)  (D)  (110 年篩選測驗 2 類題) | 可於第 4 節 課後實施 |
| | FC-8-2-1 ：常數函數在直角坐標平面上的圖形 | |
| 第 2 大題 | 1. 已知一次函數 $y = -6x$ 。當 $x = 0$ 時， $y = ?$ (A) 6 (B) 0 (C) -6 (D) -60 (110 年篩選測驗 18 類題) | 可於第 5 節 課後實施 |
| | FC-8-1-2 ：常數函數與一次函數 | |
| 第 3 大題 | 3. 已知一次函數 $y = 2x - 3$ ，在 $x = a$ 時的函數值為 1，求 a 的值為何？ (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2 (105 年篩選測驗 18 類題) | 可於第 5 節 課後實施 |
| | FC-8-1-2 ：常數函數與一次函數 | |
| 第 4 大題 | 4. 若有一函數 $y = 2x + 1$ ，當 $x = 3$ 時，函數值 $y = ?$ (110 年成長測驗 2 類題) | 可於第 5 節 課後實施 |
| | FC-8-1-2 ：常數函數與一次函數 | |
| 第 5 大題 | 5. 請畫出一次函數 $y = 2x$ 的圖形 (110 年成長測驗 23 類題) | 可於第 4 節 課後實施 |
| | FC-8-2-2 ：一次函數在直角坐標平面上的圖形 | |

教學反思 應用建議



本模組選擇臺中市某一國中進行試行，試行時間為學期中第九節時段，幫學習成績低落的八年級學生進行函數的觀念建立。這一次從對應關係出發，以此介紹出函數關係。再細看每一單位的 x 變化，對應 y 的變化是不變的、穩定的、沒有規律的，將函數的數據刻劃在函數圖形時，可以看到不變的是水平線、穩定的是斜直線，函數解題的關鍵點在單位的變化量，掌握好變化量就容易推導出數值。最後教導找出起始值加上單位變化量，就可以寫出函數式，再加上玩遊戲練精熟，希望透過操作的方式，對學生的學習有助益。因為疫情的影響，這次的前測及第 1 節到第 3 節課是實體上課，後測及第 4 節到第 6 節課是線上教學與線上測驗，第六節課精熟練習的遊戲屬於實體課程，故此次無法進行。

一、學生表現

(一) 前測成績表現

對象為八位五年級學習扶助學生個案，此為診斷性試題(共 5 題，詳見前測卷)，主要目的為了解學生對於學習重點的掌握程度，以便於進行學習扶助教學時，隨學生學習情況調整教學內容。

表 2 前測成績表現

| 基本學習內容 | 學生 1 | 學生 2 | 學生 3 | 學生 4 | 學生 5 | 正確率 (%) |
|----------------------------|------|------|------|------|------|---------|
| 1.FC-8-2-1 常數函數在直角坐標平面上的圖形 | X | X | X | O | O | 40 |
| 2.FC-8-1-2 常數函數與一次函數 | O | X | O | O | X | 60 |
| 3.FC-8-1-2 常數函數與一次函數 | O | O | O | O | O | 100 |
| 4.FC-8-1-2 常數函數與一次函數 | X | O | X | O | O | 60 |
| 5.FC-8-2-2 一次函數在直角坐標平面上的圖形 | X | O | X | X | X | 20 |
| 答對比率 (%) | 40 | 60 | 40 | 80 | 60 | 40 |

(二) 後測

表 3 後測成績表現

| 基本學習內容 | 學生 1 | 學生 2 | 學生 3 | 學生 4 | 學生 5 | 正確率 (%) |
|----------------------------|------|------|------|------|------|---------|
| 1.FC-8-2-1 常數函數在直角坐標平面上的圖形 | X | O | X | O | O | 60 |
| 2.FC-8-1-2 常數函數與一次函數 | O | O | O | O | X | 80 |
| 3.FC-8-1-2 常數函數與一次函數 | O | O | X | O | O | 80 |
| 4.FC-8-1-2 常數函數與一次函數 | X | O | O | O | O | 80 |
| 5.FC-8-2-2 一次函數在直角坐標平面上的圖形 | X | O | X | X | X | 20 |
| 答對比率 (%) | 40 | 100 | 40 | 80 | 80 | 45.71 |

(三) 學生前、後測結果比較分析

- (1) 「常數函數在直角坐標平面上的圖形」部分，學生前測答對率 40%，後測時答對率 60%，有顯著的進步。藉由多元教學策略的教學活動，讓學生不畏懼數學，同時給予學生足夠思考時間，學生就能理解「函數圖形」。
- (2) 「常數函數與一次函數」部分，學生前測平均答對率 73%，後測時答對率 80%，有些許的進步。簡易的「函數值計算」，大部分的學生都能正確計算。
- (3) 「一次函數在直角坐標平面上的圖形」部分，學生前測答對率 20%，後測時答對率 20%，從學生的作答反應顯示，有兩個學生是沒有作答，無法得知學生是不會還是不願意作答。
- (4) 此次的前測是採用實體紙本測驗，後測因為疫情的因素，改採線上測驗，是否影響學生作答的意願、專注度與作答反應，未來可以再進一步探討。

三、教學反思與建議

(一) 項目間的對應關係

1. 學習單是從生活出發，讓學生觀看課表來填空格，讓學生知道口罩的單價來思考單價與和數間的關係，因為內容與生活有關且容易回答，因此學生比較願意跟著老師的脈絡一起來學習函數。
2. 學習單的類題是蒐集班上學生的身高、生日、星座等資料，引發全班熱烈討論，藉由對應關係來探討函數關係。

(二) 常數函數與一次函數

1. 藉由圖表跟我說讓學生練習將表格畫成圖形，藉由畫圖過程，感受函數的變化關係。然而，從表格轉化成圖形，對部分學生而言是一種挑戰，因此，這一部分是採用老師先講解，學生在進行抄寫的模式。其中練習二悄悄地將函數是變化關係

- 融入在題目中，讓學生先有一些變化的感受，進一步讓學生掌握單位的變化量。
2. 在觀察高手這一個主題中，先讓學生藉由觀察圖形轉成表格，再讓學生細看每一單位的 X 變化，對應 Y 的變化是不變的、穩定的、沒有規律的，將前面的數據刻劃在函數圖形時，可以看到不變的是水平線、穩定的是斜直線，順順的圖形(斜直線)找出單位變化量。學習單的設計，一開始藉由學生學過了等差數列，感受出項與值依循著公差穩定增加或減少，掌握等差數列的關鍵點在公差，而函數的關鍵點在單位的變化量，掌握好變化量就容易推導出數值。因為學習單的設計是採用鷹架填充格的方式，而且考量學生的計算能力，盡量是以整數型態來呈現單位變化量，所以學生在學習上比較沒有負擔。
 3. 在我是預測專家這個主題中，藉由生活情境，透過表格導入起始值與單位變化量，進而寫出函數式，因為有表格的輔助，學生比較容易學習，而學生比較會卡關的地方就是表格中間有一個空格或變化量是負數時，需要老師的引導與提醒。

(三) 情境、表格、圖形與函數式之間的關係

1. 因為受到疫情影響，學生的學習由實體教室變為線上學習，操作型的教學活動函戰遊戲便無法實施，如果有機會可以實施，進一步增進學生的精熟學習，相信學生的學習成效會更好。
2. 環環相扣這一個主題因為疫情影響，改為線上教學，教師透過溝通平臺 Classroom、Google meet、點名擴充等與孩子進行溝通，並透過 Jamboard、計時器、選號器等資源與孩子進行互動，搭配課堂點數的累計，投其所好，讓孩子的學動機得以延續。

| | | | | | |
|--|---|---|---|---|---|
| 題目： | 偉 | 銓 | 林 | 軒 | 勛 |
| 課堂表現：成功 得來不易，願你 再接再厲，努力 達到自己的目標 吧! | 1 | 0 | 0 | 0 | 3 |
| | | | | | |
| | | | | | |

圖 1：線上學習表現統計表

教師善用數位科技，增加與孩子互動的機會，如透過 Jamboard 與問答模式進行共編，教師可以立即知道孩子的學習表現，並給予回饋，亦運用 Classroom 的課堂功能，為孩子建立完整的學習歷程記錄。

(四) 建議

1. 質性問卷：透過找對應關係介紹函數關係，藉由生活情境學習到函數表徵的概念，再細看每一單位的 x 變化，對應 y 的變化是不變的、穩定的、沒有規律的，並將前面的數據刻劃在函數圖形，進而發現找到起始值加上單位變化量，就可以寫出函數式。具體的操作雖然較花時間，但整個學習過程，學生願意跟隨教師的引導，嘗試動筆運算，想出策略解決問題。本模組除了前測、後測量化資料之外，建議可以增加問卷質性的描述。
2. 科技輔助：將函數關係轉成表格，最後畫成圖形，對部分學生而言是一種挑戰，其實可以透過科技輔助教學，搭配生用平板，讓學生藉由 Desmos 平臺，將數學式輸入左邊的空格中，在輸入的過程可以將現有的數學式轉成表格中，函數圖形馬上會顯現在右側的繪圖區。例如直接輸入 $y = 2x + 3$ ，繪圖區會出現函數圖形；如果想要動態展現函數圖形，可以在方程式中使用變數，例如： $y = mx + b$ 。當你輸入變數的時候，系統會提示你要不要產生「數值滑桿」，利用這些數值滑桿，可以動態改變這些數值，這時直線的位置也會跟著改變。藉由圖形的呈現，讓學生更加清楚起始值與單位變化量的改變，對應圖形是如何改變的。除此之外，翰林繪圖大師也是一個可以運用的平臺，學生可以透過輸入函數關係式，就可以看到函數的圖形，學生可以藉由固定單位變化量，改變初始值來看到函數圖形的變化；也以藉由固定起始值，改變單位變化量看到函數圖形的變化。
3. 調整測驗：此次的前測是採用實體紙本測驗，後測是線上測驗，可以將前後測紙筆測驗改為運用線上評量工具 Quizizz 來進行，透過競賽模式，題目亂數、選項亂數、各題限時，具有防弊效果，每個人進行所有題目完成後才知道分數，得分以百分比呈現，方便老師做試題分析。如果在前測後測時，增加孩子計算過程的記錄，更可以得知孩子的想法，更有助於教師教學的進行與調整。

參考文獻

傅海倫、韓群 (2004)。數學史話：函數概念的演變。載於香港數學教育學會出版，數學教育，19，95-97。

國中數學領域 補強課程模組 6

八年級

數列、等差數列與等差級數

— 臺南市創思與教學研發中心 蘇恭弘研究教師

— 臺南市立永康國民中學 巫佳錚教師

設計
理念

十二年國民基本教育課程綱要總綱，本於全人教育的精神，以「自發」、「互動」及「共好」為理念，以「成就每一個孩子—適性揚才、終身學習」為願景，在數學領域課程綱為呼應《總綱》的理念與願景，提出了五個觀念、六個課程目標，其中強調數學是一種實用的規律科學，培養學生能力好奇心及觀察規律、演算、抽象、推論、溝通和數學表述等各項能力。

學者曹亮吉（2003）認為日常生活中的事物莫不隱藏著數與形，尋求數與形的規律及推理過程乃成為學習數學的主要目的，例如：火車或電影院的座位表、日曆上的數字、春夏秋冬四季的變化、地面地磚的圖形……等均為生活中唾手可得的教材，學習者從察覺情境中的問題，將之轉化為真正的數學數字問題，歸納出規則得以求解數學問題，還能夠回到實際的情境，確認解題的結果是否能回答原先的問題，讓數學知識能夠解決生活的問題，讓數學變得具體有用，對學生來說更為有意義。因此八年級的數列、等差數列與等差級數這個單元就能彰顯上述總綱與領綱欲達成的目標。

教學者在教學現場中發現學生在學習等差數列與等差級數時常會受困在單純的背解法，特別是在求等差數列的第 n 項公式或是等差級數求和時，究其根源大多來自於學生對於等差數列意義並沒有清楚的理解或只是反覆的練習，只學會了模仿教師的作法與透過類似的解決經驗來進行解題，當遇到情境改變或不理解題目敘述時，就會因項數或公差的計算錯誤，影響了解題，因此學生的學習成效不彰。

陳威任（2001）的研究提及八年級學生在數列與等差級數的錯誤類型有以下幾類：

- (一) 無法正確且有效的觀察出其規律。
- (二) 臆測出錯誤的規律。
- (三) 能找出正確的規律，卻無法使用公式求解。
- (四) 能找出正確的規律，但使用錯誤的公式做計算。
- (五) 粗心大意或是計算錯誤。
- (六) 誤解題意。
- (七) 看不懂題目。

究其產生錯誤的原因不同的學者有不同的看法，余庭璋（2007）認為學生在數形關於與等差數列單元中常犯之原因可分為下十種錯誤原因：

- (一) 數列、圖形的分類及觀察能力不足。
- (二) 無法將觀察出的數列、圖形規律轉化成數學語言。
- (三) 受本單元所學習的新經驗影響，做出錯誤推論。
- (四) 公式的不熟練。
- (五) 錯誤的使用公式或公式的混合誤用。
- (六) 缺乏將待解的問題轉換成數學問題的能力。
- (七) 計算能力不足或計算上的粗心大意。
- (八) 解題的細心度與耐心度不夠。
- (九) 不清楚題目設計或文字敘述而產生錯誤。
- (十) 新習得的知識、概念不純熟。

透過以上學者的研究討論瞭解了學生在學習數列、等差數列與等差級數容易出現的錯誤類型與原因，本補強課適性課程模組專注在解決「無法將觀察出的數列、圖形規律轉化成數學語言」、「錯誤的使用公式」這兩個錯誤原因上，採用「生活情境」、「遊戲型態」與「動手操作」的概念，希望學生在操作過程中，使上述的錯誤迷思獲得澄清而非以練習題目來達到熟練的目的。本模組教學設計先以「生活情境」讓學生瞭解數列的意義，建立數列可能有規律，也可以沒有規律，而我們希望處理的是有規律的情況，以「威力彩」、「零用錢」及「月曆」切入，讓學生能夠具象地看到我們討論的數列，可能會出現沒有規律、也可能會有規律的情況；接下來，利用紙牌的遊戲，讓學生在遊戲中建立等差的概念，並沒有如課本的教學脈絡般，先教導學生首項、公差、第 n 項…的觀念後再進行練習，而是希冀藉由學生進行紙牌遊戲的過程，幫助他們自己建立等差數列的觀念：由某一數開始，以某一種規律所產生的數列；同時可形成等差數列中挑選任一個數字，在公差不變的條件下，這樣的新數列也是會是等差數列，這個部份是本課程的一大嘗試。

而在「等差級數」單元，則不採用利用告訴學生有關高斯求和公式的故事，來進行等差級數求和公式的說明，而是設計利用可組合連接方塊的動手操作，讓學生在探索中形成「當我們可以將此數列中所有的數字，透過有形的連接方塊進行排列後，可以重新組合成一個長方形或正方形時，能幫助我們更快速地計算出它的總數」，奠基於視覺可見、自行操作的基礎下，再透過代數的方法驗證，希冀學生能由具體到抽象的學習，在不需強記死背的氛圍下提高學習興趣，感受並體會到學懂數學知識的快樂。

課程 架構

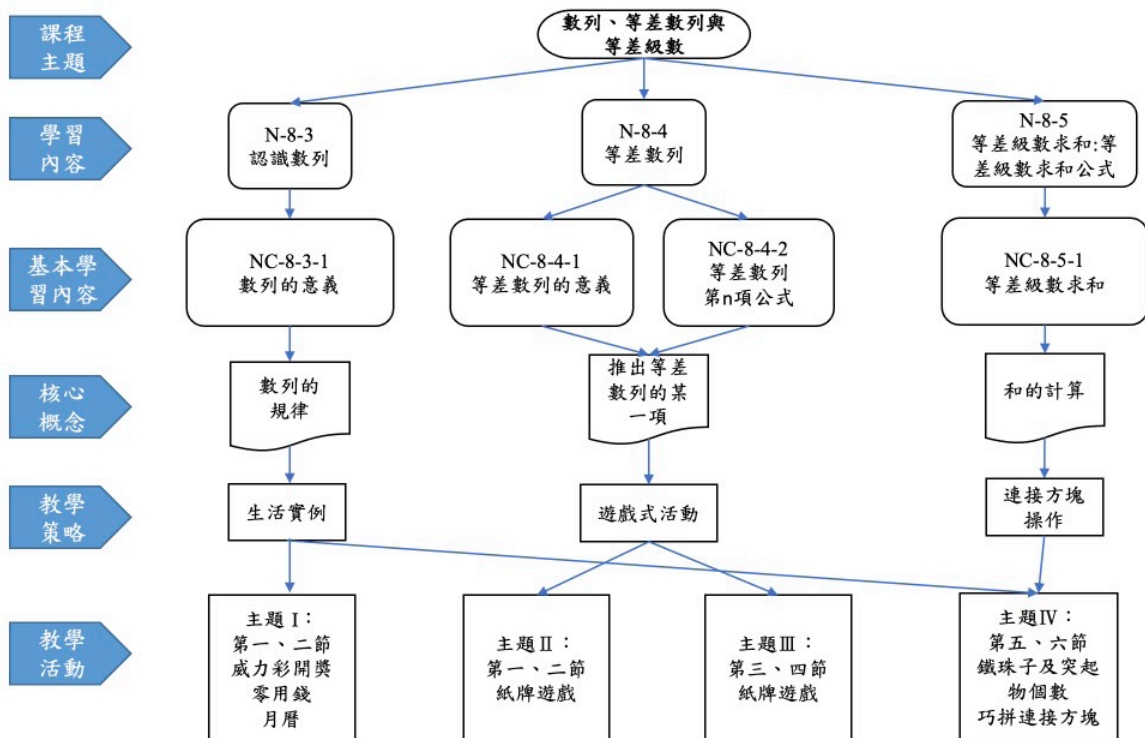


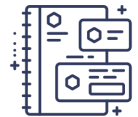
圖 1 課程架構圖

(一) 主題 I (第 1~2 節課): 利用生活中的例子，如「威力彩」、「零用錢」及「月曆」切入，讓學生能夠具象地討論的數列，並瞭解數列可能有規律，也可能沒有規律；接下來利用學習單一 (附件 1) 及自製的數字牌卡 (附件 6)，四人一組，每人拿 15 張，並依抽到的題目 (附件 7)，例如「開始的號碼：由 3 號開始，每次都 + 2」，所以這個題目牌卡的意思是若學生手上的牌碼的號碼是 3, 5, 7, 9, ..., 57, 59，都能將出牌。目的是讓學生透過遊戲的不同的關卡，建立等差

數列就是由首項開始，以相同公差所形成的數列。

- (二) 主題 II (第 1~2 節課): 本模組也設計了公差為負數的情形，例如「開始的號碼：由 51 號開始，每次都 - 2」，這個題目牌卡的意思是若學生手上的牌碼的號碼是 51, 49, 47, 45, 43、 \dots , 3, 1，都能將出牌。更重要的是希望在遊戲中讓學生感受到『等差數列的某一部份也是等差數列的觀念』，這也是此模組的重要目的之一。
- (三) 主題 III (第 3~4 節課): 延續第 2 節所建立的觀念，數字牌中加入了正數與負數，讓學生熟悉正負數的計算；並讓學生在遊戲中思考：在等差數列中如果想求得此數列未知的某一項，是否有更方便快速的方法？最後透過回顧遊戲的過程，討論找到等差數列第 n 項公式的寫法。
- (四) 主題 IV (第 5~6 節課): 配合學習單 3 (附件 3)，利用生活中的實例討論如何計算物體的總數，然後透過操作可組合的连接方塊，讓學生在探索中形成，如果我們將此數列中所有的數字以實體的连接方塊表示，將它們進行排列、重新組合後，能變成一個容易計算個數的形狀，如長方形、正方形或平行四邊形時，是否能幫助我們更快速地計算出它的總數？引導學生將具體表徵轉換為數學符號表徵，學會等差級數求和的公式。

教材分析



(一) 本補強課程模組教材重要性

十二年國民基本教育課程綱要數學領域強調數學乃是一門尋找規律的學科，透過數學方法使我們理解事物，進而認識規律、瞭解資料以及做出小心的推理，所以數學是訓練思考與溝通、判斷與推理的學問。蔡聰明 (1995) 則表示有物就有「數量」與「形狀」，再抽象為「數」與「形」；而數學就是研究「數」、「量」、「形」的學問，探尋它們的性質與規律。

本模組主題為「數列、等差數列與等差級數」，它是學生將「數」、「量」、「形」由數量表徵轉化到代數表徵的一個重要關鍵，同學如果無法具備「察覺情境中的問題，將之轉化為真正的數學數字問題，然後歸納出規則得以求解數學問題」的能力，對於後續等比數列，甚至是高中的遞迴關係的學習都會有相當深遠的影響，充份顯示出其承先啟後的教材地位。

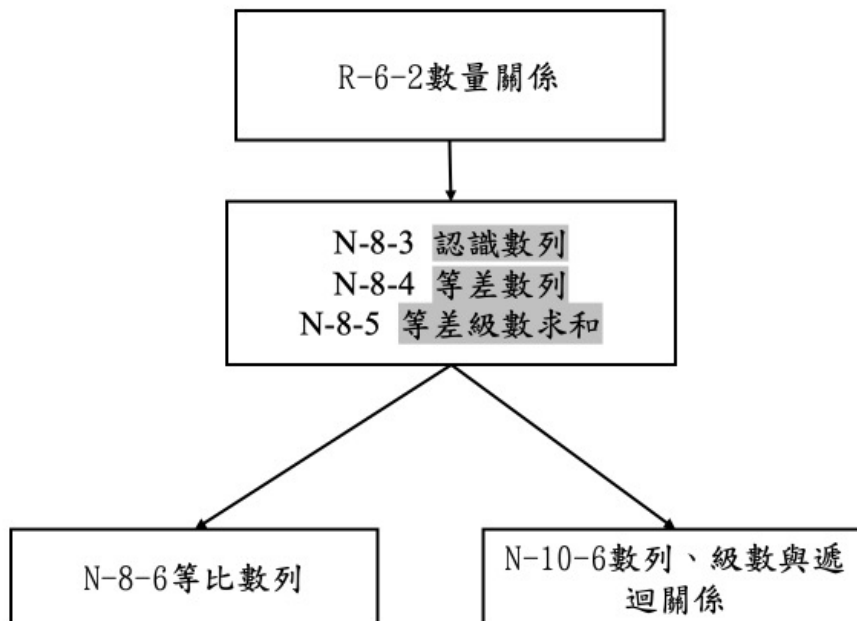


圖 2 課程內涵與其他學習內容間的關係

(二) 本補強課程模組教材學習內容分析

本模組「數列、等差數列與等差級數」的教材學習內容，分為「數列的意義」、「等差數列的意義」及「等差級數求和」三部分，希望學生按部就班地打好數列與等差級數求和的基礎，並為未來瞭解等比數列、遞迴數列奠立良好的根基。本模組教材基本學習內容，如圖 3。

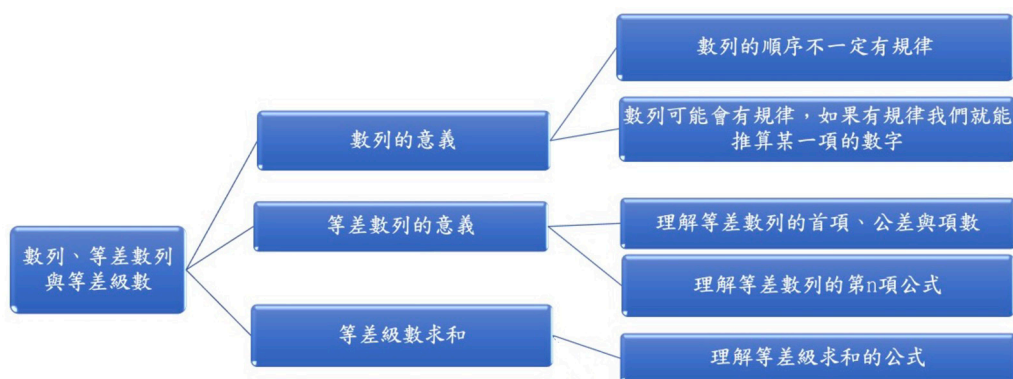


圖 3 本模組教材基本學習內容

(三) 教材分析與課程架構的關係

本補強課程模組教材從理解「數列的意義」、「等差數列的意義」到「等差級數求和」，以生活實例引入，再利用數字出牌遊戲帶出概念學習，再採用連接方塊來建立等差級數求和的方法，強調建立學生心像，不是只有數字的操弄，希望學生在遊戲與操作中理解「等差數列的意義、等差級數求和」等概念後，進而有信心地進入下個學習內容的學習。本單元教學過程中的教材內容與課程架構的關聯，如表 1。

表 1：本補強課程模組教材分析與課程架構教學關係

| 課程模組核心概念 | 學習活動 | 教學策略 | 教學內涵 |
|--|--------------|--------------------------|--|
| 主題 I 數列的意義 (第 1~2 節課) | 生活實例 | 威力彩 零用錢 月曆 | 利用生活中的例子，如「威力彩」、「零用錢」及「月曆」切入，讓學生能夠具象地討論的數列，並瞭解數列可能有規律，也可能沒有規律 |
| 主題 II 等差數列的意義 (第 1~2 節課) | 遊戲操作 | 紙牌遊戲 | 利用自製的數字牌卡讓學生透過遊戲在不同的關卡內建立等差數列就是知道首項，以相同公差所形成的數列。 |
| 主題 III 等差數列的 第 n 項公式 (第 3~4 節課) | 遊戲操作 | 紙牌遊戲 | 牌卡遊戲能讓學生由小到大或由大到小，讓學生同時思考兩個可能；另外題卡中也加入了正數與負數，讓學生在遊戲中思考在等差數列中如何找出特定項的數字，進而發展出等差數列第 n 項公式的寫法。 |
| 主題 IV 等差級數求和 (第 5~6 節課) | 生活實例動 手操作 | 鐵珠子、 突起物的個數 巧拼連接方塊 | 利用生活中的範例與實例討論如何計算物體個數的總數，然後透過操作連接方塊，讓學生在探索中形成是否可重新組合成一個長方形或正方形，引導學生將具體表徵轉換為數學符號表徵，學會等差級數求和的公式。 |

教學 計畫



| | |
|-------------------------|---|
| 模組名稱 | 數列、等差數列與等差級數 |
| 授課節數規劃 | 六節課 |
| 學習重點 (內容、概念、 能力) | <p>學習內容</p> <p>N-8-3 認識數列：生活中常見的數列及其規律性(包括圖形的規律性)。</p> <p>N-8-4 等差數列：等差數列；給定首項、公差計算等差數列的一般項。</p> <p>N-8-5 等差級數求和：等差級數求和公式；生活中相關的問題。</p> <p>學習表現</p> <p>n-IV-7 辨識數列的規律性，以數學符號表徵生活中的數量關係與規律，認識等差數列與等比數列，並能依首項與公差或公比計算其他各項。</p> <p>n-IV-8 理解等差級數的求和公式，並能運用到日常生活的情境解決問題。</p> <p>基本學習內容</p> <p>NC831 數列的意義。</p> <p>NC841 等差數列的意義。</p> <p>NC842 等差數列第 n 項公式。</p> <p>NC851 等差級數求和。</p> |
| 適用對象 (學生先備知識 與分析) | <p>學習本模組前，學生須學會以下學習內容</p> <p>R-6-2 數量關係</p> |
| 教學連結建議 | 本單元未來可連結至國中 N-8-6 等比數列及 N-10-6 數列、級數與遞迴關係等學習內容。 |

| | |
|------|---|
| 學習目標 | <ol style="list-style-type: none"> 1. 能理解數列的意義。 2. 能理解等差數列的意義。 3. 已知首項，且公差為正數時，能找出此等差數列。 4. 已知首項，且公差為負數時，能找出此等差數列。 5. 能理解等差數列第 n 項公式。 6. 能理解等差級數求和的做法。 |
| 教學策略 | <div data-bbox="510 627 837 963" data-label="Diagram"> </div> <ol style="list-style-type: none"> 1. 透過操作活動及討論探究，引導學生學習意願。 2. 以循序漸進的活動引導數列、等差數列與等差級數求和…等概念的學習，讓學生培養用數學的習慣。 3. 教學活動中，加入牌卡及連接方塊操作等活動，建立學生學習概念。 4. 強調師生的討論互動，讓學習不再是單向的接受，而是學生在思考與理解之後的結果。 |
| 教學材料 | <ol style="list-style-type: none"> 1. 自編學習單。 2. -30~60 之數字牌卡及題目牌卡。 3. 連接方塊。 |
| 教學資源 | <ol style="list-style-type: none"> 1. 康軒、翰林、南一教科書 康軒電子書：https://webetextbook.knsh.com.tw/2/index.html?code_degree=2 翰林電子書：https://www.hle.com.tw/inpage02.html 南一電子書：https://trans.nani.com.tw/TeacherCloud/jteacher/ 2. 網路資源：數學生根新世界教材 https://www.nhmath.com/NH-MATH/resources |

主題 1：數列的意義

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|--|---|
| <p>第 1-2 節</p> <p>一、準備活動</p> <p>教師提問 1</p> <p>同學們如果請你將一串數字依序的寫下來，我們把一串數字稱為數列，請問生活中你有看過哪些數列的例子呢？</p> <p>學生回答</p> <p>例如高速公路旁里程的數字牌、統一發票的對獎號碼，或是在抽獎時主辦單位公布的得獎號碼。</p> <p>教師說明</p> <p>沒錯，這些例子都會出現將數字排成一列的情形，這就是我們所說的數列，接下來我們再來看看其他關於數列的例子。</p> <p>二、發展活動：生活中的實例</p> <p>一、威力彩開獎</p> <p>威力彩是一種樂透型遊戲，其選號分為兩區，您必須從第 1 個選號區中的 01~38 的號碼中任選 6 個號碼，並從第 2 個選號區中的 01~08 的號碼中任選 1 個號碼進行投注，這 6 個加上 1 個號碼即為您的投注號碼。開獎時，開獎單位將從第 1 區 01~38 的號碼中隨機開出 6 個號碼，再從第 2 區 01~08 的號碼中隨機開出一個號碼，這一組 6 個加 1 個號碼，就是該期威力彩的中獎號碼，也稱為「獎號」。您第 1 區的選號中，如果對中當期第 1 區開出之任一個獎號，而第 2 區亦對中當期第 2 區開出之獎號，即為中獎（普獎），並可依規定兌領獎金。</p> | <p>透過生活情境來介紹數列，說明數列是真實存在且常見的，如學習單 1。</p> <p>教師也可以自己找尋關於生活中數列的例子，學習單 1。</p> <p>公益彩券的類型有很多種，教師可選擇適合同學經驗的類型進行介紹。</p> |

教學活動流程設計

教學注意事項



威力彩

| 期別 | 開獎日 | 兌獎截止(註5) | 銷售金額 | 獎金總額 | | | |
|------------|-----------|-----------|------------|-------------|----|-----|----|
| 1111000019 | 111/03/07 | 111/06/07 | 83,905,800 | 397,712,437 | | | |
| 獎號 | | | | | | | |
| | 第一區 | | | | | 第二區 | |
| 開出順序 | 12 | 28 | 26 | 19 | 03 | 31 | 02 |
| 大小順序 | 03 | 12 | 19 | 26 | 28 | 31 | 02 |

教師提問 2

如上圖，威力彩第一區得獎號碼若將它們由小到大排列會得到 03,12,19,26,28,31，請問這組得獎號碼是否為一個數列呢？

學生回答

是一個數列。

教師提問 3

如果該期威力彩開獎時只開出 03,12,19,26, 等四個號碼，同學是否知道下一個開獎號碼會是多少，為什麼？

學生回答

不可能，因為開出號碼無法預測。

二、班上同學的零用錢

小庭很好奇班上同學每月可以拿到多少零用錢，所以他私下詢問同學，將其中有回答的 10 名同學每月所擁有的零用錢金額紀錄下來，並將數字由小排到大排列，紀錄如下：300, 500, 600, 800, 800, 1000, 1000, 1200, 1500, 2000。

零用錢應該是學生常有的生活經驗，不過教師在進行時應避免直接問學生有多少零用錢來舉例，避免造成學生比較或取笑他的情人發生。

教學活動流程設計

教學注意事項

教師提問 4

觀察小庭所瞭解班上部份同學擁有零用錢金額的多寡，如果知道前 8 位同學零用錢的金額，是否能夠知道最後兩位同學零用錢金額是多少呢？

學生回答

不能，因為每個同學有零用錢無法預測的。

三、月曆

下圖是 2022 年 3 月的月曆，請回答以下問題：

| 日 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | | 1 廿九 | 2 三十 | 3 三月 | 4 初二 | 5 初三 |
| 6 初四 | 7 初五 | 8 初六 | 9 初七 | 10 初八 | 11 初九 | 12 初十 |
| 13 十一 | 14 十二 | 15 十三 | 16 十四 | 17 十五 | 18 十六 | 19 十七 |
| 20 十八 | 21 十九 | 22 二十 | 23 廿一 | 24 廿二 | 25 廿三 | 26 廿四 |
| 27 廿五 | 28 廿六 | 29 廿七 | 30 廿八 | 31 廿九 | | |

教師提問 5

隨意挑 5 個數字例如 2,5,12,23,24，請問它們是數列嗎，這些數字間是否有規律呢？

學生回答

是數列，但沒有規律。隨意挑選的數字不一定會有規律。

教師提問 6

如果要請你在月曆上隨意挑 5 個數字讓這個數列有規律，你會挑選哪些數字？

學生回答

按照順序挑選，例如都差 1，或是都差 2，這麼就會有規律，例如 2,4,6,8,10 或是 4,10,16,22,28。

教師提問 7

在這個日曆上每週的星期三是在 2,9,16,23,30，這些數字間是否有規律，它們可以進行測預嗎？

日曆是一個幫助學生看到數列很好的媒材，不但可以協助學生發現關於數列的例子，也能在日曆中找到有規律的數列。

教師在日曆教學過後，也可畫出，如 10×10 的方格，讓學生察覺若依序填入 1~100，數字在每行、每列是否有規律。

讓學生觀察日曆，可以讓學生找到有規律的數列。

此提問的目的是為了帶出有規律的數列是否能夠推算、預測的，老師可多讓同學練習表達自己的想法。

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|--|--|
| <p>學生回答</p> <p>有規律。因為一週有 7 天，這些數字都代表星期三，也就是每個數字都差 7 天，所以知道其中 1 個數字其就能找到其他的數字。</p> <p>教師提問 8</p> <p>假設某月的 5 日是星期六，請問該月 25 日是星期六嗎？如果不是，請問該月 25 日是星期幾？</p> <p>學生回答</p> <p>不是星期六，因為都是星期六的日子都會差 7 天或者是 7 的倍數，$25-5=20$，所以 25 日不是星期六，但是 25 日是星期幾還得計算一下，因為已知 5 日是星期六，所以星期六分別是 5,12,19,26。</p> <p>因此 25 日是星期五。</p> <p>學生回答</p> <p>我覺得可以直接推算出來，因為 25 日與 5 日差了 20 天，比 7 的倍數 14 多 6，比 21 少 1，所以可以推出 25 日是星期六再過 6 天，或是星期六的前 1 天，因此 25 日是星期五。</p> <p>教師提問 9</p> <p>從以上介紹的日常生活中有關數列的例子，請問數列的一定有規律可循嗎？當數列有規律時，會有什麼好處嗎？</p> <p>學生回答</p> <p>數列的順序不一定有規律，例如威力彩的開獎號碼、零用錢的數量；但是有時數列可能會有規律，以上面日曆的例子中，我們可以推算出同星期幾的其他的數字，或是該月任何一個日期是星期幾。</p> | <p>利用日曆找等差數列比較有需求感，生活中也比較用得到，例如固定要去補習、運動，學才藝等等，都是很好引入的題材，可由教師自行選擇應用。</p> |

主題 II：等差數列的意義

教學活動流程設計

教學注意事項

一、準備活動

教師說明

經過討論之後，同學們已瞭解有規律的數列對我們來說是比較有意義的，接下來老師要介紹有規律的數列。

| 2022年3月 | | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 日 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 |
| | | 1 廿九 | 2 三十 | 3 二月 | 4 初二 | 5 初三 |
| 6 初四 | 7 初五 | 8 初六 | 9 初七 | 10 初八 | 11 初九 | 12 初十 |
| 13 十一 | 14 十二 | 15 十三 | 16 十四 | 17 十五 | 18 十六 | 19 十七 |
| 20 十八 | 21 十九 | 22 二十 | 23 廿一 | 24 廿二 | 25 廿三 | 26 廿四 |
| 27 廿五 | 28 廿六 | 29 廿七 | 30 廿八 | 31 廿九 | | |

教師提問 1

如果小庭固定在每個星期六都要去上鋼琴課，請問小庭 3 月份上課的日期是在哪幾天，請將它們由小到大排列出來。

學生回答

5, 12, 19, 26

教師提問 2

如果要請你在上面 3 月份的日曆中隨意挑 6 個日子，但是要讓它們成為有規律的數列並且數字兩兩相差都是 3，你可以怎麼挑選？

學生回答

5, 8, 11, 14, 17, 20 或是 9, 12, 15, 18, 21, 24

教師提問 3

如果要請你在上面 3 月份的日曆上隨意挑 6 個日子，要讓它們成為有規律的數列並且數字兩兩相差都是 5，你會怎麼挑選？


學生回答

1, 6, 11, 16, 21, 26, 31

教師提問 4

請問有其他的答案嗎？為什麼？

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 | | | | |
|---|--|---------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <p>學生回答</p> <p>沒有。因為3月最大的數字是31，如果起始日不是1，而是2以上，最大的數字就會超過日曆的天數了。</p> <p>教師提問 5</p> <p>如果我們不是在日曆上挑日期，而是想直接在數列 1,6,11,16,21,26,31 後面再依序寫出 3 個數字，可以讓這個數列保持一樣的規律，我們可以填入哪些數字呢？</p> <p>學生回答</p> <p>36、41、46。</p> <p>教師提問 6</p> <p>如果想在數列 1,6,11,16,21,26,31 之前寫出 3 個符合此規律的數字，請問它們應該是哪些數字？</p> <p>學生回答</p> <p>-4, -9, -16, …。</p> | <p>由生活情境轉換為數學的學科情境，可能會有學生跟不上，教師可讓學生練習其他的例子。</p> | | | | |
| <p>二、發展活動</p> <p>活動 I：數字月老一線牽之 1</p> <p>• 活動情境境說明</p> <p>暑假生活營中共有 60 學員，生活輔導員要挑選特定同學來進行遊戲。輔導員的作法如下，先將同學進行編號，每人都有 1 個號碼代號，號碼是由 1 號至 60 號，而輔導員挑選的方式則寫在牌卡之中，請問哪些同學們會被挑中呢？</p> | <p>準備的教具為： 牌面為 1~60 的 60 張紙牌。</p> <p>牌目牌卡分別有 4 張，如下：</p> <table border="1" data-bbox="906 1462 1385 1809"> <tbody> <tr> <td data-bbox="906 1462 1134 1626"> 開始的號碼：由 3 號開始 遊戲的規則：+2 </td> <td data-bbox="1134 1462 1385 1626"> 開始的號碼：由 11 號開始 遊戲的規則：+4 </td> </tr> <tr> <td data-bbox="906 1644 1134 1809"> 開始的號碼：由 15 號開始 遊戲的規則：+3 </td> <td data-bbox="1134 1644 1385 1809"> 開始的號碼：_____ 遊戲的規則：+____ </td> </tr> </tbody> </table> <p>活動 I 設計了 4 張題目牌，教師可視時間決定進行幾輪遊戲，最後統計得分最高的同學為得分王。</p> | 開始的號碼：由 3 號開始 遊戲的規則：+2 | 開始的號碼：由 11 號開始 遊戲的規則：+4 | 開始的號碼：由 15 號開始 遊戲的規則：+3 | 開始的號碼：_____ 遊戲的規則：+____ |
| 開始的號碼：由 3 號開始 遊戲的規則：+2 | 開始的號碼：由 11 號開始 遊戲的規則：+4 | | | | |
| 開始的號碼：由 15 號開始 遊戲的規則：+3 | 開始的號碼：_____ 遊戲的規則：+____ | | | | |

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|--|--|
| <p>• 活動規則</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 每 4 人一組進行競賽。 2. 將 60 張牌洗勻，依順時針方向分別發給 4 位同學，每人得到 15 張牌。 3. 以猜拳的方式由贏的人開始出牌，再依順時針順序換下一個人出牌，每次只能出 1 張牌，當沒有牌可出時，則喊「Pass」跳過，換下一位同學出牌。 4. 翻出題目牌卡，依題目的說明，發出手中的牌，最後都無法出牌時，結束這回合，手上的牌剩下最少的同學則贏得這回合。 5. 計分方式：依剩下紙牌數量的多寡來決定，最少的人得 4 分，依序是 3 分、2 分及 1 分；數量相同時，則得分相同。 <p>• 遊戲說明：</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 題目牌與玩法說明： <ul style="list-style-type: none"> 「開始的號碼：由 3 號開始，每次都 + 2」 開始的號碼：由 3 號開始的意思是有號碼 3 的人開始出牌 報數的規則：每次都 + 2 的意思，就是由號碼 3，下一個號碼是由 3+2 得到 5，5+2 得到 7，…依此類推。 因此題目牌的意思是手上有號碼 3, 5, 7, 9、…，57, 59 的人可以出牌。 2. 以下圖的座位圖與牌卡為例：  <p>假設丙生是第 1 人，因為他手中沒有數字 3，所以他只能喊「Pass」跳過。</p> | <p>本活動也設計了 4 張題目牌，教師可視時間決定進行幾輪遊戲，最後統計得分最高的同學為得分王。</p> <p>這裡是遊戲規則的說明，學生若是已經理解規則，可以省略這些說明。</p> |

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|---|---|
| <p>丙生：「Pass」跳過 丁生：「Pass」跳過 甲生：可出 3 乙生：可出 5 丙生：「Pass」跳過</p> <p>丁生：可出 7 甲生：可出 9 乙生：可出 11 丙生：可出 13 丁生：「Pass」跳過 甲生：「Pass」跳過 乙生：「Pass」跳過 丙生：「Pass」跳過 丁生：「Pass」跳過 甲生：「Pass」跳過 乙生：可出 15</p> <p>3. 遊戲結果：</p> <p>因為可出的號碼分別是 3,5,7,9,11,13,15,17, …, 57, 59 最後甲生剩 5 張，乙生剩 10 張，丙生剩 8 張，丁生剩 8 張，依剩下牌數的多少，最少的同學得 4 分，依序是 3 分、2 分及 1 分。此局，甲生得 4 分，乙生得 1 分，丙生得 3 分，丁生得 3 分。</p>  | |
| <p>4. 遊戲規則微調</p> <p>當進行過第一次遊戲之後，同學們就會發現一個關於規則的問題，因為「遊戲規則要求同學得按照順序出牌」，所以喊「Pass」跳過的情形會不斷出現，造成遊戲進行得很緩慢，要如何加快遊戲進行的速度呢？</p> | <p>改變遊戲規則是為了讓課程進行順暢，學生也會對等差數列的規律更加有感。</p> |

教學活動流程設計

遊戲規則調整：只要手中擁有在此遊戲規則中可以出手任一張號碼牌，例如 3,5,7,9,11,13,15,17, …, 57, 59 中任何一張牌時，隨時都能出手。

丙生：有「13、19、25、27、35、47、55」等 7 張號碼牌卡可出手。

丁生：有「7、17、21、33、37、43、51」等 7 張號碼牌卡可出手。

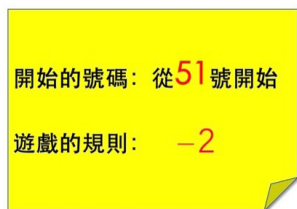
甲生：有「3、9、23、29、31、39、41、45、53、59」等 10 張號碼牌卡可出手。

乙生：有「5、11、15、49、57」等 5 張號碼牌卡可出手。

活動 II：數字月老一線牽之 2

• 活動規則

1. 與活動 I 修正的規則相同：只要手中的數字牌是在抽到的題目牌卡規律中的數字，就能立刻出牌，不需要按照順序出牌。
2. 例如抽到的牌目牌如下：



3. 開始的號碼：意思是由號碼 51 開始。
遊戲的規則：每次都 - 2，意思是手中有 51, 49, 47, 45, …, 1 等號碼的人都可以出牌。
4. 以下圖的座位圖與牌卡數字為例：



教學注意事項

活動 II 的牌目牌有：

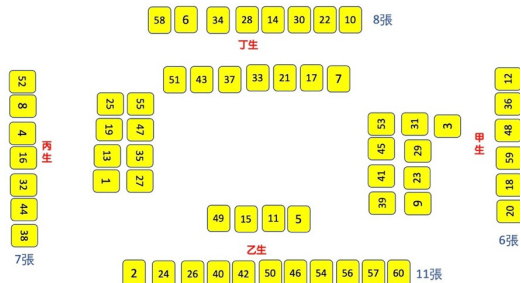


本活動也設計了 4 張題目牌，教師可視時間決定進行幾輪遊戲，最後統計得分最高的同學為得分王。

教學活動流程設計

教學注意事項

5. 遊戲結果：



可以出牌的號碼分別是 51, 49, 47, 45, 43、…，3, 1，經過出牌後，甲生剩 6 張，乙生剩 11 張，丙生剩 7 張，丁生剩 8 張，依剩下牌數的多少，牌數最少的同學得 4 分，依序是 3 分、2 分及 1 分。此局，甲生得 4 分，乙生得 1 分，丙生得 3 分，丁生得 2 分。

教師提問 7

老師取消了依序出牌的規定後，經過這麼多次比賽，有沒有同學可以分享自己的如何快速決定是否可出牌的秘訣？

學生回答

看別人出什麼牌，再決定自己可以出什麼牌。

教師提問 8

同學的意思是雖然題目是由 3 開始起算，但只要知道符合某個符合規律的數字，如 35 也可由 29 開始計算，這樣算出來的數字也會是符合此等差數列的規律嗎？

學生回答

是的，35 一樣可以由 $29+3+3$ 得到。

三、總結

老師說明

我們好像可以找到一種數列，它們前後數字的相差都是固定的數字，例如上面 1,6,11,16,21,26,31 這個例子，我們把這種有規律的數列，稱之為等差數列。

讓學生在遊戲中對等差數列有感是這個活動主要的目的。

建立學生由等差數列中某一項開始仍會是等差數列的概念。

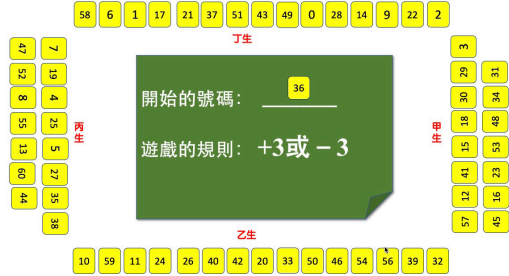
| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|--|----------------------------------|
| <p>1. 針對有這種規律的數列，習慣上將數列的「每一個數字」稱為「一項」，「第幾個數字」就稱為「第幾項」，第一項也稱之為「首項」。</p> <p>2. 相鄰兩個數字相減所得到固定的數字，我們稱之為公差。</p> <p>範例：</p> <p>觀察下列數列的規律，再判斷它是否為等差數列，若是等差數列，請在空格打勾並寫出此等差數列的公差。</p> <p>(1) 8, 10, 12, 14, 16, 18</p> <p>A: <input type="checkbox"/>不是 <input type="checkbox"/>是 等差數列 (公差 = _____)</p> <p>教師說明</p> <p>因為 $10-8=12-10=14-12=16-14=2$</p> <p>此數列是等差數列公差 = 2</p> <p>(2) 7, 9, 11, 14, 17, 20</p> <p>A: <input type="checkbox"/>不是 <input type="checkbox"/>是 等差數列 (公差 = _____)</p> <p>教師說明</p> <p>雖然 $9-7=11-9=14-12=2$</p> <p>但是 $14-11=17-14=20-17=3$</p> <p>此數列不是等差數列，因為公差並沒有完全一樣。</p> <p>練習</p> <p>觀察下列數列的規律，並判斷它是否為等差數列。</p> <p>若不是等差數列。請在不是之前的空格 (<input type="checkbox"/>) 打勾，若是等差數列，請在是之前的空格 (<input type="checkbox"/>) 打勾，並寫出此等差數列的公差。</p> <p>(1) 15, 14, 13, 12, 11, 10</p> <p>A: <input type="checkbox"/>不是 <input type="checkbox"/>是 等差數列 (公差 = _____)</p> <p>(2) 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3</p> <p>A: <input type="checkbox"/>不是 <input type="checkbox"/>是 等差數列 (公差 = _____)</p> <p>(3) 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1</p> <p>A: <input type="checkbox"/>不是 <input type="checkbox"/>是 等差數列 (公差 = _____)</p> | <p>第 (2) 題學生常會認為數字相同就不是等差數列。</p> |

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|---|---|
| <p>(4) 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10 A: <input type="checkbox"/>不是 <input type="checkbox"/>是等差數列 (公差 = _____)</p> <p>(5) 7, 2, -1, 7, 2, -1, 7, 2 A: <input type="checkbox"/>不是 <input type="checkbox"/>是等差數列 (公差 = _____)</p> <p>(6) 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 A: <input type="checkbox"/>不是 <input type="checkbox"/>是等差數列 (公差 = _____)</p> <p>(7) 1, 3, 9, 27, 81, 243 A: <input type="checkbox"/>不是 <input type="checkbox"/>是等差數列 (公差 = _____)</p> <p>(8) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 A: <input type="checkbox"/>不是 <input type="checkbox"/>是等差數列 (公差 = _____)</p> <p>(9) a, a, a, a, a, a A: <input type="checkbox"/>不是 <input type="checkbox"/>是等差數列 (公差 = _____)</p> <p>(10) a-3, a, a+3, a+6, a+9 A: <input type="checkbox"/>不是 <input type="checkbox"/>是等差數列 (公差 = _____)</p> <p style="text-align: center;">《第 1~2 節結束》</p> | <p>第 (4) 題學生常沒注意到其中某兩項的公差是不同的。</p> <p>第 (7) 題是等比數列。</p> <p>第 (8) 題是費氏數列。</p> <p>第 (9) 題學生常會認為文字相同就不是等差數列。</p> |

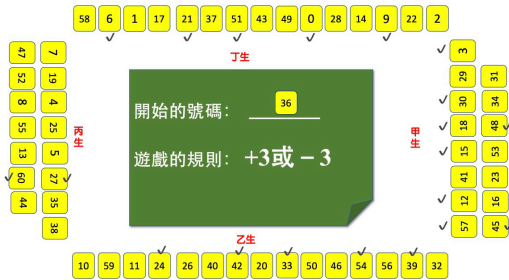
主題 III：等差數列的第 n 項公式

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|---|--|
| <p style="background-color: #e0e0e0; padding: 5px;">第 3~4 節</p> <p>一、準備活動</p> <p>活動 III：數字月老一線牽之 3</p> <p>• 活動規則</p> <ol style="list-style-type: none"> 我們在號碼牌中加入了 0 號牌，共有 0 號至 60 號等 61 張牌，將 61 張牌洗勻，依順時針方向分別發給 4 位同學，其中有 3 人為 15 張牌，1 人為 16 張牌。 規定依順時針順序進行遊戲，由有 16 張牌的人開始，請他在 16 張牌中任意選出一張牌當作初始牌，如畫面中的 36，翻出題目牌，例如「+ 3 或 - 3」，依題目的說明，依序發出手中的牌，最後都無法出牌時則本回合結束，手中的牌剩下最少的同學是這一輪的贏家。 | <p>利用紙牌遊戲進行數字運算，幫助學生在心中快速建立某一項數字大小的方式。</p> |

教學活動流程設計



【注意】遊戲時不需要依照數字的順序，如 39, 41, 43... 或是 33, 30, 27, ...，而是只要在這個規律之下的數字都能出，先出完的先贏，如圖中打勾的部份都是可以出的牌。



- 最後手上留有紙牌數量最少的同學，依序可得 4 分，3 分、2 分及 1 分。遊戲中若有同學如甲生出錯牌（不是在這個規律中），被其他同學（如乙生）抓到時，則甲生那分不算，而乙生在最後的總分時可少算 2 張牌，被累抓到則可累計紙牌數量。
- 最後甲生剩 7 張，乙生剩 10 張，丙生剩 13 張，丁生剩 10 張，所以甲生得 4 分，乙生得 3 分，丙生得 1 分，丁生得 3 分。

教師提問 1

以「從 36 開始，+ 3 或 - 3」這個題目為例，答案可以往大的方向想，如 36, 39, 41, 43...，也可以往小的方向想，如 36, 33, 30, 27, ...，請問同學在進行這個遊戲時是用什麼想法來解決的？

學生回答

將這些數字都列出來，再看自己有沒有這些數字。

教學注意事項

題目牌有 5 張，其中有一張起始牌與加多少是空白的，可由同學自行決定。老師可視上課時間，決定進行題目卡的次數。

開始的號碼：_____

遊戲的規則：+2或-2

開始的號碼：_____

遊戲的規則：+3或-3

開始的號碼：_____

遊戲的規則：+4或-4

開始的號碼：是_____

遊戲的規則：+6或-6

開始的號碼：_____

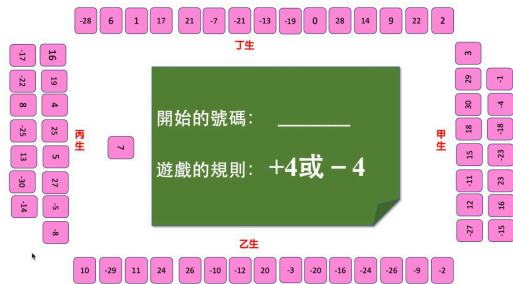
遊戲的規則：+____或-____

提醒學生進行時，要檢驗同學出的牌是否正確，是這個遊戲的重點。

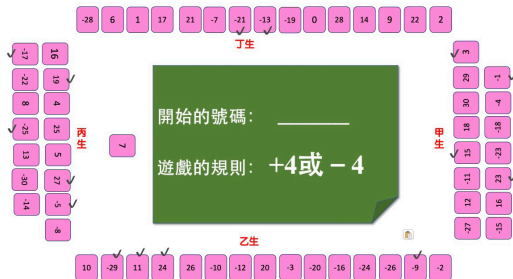
| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|---|---|
| <p>教師提問 2</p> <p>這也是一種方法，但是好像有點麻煩，請問同學有沒有什麼快速找到數字的秘訣呢？</p> <p>學生回答</p> <p>因為是從 36 往上加或往下減 3，所以得到的數字都是 36 加減 3 的倍數，所以我只要將手上牌的數字減去 36，看它們是不是 3 的倍數即可。</p> <p>例如 $48-36=12$，$12\div 3=4$，所以 48 在這個 36 出發，往上、往下 3 的倍數這個規律的數列上。</p> <p>而 $20-36=-16$，-16 不是 3 的倍數，所以 20 不在以 36 出發，往上或往下 3 的倍數此規律的數列上。</p> <p>教師說明</p> <p>非常好，同學們發現規律了！</p> <p>我們要找的數字一定是透過起始數字再加上或減去某個倍數後，所得到的數字。</p> <p>假設起始的數字是 a，數列的規律（稱為公差）為 d，增加或了 \square 個公差，所以我們要找的數字就是 $a + \square \times d$。意思就是說只要我們掌握了需要減少或增加幾個的公差（d），就能快速得到答案。</p> <p>二、發展活動</p> <p>活動 IV：數字月老一線牽之 4</p> <p>• 活動規則</p> <p>1. 這次我們在號碼牌中不僅加入號碼 0，且將原本編號 1 號到 60 號的紙牌，換成 -30, -29, -28, -27, …, -1, 1, 2, 3, 4, …, 30 等 60 張，將全部 61 張牌洗勻，依順時針方向分別發給 4 位同學，其中有 3 人為 15 張牌，1 人為 16 張牌。</p> | <p>第 IV 部份遊戲的重點在於讓學生熟悉有數列中的數字是負數時，如何計算出數列的某一項的數值。</p> <p>題目牌與活動 III 相同。</p> |

教學活動流程設計

2. 規定依順時針順序進行遊戲。且由拿到 16 張的同學先開始出牌，請這位同學在 16 張牌中任意選出一張牌當作初始牌，如畫面中的 7，再翻出題目牌，例如「+ 4 或 - 4」，依題目說明依序發出手中的牌，最後全部的同學都無法出牌時則結束這回合，手中的牌剩下最少的同學則是贏家。



請注意，在這個活動中，同學們並不需要依照數字的順序出牌，如 11, 15, 19, 23, 27 或是 3, -1, -5, -9, -13, -17, -21, -25, -29 …，而是只要在這個規律之下的數字都能出，先出完的先贏，如圖中打勾的部份都是可以出的牌。



3. 甲生剩 11 張，乙生剩 11 張，丙生剩 10 張，丁生剩 13 張，則甲生得 3 分，乙生得 3 分，丙生得 4 分，丁生得 1 分

教師提問 3

以條件是「初始牌為 7, + 4 或 - 4」為例，請問你是否發現這個遊戲的得分策略呢？

學生回答

因為符合規則四答案有這兩種類型 $7+4$ 、 $7+4+4$ 、 $7+4+4+4$ 、 \dots ，意思是 7 的後 1 個數字就加 1 個 4，

教學注意事項

讓學生發表自己找到的解決策略是讓幫忙同學更理解第 n 項公式的好方法。所以這個討論是重要的，因為學生藉由遊戲已有首項加數個公差的感覺，但是不見得能夠很好的表達或是順利的轉換成我們想要的第 n 項公式，所以透過數字的遊戲，增加學生的印象是個重要的過程。

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|--|----------------------------|
| <p>7 的後 2 個數字就加 2 個 4 7 的後 3 個數字就加 3 個 4， 依此類推 另一個類型是 7-4、7-4-4、7-4-4-4，…，意思是 7 的前 1 個數字就減 1 個 4， 7 的前 2 個數字就減 2 個 4 7 的前 3 個數字就減 3 個 4， 依此類推 所以可以得到結論是符合條件的數字和開始的 7，都相差了數個 4 的倍數。 假設自己手上的牌是 23， 因為 $23-7=16=4\times 4$，$7-23=-16=4\times (-4)$ 所以 23 一定是答案。 假設自己手上的牌是 -8， 因為 $-7-(-8)=1$，$(-8)-7=-15$，都不是 4 的倍數 所以 -8 一定不是答案。</p> <p>教師說明</p> <p>同學發現一個很棒的做法</p> <p>(1) 確定開始的數字 (2) 開始的數字減去手上牌的數字 或手上牌的數字去開始的數字，兩數的差一定是公差的倍數。</p> <p>教師提問 4</p> <p>同樣的，再以條件是「初始牌為 7，每 4 人報數一次 (由大到小或由小到大均可)」為例，請先列出所有符合以上規則的數字，請問這些數字依序排出會是等差數列嗎？如果它是等差數列，首項與公差分別為何？</p> | <p>這個結論也可試著引導同學自行進行表達。</p> |

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|--|---|
| <p>學生回答</p> <p>將所有可能的數字都列出來，如下</p> <p>-29, -25, -21, -17, -13, -9, -5, -1, 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27。所以它是一個首項為 -29，公差為 4 的等差數列。</p> <p>教師提問 5</p> <p>這個數列的數字來源是由遊戲「從 7 開始，每 4 人往上或往下一數」所得到，因此是否可以這樣想，當我們在找等差數列的數字時，只要知道了某一項的數字，再從那個數字往前或往後找出還要增加多少 4，就能找到我們想知道特定項的數字嗎？</p> <p>學生回答</p> <p>沒錯，因為它數列的規律是 4，所以只要知道要從哪個數字開始數，接下來只要知道要增加或減少幾個公差就能找到那個特定項的數字。</p> <p>教師提問 6</p> <p>依照這個思路，如果想要馬上找到等差數列 -29, -25, -21, -17, … 的第 20 項，除了將此 20 個數字全部列出來之外，同學是否有其他的解決方法？</p> <p>學生 1 回答</p> <p>可以看成以 -29 出發，每次增加 4，因為 -29 是第 1 項，題目要算第 20 項，所以只要增加 19 個 4 就會變成第 20 項，所以第 20 項是 $(-29) + 19 \times 4 = 47$</p> <p>16 個 4 才會變成第 20 項。</p> <p>學生 2 回答</p> <p>也可以看成以 -17 出發，每次增加 4，因為 -17 是第 4 項，題目要算到第 20 項，在上面討論知道，第 20 項是第 4 項往後再增加 16 次公差，所以它的數字會增加 16 個 4 才會變成第 20 項。</p> <p>因此第 20 項是 $(-17) + 16 \times 4 = 47$</p> | <p>慢慢地引導學生思考如果想找到某個特定項的數字，是否有好的解決方法呢？</p> |

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|---|--|
| <p>教師提問 7</p> <p>假設要算的數字是在等差數列中蠻後面的項數，例如第 100 項，請問從第 1 項開始算，還要再加上幾個公差，才能得到第 100 項的數字呢？</p> <p>學生回答</p> <p>需要 $100-1=99$ 個公差。</p> <p>教師提問 8</p> <p>如果老師已經有一個指定的項數，請問從第 1 項開始要再加上幾個公差，才能算到老師指定的那一項呢？</p> <p>學生回答</p> <p>再加上 (指定的項數 -1) 個公差。</p> <p>教師提問 9</p> <p>如果老師指定的項是第 25 項，請問從第 1 項開始要再加上幾個公差，才能算到老師指定的項呢？如果我們想用代號來表示第 n 項的數值，例如想從第 1 項 (數字為 a_1)，透過公差 d，算到第 n 項 (代號是 a_n)，請問 a_n 該如何用 a_1、n 與 d 表示？</p> <p>學生回答</p> <p>從第 1 項開始要再加上 24 個公差就是第 25 項。</p> <p>所以第 n 項要加上 $(n-1)$ 公差，以 a_n 與 d 表示第 n 項 $a_n=a_1+(n-1)\times d$</p> <p>教師提問 10</p> <p>計算第 20 項時一定要從第 1 項 (-29) 開始嗎，可不可以改從第 15 項 27 開始，再算到第 20 項呢？</p> <p>學生回答</p> <p>可以喔，因為由等差數列 -29, -25, -21, -17, -13, -9, -5, -1, 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27，我們知道 27 是第 15 項，因為第 15 項到第 20 項還有 5 項 ($20-15=5$)，所以只要再加 5 項就會變成第 20 項，所以第 20 項 $=27+(20-15)\times 4=47$</p> | <p>可以多舉幾個例子讓學生習慣第 n 項的樣式，不必急著立刻就將一般式 $a_n=a_1+(n-1)d$ 的寫法列出。</p> <p>可用多一點的例子讓學生看到『等差數列的某一部份也是等差數列的觀念』。</p> |

教學活動流程設計

教學注意事項

三、總結

透過以上的討論我們可以得到以下的結論：

1. 我們用文字來表示等差數列的各個資訊

第 1 項 (首項) 以 a_1 表示, 公差以 d 表示, 共有 n 項。

第 n 項以 a_n 表示, 則 $a_n = a_1 + (n-1) \times d$

2. 等差數列的某一部份也會是公差不變的等差數列的觀念, 例如有一等差數列是 $-30, -29, -28, -27, \dots, -1, 1, 2, 3$ 則在此等差數列中, 從 -27 開始, -1 結束的數列 $-27, -26, \dots, -3, -2, -1$ 也是等差數列, 首項為 -27 , 公差為 -1

範例：

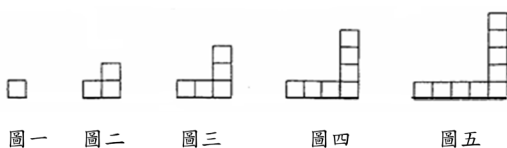
等差數列的首項為 6, 公差為 2, 求此等差數列第 20 項 (a_{20})=?

說明：

第 20 項就是由首項 6 開始, 每次都加 2, 因為算到第 20 項只需再加上 $20-1=19$ 個 2, 所以我們可以用以下式子來計算, 第 20 項 (a_{20})= $6+(20-1) \times 2=6+38=44$



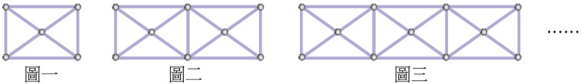
練習

1. 等差數列的首項為 -6 , 公差為 3, 求此等差數列第 24 項=?
2. 請問等差數列 $8, 10, 12, \dots$ 的第 20 項=?
3. 請問等差數列 $-57, -53, -49, \dots$, 第 18 項=?
4. 等差數列的第 25 項為 1, 公差為 -3 , 求此等差數列的首項=?
5. 等差數列的首項為 -2 , 第 30 項 $=85$, 求此等差數列的公差=?
6. 觀察下列圖形的規律, 其中圖一有 1 個方格, 圖二有 3 個方格, 依此類推, 請問, 圖十二總共有幾個方格?



圖一 圖二 圖三 圖四 圖五

如果學生還不熟悉 a_{20} 這個代號的意義, 老師可進行即時的複習與說明。

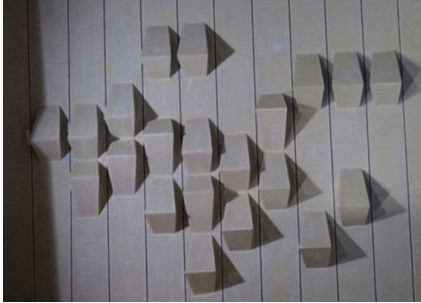
| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|---|--------|
| <p>7. 觀察下列圖形的規律，其中圖一有 4 個彈珠，圖二有 8 個彈珠，圖三有 12 個彈珠，依此類推，請問圖八需多少個彈珠？</p>  <p>圖一 圖二 圖三 圖四 ...</p> <p>8. 如下圖，將火柴棒依此規律排出 10 個相連的正方形，需要幾根火柴棒？</p>  <p>9. 下圖中，圖一有 5 個交點，圖二有 8 個交點，圖三有 11 個交點，……，依此規律繼續畫下去。</p>  <p>圖一 圖二 圖三 ...</p> <p>觀察其規律，請問圖 n 的交點個數為何？ (請以含有 n 的式子來表示答案)</p> <p>10. 小庭從一本書的第 1 頁開始，逐頁依順序在每一頁上寫一個數。已知小庭在第 1 頁寫 1，且之後每一頁寫的數均為他在前一頁寫的數加 2。請問若小昱在某頁寫的數為 101，請問寫上 101 的是第幾頁？【修改自 105. 會考】 《第 3~4 節結束》</p> | |

主題 IV：等差級數求和

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|---|---|
| <p>第 5~6 節</p> <p>一、準備活動</p> <p>教師提問 1</p> <p>以下的圖片中，牆上共有多少個突出物呢？</p> | <p>以下的例子都可由教師視教學現場的狀況進行調整，如果是教室內就有的例子更能引起學生參與的動機。</p> |

教學活動流程設計

教學注意事項

**學生回答**

共 21 個。

教師提問 2

計算牆上突出物時，你有沒有什麼快速的做法？

學生回答

沒有，因為突出物並沒有什麼規則，只能一個一個點數出它的數量。

學生回答

我覺得可以先將一排、一排的數量算出，最後再將所有的數字加起來。

教師提問 3

如圖，這個形狀是由多少顆鐵珠子排出來的呢？你有沒有什麼快速的做法？

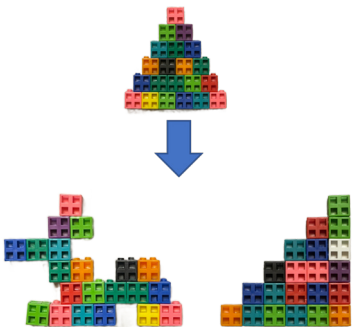

**學生 1 回答**

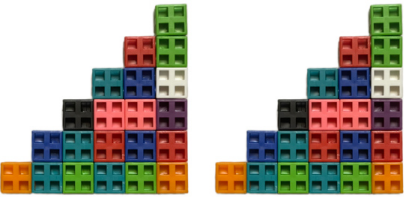
全部數完，共有 120 顆鐵珠子。

學生 2 回答

我發現它是由每層 1 個、2 個、3 個…一直到最後一層有 15 個，所以只要算出 $1+2+3+4+\dots+15$ 的答案就好了。

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|--|---|
| <p>教師提問 4</p> <p>非常好，同學應該會發現要算總數時，最簡單的方法是，只要動手去數就好，不過，雖然動手數也是一種方法，當我們要數的數量很多時，還真的挺累人。剛剛同學發現，如果這些物品的數量是有規律的 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15，例如是個等差數列，在計算上是否會容易一些呢？</p> <p>學生回答</p> <p>看不出來有什麼幫助，好像還是只能直接加。</p> <p>教師提問 5</p> <p>將問題簡化且為了方便同學計算與操作，老師將鐵珠子改成連接方塊，請問下圖有多少塊連接方塊？</p>  <p>學過回答</p> <p>太簡單了，$3 \times 8 = 24$，連接方塊總共有 24 塊。</p> <p>教師提問 6</p> <p>為什麼你可以這麼快就算出來呢？和鐵珠子那一題有什麼不同？</p> <p>學生回答</p> <p>因為連接方塊這題是一個長方形，要計算它的個數只要利用長 \times 寬，就能立刻算出，而鐵珠子那題排成了一個三角形好像無法立刻算出。</p> <p>二、發展活動</p> <p>活動 V：巧拼連接方塊</p> <p>操作 1</p> | <p>讓學生自己透過組合連接方塊的目的是希望讓學生對自己的操作更有印象，也有助於學生由圖像表徵轉化為數字與算式的表徵。</p> |

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|--|--|
| <p>教師說明</p> <p>請各組先依照鐵珠子的圖形，用連接方塊拼出它前 6 層的樣子，也就是排成想求出 $1+2+3+4+5+6=?$ 的連接方塊的總數，並回答老師以下的提問。</p> <p>教師提問 7</p> <p>如果可任意橫向移動連接方塊的位置，但是不改變每一排連接方塊的數量，請問這個操作是否會影響連接方塊的總數？</p>  <p>學生回答</p> <p>只是排法改變，對連接方塊的總數不會有影響。</p> | <p>每組 2~4 人，準備連接方塊方塊：若干個讓學生有實際操作的機會對於等差數列求和有很大的幫助。</p> <p>本模組特別強調在總數不變的概念，讓學生自在地進行操弄。</p> <p>因為不規律的圖形要算個數不好算，所以才會想盡辦法變成長方形來計算個數。而本範例以 $1+2+3+4+5+6=?$ 為例，只是方便教師準備教具（詳細說明，請參閱四、教學建議的說明）。</p> |
| <p>操作 2</p> <p>教師提問 8</p> <p>我們瞭解在同一排移動連接方塊，並不會改變連接方塊的總數。接下來，請各組試著將這 6 層的連接方塊重新組合成一個長方形，你可以有哪些排法？</p> <p>學生回答</p> <p>可以排成一個 3×7 或 7×3 的長方形，所以這 6 層連接方塊的總數就是 21 塊，總數還是不變。</p>  | |

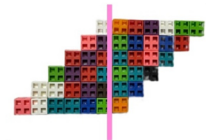
| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|--|---|
| <p>教師提問 9</p> <p>同學們發現我們就算將連接方塊打亂重排，也不會影響到總數的計算。那麼請問大家，當我們可以把連接方塊重新組合成 3×7 或 7×3，對於要算原來的題目「求 $1+2+3+4+5+6=?$」幫助大不大呢？請問同學是否有其他的排法呢？</p> <p>學生回答</p> <p>很有幫助，因為恰好可重新組合成一個長方形。</p> <p>因為總數是 21 個，所以只有 3×7 或 7×3 兩種。</p> <p>教師提問 10</p> <p>剛剛同學們的操作的方法是將所有的連接方塊打散後再重新排列，當數量很多時，其實對算連接方塊總數的幫助並不大，有沒有不必拆開連接方塊，又能很快算出總數的方法呢？</p> <p>學生回答</p> <p>好像沒有其他的方法了。</p> <p>操作 3</p> <p>教師提問 11</p> <p>如下圖，請問同學們，如果一樣不將 6 層的連接方塊拆開，而是利用兩組一樣的連接方塊進行組合，請問它們可拼成哪些形狀或者你覺得有多少種組合在一起的方式？請動手操作並記錄下你們的發現。</p>  <p>學生回答</p> <p>有很多很多種組合方式，例如以下的組法。</p> | <p>不將連接方塊打散重排，又能很快算出總數，這是解決這個問題的重要的困頓與思考點，教師請讓學生有多一點的時間進行討論與思考。</p> |

教學活動流程設計



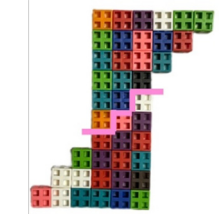
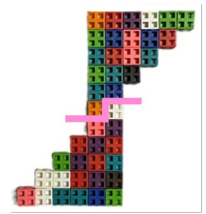
圖一

圖二



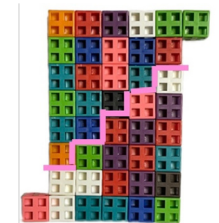
圖三

圖四



圖五

圖六



圖七

圖八



圖九

圖十

教學注意事項

讓學生有時間操作連接方塊，當組合的樣式愈多時，愈有助於後續學生進行討論及思考。

教師提問 12

請問這麼多種拼法中，哪一種拼法能比較容易算出原來一組 6 層連接方塊的總數呢，為什麼？

學生回答

利用圖三、圖九或圖十，因為圖三能拼成平行四邊形，而圖九與圖十都能拼成一個大長方形。

教師不要急於告知同學可以拼成長方形的方法，應該讓學生有多方嘗試的經驗後，發現排成長方形或平行四邊形時，連接方塊的總數是最好計算的。

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|--|---|
| <p>圖三、圖九是 7×6，圖十是 6×7 或 7×6，但此圖形是由兩個 6 層的連接方塊拼出來的，方塊的總數要除以 2。所以 6 層的連接方塊的總數是</p> $7 \times 6 \div 2 = 21 \text{ 或是 } 6 \times 7 \div 2 = 21。$ <p>教師提問 13</p> <p>如圖九，這個長方形的長是 $(1+6)$，寬是 6，這和我們計算 $1+2+3+4+5+6=?$ 有什麼關係呢？</p> <p>學生回答</p> <p>因為這兩大片連接方塊可組成長方形，所以我們可以利用長方形面積的算法，幫我們快速地算出一個等差數列所有數字的總和。</p> <p>透過排列連接方塊可知，長方形的長是 $(1+6)=7$，寬是 6。但是從等差數列的角度來思考，1 是數列的首項，6 是末項（第 6 項），而寬 6 是就是的數列共有 6 項。所以兩組連接方塊的總數是 7×6。</p> <p>因為總和算了兩次，因此要除以 2，所以得到 $1+2+3+4+5+6=(1+6) \times 6 \div 2 = 21$</p> <p>教師提問 14</p> <p>剛剛我們排的連接方塊有 6 層，是不是偶數層才會成功，如果是奇數層是不是也可組合成一個大長方形？請各組將連接方塊都變成 7 層後，再重排一次後，還是能快速算出「$1+2+3+4+5+6+7=?$」的答案嗎？</p> <p>學生回答</p>  <p>經過嘗試還是一樣能組合成一個大長方形，其長為 $(1+7)$，寬是 7，總個數就是</p> $(1+7) \times 7 \div 2$ <p>所以 $1+2+3+4+5+6+7=(1+7) \times 7 \div 2$</p> | <p>加深排成長方形比較好算，而不是只有背下公式的寫法。</p> <p>將連接方塊 6 層變 7 層，讓學生瞭解層數的多寡不會影響總數的計算。當變成等差數列求和時，意思就是項數的多寡，不會引影響我們求和的計算方式。</p> |

教學活動流程設計

教學注意事項

教師提問 15

因為連接方塊有 6 層與 7 層時都能這樣處理，同學可發現組成長方形這個的做法與題目數字共加了多少個似乎沒有關係。但是當題目的數字的間隔不是 1，也就是公差不是 1 的時候，計算這些數字的總和，還能用相同的方式處理嗎？

例如公差是 2，請計算 $1+3+5+7+9+11=?$
請同學開始開動手試試看。

學生回答

做法不變，我認為還是能組一個大長方形，當我們把兩組連接方塊倒過來組合，因為數字的間隔都相同，透過連接方塊的顏色可以發現，本來的連接方塊：

首項 (第 1 項)：白色

第 2 項：咖啡色

第 3 項：橘色

第 4 項：藍色

第 5 項：粉紅色

第 6 項：綠色



兩個連接方塊組合的長方形發現：

直 1：首項白色 + 綠色 (第 6 項)

直 2：第 2 項咖啡色 + 粉紅色 (第 5 項)

直 3：第 3 項橘色 + 藍色 (第 4 項)

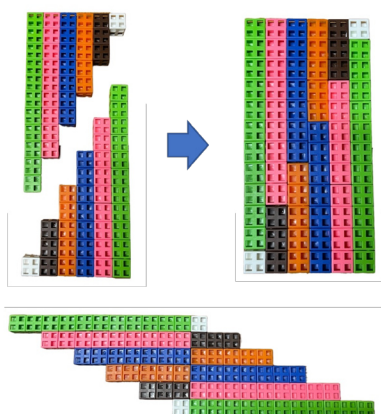
直 4：第 4 項藍色 + 橘色 (第 3 項)

直 5：第 5 項粉紅色 + 咖啡色 (第 2 項)

直 6：第 6 項綠色 + 白色 (首項、第 1 項)

探究當公差的改變時是否會影響總和計算的方式。

教學活動流程設計



組合後的連接方塊每一列的數量恰好都會相同，很容易地就能透過計算新組合成的長方形之長與寬（排成平行四邊形也可以），就能以面積公式算出其原來這個連接方塊總個數。

教師說明

1. 這為了方便溝通，當我們把等差數列中所有數字相加，就稱之為「等差級數」，而想算出這些數字的總和時，就稱為「等差級數求和」。
2. 經過以上的動手操作，同學已經提出了一個做法『當我們想算出等差數列所有數字的總和，可以透過組合成新長方形，再計算其總數』。
3. 回顧「計算 $1+3+5+7+9+11=?$ 」排連接方塊的過程，可知，長方形的長是 $(1+11)=12$ ，寬是 6，但是從等差數列的角度來看，1 是數列的首項，就是這個數列的『頭』，11 是末項（第 6 項），可看成這個數列的『尾』，而寬 6 指的是此等差數列共有 6 項，就是全部要求和數字的『個數』。兩組連接方塊所形成的長方形的總數是 12×6 ，但是因為要除以 2，所以計算

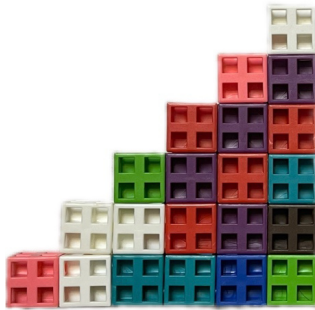
教學注意事項

本課程進行到這裡才出現「等差級數」這個數學名詞，重點在強調它的目的是「計算等差數列中所有數字的總和」。

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|---|--|
| <p> $1+3+5+7+9+11=(1+11)\times 6\div 2=36$ $=(\text{頭} + \text{尾})\times \text{個數}\div 2$ $=(\text{首項} + \text{末項})\times \text{項數}\div 2$ 等差級數求和的公式= $\frac{(\text{首項} + \text{末項})\times \text{項數}}{2}$ </p> <p>操作 4</p> <p>教師提問 16</p> <p>計算「$1+2+3+4+5+6+7=?$」的過程，除了透過利用 2 組連接方塊拼成大長方形這個做法之外，同學是否還能找到不同的做法，除了不親自動手數出總數這個方法外，也不需用 2 組連接方塊，就能將 $1+2+3+4+5+6+7$ 這組連接方塊變成長方形，然後快速地求出總數？請各組同學自行操作、探究看看。</p> <p>學生回答</p> <p>好像不需要組合兩個 7 層連接方塊，只要將原來的連接方塊進行小小的拆解後，就可以有答案。</p> <p>因為連接方塊好像從中間區分成凸與凹，可以將右邊多的連接方塊，補到左邊的空缺部份，就變成一個長為 7，寬為 3 的長方形。</p>  <p>教師提問 17</p> <p>很棒的觀察，在什麼條件下這些連接方塊的排列可以利用這個方式將連接方塊拆解、組成長方形呢？</p> | <p>以下的數個提問，目的在於引導學生看到等差數列有「截長補短」的特性，重點在於如何將原來的組合形狀變成一個容易計算總數的長方形。</p> <p>最後雖然說明了「等差中項」，但此處「等差中項」非本補強課程的重點。</p> <p>等差數列有有「截長補短」的特性，可以多讓學生操作方塊，才會有感。</p> |

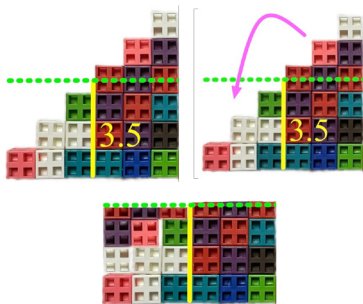
| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|---|--|
| <p>學生回答</p> <p>只要是間隔的數字是等差，而且要計算總和的數字有奇數個，就可以利用這個作法。因為左右兩邊好像有多退、少補的狀況，都和正中間那個數字一樣多。</p> <p>教師說明</p> <p>同學用了「多退少補」，這是相當貼切的形容。</p> <p>以 $2+4+6+8+10$ 為例，正中間的數字是 6 $2+4+6+8+10=6 \times 5=30$ 連接方塊總數 = 「正中間那一項個數」乘以「全部有多少個數字」。</p>  <p>教師說明</p> <p>等差級數求和的原來的公式 =</p> $\frac{(\text{首項} + \text{末項}) \times \text{項數}}{2}$ <p>= 正中間那個數字 \times 項數</p> <p>教師提問 18</p> <p>當老師說：『如果連接方塊有偶數層時，計算 $1+2+3+4+5+6=?$，絕對不可能有這種快速的方法來計算連接方塊的總數』，你是否認同老師的說法呢？。</p> <p>學生 1 回答</p> <p>我認為老師的結論有道理，因為無法將多出來的連接方塊補到左邊的空缺中，而且還能組成長方形。</p> | <p>這是為了讓學生思考「正中間那個數字 \times 總項數」這個做法，是否可通用，還是只是此特例之作法。</p> <p>數字列一定可以有正中間那個數字嗎？這是學生不容易理解的地方，所以特別進行提問討論。</p> |

教學活動流程設計



學生 2 回答

我認為老師的結論不對，雖然我們無法用連接方塊拼成一個長方形，但是如果用「截長補短」的想法來思考，由於數列是偶數項，沒有真正的中間那一項，可以如果我們以平均的觀念來看，第 3 項是 3，第 4 項是 4，正中間就是平均數 3.5，把大於平均數 4.5 的部份想像成可切開，如下圖：



所以

$$1+2+3+4+5+6 = \frac{(3+4)}{2} \times 6 = 3.5 \times 6 = 21$$

教師說明

當要求的數字有偶數項，透過連接方塊組合的過程可發現，雖然沒有中間那一項，但是利用正中間左、右兩個數字，就能算出這兩數的平均數，再利用這個平均數乘以項數後，可得到計算等差級數的總和。

等差級數求和原來的公式 =

$$\frac{(\text{首項} + \text{末項}) \times \text{項數}}{2}$$

新的求和公式

教學注意事項

針對補強課程的學生，依造學生的學習程度，此部份也可以省略不再說明與討論。

這裡學生可以會有許多不同的想法，教師可以多問學生的想法，引導他們進行思考。

教學活動流程設計

= 正中間往左右，對稱兩個數字的平均數
 × 項數 = 對稱兩項的平均數 × 項數

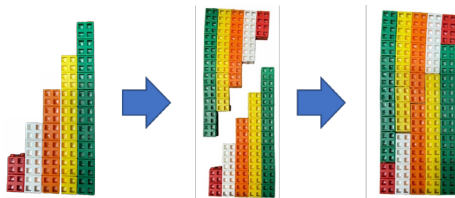
教師說明

同學是不是覺得新的求和方法很麻煩，還要分偶數項與奇數項，難道沒有更簡單的做法？

請回顧我們用組合連接方塊來計算
 $2+4+6+8+10=?$

與計算 $1+3+5+7+9+11=?$ 這兩題這兩題的過程。

(1) 計算 $2+4+6+8+10=?$



長 = $2+10=4+8=6+6$

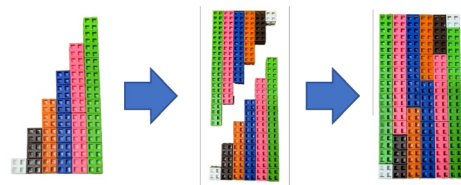
寬 = 5(奇數項)

$$\begin{aligned} \text{總和} &= \frac{\text{長} \times \text{寬}}{2} = \frac{(2+10) \times 5}{2} = \frac{(4+8) \times 5}{2} \\ &= \frac{(6+6) \times 6}{2} \end{aligned}$$

= 對稱兩項的平均數 × 項數

= 正中間數字 × 項數

(2) $1+3+5+7+9+11=?$



長 = $1+11=3+9=5+7$

寬 = 6(偶數項)


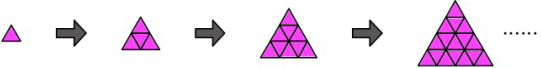
$$\begin{aligned} \text{總和} &= \frac{\text{長} \times \text{寬}}{2} = \frac{(1+11) \times 6}{2} = \frac{(3+9) \times 6}{2} \\ &= \frac{(5+7) \times 6}{2} \end{aligned}$$

= 對稱兩項的平均數 × 項數

教學注意事項

這個公式並未見於課本之中，但是這是一個等差數列在解題時會用到的觀念，引導學生看到計算數字總和時的美妙比較重要。

此部份也可以省略不再說明與討論。

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|---|--|
| <p>因此同學可得到一個結論： 不管項數是奇數項或偶數項，都可以利用『對稱兩項的平均數 \times 項數』來求和。 而對稱兩數的平均數（或正中間那個數字），叫做此數列的等差中項。所以等差中項也就是平均數的概念。雖然我們在基本學習內容中不處理等差中項的問題，這個方式可當成同學在計算總和時的另一種思考喔。</p> <p>練習</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 計算 $5+10+15+20+25+30=?$ 2. 計算 $(-3)+(-6)+(-9)+(-12)+(-15)+(-18)+(-21)=?$ 3. 等差數列 $12, 14, 16, \dots, 26$, 共有 8 項, 求此等差數列前 8 項的總和 $=?$ 4. 一等差數列的首項為 11, 公差為 3, 求此等差數列前 13 項的總和 $=?$ 5. 求等差級數 $2+7+12+\dots+112$ 的和 $=?$ 6. 觀察下列圖形的規律, 其中圖一有 4 個彈珠, 圖二有 8 個彈珠, 圖三有 12 個彈珠, 依此規律繼續排列下去, 請問若小毅想要排出圖一至圖十等十個圖形, 他總共需要準備多少個彈珠? <div style="text-align: center;">  <p>圖一 圖二 圖三 圖四 ...</p> </div> <ol style="list-style-type: none"> 7. 小天將小正三角形連接方塊, 依照下圖的方式層層往下排列, 已知第 1 層用 1 個 \triangle, 第 2 層用 3 個 \triangle, 第 3 層用 5 個 \triangle, 第 4 層用 7 個 \triangle , 依此類推, 如果小天想排出一個有 10 層的作品, 他總共需要準備幾個小正三角形連接方塊才能恰好排出這個作品? <div style="text-align: center;">  </div> | <p>讓學生自己透過組合連接方塊的目的是希望讓學生對自己的操作更有印象，也有助於學生由圖像表徵轉化為數字與算式的表徵。</p> <p>要解決第 5 題學生要結合等差數列的概念，先算出項數再求總和，有兩步驟的題目是學生很容易搞混的類型，這也是等差數列第 n 項對學生而言比較難的地方。</p> <p>而第 6、7 題要由圖形表徵轉換成數字，據此找出首項、公差的數值，這樣的題目對學生來說並不是容易的類型，請教師多提供練習的機會。</p> |

| 教學活動流程設計 | 教學注意事項 |
|--|--------|
| 8. 某縣市的演藝廳共有 21 排座位，且每一排的座位都比其前一排的座號多 2 個。小庭發現在第 11 排共有 60 個座位，請問這間演藝廳總共有多少個座位？ 《第 5~6 節結束》 | |

| | |
|----|--|
| 附件 | <ul style="list-style-type: none"> • 附件 1~3：自編學習單 1~3。 • 附件 4：前測卷。 • 附件 5：後測卷。 • 附件 6：-30~60 等 61 張之數字牌卡。(第 1~4 節，等差數列的意義、第 n 項公式) • 附件 7：題目牌卡，共 7 張。(第 1~4 節，等差數列的意義、第 n 項公式) • 附件 8：立體連接方塊若干個。(第 5~6 課，等差級數求和) |
|----|--|



附件

請至「國民小學及國民中學學生學習扶助資源平臺」下載


評量工具



評量工具包含有：





1. 理解學生概念學習狀況的課堂口頭提問；
2. 測驗學生主題單元概念的運算熟悉程度的附件：學習單。

一、口頭提問

| 提問位置 主題 - 節 - 標題 - 提問順序 | 問題 | 配合物品或附件 |
|----------------------------|---|---|
| 主題 I -12-1 | 同學們如果請你將一串數字依序的寫下來，我們把一串數字稱為數列，請問生活中你有看過哪些數列的例子呢？ | |
| 主題 I -12-2 | 如上圖，威力彩第一區得獎號碼若將它們由小到大排列會得到 03,12,19,26,28,31，請問這組得獎號碼是否為一個數列呢？ |  |

| 提問位置 主題 - 節 - 標題 - 提問順序 | 問題 | 配合物品或附件 |
|----------------------------|---|---|
| 主題 I-12-3 | 如果該期威力彩開獎時只開出 03,12,19,26, 等四個號碼，同學是否知道下一個開獎號碼會是多少，為什麼？ | |
| 主題 I -12-4 | 觀察小庭所瞭解班上部份同學擁有零用錢金額的多寡，如果知道前 8 位同學零用錢的金額，是否能夠知道最後兩位同學零用錢金額是多少呢？ | |
| 主題 I -12-5 | 請問隨意挑 5 個數字 2,5,12,23,24 是數列嗎，數字間是否有規律呢？ |  |
| 主題 I-12-6 | 如果要請你在月曆上隨意挑 5 個數字讓這個數列有規律，你會挑選哪些數字？ | |
| 主題 I-12-7 | 在這個日曆上每週的星期三是 2,9,16,23,30，這些數字間是否有規律，它們可以進行測預嗎？ | |
| 主題 I-12-8 | 假設某月的 5 日是星期六，請問該月 25 日是星期六嗎？如果不是，請問該月的 25 日是星期幾？ | |
| 主題 I-12-9 | 從以上介紹的日常生活中有關數列的例子，請問數列一定有規律可循嗎？如果數列有規律時，會有什麼好處嗎？ | |
| 主題 II-12-1 | 如果小庭固定在每個星期六都要去上鋼琴課，請問小庭 3 月份上課的日期是在哪幾天，請將它們由小到大排列出來。 |  |
| 主題 II-12-2 | 如果要請你在上面 3 月份的日曆中隨意挑 6 個日子，但是要讓它們成為有規律的數列並且數字兩兩相差都是 3，你可以怎麼挑選？ | |
| 主題 II-12-3 | 如果要請你在上面 3 月份的日曆上隨意挑 6 個日子，要讓它們成為有規律的數列並且數字兩兩相差都是 5，你會怎麼挑選？ | |
| 主題 II-12-4 | 請問有其他的答案嗎？為什麼？ | |
| 主題 II-12-5 | 如果我們不是在日曆上挑日期，而是想直接在數列 1,6,11,16,21,26,31 後面再依序寫出 3 個數字，可以讓這個數列保持一樣的規律，我們可以填入哪些數字呢？ | |

| 提問位置 主題 - 節 - 標題 - 提問順序 | 問題 | 配合物品或附件 |
|----------------------------|---|---------|
| 主題 II-12-6 | 如果想在數列 1,6,11,16,21,26,31 之前寫出 3 個符合此規律的數字，請問它們應該是哪些數字？ | |
| 主題 II-12-7 | 老師取消了依序出牌的規定後，經過這麼多次比賽，有沒有同學可以分享自己的如何快速決定是否可出牌的秘訣？ | |
| 主題 II-12-8 | 同學的意思是雖然題目是由 3 開始起算，但只要知道符合某個符合規律的數字，如 35 也可由 29 開始計算，這樣算出來的數字也會是符合此等差數列的規律嗎？ | |
| 主題 III-34-1 | 以「從 36 開始，每 3 人報數一次」這個題目為例，答案可以往大的方向想，如 36, 39, 41, 43...，也可以往小的方向想，如 36, 33, 30, 27, ...，請問同學在進行這個遊戲時是用什麼想法來解決的？ | |
| 主題 III-34-2 | 這也是一種方法，但是好像有點麻煩，請問同學有沒有什麼快速找到數字的秘訣呢？ | |
| 主題 III-34-3 | 以條件是「初始牌為 7，每 4 人報數一次 (由大到小或由小到大均可)」為例，請問同學是否發現這個遊戲的得分策略呢？ | |
| 主題 III-34-4 | 已知條件是「初始牌為 7，每 4 人報數一次 (由大到小或由小到大均可)」，請列出所以符合以上規則的數字，請問它是等差數列嗎？如果是等差數列，首項與公差分別為何？ | |
| 主題 III-34-5 | 這個數列的數字來源是由遊戲「從 7 開始，每 4 人往上或往下一數」所得到，因此是否可以這樣想，當我們在找等差數列的數字時，只要知道了某一項的數字，再從那個數字往前或往後找出還要增加多少 4，就能找到我們想知道特定項的數字嗎？ | |
| 主題 III-34-6 | 依照這個思路，如果想要馬上找到等差數列 -29, -25, -21, -17, ... 的第 20 項，除了將此 20 個數字全部列出來之外，同學是否有其他的解決方法？ | |
| 主題 III-34-7 | 假設要算的數字是在等差數列中蠻後面的項數，例如第 100 項，請問從第 1 項開始算，還要再加上幾個公差，才能得到第 100 項的數字呢？ | |
| 主題 III-34-8 | 如果老師已經有一個指定的項數，請問從第 1 項開始要再加上幾個公差，才能算到老師指定的那一項呢？ | |

| 提問位置 主題 - 節 - 標題 - 提問順序 | 問題 | 配合物品或附件 |
|----------------------------|---|---|
| 主題 III-34-9 | 如果老師指定的項是第 25 項，請問從第 1 項開始要再加上幾個公差，才能算到老師指項呢？如果我們想用代號來表示第 n 項的數值，例如想從第 1 項 (數字為 a_1)，透過公差 d ，算到第 n 項 (代號是 a_n)，請問 a_n 如該如何用 a 、 n 與 d 表示？ | |
| 主題 III-34-10 | 計算第 20 項時一定要從第 1 項 (-29) 開始嗎，可不可以改從第 15 項 27 開始，再算到第 20 項呢？ | |
| 主題 V-56-1 | 在以下的圖片中，牆上共有多少個突出物呢？ |  |
| 主題 V-56-2 | 計算牆上突出物時，你有沒有什麼快速的做法？ | |
| 主題 V-56-3 | 如圖，這個形狀是由多少顆鐵珠子排出來的呢？你有沒有什麼快速的做法？ |  |
| 主題 V-56-4 | 如果這些物品的數量是有規律的 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15，例如是個等差數列，在計算上是否會容易一些呢？ | |
| 主題 V-56-5 | 將問題簡化且方便同學計算與操作，我們將鐵珠子改成連接方塊，請問下圖有多少塊連接方塊？ |  |
| 主題 V-56-6 | 為什麼你可以這麼快就算出來呢？和鐵珠子那一題有什麼不同？ | |
| 主題 V-56-7 | 如果可任意橫向移動連接方塊的位置，但是不改變每一排連接方塊的數量，請問這個操作是否會影響連接方塊的總數？ |  |
| 主題 V-56-8 | 請各組試著將這 6 層的連接方塊重新組合成一個長方形，你可以有哪些排法？ | |
| 主題 V-56-9 | 當我們可以把連接方塊重新組合成 3×7 或 7×3 ，對於要算原來的題目「求 $1+2+3+4+5+6=?$ 」幫助大不大呢？你是否有其他的排法呢？ | |

| 提問位置 主題 - 節 - 標題 - 提問順序 | 問題 | 配合物品或附件 |
|----------------------------|---|---|
| 主題 V-56-10 | 剛剛同學們的操作的方法是將所有的連接方塊打散後再重新排列，當數量很多時，其實對算連接方塊總數的幫助並不大，有沒有不必拆開連接方塊，又能很快算出總數的方法呢？ | |
| 主題 V-56-11 | 如下圖，請問同學們，如果不將 6 層的連接方塊拆開，而是利用兩組相同的連接方塊進行組合，請問它們可拼成哪些形狀或者你覺得有多少種組合在一起的方式？請動手操作並記錄下你的發現。 |  |
| 主題 V-56-12 | 這麼多種拼法中，哪一種拼法能比較容易算出原來一組連接方塊的總數，為什麼？ | |
| 主題 V-56-13 | 這個長方形的長是 $(1+6)$ ，寬是 6，這和我們計算 $1+2+3+4+5+6=?$ 有什麼關係呢？ |  |
| 主題 V-56-14 | 剛剛我們排的連接方塊有 6 層，是不是偶數層才會成功，如果是奇數層是不是也可組合成一個大長方形？請各組將連接方塊都變成 7 層後，再重排一次後，還是能快速算出「 $1+2+3+4+5+6+7=?$ 」的答案嗎？ |  |
| 主題 V-56-15 | 當題目的數字の間隔不是 1，也就是公差不是 1 的時候，計算這些數字的總和，還能用相同的方式處理嗎？例如公差是 2，計算 $1+3+5+7+9+11=?$ | |
| 主題 V-56-16 | 計算「 $1+2+3+4+5+6+7=?$ 」的過程，除了透過利用 2 組連接方塊拼成大長方形這個做法之外，同學是否有發現不需用 2 組連接方塊，就能更快速地將 $1+2+3+4+5+6+7$ 這組連接方塊變成長方形？請各組同學自行操作、探究試試看。 | |
| 主題 V-56-17 | 在什麼條件下這些連接方塊的排列可以利用這個方式將連接方塊拆解、組成長方形呢？ | |
| 主題 V-56-18 | 當老師說：『如果連接方塊有偶數層時，計算 $1+2+3+4+5+6=?$ ，絕對不可能有這種快速的方法來計算連接方塊的總數』，你是否認同老師的說法呢？。 | |

教學反思 應用建議



本模組主題為「數列、等差數列與等差級數」，學生在學習等差數列與等差級數時常會受困在單純的背解法，特別是在求等差數列的第 n 項公式或是等差級數求和時，常常在練習時信心滿滿，但段考後才發現公差算錯、項數算錯，或是覺得題目怎麼和練習時不一樣，信心頓時受到很大的打擊。究其根源大多來自於學生對於等差數列意義並沒有清楚的理解或只是反覆的練習，可能只學會或模仿教師的作法，利用類似解決經驗來進行解題，當遇到情境改變或不理解題目敘述時，就會因項數或公差的計算錯誤，影響了解題，因此學生的學習成效不彰。

本模組希望在介紹「數列、等差數列與等差級數」時，能讓學生能回到數列的規律的發現，藉由紙牌遊戲與連接方塊操作的引導，讓學生體會等差數列的本質，其實只是找到規律，再透過自行發現的總和算法，希冀能降低學生對學習的焦慮與挫折感。本模組選擇臺南市某國中八年級學生進行模組的試行，參與課程的八年級學生經過本補強課程模組的教學多數已能掌握「數列、等差數列與等差級數」的意義與解題方法，更期待對學生後續相關單元的學習也有所助益。

一、學生表現

教學時有 9 位同學參與試行，但因疫情之故，並不是全部同學都能進行前測與後測，部份學生有進行前測但未有後測，部份學生只有進行後測，能完整進行前、後測的同學只有 3 人，其學習成效分析如下：

1. 學生的前測成績表現

| 內容 / 學生 | 等差數列 | | | | 等差級數 | | | | 正確率 (%) |
|---------|------|------|--------|----------|---------|---------|----------|-----|---------|
| | 求首項 | 求公差 | 求第 5 項 | 求第 n 項 | 有首、末與項數 | 有首、末缺項數 | 有首、公差與項數 | 圖形題 | |
| 學生 1 | ○ | X | X | X | X | X | X | X | 12.5 |
| 學生 2 | ○ | ○ | ○ | X | X | X | ○ | X | 50 |
| 學生 3 | ○ | ○ | ○ | X | ○ | X | ○ | X | 62.5 |
| 正確率 % | 100 | 66.7 | 66.7 | 0 | 33.3 | 0 | 66.7 | 0 | |

2. 學生的後測成績表現

| 內容 / 學生 | 等差數列 | | | | 等差級數 | | | | 正確率 (%) |
|---------|------|-----|--------|--------|---------|---------|----------|------|---------|
| | 求首項 | 求公差 | 求第 5 項 | 求第 n 項 | 有首、末與項數 | 有首、末缺項數 | 有首、公差與項數 | 圖形題 | |
| 學生 1 | ○ | ○ | ○ | X | ○ | ○ | X | X | 62.5 |
| 學生 2 | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | X | ○ | X | 75 |
| 學生 3 | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | 100 |
| 正確率 % | 100 | 100 | 100 | 66.7 | 100 | 66.7 | 66.7 | 33.3 | |

3. 學生前、後測結果比較分析

(1) 「等差數列」部分：

在求首項的類型上，全數通過；在求公差、求已知項數的值（如第 5 項）的類型上，由 1 名學生未通過進步至全數通過；在求第 n 項的類型上，由全部學生未通過進步至 2 人通過。說明經過本模組的教學後已能讓學生掌握等差數列的意義，但關於求第 n 項的題目還需再加強。

(2) 「等差級數」部分：

在已知首項、末項與項數的類型上，由 2 名學生沒有通過進步至 2 人通過；在已知首項、末項但缺項數的類型上，由全數未通過進步至 2 名學生通過；在已知首項、公差與項數的類型上，維持 2 名學生通過；在由圖形求等差級數的類型上，由全數未通過進步至 1 名學生通過。顯示經過本模組的教學後對學生掌握等差級數的意義與計算方式有所幫助。

二、教學情形

(一) 「數列」部分

同學對於數列的觀念很容易接受，但是透過生活中的實例讓學生更能感受到若能找到有規律的數列，對我們會比較有幫助。尤其是觀察日曆，透過這個實例讓學生瞭解為什麼同一個星期的日期都是 7 的倍數，對於他們在解類似的文字題時有不少的幫助。

(二) 「等差數列」部分

1. 在第 1 節的目的是利用紙牌遊戲來建立學生對於有規律數列的一些感覺，慢慢體會出等差的味道，在試行模組發現一個有趣的現象，剛開始設定的規則是要按照數字由小到大依序出牌，有些同學很快地就握到出牌規則，但是卻苦於手中無牌可出，後來他會用言語提醒同學，這是一個意想不到的狀況，因此修正

成不一定要按照數字順序出牌，只要手中有符合規則的數字就能出牌，減少活動中的干擾。



2. 等級數列的第 n 項對學生而言是比較抽象的概念，因為有首項、公差要求同學找到特定項的數字是沒問題的，但是當項數未知，改以未知數例如 n 表達後，就不太會用 n 表示，這一點透過從前測就可瞭解它是學生的學習的難點，就像是學生在初學一元一次方程式時，他們都需要一點時間來理解與學習。因此在進行這個主題時，筆者會建議放慢教學的腳步，讓學生有消化與吸收的時間。

(三)「等差級數」部分

1. 在等差級數單元，利用連接方塊來切入等差級數，由於連接方塊是視覺可見，且透過學生自己實際的操作，因此在「將連接方塊重新組合成一個長方形」這個概念上，學生很容易就能接受，也認為改成長方形這樣的方式，的確對於計算連接方塊的總數是有幫助的。



2. 有了可以拼成長方形、正方形或其他容易算出總數的圖形此概念後，下一步要讓學生把操作的過程與等差數列求和 (或是算等差級數的值) 進行連結，對部份學生而言，並不容易，因為數學表徵的轉換的確是件不容易的事，所以讓學生有時間看到算式與連接方塊之間的關係，這是教學時可留意的地方。

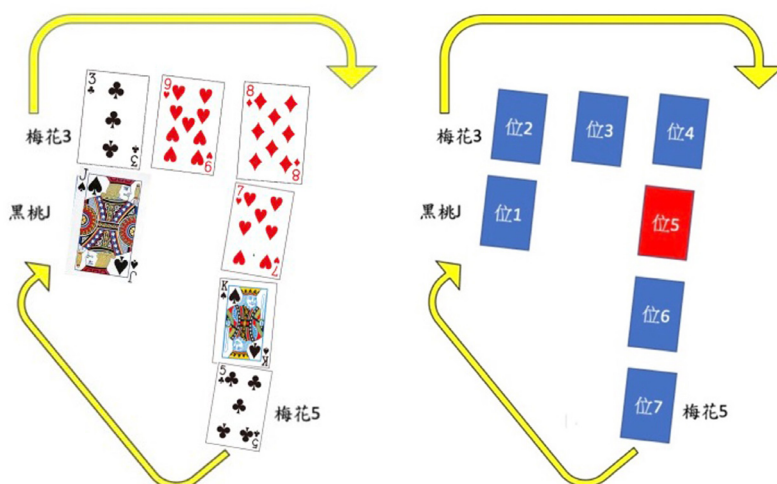


三、反思建議

(一) 依據學生學習情形進行滾動調整

1. 在等差數列單元原本不是以紙牌遊戲切入，而是直接寫數字，例如 4, 7, 10, 13, ____, ____, 請學生進行觀察數字的變化再回答題目，但是實際進行課程後發現，部份同學很容易就能發現題目中數字的規律，但有些同學並沒有發現只是跟著同學的回答，其實並沒有瞭解數列之間的規律變化，因此在第 2 次的課程修正時，設計了 Lucky7 的紙牌遊戲：準備 7 張撲克牌，花色與點數是黑桃 J(11)、梅花 3、紅心 9、方塊 8、紅心 7、黑桃 K(13)、梅花 5，請同學依此上述紙牌順序，順時針排成以下的型式，請同學任選一張紙牌，假設選擇的是黑桃 K，K 代表的數字是 13，當同學順時針走 13 步，請問它會停在哪一張紙牌上？

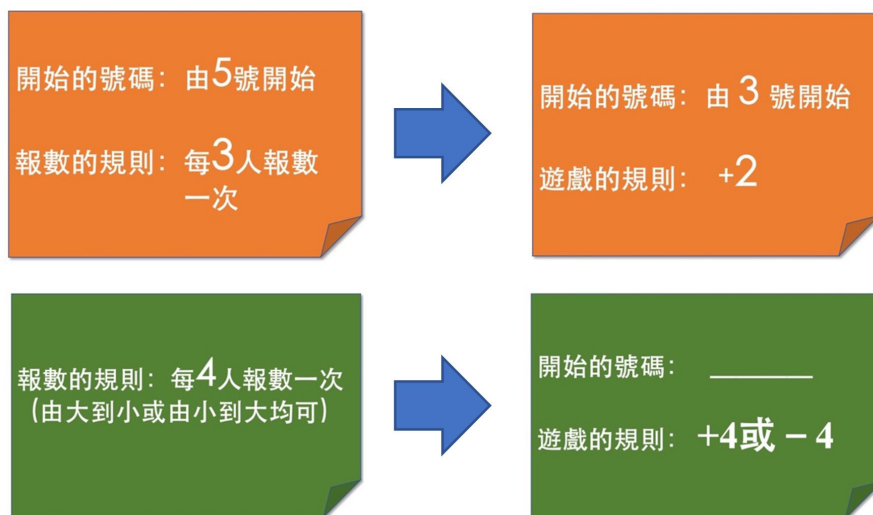
這個設計看似有趣，但是因為同學不容易察覺操作的過程會出現等差數列的形式，而是在每一張紙牌的位置上會有 +7 的規律出現，例如 $13 = 6 + 1 \times 7$ 。這造成同學們玩得愉快但對於等差數列基礎概念的學習幫助不大，所以不適合放在奠立等差數列的概念時施行，比較適合在進階的思考題中讓程度較好的同學練習。



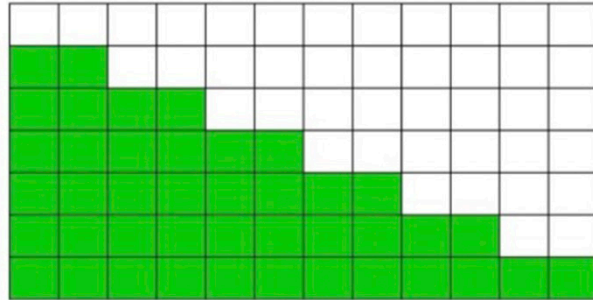
| 紙牌點數與花色 | 開始所在 | 停在哪一張紙牌上 | 最後所在 | 原始位置與最後位置，順時針最少的步數 | 原始牌面需走的步數 | 規律的秘密 |
|----------|------|----------|------|--------------------|-----------|------------------|
| 黑桃 J(11) | 位 1 | 紅心 7 | 位 5 | 4 | 11 | $11=4+1\times 7$ |
| 梅花 3 | 位 2 | 紅心 7 | 位 5 | 3 | 3 | $3=3+0\times 7$ |
| 紅心 9 | 位 3 | 紅心 7 | 位 5 | 2 | 9 | $9=2+1\times 7$ |
| 方塊 8 | 位 4 | 紅心 7 | 位 5 | 1 | 8 | $8=1+1\times 7$ |
| 紅心 7 | 位 5 | 紅心 7 | 位 5 | 0 | 7 | $7=0+1\times 7$ |
| 黑桃 K(13) | 位 6 | 紅心 7 | 位 5 | 6 | 13 | $13=6+1\times 7$ |
| 梅花 5 | 位 7 | 紅心 7 | 位 5 | 5 | 5 | $5=5+0\times 7$ |

經過討論與修正，最後將引入活動改成以紙牌遊戲進行，因為在本活動中同學思考的就是數字的增加與減少，因此在遊戲的過程中也時時強迫學生在心中不斷練習增加了幾個公差這個過程，這對於當我們要希望幫助學生建立第 n 項公式 $a_n=a_1+(n-1)\times d$ 時，相對而言，似乎比較容易一些。

2. 題目卡的設計也有一些調整，第 1 次施行時，筆者以古老的經驗「報數」來設計，例如，每 2 人報數一次，老師也示範說明什麼叫「報數」但是同學完全無法理解與想像什麼是「報數」，因此改成最簡單的說法：「+ 2」或「+ 4 或 - 4」這種型式。



3. 在等差級數單元剛開始設計的教學方式是，請學生在方格紙上以塗顏色的方式進行，例如計算 $1+2+3=?$ ，會請學生在方格紙上畫 1 格，下一行畫 2 格，下一行再畫 3 格，然後再倒過來重畫一次，組合成一個長方形，但是教學後發現，這樣的方式只讓學生記下方法，但並沒有讓學生瞭解要計算等差數列的總和時，重點在等差而產生的截長補短的現象，所以才將活動改成操作連接方塊的方式，幫助學生在心中有感。



(二) 重視每一個學生的學習回應

在教學的過程中，因為每個學生的程度不一，所以有的學生會跟不上，有的學生則覺得太簡單，因此，依學生的回應適時調整學生上課時練習內容的難度，同時建立學生的信心很重要。當學生主動回應自己終於能在考卷上答對題目時，這對於學習信心的建立有相當正向的幫助。

(三) 多元教學策略增進成效

這個模組建立在遊戲的奠基與學生操作上的理解與熟練，但是適時透過網路上之教學平臺的多元教學，更能讓學生有主動學習與自我練習的機會，因此本模組進行的過程中也讓學生透過科技輔助來學習，例如利用因材網、均一教育平臺、myViewBoard、PearDeck…等進行練習與診斷。

四、教學建議

(一) 因為疫情突然的嚴重，導致不是全部同學都能進行前測與後測，部份學生有進行前測但未有後測，分析有進行前測的學生的作答反應：

| 內容 / 學生 | 等差數列 | | | | 等差級數 | | | | 正確率 (%) |
|---------|------|-----|--------|--------|---------|---------|----------|-----|---------|
| | 求首項 | 求公差 | 求第 5 項 | 求第 n 項 | 有首、末與項數 | 有首、末缺項數 | 有首、公差與項數 | 圖形題 | |
| 學生 1 | ○ | X | X | X | X | X | X | X | 12.5 |
| 學生 2 | ○ | ○ | ○ | X | X | X | ○ | X | 50 |
| 學生 3 | ○ | ○ | ○ | X | ○ | X | X | X | 50 |
| 學生 4 | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | X | 87.5 |
| 學生 5 | ○ | X | X | X | ○ | X | X | X | 25 |
| 正確率 % | 100 | 60 | 60 | 20 | 60 | 20 | 40 | 0 | |

由學生的作答反應顯示，本模組設計確實能依同學的學習弱點來進行課程的設計，雖然因疫情故能獲得前後測的數據不夠多，但這個課程設計仍有值得教師來參考的價值。

(二) 這個模組的活動設計以紙牌遊戲與連接方塊操作為主軸，因此教師在教具的設計上需要花一些時間準備，例如在等差數列單元時，每組需準備由 -30、-29、…、0、1、…、60 等號碼的紙牌共需 91 張，在市面上可買的已印好號碼的紙牌通常是印好 1~ 至 50，其他的號碼只能由教師買空白的紙牌自己進行加工，題目卡的製作也需事前準備。



在等差級數單元，在分組進行連接方塊的操作時，教師記得先依您學生的人數考慮需準備的連接方塊的數量，以學生操作「計算 $1+2+3+4+5+6 = ?$ 」為例，共需 21 塊連接方塊，若要以兩組 $1+2+3+4+5+6$ 來組合成一個長方形，則總共要有 42 塊連接方塊才夠，市面上可買到這款連接方塊，它是一種可以任意進行組合的方塊，通常一包有 100 個 (也有一包 200 個的包裝)，教學者選擇的是一包 100 個的包裝，可讓 2 個學生為一組進行方塊的操作。

若是改變題目為「計算 $2+5+8+11+14=?$ 」時，方塊總共需要 40 塊，若要利用兩組 40 塊的方塊來觀察組合的形狀時，1 包的方塊的數量就只能給 1 人操作，方塊數量的準備，是實施本模組教師於上課前應先思考之處，以筆者試行的實際經驗，如果教師想讓學生操作計算數字總和比較大的題目時，建議可安排四人一組，每組發 1 包或 2 包 (100~200 個方塊)，2 位同學一起組合連接方塊，共同討論進行組內共學，減輕教師課前準備教具的困擾。



參考文獻

曹亮吉 (2003)。阿草的數學聖杯—探索無所不在的胚騰。臺北市：天下遠見出版社。

陳威任 (2011)。臺南地區八年級學生在數列與等差級數單元之錯誤類型分析 [未出版碩士論文]。國立臺南大學應用數學研究所，臺南市。

余庭璋 (2007)。國二學生在數形關係與等差數列之錯誤類型分析研究 [未出版碩士論文]。國立高雄師範大學數學系，高雄市。

蔡聰明 (1995)。代數是什麼？(上)。科學月刊，26(1)，67-73。

國民中學補強課程模組教學資源手冊

國中數學 八年級

總策劃 | 甄曉蘭
主編 | 陳致澄
作者 | 陳致澄、蘇恭弘、巫佳錚、盧昭雯、江世賓、張廷吉、莊信達
編輯 | 莊幸諺

發行人 | 彭富源
出版機關 | 教育部國民及學前教育署
地址 | 臺中市霧峰區中正路 738 之 4 號
電話 | 04-3706-1800
傳真 | 02-2396-7818
電子郵件 | e-j256@mail.k12ea.gov.tw
網址 | <https://priori.moe.gov.tw/>
出版年月 | 2024 年 1 月初版

ISBN | 978-626-345-414-9 (PDF)

電子書設計製作 | 華誼實業有限公司
地址 | 新北市中和區光華街 65 號
電話 | (02)2249-5678
網址 | <https://www.ed.ntnu.edu.tw/>

電子書播放資訊

作業系統 | 不限
檔案格式 | PDF
檔案內容 | 文字
使用載具 | 不限



本書同時登載於國民小學及國民中學學生學習扶助資源平臺 <https://priori.moe.gov.tw/>



本著作採用創用 CC 「姓名標示、非商業性、相同方式分享」授權條款釋出。
創用 CC 內容請見：http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/tw/deed.zh_TW

國民中學
補強課程模組教學資源手冊
國中數學
八年級



教育部國民及學前教育署
K-12 Education Administration, Ministry of Education

ISBN 978-626-345-414-9



9 786263 454149