

學生學習扶助基本學習內容 (108課綱)

【國民中學數學學習領域】

1 1 0 年 3 月

基本學習內容

基本學習內容

(一) 七年級

主題	編碼	學習內容	基本學習內容	頁碼
數與量	N-7-1	100 以內的質數 ：質數和合數的定義；質數的篩法。	NC-7-1-1 質數和合數。	B-1
	N-7-2	質因數分解的標準分解式 ：質因數分解的標準分解式，並能用於求因數及倍數的問題。	NC-7-2-1 質因數分解。 NC-7-2-2 能用質因數分解法及短除法求最大公因數及最小公倍數。	B-4
	N-7-3	負數與數的四則混合運算 (含分數、小數) ：使用「正、負」表徵生活中的量；相反數；數的四則混合運算。	NC-7-3-1 正數、負數的意義。 NC-7-3-2 相反數的意義。 NC-7-3-3 數的四則混合運算。	B-10
	N-7-4	數的運算規律 ：交換律；結合律；分配律； $-(a+b) = -a-b$ ； $-(a-b) = -a+b$ 。	NC-7-4-1 交換律、結合律及分配律。 NC-7-4-2 $a+b-c = a-c+b$ ； $a-(b+c) = a-b-c$ ； $a-(b-c) = a-b+c$ 。	B-14
	N-7-5	數線 ：擴充至含負數的數線；比較數的大小；絕對值的意義；以 $ a-b $ 表示數線上兩點 a, b 的距離。 備註 ：絕對值引入的目的用於記錄數線上兩點的距離，不處理絕對值方程式和絕對值不等式。	NC-7-5-1 數與數線的對應關係。 NC-7-5-2 絕對值的意義與計算。 NC-7-5-3 數線上兩點的距離公式。	B-17
	N-7-6	指數的意義 ：指數為非負整數的次方； $a \neq 0$ 時 $a^0 = 1$ ；同底數的大小比較；指數的運算。	NC-7-6-1 a^n 的意義 (n 為非負整數)。	B-21

主題	編碼	學習內容	基本學習內容	頁碼
數與量	N-7-7	指數律 ：以數字例表示「同底數的乘法指數律」($a^m \times a^n = a^{m+n}$ 、 $(a^m)^n = a^{mn}$ 、 $(a \times b)^n = a^n \times a^b$ ，其中 m, n 為非負整數)；以數字例表示「同底數的除法指數律」($a^m \div a^n = a^{m-n}$ ，其中 $m \geq n$ 且 m, n 為非負整數)。	NC-7-7-1 乘法指數律。 NC-7-7-2 除法指數律。	B-23
	N-7-8	科學記號 ：以科學記號表達正數，此數可以是很大的數(次方為正整數)，也可以是很小的數(次方為負整數)。 備註 ：本條目旨在科學記號的了解與使用，例如 1 奈米等於公尺，其中含有負數次方的部分，可以使用小數與之轉換來解釋，不宜牽涉到其他底數的負次方，也不宜涉及科學記號的四則運算。	NC-7-8-1 科學記號表示法。	B-25
	N-7-9	比與比例式 ：比；比例式；正比；反比；相關之基本運算與應用問題，教學情境應以有意義之比值為例。 備註 ：不涉及使用繁分數，遇到兩分數之比時，以分數相除處理之。	NC-7-9-1 比與比值。 NC-7-9-2 正比與反比。 NC-7-9-3 比例式的基本運算。	B-28
空間與形狀	S-7-1	簡單圖形與幾何符號 ：點、線、線段、射線、角、三角形與其符號的介紹。	SC-7-1-1 簡單圖形與常用符號，如點、線、線段、射線、角、三角形的意義、符號及記法。	B-32
	S-7-2	三視圖 ：立體圖形的前視圖、上視圖、左(右)視圖。立體圖形限制內嵌於 $3 \times 3 \times 3$ 的正方體且不得中空。	SC-7-2-1 立體形體的三視圖。	B-33

主題	編碼	學習內容	基本學習內容	頁碼
空間與形狀	S-7-3	垂直 ：垂直的符號；線段的中垂線；點到直線距離的意義。	SC-7-3-1 線段中點及中垂線的意義。 SC-7-3-2 點到直線距離的意義。	B-35
	S-7-4	線對稱的性質 ：對稱線段等長；對稱角相等；對稱點的連線段會被對稱軸垂直平分。	SC-7-4-1 線對稱圖形中，對稱線段相等，對稱角相等，對稱點的連線段會被對稱軸垂直平分。	B-37
	S-7-5	線對稱的基本圖形 ：等腰三角形；正方形；菱形；箏形；正多邊形。	SC-7-5-1 線對稱的基本圖形。	B-39
坐標幾何	G-7-1	平面直角坐標系 ：以平面直角坐標系、方位距離標定位置；平面直角坐標系及其相關術語（縱軸、橫軸、象限）。	GC-7-1-1 平面直角坐標系。 GC-7-1-2 平面直角坐標系相關術語：數對、原點、 x 軸、 y 軸、象限。	B-41
代數	A-7-1	代數符號 ：以代數符號表徵交換律、分配律、結合律；一次式的化簡及同類項；以符號紀錄生活中的情境問題。	AC-7-1-1 一元一次式及二元一次式。	B-44
	A-7-2	一元一次方程式的意義 ：一元一次方程式及其解的意義；具體情境中列出一元一次方程式。	AC-7-2-1 列一元一次方程式。 AC-7-2-2 一元一次方程式解的意義。	B-48
	A-7-3	一元一次方程式的解法與應用 ：等量公理；移項法則；驗算；應用問題。	AC-7-3-1 理解等量公理，並利用等量公理解一元一次方程式。	B-50
	A-7-4	二元一次聯立方程式的意義 ：二元一次方程式及其解的意義；具體情境中列出二元一次方程式；二元一次聯立方程式及其解的意義；具體情境中列出二元一次聯立方程式。	AC-7-4-1 列二元一次方程式及二元一次聯立方程式。 AC-7-4-2 二元一次方程式及其解的意義；二元一次聯立方程式及其解的意義。	B-54

主題	編碼	學習內容	基本學習內容	頁碼
代數	A-7-5	二元一次聯立方程式的解法與應用： 代入消去法；加減消去法；應用問題。	AC-7-5-1 代入消去法或加減消去法解二元一次聯立方程式。	B-57
	A-7-6	二元一次聯立方程式的幾何意義： $ax + by = c$ 的圖形； $y = c$ 的圖形（水平線）； $x = c$ 的圖形（鉛垂線）；二元一次聯立方程式只處理相交且只有一個交點的情況。	AC-7-6-1 畫二元一次方程式圖形。 AC-7-6-2 畫二元一次聯立方程式的圖形。	B-59
	A-7-7	一元一次不等式的意義： 不等式的意義；具體情境中列出一元一次不等式。	AC-7-7-1 一元一次不等式的意義。 AC-7-7-2 列一元一次不等式。	B-61
	A-7-8	一元一次不等式的解與應用： 單一的一元一次不等式的解；在數線上標示解的範圍；應用問題。	AC-7-8-1 一元一次不等式的解。 AC-7-8-2 在數線上標示一元一次不等式解的範圍。	B-63
資料與不確定性	D-7-1	統計圖表： 蒐集生活中常見的數據資料，整理並繪製成含有原始資料或百分率的統計圖：直方圖、長條圖、圓形圖、折線圖、列聯表。遇到複雜數據時可使用計算機輔助，教師可使用電腦應用軟體演示教授。	DC-7-1-1 統計圖表。	B-66
	D-7-2	統計數據： 用平均數、中位數與眾數描述一組資料的特性；使用計算機的「M ⁺ 」或「∑」鍵計算平均數。	DC-7-2-1 平均數的意義。 DC-7-2-2 中位數的意義。 DC-7-2-3 眾數的意義。	B-68

基本學習內容

(二) 八年級

主題	編碼	學習內容	基本學習內容	頁碼
數與量	N-8-1	二次方根 ：二次方根的意義；根式的化簡及四則運算。 備註 ：可使用乘法公式來化簡的根式，需乘法公式單元引入後再提及。	NC-8-1-1 二次方根的意義及化簡。 NC-8-1-2 根式的四則運算。	B-71
	N-8-2	二次方根的近似值 ：二次方根的近似值；二次方根的整數部分；十分逼近法。使用計算機 $\sqrt{\quad}$ 鍵。 備註 ：二次方根的整數部分，可用幾何、十分逼近法、計算機求近似值。	NC-8-2-1 二次方根的近似值。	B-75
	N-8-3	認識數列 ：生活中常見的數列及其規律性（包括圖形的規律性）。	NC-8-3-1 數列的意義。	B-77
	N-8-4	等差數列 ：等差數列；給定首項、公差計算等數列的一般項。 備註 ：不處理「已知等差數列不相鄰某兩項的值（不含首項），反求首項、項數或公差」，例如：給定 a_5 和 a_9 的值，求首項和公差。	NC-8-4-1 等差數列的意義。 NC-8-4-2 等差數列第 n 項公式。	B-79
	N-8-5	等差級數求和 ：等差級數求和公式；生活中相關的問題。 備註 ：不處理「已知級數和反求首項、項數或公差」。	NC-8-5-1 等差級數求和。	B-81
	N-8-6	等比數列 ：等比數列；給定首項、公比計算等比數列的一般項。 備註 ：不處理「已知等比數列不相鄰某兩項的值（不含首項），反求首項、項數或公比」，例如：給定 a_5 和 a_9 的值，求首項和公比。	NC-8-6-1 等比數列之意義。 NC-8-6-2 等比數列第 n 項公式	B-83

主題	編碼	學習內容	基本學習內容	頁碼
空間與形狀	S-8-1	角 ：角的種類；兩個角的關係（互餘、互補、對頂角、同位角、內錯角、同側內角）；角平分線的意義。	SC-8-1-1 兩角的關係：互餘、互補、對頂角。 SC-8-1-2 同位角、內錯角、同側內角。 SC-8-1-3 角平分線。	B-85
	S-8-2	凸多邊形的內角和 ：凸多邊形的意義；內角與外角的意義；凸多邊形的內角和公式；正 n 邊形的每個內角度數。 備註 ：不處理多邊形外角和公式。	SC-8-2-1 凸多邊形的內角及內角和公式。 SC-8-2-2 三角形的外角及外角和。	B-88
	S-8-3	平行 ：平行的意義與符號；平行線截角性質；兩平行線間的距離處處相等。	SC-8-3-1 平行線的截角性質。 SC-8-3-2 平行線的判別性質。	B-92
	S-8-4	全等圖形 ：全等圖形的意義（兩個圖形經過平移、旋轉或翻轉可以完全疊合）；兩個多邊形全等則其對應邊和對應角相等（反之亦然）。	SC-8-4-1 全等圖形的意義。	B-94
	S-8-5	三角形的全等性質 ：三角形的全等判定（SAS、SSS、ASA、AAS、RHS）；全等符號（ \cong ）。	SC-8-5-1 三角形的全等性質 SAS、SSS、ASA、AAS、RHS。	B-96
	S-8-6	畢氏定理 ：畢氏定理（勾股弦定理、商高定理）的意義及其數學史；畢氏定理在生活上的應用；三邊長滿足畢氏定理的三角形必定是直角三角形。	SC-8-6-1 畢氏定理。	B-100
	S-8-7	平面圖形的面積 ：正三角形的高與面積公式，及其相關之複合圖形的面積。	SC-8-7-1 正三角形的高與面積求法。	B-102

主題	編碼	學習內容	基本學習內容	頁碼
空間與形狀	S-8-8	三角形的基本性質： 等腰三角形兩底角相等；非等腰三角形大角對大邊，大邊對大角；三角形兩邊和大於第三邊；外角等於其內對角和。	SC-8-8-1 三角形任兩邊和大於第三邊。 SC-8-8-2 三角形外角等於其內對角和。 SC-8-8-3 三角形大角對大邊；大邊對大角。	B-104
	S-8-9	平行四邊形的基本性質： 關於平行四邊形的內角、邊、對角線的幾何性質。	SC-8-9-1 平行四邊形的內角、邊、對角線的幾何性質。	B-108
	S-8-10	正方形、長方形、箏形的基本性質： 長方形的對角線等長且互相平分；菱形對角線互相垂直平分；箏形的其中一條對角線垂直平分另一條對角線。	SC-8-10-1 理解正方形、長方形、菱形及箏形的對角線性質。	B-110
	S-8-11	梯形的基本性質： 等腰梯形的兩底角相等；等腰梯形為線對稱圖形；梯形兩腰中點的連線段長等於兩底長和的一半，且平行於上下底。	SC-8-11-1 梯形兩腰中點的連線段長等於兩底長和的一半，且平行於上下底。	B-112
	S-8-12	尺規作圖與幾何推理： 複製已知的線段、圓、角、三角形；能以尺規作出指定的中垂線、角平分線、平行線、垂直線；能寫出幾何推理所依據的幾何性質。	SC-8-12-1 能作等線段、等圓、等角、等三角形的尺規作圖。	B-113
坐標幾何	G-8-1	直角坐標系上兩點距離公式： 直角坐標系上兩點 $A(a, b)$ 和 $B(c, d)$ 的距離為 $\overline{AB} = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$ ；生活上相關問題。	GC-8-1-1 直角坐標上兩點的距離公式： 若 $A(a, b), B(c, d)$ 則 $\overline{AB} = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$	B-114
代數	A-8-1	二次式的乘法公式： $(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$ ； $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ； $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ； $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ 。	AC-8-1-1 乘法公式 $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$ 。 AC-8-1-2 乘法公式 $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ 。 AC-8-1-3 乘法公式 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ 。	B-115

主題	編碼	學習內容	基本學習內容	頁碼
代數	A-8-2	多項式的意義： 一元多項式的定義與相關名詞（多項式、項數、係數、常數項、一次項、二次項、最高次項、升冪、降冪）。	AC-8-2-1 理解 x 多項式的定義及相關名詞。	B-117
	A-8-3	多項式的四則運算： 直式、橫式的多項式加法與減法；直式的多項式乘法（乘積最高至三次）；被除式為二次之多項式的除法運算。 備註： 不涉及使用分離係數法。	AC-8-3-1 整係數多項式的加、減法運算。 AC-8-3-2 整係數多項式的乘法運算。 AC-8-3-3 整係數多項式的除法運算。	B-119
	A-8-4	因式分解： 因式的意義（限制在二次多項式的一次因式）；二次多項式的因式分解意義。	AC-8-4-1 整係數多項式的因式、倍式。 AC-8-4-2 認識因式分解的意義	B-121
	A-8-5	因式分解的方法： 提公因式法；利用乘法公式與十字交乘因式分解。 備註： 只處理整係數 $ax^2 + bx + c$ 的因式分解或與乘法公式直接相關者，不處理一般二元齊次或二元非齊次式但有一次介入者。	AC-8-5-1 提公因式作整係數二次多項式的因式分解。 AC-8-5-2 乘法公式作整係數二次多項式的因式分解。 AC-8-5-3 十字交乘法作整係數二次多項式的因式分解。	B-123
	A-8-6	一元二次方程式的意義： 一元二次方程式及其解，具體情境中列出一元二次方程式。	AC-8-6-1 從具體情境中列出一元二次方程式。 AC-8-6-2 一元二次方程式及其解的意義。	B-127
	A-8-7	一元二次方程式的解法與應用： 利用因式分解、配方法、公式解一元二次方程式；應用問題；使用計算機計算一元二次方程式根的近似值。	AC-8-7-1 能利用因式分解來解一元二次方程式。 AC-8-7-2 能利用公式解一元二次方程式。	B-129

主題	編碼	學習內容	基本學習內容	頁碼
函數	F-8-1	一次函數 ：透過對應關係認識函數（不要出現 $f(x)$ 的抽象型式）、常數函數（ $y = c$ ）、一次函數（ $y = ax + b$ ）。	FC-8-1-1 函數的意義。 FC-8-1-2 常數函數與一次函數。	B-132
	F-8-2	一次函數的圖形 ：常數函數的圖形；一次函數的圖形。	FC-8-2-1 常數函數在直角坐標平面上的圖形。 FC-8-2-2 一次函數在直角坐標平面上的圖形。	B-135
資料與不確定性	D-8-1	統計資料處理 ：累積次數、相對次數、累積相對次數折線圖。	DC-8-1-1 累積次數、相對次數、累積相對次數。 DC-8-1-2 累積相對次數折線圖。	B-137

基本學習內容

(一) 九年級

主題	編碼	學習內容	基本學習內容	頁碼
數與量	N-9-1	連比 ：連比的記錄；連比推理；連比例式；及其基本運算與相關應用問題；涉及複雜數值時使用計算機協助計算。	NC-9-1-1 連比與連比例式的意義及記法。 NC-9-1-2 連比例式的基本運算及應用問題。	B-139
空間與形狀	S-9-1	相似形 ：平面圖形縮放的意義；多邊形相似的意義；對應角相等；對應邊長成比例。	SC-9-1-1 多邊形相似的意義。	B-142
	S-9-2	三角形的相似性質 ：三角形的相似判定（AA、SAS、SSS）；對應邊長之比＝對應高之比；對應面積之比＝對應邊長平方之比；利用三角形相似的概念解應用問題；相似符號（ \sim ）。	SC-9-2-1 三角形的 AA、SAS、SSS 相似性質。 SC-9-2-2 相似三角形面積比為其對應線段平方之比。	B-144
	S-9-3	平行線截比例線段 ：連接三角形兩邊中點的線段必平行於第三邊（其長度等於第三邊的一半）；平行線截比例線段性質；利用截線段成比例判定兩直線平行；平行線截比例線段性質的應用。	SC-9-3-1 連接三角形兩邊中點的線段必平行於第三邊，且其長度等於第三邊的一半。 SC-9-3-2 設一直線平行於三角形的一邊，且與另兩邊相交，則此直線把這兩邊截成比例線段。 SC-9-3-3 若一直線把一個三角形的兩邊截成比例線段，則這直線必平行於此三角形的第三邊。	B-148

主題	編碼	學習內容	基本學習內容	頁碼
空間與形狀	S-9-4	相似直角三角形邊長比值的不變性 ：：直角三角形中某一銳角的角度決定邊長比值，該比值為不變量，不因相似直角三角形的大小而改變；三內角為 $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ 其邊長比記錄為「 $1 : \sqrt{3} : 2$ 」；三內角為 $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ 其邊長比記錄為「 $1 : 1 : \sqrt{2}$ 」。 備註 ：學生無使用計算機時，角度限於 30 度、 45 度、 60 度。	SC-9-4-1 三內角為 $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ 及 $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ 的三角形邊長比。	B-151
	S-9-5	圓弧長與扇形面積 ：以 π 表示圓周率；弦、圓弧、弓形的意義；圓弧長公式；扇形面積公式。	SC-9-5-1 圓弧長公式。 SC-9-5-2 扇形面積公式。	B-153
	S-9-6	圓的幾何性質 ：圓心角、圓周角與所對應弧的度數三者之間的關係；圓內接四邊形對角互補；切線段等長。	SC-9-6-1 圓心角的度數等於所對弧的度數。 SC-9-6-2 圓周角的度數等於所對弧度數的一半。 SC-9-6-3 切線段等長。	B-155
	S-9-7	點、直線與圓的關係 ：點與圓的位置關係（內部、圓上、外部）；直線與圓的位置關係（不相交、相切、交於兩點）；圓心與切點的連線垂直此切線（切線性質）；圓心到弦的垂直線段（弦心距）垂直平分此弦。	SC-9-7-1 點與圓、直線與圓的位置關係。 SC-9-7-2 切線性質。 SC-9-7-3 弦心距。	B-159
	S-9-8	三角形的外心 ：外心的意義與外接圓；三角形的外心到三角形的三個頂點等距；直角三角形的外心即斜邊的中點。	本基本學習內容不處理學習內容 S-9-8。	B-161
	S-9-9	三角形的內心 ：內心的意義與內切圓；三角形的內心到三角形的三邊等距；三角形的面積＝周長 \times 內切圓半徑 $\div 2$ ；直角三角形的內切圓半徑＝（兩股和－斜邊） $\div 2$ 。	本基本學習內容不處理學習內容 S-9-9。	B-161

主題	編碼	學習內容	基本學習內容	頁碼
空間與形狀	S-9-10	三角形的重心 ：重心的意義與中線；三角形的三條中線將三角形面積六等份；重心到頂點的距離等於它到對邊中點的兩倍；重心的物理意義。	本基本學習內容不處理學習內容 S-9-10。	B-161
	S-9-11	證明的意義 ：幾何推理(須說明所依據的幾何性質)；代數推理(須說明所依據的代數性質)。 備註 ：證明的題材以學習內容直接推理可得為限，勿涉及引用延伸學習內容。	本基本學習內容不處理學習內容 S-9-11。	B-161
	S-9-12	空間中的線與平面 ：長方體與正四面體的示意圖，利用長方體與正四面體作為特例，介紹線與線的平行、垂直與歪斜關係，線與平面的垂直與平行關係。 備註 ：S-5-6 僅教授「面與面的平行與垂直」，並且以操作活動為主。本條目則新增「空間中的線與線的垂直、平行、歪斜，以及線與面的平行與垂直」，且以理解數學概念為主。	SC-9-12-1 空間中線與面的平行與垂直。 SC-9-12-2 空間中線與線的垂直、平行與歪斜關係。	B-162
	S-9-13	表面積與體積 ：直角柱、直圓錐、正角錐的展開圖；直角柱、直圓錐、正角錐的表面積；直角柱的體積。 備註 ：S-6-4 僅教授「直柱體的體積」，本條目除了複習並加深直柱體的體積概念，並且透過直柱體與正錐體的展開圖，計算其表面積。	SC-9-13-1 多面體的意義。 SC-9-13-2 直角柱、正角錐、直圓柱、直圓錐的展開圖、側面積及表面積。 SC-9-13-3 直角柱、直圓柱的體積。	B-165

主題	編碼	學習內容	基本學習內容	頁碼
函數	F-9-1	二次函數的意義 ：二次函數的意義；具體情境中列出兩量的二次函數關係。	FC-9-1-1 二次函數。	B-168
	F-9-2	二次函數的圖形與極值 ：二次函數的相關名詞（對稱軸、頂點、最低點、最高點、開口向上、開口向下、最大值、最小值）；描繪 $y = ax^2$ 、 $y = ax^2+k$ 、 $y = a(x-h)^2$ 、 $y = a(x-h)^2+k$ 的圖形；對稱軸就是通過頂點（最高點、最低點）的鉛垂線； $y = ax^2$ 的圖形與 $y = a(x-h)^2+k$ 的圖形的平移關係；已配方好之二次函數的最大值與最小值。 備註 ：「二次函數的配方法」及「二次函數的應用問題」為 10 年級課程（F-10-1），本條目的教學聚焦在其圖形的特性。	FC-9-2-1 描繪 $y = ax^2$ 、 $y = ax^2 \pm k$ 、 $y = a(x \pm h)^2$ 、 $y = a(x \pm h)^2 \pm k$ 的圖形。 FC-9-2-2 已配方好之二次函數圖形的開口向上(下)、頂點、最高(低)點、對稱軸。 FC-9-2-3 已配方好之二次函數的最大值與最小值。	B-169
資料與不確定性	D-9-1	統計數據的分佈 ：全距；四分位距；盒狀圖。 備註 ：D-7-2 處裡單一統計量(平均數、中位數、眾數)表達數據，本條目則傳達以盒狀圖描述數據的集中程度。	DC-9-1-1 全距、四分位距與盒狀圖。	B-173
	D-9-2	認識機率 ：機率的意義；樹狀圖(以兩層為限) 備註 ：以樹狀圖分析所有的可能性(節點相同)的樹狀圖為主	DC-9-2-1 認識機率	B-175
	D-9-3	古典機率 ：具有對稱性的情境下(銅板、骰子、撲克牌、抽球等)之機率；不具對稱性的物體(圖釘、圓錐、爻杯)之機率探究。	DC-9-3-1 具有對稱性的情境下之機率。 DC-9-3-2 不具對稱性的情境下之機率。	B-177

基本學習表現

N-7-1	100 以內的質數：質數和合數的定義；質數的篩法。	n-IV-1
-------	---------------------------	--------

基本學習內容

NC-7-1-1 質數和合數。

基本學習表現

- NCP-7-1-1-1 理解質數、合數的名稱和意義。
- NCP-7-1-1-2 理解質數的因數只有 1 和自己。
- NCP-7-1-1-3 理解 1 不是質數，也不是合數。
- NCP-7-1-1-4 理解偶數中只有 2 是質數，其他偶數皆不是質數。
- NCP-7-1-1-5 熟記 20 以內的質數。
- NCP-7-1-1-6 判斷 100 以內的數是否為質數。
- NCP-7-1-1-7 認識質數的篩法。

◎ 本基本學習內容 NC-7-1-1 為 NC-6-1-1 之後續學習概念，故學生應已學過小於 20 的質數與合數以及 2、3、5 的倍數判別法。

本基本學習內容幫助學生判斷 100 以內的質數。

■ 教師可以透過分類的活動，將正整數區分成因數只有 1 個、因數只有 2 個、以及因數有 3 個或比 3 個多的數等三類，幫助學生區分 1、質數與合數。例如列出 1~12 各數的所有因數，幫助學生認識：

因數只有 1 個的數：1

因數只有 2 個的數：2、3、5、7、11

因數有 3 個或比 3 個多的數：4、6、8、9、10、12

(1) 2 的因數是 1 和 2；3 的因數是 1 和 3；5 的因數是 1 和 5，…。因數只有 2 個的數，它們的因數都是 1 和本身，數學上稱這些數為質數。也可以說，除了 1 和自己之外，沒有其它因數的整數稱為質數。

(2) 4 的因數除了 1 和 4 之外還有 2；6 的因數除了 1 和 6 之外還有 2 和 3；8 的因數除了 1 和 8 之外還有 2 和 4，…。因數有 3 個或比 3 個多的數，它們的因數除了 1 和本身以外，還有其他的數，數學上稱這些數為合數。

(3) 1 的因數只有 1 個，所以 1 不是質數也不是合數。

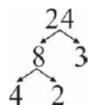
- 教師可以透過「把 24 分解成幾個大於 1 整數相乘的算式」，依下列步驟，將 24 質因數分解。

步驟一：透過樹狀圖，將 24 分解成 8 和 3 的乘積，並記成 $24 = 8 \times 3$ 。



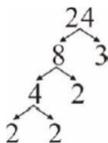
步驟二：3 不可以分解成 2 個大於 1 整數相乘的算式。此時，教師可以說明，不能分解成 2 個大於 1 整數相乘的數，它們的因數只有 1 和自己，所以不能分解成 2 個大於 1 整數相乘的數是質數。

步驟三：透過樹狀圖，將 8 分解成 4 和 2 的乘積，並記成 $24 = 8 \times 3 = 4 \times 2 \times 3$



步驟四：2 不可以分解成 2 個大於 1 整數相乘的算式。

步驟五：透過樹狀圖將 4 分解成 2 和 2 乘積，並記成 $24 = 8 \times 3 = 4 \times 2 \times 3 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ 。



步驟六：稱把 24 分解成 $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3$ 的過程為質因數分解。2 和 3 都是質數，2 和 3 也是 24 的因數，稱 2 和 3 是 24 的質因數。

- 學生有透過樹狀圖，將給定數分解成質因數乘積的經驗後，教師可以幫助學生利用短除法，逐一的提出質因數，幫助學生較有效率的進行質因數分解。以「將 24 質因數分解」為例，說明如何幫助學生解題：

步驟一：先提出質因數 2，將 24 記成 $24 = 2 \times 12$ ，

步驟二：再提出質因數 2，將 24 記成 $24 = 2 \times 2 \times 6$ ，

步驟三：再提出質因數 2，將 24 記成 $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ ，

步驟四：3 是質因數，可以得到 $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ 。

步驟五：直接透過短除法將 24 記成 $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ 。

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 24} \\ \underline{2 12} \\ 2 \overline{) 6} \\ \underline{2 6} \\ 3 \end{array}$$

- 教學活動舉例或評量宜以實際數字為原則。

不適合評量例子如下：甲是質數，甲 + 2 是否為質數？

- 針對小於 100 的質數之判斷，教導學生認識只須檢查是否為 2、3、5、7 的倍數即可，而不強制要求學生理解原因。例如：若某合數 a 的最小質因數為 11，那麼，該數一定大於 100，理由如下：

$$a = 11 \times b \geq 11 \times 11 = 121 > 100$$

N-7-2	質因數分解的標準分解式： 質因數分解的標準分解式，並能用於求因數及倍數的問題。	n-IV-1
--------------	--	--------

基本學習內容

NC-7-2-1 質因數分解。

NC-7-2-2 能用質因數分解法及短除法求最大公因數及最小公倍數。

基本學習表現

NCP-7-2-1-1 理解因數、倍數、公因數、公倍數、最大公因數、最小公倍數、質因數、質因數分解等。

NCP-7-2-1-2 熟練不大於 100 的質因數分解的計算。

NCP-7-2-1-3 理解標準分解式表示某整數的質因數分解。

NCP-7-2-2-1 理解質因數分解法，求出該兩數的最大公因數及最小公倍數。

NCP-7-2-2-2 熟練短除法求出兩整數的最大公因數及最小公倍數。

NCP-7-2-2-3 能將公因數與公倍數的觀念應用到生活上的相關問題。

◎ 本基本學習內容 NC-7-2-1 為 NC-6-1-1 之後續學習概念，故學生已能利用短除法做質因數分解。

本基本學習內容幫助學生將質因數分解後寫成標準分解式。

■ 質因數分解：將一正整數完全分解為若干個質因數連乘積的過程。

■ 教師可利用乘法或除法，幫助學生複習「因數的意義」，說明如下：

多數學生已經掌握整數情境的乘除互逆，因此教師可以透過乘法算式「 $5 \times 8 = 40$ ，5、8 以及 40 都是整數」，幫助學生認識 5 是 40 的因數，也可以透過除法算式「 $40 \div 5 = 8 \cdots \cdots 0$ ，40、5 以及 8 都是整數」，幫助學生認識 5 是 40 的因數。

當數字變大時，無法直接利用乘法算式找出因數，以「23 是否為 12581 的因數」為例，學生不易透過乘法算式「 $23 \times () = 12581$ 」來判斷，必須應用乘除互逆透過除法算式「 $12581 \div 23$ 」來判斷。

- 教師可利用乘法或除法，幫助學生複習「倍數的意義」，說明如下：

透過列舉使學生可以理解「 $7 \times 1 = 7$ 、 $7 \times 2 = 14$ 、 $7 \times 3 = 21$ 、 \dots 都是 7 的倍數」。但是當數字變大時，無法直接利用乘法算式判斷是否為倍數，以「12581 是否為 23 的倍數」為例，學生不易透過乘法算式「 $23 \times () = 12581$ 」來判斷「12581 是否為 23 的倍數」，仍必須應用乘除互逆，透過除法算式「 $12581 \div 23$ 」來判斷。

- 當學生都了解「因數和倍數的意義」時、教師可幫助學生建立「因數和倍數的關係」，即「甲是乙的因數，則乙是甲的倍數」。以「23 和 12581」為例，學生透過算式「 $12581 \div 23 = 547$ 」可觀察到「23 是 12581 的因數」，再由乘除互逆透可得到算式「 $23 \times 547 = 12581$ 」而觀察到「12581 是 23 的倍數」。因此，學生均可從乘法算式或除法算式，判斷兩數的因數和倍數關係，即

(一) 從乘法算式

$$12 = 2 \times 6$$

可以理解「2 和 6 都是 12 的因數」、「12 是 2 的倍數」、「12 是 6 的倍數」。

(二) 從除法算式

$$12 \div 2 = 6$$

可以理解「2 和 6 都是 12 的因數」、「12 是 2 的倍數」、「12 是 6 的倍數」。

必要時，也可以進行下列活動：

(三) 從除法算式

$$82 \div 6 = 13 \cdots \cdots 4$$

可以理解「82 不是 6 的倍數」、「82 也不是 13 的倍數」、「6 不是 82 的因數」、「13 不是 82 的因數」。

- 以 $a_1 \times a_2 \times a_3$ 的質因數分解為例，本基本學習內容限制 a_1, a_2, a_3 均不超過 100。

- 質因數分解的標準分解式：

1. 質因數從小至大、從左至右排列；
2. 質因數相同連乘時，以指數方式表示。

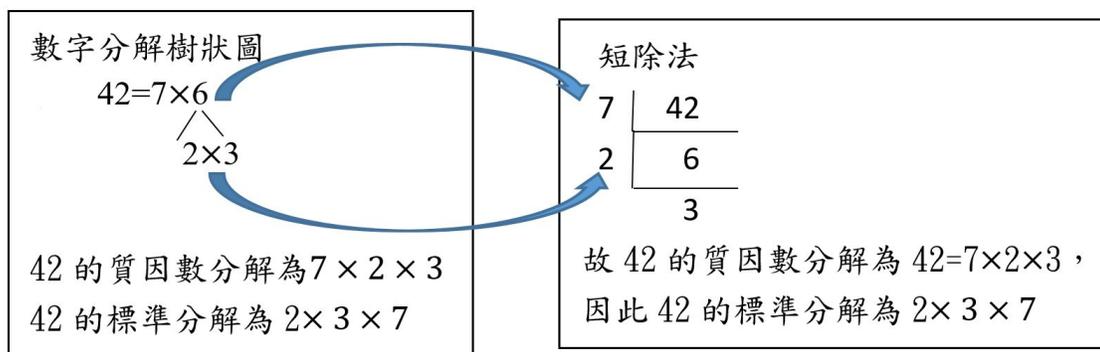
在國小階段只需將其表示為質因數之連乘積。相對地，國中階段則以指數方式呈現。下列以 24 為例，說明國小與國中學習呈現方式差異：

國小表示方式： $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$

國中表示方式： $24 = 2^3 \times 3$

進行正整數的質因數分解時，位數不宜過多且不應對質因數的順序設限。建議教師可利用國小學過學過的數字分解的樹狀圖為教學引導，引導學生發現短除法為分解樹狀圖的速記法。

例如：求 42 的標準分解式



◎ 基本學習內容 NC-7-2-2 為 NC-7-2-1 及 NC-6-2-1 之後續學習概念，故學生應該已經熟悉質因數分解法和短除法。本基本學習內容幫助學生運用短除法作質因數標準分解，及計算兩數的最大公因數及最小公倍數。

■ 教學進行中宜先列出兩數的質因數分解，並從中求出它們的最大公因數及最小公倍數。以「求出 36 和 48 的最大公因數和最小公倍數」為例說明：

(一) 最大公因數

透過列舉的方式，使學生了解「所有因數皆是質因數分解的某些部分乘積」，即

36 的因數：1, 2, 3, 2×2 , 2×3 , 3×3 , $2 \times 2 \times 3$, $2 \times 3 \times 3$, $2 \times 2 \times 3 \times 3$

48 的因數：1, 2, 3, 2×2 , 2×3 , $2 \times 2 \times 2$, $2 \times 2 \times 3$, $2 \times 2 \times 2 \times 2$,

$2 \times 2 \times 2 \times 3$, $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$

我們可以發現

36 和 48 的公因數：1, 2, 3, 2×2 , 2×3 , $2 \times 2 \times 3$ ，其中 $2 \times 2 \times 3$ 為最大，故 $2 \times 2 \times 3$ 為 36 和 48 的最大公因數。

若將 36 和 48 分別作質因數分解，

$$\begin{aligned} 36 &= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \\ 48 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \end{aligned}$$

我們可以發現 $2 \times 2 \times 3$ 恰為 36 和 48 共同出現最大部分的乘積，所以 36 和 48 的最大公因數「 $2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$ 」。

(二) 最小公倍數

透過列舉的方式，使學生了解「所有倍數皆是質因數分解再乘上某些部分」，即

36 的倍數： $2 \times 2 \times 3 \times 3$, $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 2$, $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$,
 $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2$, $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$, $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 2 \times 3$,
 $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7$, ...

48 的倍數： $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$, $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 2$,
 $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$, $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 2$,
 $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$, $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 3$, ...

所以我們發現 36 和 48 的公倍數的質因數分解必須同時含有 $2 \times 2 \times 3 \times 3$ 和 $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$ 部分，故 36 和 48 的最小公倍數為

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^4 \times 3^2$$

若將 36 和 48 分作質因數分解，

$$\begin{aligned} 36 &= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \\ 48 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \end{aligned}$$

36 和 48 的最小公倍數「 $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^4 \times 3^2$ 」，是這兩數質因數分解算式的乘積，但共同質因數只乘一次。

- 短除法除了可作質因數標準分解，亦可用作計算兩數的最大公因數及最小公倍數，宜協助學生熟練短除法的編寫格式及因數判別法。例如：求出 36 和 48 的質因數分解及 36 和 48 的最大公因數和最小公倍數。

36 和 48 的最大公因數

找共同的 質因數	2	36	48	4 → 已互質
	2	18	24	
	3	9	12	
		3	4	

$$(36, 48) = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3 = 12$$

36 和 48 的最小公倍數

2	36	48
2	18	24
3	9	12
	3	4

$$\begin{aligned} [36, 48] &= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 4 \\ &= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 = 2^4 \times 3^2 \end{aligned}$$

- 在國小階段只將數分解成質因數之連乘積。相對地，國中階段更進一步將質因數之連乘積改以指數方式呈現。

(一) 最大公因數

在國小階段求最大公因數是從質因數之連乘積中找共同的質因數之乘積，國中階段則從質因數分解的標準分解式，從各個質因數的指數部分，取最小值部分的連乘積。例如：

$$a = 2^{m_1} \times 3^{m_2} \times 5^{m_3} \times \cdots \times p_k^{m_k}$$
$$b = 2^{n_1} \times 3^{n_2} \times 5^{n_3} \times \cdots \times p_k^{n_k}$$

其中 k 為正整數。對任何實數 m, n ，令 $\min(m, n)$ 代表為 m 和 n 的最小值，則 a 和 b 的最大公因數為

$$(a, b) = 2^{\min(m_1, n_1)} \times 3^{\min(m_2, n_2)} \times 5^{\min(m_3, n_3)} \times \cdots \times p_k^{\min(m_k, n_k)}$$

(二) 最小公倍數

在國小階段求兩數的最小公倍數是利用短除法先找出共同的質因數，再將共同的質因數乘上互質的部分，國中階段則從質因數分解的標準分解式，從各個質因數的指數部分，取最大值部分的連乘積。例如：

$$a = 2^{m_1} \times 3^{m_2} \times 5^{m_3} \times \cdots \times p_k^{m_k}$$
$$b = 2^{n_1} \times 3^{n_2} \times 5^{n_3} \times \cdots \times p_k^{n_k}$$

其中 k 為正整數。對任何實數 m, n ，令 $\max(m, n)$ 代表為 m 和 n 的最大值，則 a 和 b 的最小公倍數為

$$(a, b) = 2^{\max(m_1, n_1)} \times 3^{\max(m_2, n_2)} \times 5^{\max(m_3, n_3)} \times \cdots \times p_k^{\max(m_k, n_k)}$$

教學上，我們建議將「質因數的連乘積求最大公因數」與「質因數的標準分解式求最大公因數」兩種方法並列，幫助學生看到兩者的關聯，如下圖：

$$\begin{array}{l} 36 = \\ 48 = 2 \times 2 \times \end{array} \boxed{2 \times 2 \times 3} \times 3 \quad \begin{array}{l} 36 = \\ 48 = 2^2 \times \end{array} \boxed{2^2 \times 3} \times 3$$

同理，兩數的最小公倍數也建議仿照上述方法處理，如下圖。

$$\begin{array}{l} 36 = \boxed{} \times \boxed{2 \times 2 \times 3} \times \boxed{3} \\ 48 = \boxed{2 \times 2} \times \boxed{2 \times 2 \times 3} \times \boxed{3} \end{array} \qquad \begin{array}{l} 36 = \boxed{} \times \boxed{2^2 \times 3} \times \boxed{3} \\ 48 = \boxed{2^2} \times \boxed{2^2 \times 3} \times \boxed{3} \end{array}$$

- 本基本學習內容建議「當學生都理解上述最大公因數和最小公倍數的求法後，再介紹最大公因數和最小公倍數的關係式： $(a, b) \cdot [a, b] = ab$ 」，其中 (a, b) 和 $[a, b]$ 分別代表 a, b 的最大公因數和最小公倍數。不要只教授最大公因數求法，而以公式 $[a, b] = \frac{ab}{(a, b)}$ 處理 a, b 的最小公倍數的求法。理由為該公式只適合求兩數的最小公倍數，當求三數的最小公倍數時，並無變通的對應公式，學生容易產生迷思概念。
- 學生對於應用問題中，會誤判該求最大公因數或最小公倍數，建議教師可先幫助學生養成嘗試解題的能力。例如：「一長方紙張，其長 108 公分，寬 72 公分，今小禾欲將此紙張全部切成大小相同的正方形，且沒剩餘。試問：最少能切成幾個正方形？」教師教學時有兩種方式。
其一，可透過嘗試錯誤的解題方式，逐一檢驗，先假設正方形的邊長是 1 公分，發現滿足題意，再假設正方形的邊長是 2 公分，發現也滿足題意，就知道必須利用最大公因數的性質來解題；
其二，是技巧性判斷方式，因為 1 是任兩數的最小公因數，故判斷 1 是否合題意，若合題意，則該題就是求公因數題目，若不合題意，該題就是求公倍數題目。
建議教師帶領學生了解公因數是最大公因數的因數，且公倍數是最小公倍數的倍數。
- 本基本學習內容不要求學生計算某整數的因數個數及「因數和」。
- 本基本學習內容不介紹「輾轉相除法」求最大公因數。
- 學生利用短除法直接計算三個(含三個)以上整數的最大公因數和最小公倍數，常會計算錯誤。究其原因，短除法計算三數的最大公因數時，短除法最後中止於「三數的最大公因數為 1」。相對地，短除法計算三數的最小公倍數時，短除法最後中止於「任兩數的最大公因數為 1」(三數兩兩互質)。因此，學生常混淆其短除法的計算規則。

本基本學習內容建議解三數以上最大公因數時，學生可將三個數的因數均列出求解；亦可引導學生先找出兩數之公因數後，再檢驗這些公因數是否也為第三數的因數，找出三數的公因數。三數以上之最小公倍數亦然。

<p>N-7-3</p>	<p>負數與數的四則混合運算(含分數、小數)：使用「正、負」表徵生活中的量；相反數；數的四則混合運算。</p>	<p>n-IV-2</p>
---------------------	--	---------------

基本學習內容

- NC-7-3-1 正數、負數的意義。
- NC-7-3-2 相反數的意義。
- NC-7-3-3 數的四則混合運算。

基本學習表現

- NCP-7-3-1-1 認識生活中常有性質相反的數，若其中一數以 $+a$ 表示，則另一數以 $-a$ 表示。
- NCP-7-3-1-2 認識 0 不是正數，也不是負數。
- NCP-7-3-1-3 認識若 a 代表一數，則不一定是負數。此時若 a 為正數，則 $-a$ 為負數；若 a 為負數，則 $-a$ 為正數。
- NCP-7-3-1-4 認識若 a 代表一數，則 a 的相反數為 $-a$ ； $-a$ 的相反數為 a 。
- NCP-7-3-2-1 認識生活中常有性質相反的數，若其中一數以 $+a$ 表示，則另一數以 $-a$ 表示。
- NCP-7-3-2-2 認識相反數的性質： $a + (-a) = 0$ ； $(-a) + a = 0$ 。
- NCP-7-3-3-1 熟練 $a - b = a + (-b)$ ； $a - (-b) = a + [-(-b)] = a + b$ 。
- NCP-7-3-3-2 熟練 $(-a) - b = (-a) + (-b) = -(a + b)$ ；
 $(-a) - (-b) = (-a) + [-(-b)] = -a + b$
- NCP-7-3-3-3 熟練 $a \times (-b) = (-a) \times b = -(a \times b)$ ； $(-a) \times (-b) = a \times b$ 。
- NCP-7-3-3-4 認識 $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$)。
- NCP-7-3-3-5 認識若 a 、 b 、 c 為正整數，則帶分數
$$-a\frac{c}{b} = -a + (-\frac{c}{b}) = -a - \frac{c}{b}$$

例如： $-4\frac{2}{3} = -4 + (-\frac{2}{3}) = -4 - \frac{2}{3}$ 。

基本學習表現 (續)

NCP-7-3-3-6 認識若 a, b 為正整數或 0，則小數

$$-a.bc = -a + (-0.bc) = -a - 0.bc$$

例如： $-238.47 = -238 + (-0.47) = -238 - 0.47$ 。

NCP-7-3-3-7 熟練 $a \div b = a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$ ($b \neq 0$)。

NCP-7-3-3-8 熟練 $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ ($b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$)。

NCP-7-3-3-9 理解一個數加上(減去)另一個數後，不一定比原來的數大(小)，需視後者是正數或是負數才能決定。例如： $a + \text{正數} > a$ ，但是 $a + \text{負數} < a$ 。

NCP-7-3-3-10 理解四則混合運算「先乘除後加減、括號先算、由左而右」，運算次序的約定。

NCP-7-3-3-11 熟練數的四則混合運算。

◎ 本基本學習內容 NC-7-3-1 為首次引入負數，幫助學生理解正、負數的意義。

■ 本基本學習內容以實際數字講授為原則，不宜直接以符號教學。

■ 引入正數及負數時，教學活動應多舉「生活中性質相反」之例子，如方向、賺賠、盈餘不足等，舉例如下：

1. 若賺 500 記為「+500」，則賠 500 記為「-500」。

2. 若往右 40 記為「+40」，則往左記為「-40」。

■ 國中學習階段強調 0 為基準量，與國小學習階段 0 代表「沒有」的意義不同，教師能沿用正負數的例子做說明，例如：

1. 在賺賠例子中，0 為賺賠的基準量，0 表示為不賺不賠。

2. 在往左往右例子中，0 為往左或往右的基準點，0 表示在原點。

◎ 本基本學習內容 NC-7-3-2 為 NC-7-3-1 之後續學習概念，故學生已認識正、負數的意義。

本基本學習內容幫助學生認識相反數的意義。

- 相反數的關係之教學宜以實際數字舉例為原則。
- 教師可透過實際數字舉例，幫助學生觀察「 a 的相反數是 b 」、「 b 的相反數是 a 」、「 a 和 b 互為相反數」三者的意義相同。進而介紹，如果使用符號 $-a$ 來代表 a 的相反數，那麼 a 和 $-a$ 互為相反數。因此， $-(-a)$ 和 a 同時表示為 a 的相反數，故 $-(-a) = a$ 。 0 的相反數為 0 ，但教學時不宜拿來評量。

◎ 本基本學習內容 NC-7-3-3 為 RC-4-2-1、RC-5-2-1 之後續學習概念，故學生已能在正數的情境下掌握數的運算次序。
本基本學習內容幫助學生在負數的情境進行四則混合計算。

- 由於「負數的性質符號」與「運算中的減法符號」記法相同，因而對學生學習造成混淆，故教學活動宜協助學生區分「 $-$ 」在算式中所代表之意義。但不要求學生知道「性質符號」與「運算符號」的名詞。

- 「負負得正、負正得負」指的是運算過程所產生的性質，只在乘法運算及除法運算中使用。數學學習落後的學生在使用「負負得正、負正得負」口訣時，容易誤用在加法及減法的過程中，例如，計算 $-3 - 2$ 時，將兩個「 $-$ 號」變成一個「 $+$ 號」，所以得到 $3 + 2 = 5$ ，故建議讓學生學習「負負得正、負正得負」的口訣時應強調僅在乘法運算及除法運算中使用。

- 對於 $(-5) \times 3$ 和 $(-5) \times (-3)$ 的說明如下，可以使用水庫水位變化量來做解釋。假設水庫水位每天下降 5 公尺，我們記做 (-5) 。

1. $(-5) \times 3 = -15$ 可視為 3 天後水庫水位與現在相比的變化量為下降 15 公尺（現在水位位置記為 0 ）
2. $(-5) \times (-3) = 15$ 可視為三天前與現在相比水庫水位的變化量為上升 15 公尺。

- 本基本學習內容以整數為原則，偶爾引入負分數或負小數，但負分數及負小數之教學活動不宜將其視為「分配律」講授，建議於四則運算單元中進行教學活動。建議使用下列步驟說明負分數：

步驟一、「 4 和 $\frac{2}{3}$ 合起來為記作 $4\frac{2}{3}$ 」，想想看，「 -4 和 $-\frac{2}{3}$ 合起來為要怎麼記比較好？」進而幫助學生以「 $-4\frac{2}{3}$ 」方式紀錄「 -4 和 $-\frac{2}{3}$ 合起來」。

步驟二、「 $4\frac{2}{3}$ 是紀錄 4 和 $\frac{2}{3}$ 合起來」用算式記作

$$4\frac{2}{3} = 4 + \frac{2}{3}$$

那麼「 $-4\frac{2}{3}$ 是紀錄哪兩個數合起來，用算式怎麼記？」初期最好先不要省略括號，引導學生記作

$$-4\frac{2}{3} = (-4) + (-\frac{2}{3})$$

仿照上述方式，亦可利用「-5 與 -0.6 合起來的紀錄格式」來說明負小數 -5.6 的意義。

- 數的四則混合運算題目不宜太過複雜，建議佈題不宜超過三個步驟，即加法、減法、乘法及除法中僅選取其中四種運算進行佈題，各個步驟問題舉例如下表：

一步驟題目：題目中含一次運算符號	$-2 + 5 \cdot (-4) \times (-5)$
二步驟題目：題目中含二次運算符號	$5 \times (-3) - 2 \cdot 5 - 2 + 4$
三步驟題目：題目中含三次運算符號	$-(-2) + 5 \times (-3) - 2 \cdot 4 - (-5) \times (-3) + (-6)$

N-7-4	數的運算規律： 交換律；結合律；分配律； $-(a+b) = -a-b$ ； $-(a-b) = -a+b$	n-IV-2
--------------	--	--------

基本學習內容

NC-7-4-1 交換律、結合律及分配律。

NC-7-4-2 $a+b-c = a-c+b$ ； $a-(b+c) = a-b-c$ ； $a-(b-c) = a-b+c$ 。

基本學習表現

NCP-7-4-1-1 理解 $a+b = b+a$ ； $a \times b = b \times a$ 。

NCP-7-4-1-2 理解 $(a+b)+c = a+(b+c)$ ； $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ 。

NCP-7-4-1-3 理解 $(a+b) \times c = a \times c + b \times c$ ； $(a-b) \times c = a \times c - b \times c$ 。

NCP-7-4-1-4 理解 $c \times (a+b) = c \times a + c \times b$ ； $c \times (a-b) = c \times a - c \times b$ 。

NCP-7-4-1-5 能利用交換律、結合律、分配律來簡化計算。

NCP-7-4-2-1 理解 $a+b-c = a-c+b$ 。

NCP-7-4-2-2 理解 $a-(b+c) = a-b-c$ ； $a-(b-c) = a-b+c$ 。

◎ 本基本學習內容 NC-7-4-1 為 RC-2-2-1、NC-5-5-1、RC-5-2-1 之後續學習概念，故學生應該已經能理解正數的交換律、結合律及分配律，並能利用數的運算規律來簡化計算。

本基本學習內容幫助學生將交換律、結合律及分配律的範圍擴充至負數。

■ 本基本學習內容為代數運算不可或缺之前置經驗，必須要求學生熟練，才能順利銜接交換律、結合律及分配律的範圍擴充至未知數的教材。

■ 教學活動舉例或檢測宜以實際數字為原則，教學時可以引入交換律、結合律、分配律的名稱，但是不宜評量。

■ 在分配律中，乘法對加減法的分配律左右雙向都是滿足的，即

$$(a \pm b) \times c = a \times c \pm b \times c \quad \text{和} \quad c \times (a \pm b) = c \times a \pm c \times b$$

不過除法對加減法的分配律只有單方向滿足，即

$$(a \pm b) \div c = a \div c \pm b \div c \quad \text{但} \quad c \div (a \pm b) \neq c \div a \pm c \div b$$

所以，若要處理除法的分配律，可利用「乘以倒數」(即 $a \div b = a \times \frac{1}{b}$) 將其轉換至乘法，以避免發生錯誤。

- 關於 $a \times b \div c = a \div c \times b$ 、 $a \div b \div c = a \div (b \times c)$ ，在教學上可以利用「乘以倒數」來取代除法運算，再使用乘法的結合律即可，因此不強制要求學生記憶 $a \times b \div c = a \div c \times b$ 、 $a \div b \div c = a \div (b \times c)$ ，亦不宜列入評量。

- ◎ 基本學習內容 NC-7-4-2 為 NC-7-4-1 之後續學習概念，故學生應該已經能理解數的交換律、結合律及分配律，並能利用數的運算規律來簡化計算。

本基本學習內容在交換律、結合律及分配律之基礎下，探討形如

$$a + b - c = a - c + b、a - (b + c) = a - b - c、a - (b - c) = a - b + c$$

之運算規則。

- 關於 $a - (b + c) = a - b - c$ 、 $a - (b - c) = a - b + c$ 的教學，可引入簡單的生活情境幫助學生理解，下面舉兩個例子分別說明。

釋例：

以問題「庭庭帶了 100 元到合作社買了一支 15 元的黑輪和一瓶 25 元的牛奶，請問結帳後找回多少錢？」為例說明 $a - (b + c) = a - b - c$ 。

本問題有兩種計算方法：

方法一：先算買兩樣總共要花多少元，即

$$100 - (15 + 25) = 100 - 40 = 60$$

方法二：先算只買黑輪後剩下多少元，即

$$100 - 15 - 25 = 85 - 25 = 60$$

亦即 15 元和 25 元可以先合併成 40 元再一起減，也可以分開來一個一個減。學生理解此概念「 $100 - (15 + 25) = 100 - 15 - 25$ 」有兩個層次：

層次一、算出答案才發現兩式相等：

此層次的學生需要依序用方法一和方法二都計算出答案 60，查覺到這兩個算式 $100 - (15 + 25)$ 和 $100 - 15 - 25$ 都等於 60，故

$$100 - (15 + 25) = 60 = 100 - 15 - 25$$

層次二、不用算出答案就預期兩式相等:

此層次的學生只需要理解方法一和方法二都是正確的算法，因為原問題的答案只有一個，故不用算出答案就知道

$$100 - (15 + 25) = 60 = 100 - 15 - 25$$

釋例：

以問題「漢漢帶了 100 元到麵包店買了一袋 50 元的麵包，結帳時老闆說晚間 8 點過後有折扣，少收 10 元，請問結帳後可找回多少錢？」為例說明 $a - (b - c) = a - b + c$ 。

本問題有兩種計算方法：

方法一：先算有折扣時麵包的價錢，即

$$100 - (50 - 10) = 100 - 40 = 60$$

方法二：先算沒有折扣時買完剩下多少元，即

$$100 - 50 + 10 = 50 + 10 = 60$$

同樣地，學生理解此概念「 $100 - (50 - 10) = 100 - 50 + 10$ 」亦有兩個層次：

層次一、算出答案才發現兩式相等:

此層次的學生需要依序用方法一和方法二都計算出答案 60，查覺到這兩個算式 $100 - (50 - 10)$ 和 $100 - 50 + 10$ 都等於 60，故

$$100 - (50 - 10) = 60 = 100 - 50 + 10$$

層次二、不用算出答案就預期兩式相等:

此層次的學生只需要理解方法一和方法二都是正確的算法，因為原問題的答案只有一個，故不用算出答案就知道

$$100 - (50 - 10) = 100 - 50 + 10$$

對於每一條運算規律，學生都必需達到層次二才能理解，學生理解後進行熟練運算規律的教學，才有意義。

- 關於 $-(a + b)$ 、 $-(a - b)$ 這類的問題，原本括號前方的「-」是性質符號，我們可將其轉換為運算符號，即

$$-(a + b) = 0 - (a + b) = 0 - a - b = -a - b$$

$$-(a - b) = 0 - (a - b) = 0 - a + b = -a + b$$

藉此銜接 $a - (b + c) = a - b - c$ 、 $a - (b - c) = a - b + c$ 的教學。

<p>N-7-5</p>	<p>數線：擴充至含負數的數線；比較數的大小；絕對值的意義；以 $a - b$ 表示數線上兩點 a, b 的距離</p> <p>備註：絕對值引入的目的用於記錄數線上兩點的距離，不處理絕對值方程式和絕對值不等式。</p>	<p>n-IV-2</p>
---------------------	---	---------------

基本學習內容

- NC-7-5-1 數與數線的對應關係。
- NC-7-5-2 絕對值的意義與計算。
- NC-7-5-3 數線上兩點的距離公式

基本學習表現

- NCP-7-5-1-1 理解在數線上，0 的位置稱為原點，以 O 表示。
- NCP-7-5-1-2 理解若 A 為數線上原點右方的點，且距離原點 a （正數）個單位長，則 A 所對應的數為 a ，以 $A(a)$ 表示；若 A 為數線上原點左方的，且距離原點 a （正數）個單位長，則 A 所對應的數為 $-a$ ，以 $A(-a)$ 表示。
- NCP-7-5-1-3 理解若 a 不為 0，在數線上 a 與 $-a$ 所對應的點和原點距離相同但方向相反。
- NCP-7-5-1-4 能利用兩數在數線上相對的位置，判別該兩數的大小關係。
- NCP-7-5-2-1 理解某數的絕對值可表示為該數在數線上所對應的點與原點的距離。
- NCP-7-5-2-2 理解在數線上，兩數所對應的點距離原點愈遠者，則其絕對值愈大。
- NCP-7-5-2-3 熟練絕對值的計算。
- NCP-7-5-3-1 理解在數線上 $A(a)$ 、 $B(b)$ 兩點的距離為 $|a - b|$ 或 $|b - a|$ 。
- NCP-7-5-3-2 熟練利用兩點的距離公式求數線上兩點的距離。

◎ 基本學習內容 NC-7-5-1 為國小 NC-4-10-1 之後續學習概念，故學生已認識分數及小數數線。

本基本學習內容幫助學生建立正、負數及 0 與數線的對應關係。

■ 國小階段討論的對象是全數（自然數和 0 的聯集），0 是沒有的意思，例如 0 個蘋果指的是沒有蘋果；國中階段討論的對象是整數，0 並不是沒有，而是基準上的定

位，例如攝氏 0 度並不是沒有溫度，而是水結冰的溫度。

建議教師引入含負數的數線時，先溝通整數數線上原點 0 的意義。

- 在數線上，雖然點與數為兩不相同卻關連密切的概念，但教學活動不宜特別強調它們之差異，學生只需能應用自如即可。例如：數線上一點 A ，其坐標為 a ，我們可以記成 $A(a)$
- 在數線上標示數的位置時，相對應的點應有明確的刻度，例如標示小數 2.3 時，2 和 3 之間應有 10 等分的刻度，標示分數 $-2\frac{3}{4}$ 時，-2 和 -3 間應有 4 等分之刻度。
- 在數線上，小數的標示以一位為原則，分數的分母應以 2、3、4、10 為原則。例如： $\frac{23}{10}$ 或 $-4\frac{2}{3}$ 或 -3.6。

◎ 基本學習內容 NC-7-5-2 首次引入絕對值，幫助學生理解絕對值的意義及計算。

- 絕對值內容以整數為原則。
- 先建立某數的絕對值是指該數在數線上所對應的點與原點 0 的距離，由此幾何意義轉化成其計算法則，即
 - 當 $a = 0$ 時， $|a| = |0| = 0$
 - 當 $a > 0$ 時， $|a| = a$ ，例如： $a = 2$ 則 $|a| = |2| = 2 = a$
 - 當 $a < 0$ 時， $|a| = -a$ ，例如： $a = -2$ 則 $|a| = |-2| = 2 = -(-2) = -a$
- 絕對值內之算式不宜過度複雜，若使用分數，其分母應盡量簡單，通分後的最小分母不要超過 60。
- 本基本學習內容絕對值的運算以整數為原則，引入分數或小數時，小數以一位小數為原則，分數的分母應以 2、4、5、10 為原則。
- 本基本學習內容不進行計算雙層絕對值之教學，例如： $2 - |1 + |5 - 7||$ 。
- 絕對值算式中不宜使用未知數，以致學生無法直接計算絕對值的值，例如： $|a - 7|$ 等。至於絕對值代數式求解問題，更不應在本基本學習內容中出現。

- ◎ 基本學習內容 NC-7-5-3 為 NC-3-11-1 之後續學習概念，學生應該已能利用減法求全數數線上兩點的距離。

本基本學習內容引入兩點的距離公式，幫助學生計算整數數線上兩點的距離。

- 「數線上兩點的距離」對後續「直角坐標兩點的距離」等概念尤為重要，故需要求學生瞭解本概念，特別是「正、負」數混雜的情形。例如：

1. 兩數坐標皆為正數：

例如：數線上 $A(4)$ 和 $B(1)$ 的距離為

$$\overline{AB} = (A\text{到原點的距離}) - (B\text{到原點的距離}) = 4 - 1 = 3$$

所以可以用大數減小數得到距離 \overline{AB} 。

2. 兩數坐標為異號數：

例如：數線上 $C(-2)$ 和 $D(4)$ 的距離為

$$\overline{CD} = (C\text{到原點的距離}) + (D\text{到原點的距離}) = 2 + 4 = 6$$

而 $2 + 4 = 4 - (-2) = 4 + 2 = 6$ ，所以也可以用大數減小數得到距離 \overline{CD} 。

3. 兩數坐標皆為負數：

例如：數線上 $E(-1)$ 和 $F(-5)$ 的距離為

$$\overline{EF} = (F\text{到原點的距離}) - (E\text{到原點的距離}) = 5 - 1 = 4$$

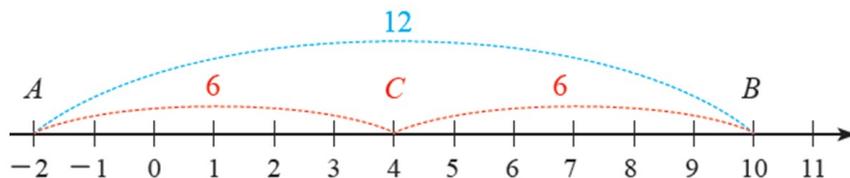
而 $5 - 1 = (-1) - (-5) = 4$ ，所以也可以用大數減小數得到距離 \overline{EF} 。

由於大數減小數必為正數，若是小數減大數則為大數減小數結果的相反數，所以不管是兩點坐標誰大誰小，此兩點坐標相減的兩種結果必互為相反數，我們可以將兩點坐標相減結果加上絕對值便可代表此兩點在數線的距離。

學生已理解「 $|a|$ 為 a 和原點的距離」及「 $|a - b|$ 為 a 和 b 的距離」，教師應幫助學生察覺 $|a| = |a - 0|$ 的幾何意義。

- 「數線上兩點的距離」是「直角坐標兩點的距離」的先備知識，故本基本學習內容要求學生熟練利用兩點距離公式求數線上兩點的距離，特別是「正、負」數混雜的情形。

- 針對「數線上兩點的中點坐標」，本基本學習內容之教學活動應以數字實例結合數線輔助說明在數線上與某兩點距離相等的點代表此兩點的中點。例如：數線上兩點 $A(-2)$ 及 $B(10)$ ， $\overline{AB} = 10 - (-2) = 12$ ，設 A 和 B 的中點為 C ，因為 $\overline{AC} = \overline{BC} = \overline{AB} \times \frac{1}{2} = 6$ ，所以中點 C 的坐標可由 A 點右移 6 單位 ($-2 + 6 = 4$) 或由 B 點左移 6 單位 ($10 - 6 = 4$) 得到中點 $C(4)$ 。



<p>N-7-6</p>	<p>指數的意義：指數為非負整數的次方；$a \neq 0$ 時 $a^0 = 1$ ；同底數的大小比較；指數的運算。</p>	<p>n-IV-3</p>
---------------------	--	---------------

基本學習內容

NC-7-6-1 a^n 的意義 (n 為非負整數)。

基本學習表現

NCP-7-6-1-1 理解 $a^n = \overbrace{a \times a \times \dots \times a}^{n \text{ 個}}$ (n 為正整數)。

NCP-7-6-1-2 理解若 n 為奇數，則 $(-a)^n = -a^n$ ；若 n 為偶數，則 $(-a)^n = a^n$ 。

NCP-7-6-1-3 理解當 $0 < a < 1$ 時，若 $m > n$ 則 $a^m < a^n$ ；當 $a > 1$ 時，若 $m > n$ 則 $a^m > a^n$ 。

NCP-7-6-1-4 理解含指數的四則混合運算。

NCP-7-6-1-5 理解包含指數的計算式時，指數的運算順序優先於四則運算。

◎ 基本學習內容 NC-7-6-1 為 NC-2-6-1 之後續學習概念，故學生應該已經能將連加的算式改記成乘法算式。本基本學習內容將某數的連乘積記為指數的形式。

■ 本基本學習內容指數的底數限制在有理數的範圍中，次方僅限於非負整數。

■ 單元為學生第一次接觸指數，為幫助其理解，可透過「某數連加可簡記為乘法」來類比「某數連乘可簡記為指數」，讓學生知道指數是一種簡記的方法。

例如：

$$\overbrace{3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3}^{6 \text{ 個 } 3 \text{ 連加}} = 3 \times 6$$

$$\overbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}^{6 \text{ 個 } 3 \text{ 連乘}} = 3^6$$

- 本基本學習內容宜包含底數為分數及負數之 n 次方，如：

$$\begin{aligned} \left(\frac{b}{a}\right)^n &= \overbrace{\left(\frac{b}{a}\right) \times \left(\frac{b}{a}\right) \times \dots \times \left(\frac{b}{a}\right)}^{n \text{ 個}} = \left(\frac{b}{a}\right)^n \\ (-a)^n &= \overbrace{(-a) \times (-a) \times (-a) \times \dots \times (-a)}^{n(\text{奇數}) \text{ 個}} = -a^n \quad (n \text{ 為奇數時}) \\ (-a)^n &= \overbrace{(-a) \times (-a) \times (-a) \times \dots \times (-a)}^{n(\text{偶數}) \text{ 個}} = a^n \quad (n \text{ 為偶數時}) \end{aligned}$$

上述教學活動宜以實際數字進行說明，例如：

$$\begin{aligned} (-3)^3 &= (-3) \times (-3) \times (-3) = -3 \times 3 \times 3 = -3^3 \\ (-3)^5 &= (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = -3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = -3^5 \\ (-3)^2 &= (-3) \times (-3) = 3 \times 3 = 3^2 \\ (-3)^4 &= (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 \end{aligned}$$

不應使用抽象符號，評量亦然。

- 關於 -3^2 這類指數前方出現負號的問題，學生常搞混運算的順序，教師宜跟學生說明，這裡其實是省略了一個括號，我們習慣將 $-(3^2)$ 的括號省略後記為 -3^2 ，因此在計算 -3^2 時，次方的順序優先於負號。同樣地，因為次方的順序優先於負號，也應該跟學生說明 $(-3)^2$ 的括號不能省略。教師亦可在遇到相關問題時，都協助學生將括號補上，以避免學生搞混運算順序。
- 教師宜多舉例強調，進行包含指數的式子運算時，若有括號則括號先算，沒有括號時，指數運算優先於四則運算，例如：

$$\begin{aligned} -3^2 &= -(3)^2 = -(3 \times 3) = -9 \\ 2 \times 3^4 &= 2 \times (3)^4 = 2 \times (3 \times 3 \times 3 \times 3) = 162 \\ 6 \div 3^4 &= 6 \div (3^4) = 6 \div (3 \times 3 \times 3 \times 3) = \frac{2}{27} \\ 5 + 3^4 &= 5 + (3^4) = 5 + (3 \times 3 \times 3 \times 3) = 86 \end{aligned}$$

- 本基本學習內容之指數 n 不宜太大，宜限制在 5 以內。
- 本基本學習內容先不處理 $a^0 = 1$ ($a \neq 0$)，待後續談指數律時再引入較為合適。

N-7-7	<p>指數律：以數字例表示「同底數的乘法指數律」 $(a^m \times a^n = a^{m+n}$、$(a^m)^n = a^{mn}$、$(a \times b)^n = a^n \times b^n$，其中 m, n 為非負整數)；以數字例表示「同底數的除法指數律」 $(a^m \div a^n = a^{m-n}$，其中 $m \geq n$ 且 m, n 為非負整數)。</p>	n-IV-3
--------------	---	--------

基本學習內容

NC-7-7-1 乘法指數律。

NC-7-7-2 除法指數律。

基本學習表現

NCP-7-7-1-1 理解 $a^m \times a^n = a^{m+n}$ 。

NCP-7-7-1-2 理解 $(a^m)^n = a^{mn}$ 。

NCP-7-7-1-3 理解 $(a \times b)^n = a^n \times b^n$ 。

NCP-7-7-2-1 理解 $a^m \div a^n = a^{m-n}$ ，其中 $m \geq n$ 。

NCP-7-7-2-2 理解 $a^0 = 1$ ($a \neq 0$)。

◎ 基本學習內容 NC-7-7-1、NC-7-7-2 為 NC-7-6-1 之後續學習概念，故學生應該已經能理解指數的意義及其運算。

本基本學習內容探討同底數的乘法指數律及同底數的除法指數律。

■ 本基本學習內容運算前、後的指數次方、運算結果的指數次方皆限制在非負整數的範圍內。例如 $3^3 \div 3^5 = 3^{-2}$ 也不在此討論

■ 教學活動宜以實際數字進行說明，例如

$$3^3 \times 3^4 = (3 \times 3 \times 3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3) = 3^{3+4}$$

不應使用抽象符號，評量亦然。

■ 本基本學習內容宜包含底數為分數及負數之 n 次方，但教學活動建議先以底數為正整數、正分數進行探討，再擴展至負整數、負分數的範疇。

- 若從指數的意義來談 $a^0 = 1$ ($a \neq 0$)，學生可能較難理解，因此可於學生理解除法指數律之後，引導學生思考次方不為正整數的可能性。例如若是遇到 $3^4 \div 3^4$ 這類問題，依照指數律規則我們應該將其記為

$$3^4 \div 3^4 = 3^{4-4} = 3^0$$

若是實際進行除法，則是

$$3^4 \div 3^4 = 81 \div 81 = 1$$

因此我們知道 $3^0 = 1$ ；故 $a^0 = 1$ 的出現，可視為是 $a^n \div a^n$ 的結果，所以 $a^0 = 1$ ，但是 0 不能當除數，故排除 $a = 0$ 的情況。

N-7-8	<p>科學記號：以科學記號表達正數，此數可以是很大的數(次方為正整數)，也可以是很小的數(次方為負整數)。</p> <p>備註：本條目旨在科學記號的了解與使用，例如 1 奈米等於 10^{-9} 公尺，其中含有負數次方的部分，可以使用小數與之轉換來解釋，不宜牽涉到其他底數的負次方，也不宜涉及科學記號的四則運算。</p>	n-IV-3
--------------	---	--------

基本學習內容

NC-7-8-1 科學記號表示法。

基本學習表現

NCP-7-8-1-1 理解若 n 為正整數，則 $10^n = \overbrace{10 \times 10 \times 10 \times \cdots \times 10}^{n \text{ 個「10」}} = \overbrace{100 \cdots 0}^{n \text{ 個 } 0}$ 。

NCP-7-8-1-2 理解若 n 為正整數，則 $10^{-n} = \frac{1}{10^n} = 0.\overbrace{00 \cdots 0}^{n-1 \text{ 個 } 0}1$ 。

NCP-7-8-1-3 認識科學記號的名稱；理解科學記號表示法是將正數表示成 $a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq a < 10$ ， n 為整數。

NCP-7-8-1-4 能將正數用科學記號表示。

NCP-7-8-1-5 能寫出科學記號 $a \times 10^n$ 所代表的數。

NCP-7-8-1-6 能比較兩科學記號所代表的數之大小。

- ◎ 基本學習內容 NC-7-8-1 為 NC-7-6-1 和 NC-7-7-2 之後續學習概念，故學生應該已經能理解指數的記法及 $10^0 = 1$ 。
本基本學習內容將正數以科學記號表示。

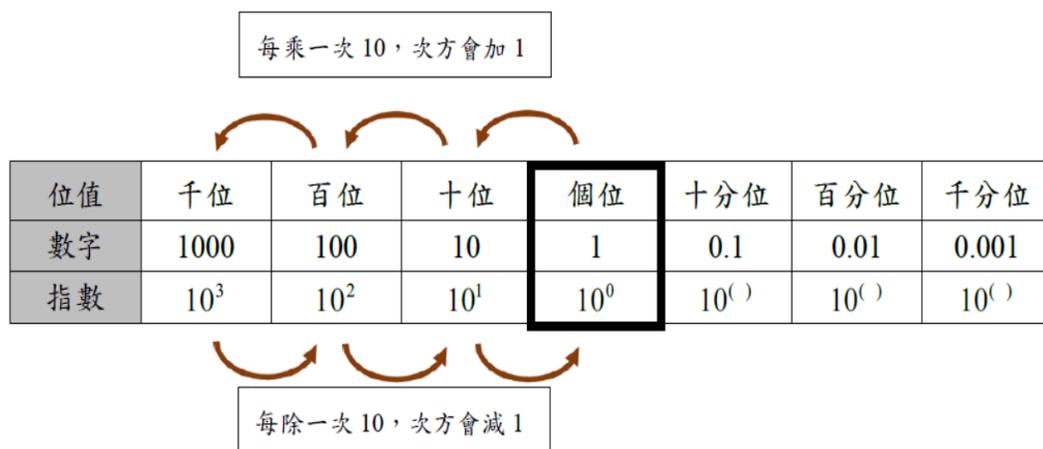
- 本基本學習內容僅限於科學記號的了解與使用，且只處理以 10 為底的負次方，也不宜涉及科學記號的四則運算。
- 對於 10^{-n} 之引入，可透過下列程序進行引導：
 - (1) 我們先來看位值之間的關係，整數系統中有「個位、十位、百位、千位」，小數系統中有「十分位、百分位、千分位」，我們發現這些位值是以個位為對稱中心左右對稱，個位的左邊是十位、個位的右邊是十分位，十位的左邊是百位、十分位的右邊是百分位…依此類推。

位值	千位	百位	十位	個位	十分位	百分位	千分位
----	----	----	----	-----------	-----	-----	-----

(2) 接著來看數字之間的關係，10 可以看成是個位 1 往左進一位到十位，個位補一個 0，而 0.1 是 1 往右退一位到十分位，個位補一個 0(並在個位後方點小數點)，同樣是以**個位**為對稱中心，這是因為數字的單位是 1，而記幾個 1 的位置是個位，因此個位才是數字的對稱中心。

位值	千位	百位	十位	個位	十分位	百分位	千分位
數字	1000	100	10	1	0.1	0.01	0.001

(3) 最後我們來看指數記法，我們知道 $10 = 1 \times 10$ ，記為 10^1 ， $100 = 1 \times 10 \times 10$ ，記為 10^2 ， $1000 = 1 \times 10 \times 10 \times 10$ ，記為 10^3 ，在以 10 為底的晉級標準中，每乘一次 10 就會晉一級，次方會加 1，反過來說，每除一次 10 就會降一級，次方會減 1，依照此規律來看，1 應該要記為 10 的幾次方較為合理呢？0.1 又可以記為 10 的幾次方呢？



透過上述引導，先讓學生理解 $1 = 10^0$ 、 $0.1 = 10^{-1}$ 、 $0.01 = 10^{-2}$ ……，最後再觀察指數間的關係，可以發現依舊是以**個位**為對稱中心，個位 1 記為 10^0 ，十位和十分位分別記為 10^1 和 10^{-1} ，百位和百分位分別記為 10^2 及 10^{-2} ……，指數、數字及位值的脈絡是一致的。

(4) 從上述脈絡可以接著談位數，由於數字是以個位為對稱中心，因此 10^n ($n \geq 0$) 是指 1 往左進 n 位，後面補 n 個 0 到個位，於是 10^n ($n \geq 0$ 時) 會有 $n + 1$ 位

數，例如 $10^7 = 10000000$ ，是一個 8 位數；而 10^n ($n \leq 0$ 時) 是指 1 往右退 n 位，前面補 n 個 0 到個位，並在個位後方點小數點，於是 10^n ($n \leq 0$ 時) 其小數點後第 n 位始不為 0 (因為不包含個位)，例如 $10^{-7} = 0.0000001$ ，小數點後第 7 位始不為 0

- 進行科學記號的教學時，有部分學生常出現 $12300000 = 123 \times 10^5$ 的謬誤，這裡應該讓學生知道，我們將一個正數表為 $a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq a < 10$ ，是為了正確判斷其位數 ($n \geq 0$ 時) 或是小數點後第幾位始不為 0 ($n < 0$ 時)，例如某數的科學記號為 4.78×10^6 ，我們不必將此數還原，便能透過 10^6 判斷此數為 7 位數 (因為 10^6 的 4.78 倍不會影響其位數)。
- 本基本學習內容為國、高中物理及化學常用的數量表示法，亦為高中對數單元學習首數、尾數的基礎，因此宜協助學生能將正數轉換為科學記號。

<p>N-7-9</p>	<p>比與比例式：比；比例式；正比；反比；相關之基本運算與應用問題，教學情境應以有意義之比值為例。 備註：不涉及使用繁分數，遇到兩分數之比時，以分數相除處理之。</p>	<p>n-IV-4 n-IV-9</p>
---------------------	---	--------------------------

基本學習內容

- NC-7-9-1 比與比值。
- NC-7-9-2 正比與反比。
- NC-7-9-3 比例式的基本運算。

基本學習表現

- NCP-7-9-1-1 理解比的名稱、意義與記法。
- NCP-7-9-1-2 理解比值的名稱與意義。
- NCP-7-9-1-3 理解比例式 ($a : b = c : d$) 的名稱、意義與記法。
- NCP-7-9-1-4 理解最簡單整數比。
- NCP-7-9-2-1 理解正比的名稱與意義。
- NCP-7-9-2-2 認識反比的名稱與意義。
- NCP-7-9-3-1 能解決生活情境中有關比例的問題。
- NCP-7-9-3-2 認識：若 $a : b = c : d$ ，則 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 或 $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ 。
- NCP-7-9-3-3 認識：若 $a : b = c : d$ ，則 $ad = bc$ 。
- NCP-7-9-3-4 認識：若 $a : b = c : d$ ，則 $a : c = b : d$ 。
- NCP-7-9-3-5 認識：若 $a : b = c : d$ ，則 $a = ck, b = dk (k \neq 0)$ 。

◎ 基本學習內容 NC-7-9-1 為 NC-6-6-1 (比與比值) 之後續學習概念，故學生已了解異類量的比與同類量的比之比值的意義。

本基本學習內容要幫助學生理解比、比值和比例式的名稱、意義與記法。

■ 在比例概念的教學與題目設計，以簡單數值為主。

■ 比例式常用來表明數量間的比例關係，和其關係密切的有比值、倍數的概念。

- 比值的定義： $a:b = \frac{a}{b}:1$ ， $\frac{a}{b}:1$ 的前項為 $a:b$ 的比值，可利用 $a \div b$ 算出比值。
- 利用紅茶與牛奶的列表，可以列成比的算式，並察覺紅茶與牛奶的份量（比值）是不變的（比的相等），並利用此數量關係來解題。

- (1) 「200 公升的紅茶和 120 公升的牛奶」、「50 公升的紅茶和 30 公升的牛奶」、「5 公升的紅茶和 3 公升的牛奶」、「 $\frac{5}{12}$ 公升的紅茶和 $\frac{1}{4}$ 公升的牛奶」、「0.5 公升的紅茶和 0.3 公升的牛奶」、
 這樣所調製出的奶茶口味都一樣。

紅茶	牛奶
200 公升	120 公升
50 公升	30 公升
5 公升	3 公升
$\frac{5}{12}$ 公升	$\frac{1}{4}$ 公升
0.5 公升	0.3 公升

- (2) 「200 : 120」、「50 : 30」、「5 : 3」、「 $\frac{5}{12} : \frac{1}{4}$ 」、「0.5 : 0.3」是相等的比。
 「50 : 30」比「200 : 120」簡單，
 「5 : 3」比「50 : 30」簡單，
 「5 : 3」比「 $\frac{5}{12} : \frac{1}{4}$ 」簡單，
 「5 : 3」比「0.5 : 0.3」簡單，
 5 和 3 互質，不能再記成更簡單的整數比，我們稱「5 : 3」為這些比中的「最簡單整數比」。

- (3) 上表中口味相同的奶茶，都可以看成 5 份紅茶和 3 份牛奶所調製而成的，可以用最簡單整數比「紅茶：牛奶 = 5 : 3」來表示上表中調製奶茶的方法。

例如：

「200 : 120 = 5 : 3」，指的是紅茶 5 份，牛奶 3 份，每 1 份是 40 公升。

「50 : 30 = 5 : 3」，指的是紅茶 5 份，牛奶 3 份，每 1 份是 10 公升。

「0.5 : 0.3 = 5 : 3」，指的是紅茶 5 份，牛奶 3 份，每 1 份是 0.1 公升。

- (4) 當學生可以理解「紅茶：牛奶 = 5 : 3」中的 5 和 3 的意義，就可以引入

$$\text{「紅茶} = 5k, \text{牛奶} = 3k\text{」}$$

來表示份量。

■ 用比值或倍數關係解決相等的比的問題：

例如：「5 杯木瓜牛奶賣 250 元，500 元可以買幾杯木瓜牛奶？」

引導學生用 \square 表示 500 元買的杯數，由杯數比價錢的方式，可以列出如下相等的比的算式， $250 : 5 = 500 : \square$ ， \square 要填入多少？可以利用單價法或倍數法的概念來解決。

(1) 利用單價法的想法：

因為單價 $= 250 \div 5 = 50$ ，所以 $500 \div 50 = 10$ (杯)。

(2) 利用倍數法的想法：

$500 \div 250 = 2$ ，所以 $5 \times 2 = 10$ (杯)。

◎ 基本學習內容 NC-7-9-2 為 NC-7-9-1 之後續學習概念，故學生已理解比、比值和比例式的名稱、意義與記法。

■ 「正比」和「比或比值」的關係密切，比的相等關係強調將相比的兩類量寫在一起，直覺上較簡單；而正比則是兩類量關係中的一種，應採用列表的方式記錄，並強調要使用比值來記錄正比關係，兩者間的關係，可運用列表的方式來統整。

竹竿長(公分)	40	50	60	70	80	90	100
影子長(公分)	20	25	30	35	40	45	50

下面以同學們同時量出不同長度的竹竿和對應影子長度的表格來說明：

我們可以透過比或比值的方式來表示不同長度的竹竿和對應影子長度的關係。

(1) 利用最簡單整數比「竹竿長：影子長 = 2 : 1」來表示：竹竿和對應影子長度的對應關係可以記成「40 : 20」、「50 : 25」、…、「100 : 50」，它們都是相等的比，可以利用最簡單整數比「竹竿長：影子長 = 2 : 1」來表示。

(2) 利用比值「竹竿長：影子長 = 2」來表示：「40 : 20」、「50 : 25」、…、「100 : 50」這些相等的比的比值都是 2，可以透過比值「竹竿長：影子長 = 2」來表示這些相等的比，也可以說成「竹竿長是影子長的 2 倍」。

■ 成正比是兩個集合間特殊的對應關係，下面都是成正比的定義。

(1) 竹竿的長度和對應影子的長度同時改變，而它們的比值不變，數學上稱竹竿的長度和影子的長度「成正比」或「成正比例」。

(2) 形如「 $y = kx$ 」的函數，數學上稱之為成正比。

(3) 如果函數的圖形是過原點的直線，數學上稱之為成正比。

■ 反比問題的情境較為困難，不宜過度評量

■ 反比的定義有兩種

(1) $y \times x = k$ ， y 和 x 相乘成定值，稱 y 和 x 成反比。

(2) $y = \frac{1}{x}k$ ， y 和 x 的倒數成正比，則稱 y 和 x 成反比。

建議老師要引入第二種，讓學生看到反比跟正比，是相同的關係。

■ 比例問題情境不宜過度複雜，應能直接使用問題所提供的「比」求解為原則。例如：小安騎自行車，以每分鐘 0.25 公里的速率行進，如果以 x （分鐘）表示他騎乘的時間，以 y （公里）表示他所騎乘的距離，請將正確答案填入下列表格中，並判斷 x 、 y 是否成正比。

x （分鐘）	1	2	3	4			a
y （公里）	0.25				2.5	5	

◎ 基本學習內容 NC-7-9-3 為 NC-7-9-1、NC-7-9-2 之後續學習概念，故學生已理解比、比值、比例式、正比與反比的名稱、意義與記法。

本基本學習內容幫助學生理解最簡單整數比，及解決生活情境中有關比例的問題。

■ 在進行「 $a:b=c:d$ 相當於 $a \times d = b \times c$ 」的教學時，可由兩種方式來說明：

(1) 利用倍數的想法：

利用擴分同乘的概念得出 $a \times c : b \times c = c \times a : d \times a$ ，故 $b \times c = d \times a$ 。

(2) 利用比值的想法：

因比值相等 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ，利用通分的概念 $\frac{a \times d}{b \times d} = \frac{c \times b}{d \times b}$ ，故 $a \times d = b \times c$

若讓學生背誦「內項乘積 = 外項乘積」，容易造成學生三個以上連比概念的錯誤換算。

S-7-1	簡單圖形與幾何符號 ：點、線、線段、射線、角、三角形與其符號的介紹。	s-IV-1
--------------	---	--------

基本學習內容

SC-7-1-1 簡單圖形與常用符號，如點、線、線段、射線、角、三角形的意義、符號及記法。

基本學習表現

SCP-7-1-1-1 認識點、直線、線段、射線、角、三角形等的意義。

SCP-7-1-1-2 能用符號記錄點、直線、線段、射線、角、三角形等。

SCP-7-1-1-3 認識簡單圖形的意義

◎ 基本學習內容 SC-7-1-1 是國中幾何的基礎，學生在後續幾何單元的學習皆需用到，故教師應檢查學生是否掌握簡單圖形的意義與常用符號的記法。

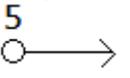
■ 國小學過的簡單圖形如下：

三角形：正三角形、直角三角形、銳角三角形、鈍角三角形、等腰三角形、等腰直角三角形。

四邊形：正方形、長方形、菱形、平行四邊形、梯形、等腰梯形。

多邊形：正五邊形、正六邊形

■ 本基本學習不引入半線的名詞及符號。

例如：有半線的圖形 ，但不引入半線的名詞。

S-7-2	三視圖： 立體圖形的前視圖、上視圖、左（右）視圖。立體圖形限制內嵌於 $3 \times 3 \times 3$ 的正方體且不得中空。	s-IV-16
-------	--	---------

基本學習內容

SC-7-2-1 立體形體的三視圖。

基本學習表現

SCP-7-2-1-1 認識立體圖形的前視圖、上視圖、左（右）視圖。

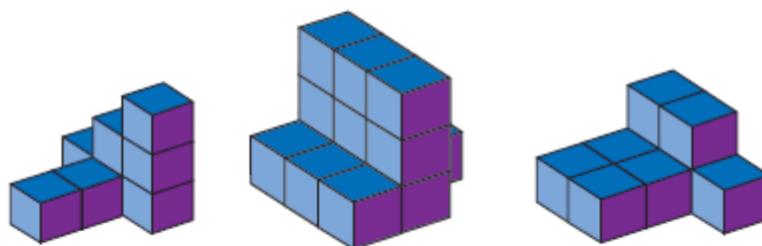
SCP-7-2-1-2 繪製立體圖形的前視圖、上視圖、左（右）視圖。

SCP-7-2-1-3 給定一立體圖形，理解各視圖間的關係，例如前視圖和後視圖、左視圖與右視圖均有全等的關係。

◎ 基本學習內容 SC-7-2-1 為 SC-6-4 的後續學習概念，故學生應具備立體形體表面積的概念並知道正方體與長方體其上下、左右、前後兩面的關係。本基本學習內容使用積木引入立體形體的三視圖。

■ 複合形體的表面積

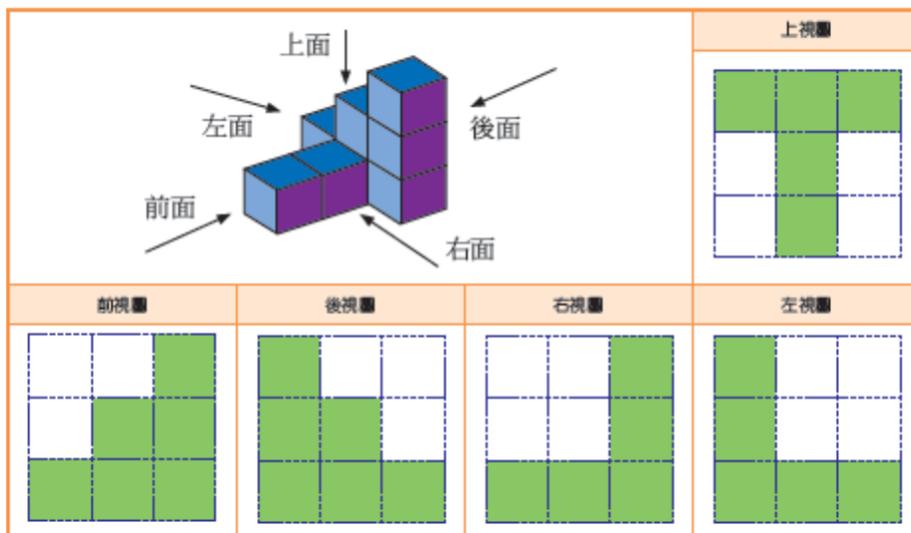
立體圖形限制內嵌於 $3 \times 3 \times 3$ 的正方體且不得中空。



■ 教師不宜提供視圖要求學生重製立體圖形。

■ 給定立體圖形（積木）的前（左）視圖，能透過觀察找出其對應的後（右）視圖。

- 給定立體形體引導學生討論此立體形體的樣貌，教師宜先進行溝通立體形體的前後、上下、左右的位置，希望學生描述立體形體時能從前視圖開始觀察，並學習前視圖、上視圖、左（右）視圖的概念進而理解三視圖間的關係。



S-7-3	垂直：垂直的符號；線段的中垂線；點到直線距離的意義。	s-IV-3
-------	----------------------------	--------

基本學習內容

SC-7-3-1 線段中點及中垂線的意義。

SC-7-3-2 點到直線距離的意義。

基本學習表現

SCP-7-3-1-1 認識垂直的符號。

SCP-7-3-1-2 認識線段中點及中垂線的名稱及意義。

SCP-7-3-2-1 認識點到直線距離為點到直線的垂直線段長。

◎ 基本學習內容 SC-7-3-1 為 S-4-5-1 之後續學習概念，故學生應已理解兩線互相垂直的概念。

本基本學習內容引入垂直的符號、中點與中垂線。

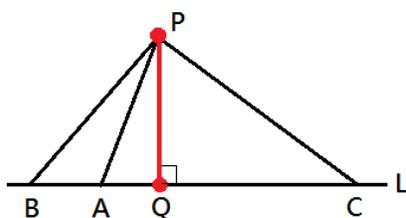
■ 國小 4 年級已認識兩線交於一點，若所形成的夾角中有一個為直角，則兩線互相垂直；國中將此兩直線 L_1 、 L_2 互相垂直記錄為“ $L_1 \perp L_2$ ”。

■ 本基本學習內容的中垂線暫不引入尺規作圖，且中垂線性質及其逆敘述在 S-8-5 討論。

◎ 基本學習內容 SC-7-3-2 為 S-4-5-1 之後續學習概念，故學生應已認識平行線間的距離處處相等的概念。

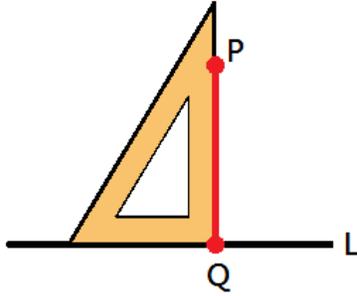
本基本學習內容幫助學生理解點到直線距離的意義。

■ 從直線 L 外一點 P ，到直線 L 畫許多條線段，學生可透過測量或觀察方式，發現垂直於 L 的線段 \overline{PQ} 長度最短，此時我們稱 \overline{PQ} 的長為點 P 到 L 的距離。



著作財產權為教育部國民及學前教育署所有

- 通過直線 L 外的一點 P ，可使用三角板作一直線 \overline{PQ} 垂直於直線 L 且交直線 L 於一點 Q ，所得 \overline{PQ} 的長即為點 P 到直線 L 的距離。



S-7-4	線對稱的性質： 對稱線段等長；對稱角相等；對稱點的連線段會被對稱軸垂直平分。	s-IV-5
-------	---	--------

基本學習內容

SC-7-4-1 線對稱圖形中，對稱線段相等，對稱角相等，對稱點的連線段會被對稱軸垂直平分。

基本學習表現

SCP-7-4-1-1 理解線對稱的意義及對稱軸、對稱點、對稱線段、對稱角等名稱。

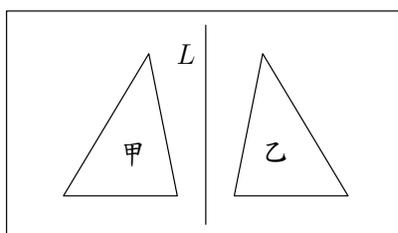
SCP-7-4-1-2 理解線對稱圖形中，對稱線段相等，對稱角相等。

SCP-7-4-1-3 理解線對稱圖形的對稱軸是連線兩個對稱點的垂直平分線。

- ◎ 本基本學習內容為 SC-5-4-1 之後續學習概念，學生已經認識正三角形、等腰三角形、長方形、正方形、菱形、箏形、圓形、正五邊形及正六邊形都是線對稱圖形，且能找出對稱軸，知道對稱邊相等，對稱角相等。

本基本學習內容幫助學生認識等腰梯形為線對稱圖形，並強調對稱軸是對稱點連線的垂直平分線。

- 教學重點是「判斷甲圖形是否為線對稱圖形」以及討論線對稱圖形甲中對稱點、對稱邊及對稱角等關係。學生透過對摺後圖形兩邊是否完全疊合，判斷該圖形是否為線對稱圖形。
- 透過對摺後重疊的現象，幫助學生認識線對稱圖形的對稱邊相等、對稱角相等，並知道對稱軸兩側圖形全等。
- 本基本學習內容的線對稱圖形教學重點不是「判斷給定的兩圖形是否對稱於 L 」，下圖中的三角形甲和三角形乙是兩個不同的圖形，本基本學習內容不討論兩個圖形是否為線對稱圖形。



- 本基本學習內容幫助學生認識對稱軸是對稱點連線的垂直平分線，並利用該性質來解決相關問題。

S-7-5	線對稱的基本圖形： 等腰三角形；正方形；菱形；箏形；正多邊形。	s-IV-5
-------	--	--------

基本學習內容

SC-7-5-1 線對稱的基本圖形。

基本學習表現

- SCP-7-5-1-1 理解等腰三角形是線對稱圖形，其對稱軸是底邊的中垂線，並通過三角形的頂點，且兩底角相等。
- SCP-7-5-1-2 理解正方形是線對稱圖形，有四條對稱軸，且四個邊都等長、四個角都是直角。
- SCP-7-5-1-3 理解菱形是線對稱圖形，兩條對角線均為對稱軸，且四個邊都等長。
- SCP-7-5-1-4 理解箏形是線對稱圖形，僅有一條對角線為對稱軸，且兩組鄰邊等長。
- SCP-7-5-1-5 理解正多邊形是線對稱圖形，且所有邊長都相等、所有角都相等。

◎ 本基本學習內容為 SC-7-4-1 之後續學習概念，學生已經認識等腰三角形、長方形、正方形、菱形、箏形、圓形、等腰梯形及正多邊形都是線對稱圖形。本基本學習內容幫助學生認識等腰三角形、正方形、菱形、箏形及正多邊形的基本性質。

- 透過對摺後重疊的現象發現等腰三角形的對稱軸為底邊的垂直平分線，並通過三角形的頂點，且兩底角相等。
- 透過對摺後重疊的現象知道正方形有四條對稱軸，且四個邊等長、四個角都是直角，並能理解長方形為線對稱圖形，只有兩條對稱軸，且對邊等長，四個角都是直角。
- 透過對摺後重疊的現象理解菱形兩條對角線均為對稱軸，且四個邊等長，但箏形僅有一條對角線是對稱軸，且兩組鄰邊等長。

- 部份學生在尋找線對稱圖形有幾條對稱軸時，常遺漏一些對稱軸，下面提出一種幫助學生能找出所有對稱軸的方法。教師可以先拿出一些已畫出所有對稱軸的線對稱圖形，例如下圖中的七個線對稱圖形，要求學生將這些圖形，依對稱軸和對稱圖形交點間的關係進行分類，幫助學生將對稱圖形的對稱軸分成下列三類。

第一類：對稱軸通過對稱圖形的兩個頂點。

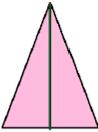
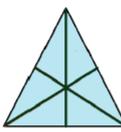
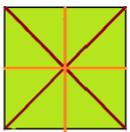
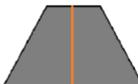
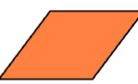
例如：菱形、正方形、六邊形

第二類：對稱軸通過對稱圖形的一個頂點和一邊的中點。

例如：正三角形、等腰三角形、正五邊形

第三類：對稱軸通過對稱圖形兩邊的中點。

例如：正方形、長方形、六邊形

常見圖形的對稱軸			
			
等腰三角形	正三角形	正方形	長方形
			
菱形	箏形	等腰梯形	平行四邊形
			
正五邊形		正六邊形	

當學生理解對稱軸和對稱圖形間只有這三類關係後，只要依這三類關係分別找出所有對稱軸，不會遺漏。

G-7-1	<p>平面直角坐標系：以平面直角坐標系、方位距離標定位置； 平面直角坐標系及其相關術語（縱軸、橫軸、象限）。</p>	g-IV-1
-------	---	--------

基本學習內容

GC-7-1-1 平面直角坐標系。

GC-7-1-2 平面直角坐標系相關術語：數對、原點、 x 軸、 y 軸、象限。

基本學習表現

GCP-7-1-1-1 熟練平面直角坐標系。

GCP-7-1-1-2 給定平面直角坐標系上一點，能寫出對應的坐標。

GCP-7-1-1-3 給定坐標，能在平面直角坐標上描繪出對應的點。

GCP-7-1-1-4 給定坐標，能知道該坐標到 x 軸和 y 軸的距離。

GCP-7-1-2-1 理解直角坐標平面相關數學用詞：數對、原點、 x 軸、 y 軸、象限。

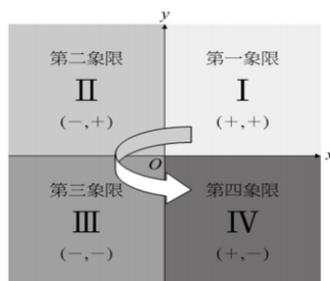
GCP-7-1-2-2 能認識各象限中，點的坐標之符號規則。

GCP-7-1-2-3 能判斷數對在直角坐標平面上位於哪個象限。

◎ 基本學習內容 GC-7-1-1 及 GC-7-1-2 是 NC-7-5-1 的後續學習概念，故學生應已認識負數數線，並能在數線上比較兩數的大小。

本基本學習內容將一維數線擴充至平面直角坐標系。

■ 學生可能會混淆一、二、三、四象限在直角坐標平面的順序，可以利用 C 這個字母或是逆時針來幫助記憶。

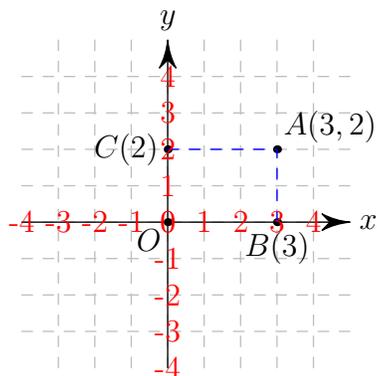


由北極正上方看下去，地球自轉屬於逆時針，豎起右手拇指，其餘手指捲曲方向亦為逆時針。

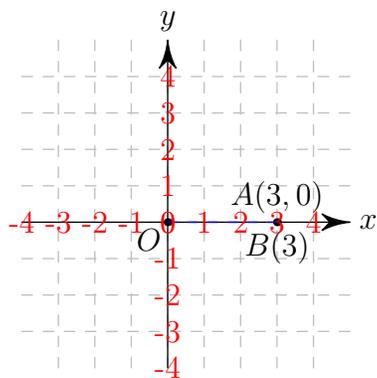


- 直角坐標平面為兩條相互垂直的數線組合而成，此兩條直線稱為坐標軸、交點為 O 稱為原點，原點 O 是直角坐標平面的基準點。說明平面直角坐標的點坐標時，有兩種方式，下列以點 $A(3,2)$ 為例說明之：

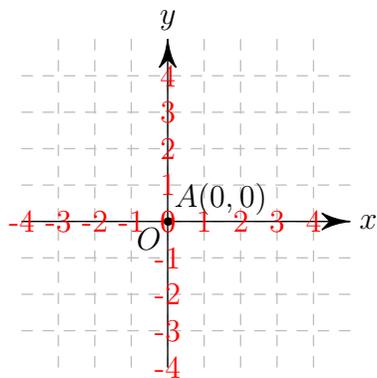
步驟一：分別由 A 點對 x 軸及 y 軸作垂線，得到與 x 軸交點為 $B(3)$ 及與 y 軸交點為 $C(2)$ ，再透過 x 軸的 $B(3)$ 和 y 軸的 $C(2)$ 來定義 A 點坐標為 $(3,2)$ ，如下圖一。



步驟二：其次，再討論當點 A 落在 x 軸(或 y 軸)時，可以想成對 x 軸及 y 軸作垂線，得到與 x 軸交點為 $B(3)$ 及與 y 軸交點為 $O(0)$ ，因此可定義 A 點坐標為 $(3,0)$ ，如下圖二。



步驟三：最後，討論當點 A 落在原點時，可以想成對 x 軸及 y 軸作垂線，得到與 x 軸與 y 軸交點均為 $O(0)$ ，因此可定義 A 點坐標為 $(0,0)$ ，如下圖二。



上述步驟一至步驟三，也可以將「由 A 點對 x 軸及 y 軸作垂線」的方式改為「以 O 和 A 為長方形的對頂點，坐標軸為長方形的兩邊，做出長方形 $OBAC$ 」的方式處理，其中 $B(3)$ 和 $C(2)$ 分別為長方形在 x 軸及 y 軸上的兩個頂點。並以此兩頂點 $B(3)$ 和 $C(2)$ 來表示點 A 的坐標，即 $(3,2)$ 。

- 以生活的例子介紹直角坐標平面，如地圖、颱風圖、藏寶圖等等。
- 描點以坐標值為整數或分母為 2 的分數為主。
- 學生可能會誤認為與 x 軸的距離就是其 x 坐標，與 y 軸的距離就是其 y 坐標。建議在教學上著重學生實際操作描點並觀察點與坐標軸的相對位置來了解點坐標與兩軸的距離概念。學生容易混淆直角坐標系 (x, y) 和 (y, x) 的位置，例如點坐標 $(3,2)$ ，學生誤以為該點與 x 軸的距離就是 3，與 y 軸的距離就是 2，依此迷思概念就把點 $(3,2)$ 錯誤地描繪在點 $(2,3)$ 的位置。
- 學生可能誤認為象限含有坐標軸，教師教學時應強調例如 $(3,0)$ 、 $(-2,0)$ 這些點坐標不在任何象限上，是位在 x 軸(橫軸)上。

A-7-1	代數符號 ：以代數符號表徵交換律、分配律、結合律；一次式的化簡及同類項；以符號紀錄生活中的情境問題。	a-IV-1
--------------	---	--------

基本學習內容

AC-7-1-1 一元一次式及二元一次式。

基本學習表現

- ACP-7-1-1-1 熟練用代數符號 $a + b = b + a$ 表徵加法交換律。
- ACP-7-1-1-2 熟練用代數符號 $a \times b = b \times a$ 表徵乘法交換律。
- ACP-7-1-1-3 熟練用代數符號 $(a + b) + c = a + (b + c)$ 表徵加法結合律。
- ACP-7-1-1-4 熟練用代數符號 $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ 表徵乘法結合律。
- ACP-7-1-1-5 熟練用代數符號 $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$ 表徵乘法對加法的分配律。
- ACP-7-1-1-6 熟練用代數符號 $(a - b) \times c = c \times a - c \times b$ 表徵乘法對減法的分配律。
- ACP-7-1-1-7 熟練用代數符號 $a + b - c = a - c + b$ 。
- ACP-7-1-1-8 熟練用代數符號 $a - (b + c) = a - b - c$ 。
- ACP-7-1-1-9 熟練用代數符號 $a - (b - c) = a - b + c$ 。
- ACP-7-1-1-10 認識並能使用英文字母表示未知數與變數。
- ACP-7-1-1-11 認識 ax 為或 $x \times a$ 的乘積或簡記。
- ACP-7-1-1-12 認識 $\frac{x}{a}$ 為 $x \div a$ 的商或簡記； $\frac{a}{b}$ 為 $a \div b$ 的簡記。
- ACP-7-1-1-13 能用代數符號記錄 $a - (b + c) = a - b - c$ ， $a - (b - c) = a - b + c$ ， $a + b - c = a - c + b$ 。
- ACP-7-1-1-14 能用代數符號記錄 $a \div (b \times c) = a \div b \div c$ ， $a \times b \div c = a \div c \times b$
- ACP-7-1-1-15 認識一元一次式，能使用一元一次式表示生活情境中之數量關係。
- ACP-7-1-1-16 認識二元一次式，能使用二元一次式表示生活情境中之數量關係。

- ◎ 本基本學習內容 AC-7-1-1 為 RC-6-1-1 及 NC-7-4-1 之後續學習概念，故學生應該已能理解數的計算規律及運用交換律、結合律及分配律來簡化計算。
本基本學習內容幫助學生在具體情境中列出一元一次式及二元一次式。

■ 數學上對未知數 x 的看法有三層次，其說明如下：

第一層次： x 代表某一個特定數。

釋例：

小禾到飲料店買 3 杯綠茶，小禾付給店員 100 元，店員找給小禾 10 元，請問一杯綠茶多少錢？假設一杯綠茶 x 元，

$$3x + 10 = 100$$

$$3x = 90$$

得知 $x = 30$ ，此時我們可以發現 x 只能代表 30。

第二層次： x 代表多個特定數。

釋例：(一元一次式)

小禾到飲料店買 3 杯綠茶及加購一個塑膠袋 2 元，假設一杯綠茶 x 元，共需支付 $3x + 2$ 元，此時 x 代表未定的正數，它代表的數可能因時因地會有不同。

釋例：(一元一次不等式)

小禾到飲料店買 3 杯綠茶及加購一個塑膠袋 2 元，所花的錢不到 100 元。假設一杯綠茶 x 元，則所支付的錢與 100 元的關係可使用不等式 $3x + 2 < 100$ 來表示。對小禾來說，此時 x 只代表飲料店綠茶所賣的價錢。對不等式的解而言，此時 x 代表不同飲料店綠茶所賣的價錢。

釋例：(二元一次式)

小禾到甲飲料店買 6 杯綠茶及加購一個塑膠袋，假設甲飲料店一杯綠茶 x 元、塑膠袋一個 y 元，小禾共需支付 $6x + y$ 元，此時 x 和 y 均只代表甲飲料店綠茶和塑膠袋的價錢。也許，乙飲料推出「買五送一」，就不能用 $6x + y$ 來記錄小禾到任何飲料店支付的錢。

釋例：(二元一次方程式)

小禾到甲和乙飲料店均各買 2 杯綠茶、4 杯紅茶，發現都同樣花了 120 元，請問甲和乙飲料店一杯綠茶和一杯紅茶的價錢都相同嗎？
假設一杯綠茶 x 元，紅茶一杯 y 元，得 $2x + 4y = 120$ ，列表可知

x	30	20	10	...
y	15	20	25	...

因此，甲和乙飲料店一杯綠茶和一杯紅茶的價錢可能不相同。此時， x 和 y 可能代表某些特定的數。

第三層次： x 代表變數。

釋例： $(x$ 代表某些自然數)

小禾原有 100 元，每日存 20 元，連續存了 100 天。

存了 1 天後，共有 $20 \times 1 + 100 = 120$ 元。

存了 2 天後，共有 $20 \times 2 + 100 = 140$ 元。

∴ ∴

存了 100 天後，共有 $20 \times 100 + 100 = 300$ 元。

小禾想要紀錄每一天存 20 元後，當日共有多少元？因此，小禾引入 n 來記錄，也就是

存了 n 天後，其中 $n = 1, 2, \dots, 100$ ，共有 $20 \times n + 100$ 元。

此時， n 為變數，其定義域為 $\{1, 2, \dots, 100\}$ 。而且，上列的敘述代表了小禾所有 100 天的紀錄。

釋例： $(x$ 代表實數變數)

攝氏 x 度轉換成華氏是多少度？

當 $x = 1$ 時， $y = \frac{9}{5} \times 1 + 32$ 。

當 $x = -2$ 時， $y = \frac{9}{5} \times (-2) + 32$ 。

當 $x = 36.5$ 時， $y = \frac{9}{5} \times 36.5 + 32$ 。

∴ ∴

所以攝氏 x 度時，其中 x 是任意實數，均可以用 $\frac{9}{5}x + 32$ 來表示華氏的度數。

以上三例的 x 均代表變數。當學生有了變數的概念，便可順利進行一次函數的單元教學。

- 協助學生認識一次式時，除讓學生知道如何簡記 $a \times x$ 與 $x \times a$ 外，應使學生可以了解 $2x + 3$ 是 $2 \times x + 3$ 的兩步驟問題，即讓學生發現： $2x - 3$ 是由 2 與 x 相乘後減 3 而成。

- 學生在國小階段已經知道括號先算，例如 $10 - (2 + 5) = 10 - 7 = 3$ ； $7 \times (3 + 2) = 7 \times 5 = 35$ 。

在國中階段，當兩數相乘時，常將「 \times 」改記成「 \cdot 」，例如將 $5 \times y$ 改記成 $5 \cdot y$ 。當兩數相乘時，其中的數若含有括號，則可以將乘號省略，例如將 $2 \cdot (3x + 1)$ 簡記成 $2(3x + 1)$ 、將 $(-2) \cdot (3x + 1)$ 簡記成 $(-2)(3x + 1)$ 、以及 $(x + 1) \cdot (3x + 1)$ 簡記成 $(x + 1)(3x + 1)$ 。

- 本基本學習內容在一元一次式或二元一次式之運算僅需包含一層括號。例如： $-(x + 2)$ 、 $2(x + \frac{6}{5}) - 3$ 、 $-2(x - 7) + 3(2x + 1)$ 等。
- 在設計一元一次式的情境問題時，列出的算式以沒有括號或只有一個括號為原則，舉例來說，香蕉一斤 x 元，蘋果一斤比香蕉一斤貴 10 元，買了 3 斤蘋果，共需 $3(x + 10)$ 元。
- 在設計二元一次式的情境問題時，列出的算式以沒有括號或只有一個括號為原則，舉例來說，香蕉一斤 x 元，蘋果一斤 y 元，小禾買了 2 斤香蕉和 3 斤蘋果，付給老闆 500 元，老闆需找給小禾 $500 - (2x + 3y)$ 元。

A-7-2	一元一次方程式的意義： 一元一次方程式及其解的意義；具體情境中列出一元一次方程式。	a-IV-2
--------------	--	--------

基本學習內容

AC-7-2-1 列一元一次方程式。

AC-7-2-2 一元一次方程式解的意義。

基本學習表現

ACP-7-2-1-1 能認識係數為有理數之一元一次方程式。

ACP-7-2-1-2 能依據生活情境，列出一元一次方程式。

ACP-7-2-2-1 能理解一元一次方程式中解的意義。

◎ 本基本學習內容 AC-7-2-1 為 RC-4-1-2 及 RC-5-1-2 之後續學習概念，故學生應該已能用併式填充題記錄兩步驟及三步驟問題。

本基本學習內容幫助學生在具體情境中列出一元一次方程式。

■ 一元一次方程式的意義為：恰有一個未知數且其次方數皆為一的等式。換句話說，組成方程式的每一項皆為一個數或是一個數跟此未知數的乘積。

■ 根據情境所列出的一元一次方程式時，宜以較為單純的情境，讓學生學習設未知數的技能。例如：「買了3個漢堡及20元的薯條，共花了125元，請問漢堡一個多少元？」依題意假設每個漢堡 x 元，可列出方程式為 $3x + 20 = 125$

■ 依題意列出一元一次方程式後，例如列出

$$3x + 5 = x - 6 \quad , \quad 2x - 11 = 0 \quad , \quad \frac{3x + 5}{2} = \frac{x - 2}{4}$$

等，必須將方程式化簡為

$$ax + b = 0 \quad \text{或} \quad ax = b$$

之基本型式(標準式)，才能求出方程式的解。其中， $ax + b = 0$ 的解為 $x = \frac{-b}{a}$ ， $ax = b$ 的解為 $x = \frac{b}{a}$ ($a \neq 0$)。

- 本基本學習內容限制在恰有一個未知數的情境中進行列式的活動，不引入有兩個未知數的情境。

以問題「買一個漢堡及一包薯條共需 55 元，買了 3 個漢堡及 2 包薯條共花了 145 元，請問漢堡一個多少元？」為例，該題屬於含兩個未知數的情境，假設漢堡一個 x 元，薯條一包 y 元，可以列出二元一次聯立方程式，

$$\begin{cases} x + y = 55 \\ 3x + 2y = 145 \end{cases}$$

雖然將 $y = 55 - x$ 代入 $3x + 2y = 145$ 後，可以依題意列出一元一次方程式 $x + 110 = 145$ ，但這類問題的列式對國中一年級學生而言相當困難，本基本學習內容不進行這類問題的教學。

- 在本學習內容的情境中，列式宜盡量簡單化，以不超過四步驟為原則，四步驟列式如 $3 \cdot x + 2(55 - x) = 145$ 。

- ◎ 本基本學習內容 AC-7-2-2 為 AC-7-2-1 之後續學習概念，故學生應該已能在具體情境中列出一元一次方程式。

本基本學習內容幫助學生理解一元一次方程式解的意義。

- 一元一次方程式的解之意義為「使等號兩邊成立的未知數之數值」。如果將具體情境中相等的數量關係以一元一次方程式表示時，方程式的解就是使情境中相等關係成立的數值。
- 本基本學習內容只處理唯一解的情況，不討論無解或無窮多個解的情況。
例如： $3x + 2 = 3x + 1$ 經化簡後形如 $0x = -1$ 的無解題型，或 $3x + 2 = 3x + 2$ 經化簡後形如 $0x = 0$ 的無窮多解題型。
- 面對 $6 = x + 5$ 或 $6 = y \times 5$ 這類問題時，不宜要求學生利用等量公理將 x 或 y 移至等號的左邊，應利用等號的對稱性將 $6 = x + 5$ 改記成 $x + 5 = 6$ ，將 $6 = y \times 5$ 改記成 $y \times 5 = 6$ 。

A-7-3	一元一次方程式的解法與應用 ：等量公理；移項法則；驗算；應用問題。	a-IV-2
--------------	--	--------

基本學習內容

AC-7-3-1 理解等量公理，並利用等量公理解一元一次方程式。

基本學習表現

ACP-7-3-1-1 能理解等量公理。

ACP-7-3-1-2 能熟練以等量公理來解簡易一元一次方程式。

ACP-7-3-1-3 能驗算一元一次方程式的解是否正確。

ACP-7-3-1-4 能認識移項法則來解一元一次方程式。

ACP-7-3-1-5 能利用一元一次方程式解應用問題。

◎ 本基本學習內容 AC-7-3-1 為 R-4-1-2、R-5-1-2 及 AC-7-2-2 之後續學習概念，故學生應該已能解決兩步驟及三步驟問題，並能理解一元一次方程式解的意義。本基本學習內容幫助學生利用等量公理找出一元一次方程式的解。

■ 97 課綱(民國 113 年前國小仍使用 97 課綱編寫的課本) 國小階段有引入利用等量公理解一元一次方程式的教材，但是只限於單步驟的問題情境，108 課綱將等量公理移至國中一年級，建議教師進行完整教學。

■ 可以用沙包、砝碼與天平來表徵一元一次方程式，其中用沙包來表徵未知數 x ，因為沙包的重量是確定的，但是在沒有算出或秤出重量之前，並不知道沙包有多重；用 1 公克的砝碼來表徵已知數 1，5 個 1 公克的砝碼可以表徵數字 5；用天平來表徵算式中的等號，透過兩邊一樣重的關係，溝通兩邊的數字一樣大。

■ 以解一元一次方程式「 $5x + 3 = 3x + 7$ 」為例，教師可以用沙包、砝碼與天平，幫助學生記錄解題過程。

先要求學生利用沙包、砝碼與天平，來表示一元一次方程式「 $5x + 3 = 3x + 7$ 」，分別畫出天平表示等號，在天平的左端畫出 5 個沙包和 3 個砝碼表示「 $5x + 3$ 」；在天平的右端畫出 3 個沙包和 7 個砝碼表示「 $3x + 7$ 」，再透過下面三個步驟，幫助學生記錄解題過程。

步驟一：在天平兩端同時拿走 3 個砝碼，表示方程式等號兩邊同時減 3，並要求學生把拿走的過程及最後的結果，分別使用算式

$$(5x + 3) - 3 = (3x + 7) - 3 \quad \text{和} \quad 5x = 3x + 4$$

記錄。

步驟二：在天平兩端同時拿走 3 個沙包，表示方程式等號兩邊同時減 $3x$ ，並要求學生把拿走的過程及最後的結果，分別使用算式

$$(5x) - 3x = (3x + 4) - 3x \quad \text{和} \quad 2x = 4$$

記錄。

步驟三：最後要求學生把求一個沙包有多重的過程及結果，分別使用算式

$$2x \div 2 = 4 \div 2 \quad \text{和} \quad x = 2$$

記錄。得到 $x = 2$ 的答案。

- 學生主要的學習困難發生於應用等量公理找出一元一次方程式的解時，不知該選擇哪個物件、做哪個運算。在解方程式時，必須將方程式化簡為

$$ax + b = cx + d$$

之型式，才能利用等量公理求解。接續的思考焦點，先選取等號兩邊的最後運算物件，再利用等量公理進行該物件的逆運算。一般而言，我們習慣將常數的部分放在等號右邊，含有未知數的部分放在等號的左邊。教學活動安排宜考量解題思考流程，舉例圖示於下：

解一元一次方程式	解題思考流程	等量公理應用時機
$3x-5=7$	選擇去掉 5	
	判斷原運算為「-」	
	知道逆運算為「+」	
$3x-5+5=7+5$	等號兩邊同+5	應用等量加法公理
$3x=12$	化簡	
	選擇去掉 3	
	判斷原運算為「×」	
	知道逆運算為「÷」	
$3x \div 3 = 12 \div 3$	等號兩邊同÷3	應用等量除法公理
$x=4$	化簡	

- 對於形如 $ax = b$ 、 $ax + b = 0$ 的簡易形式，學生應能達到熟練的程度，例如：解 $2x = 5$ 得到 $x = \frac{5}{2}$ 、解 $2x - 7 = 0$ 得到 $x = \frac{7}{2}$ 。
- 對於含一層括號，或等號兩邊皆有未知數的方程式，數字盡量簡單，原則上以整數為主，例如： $3(2x - 1) = 5$ 、 $2(3x - 4) + 7 = 2 - (4x - 5)$ ；方程式中若有分數，以兩邊同乘一個整數就能將分數化為整數為原則，例如 $\frac{3}{2}(2x - 5) = 3$ ，兩邊同乘 2 就能化成 $3(2x - 5) = 6$ 。
- 利用移項法則解題的步驟，可視為應用等量公理解題過程中，省略某些步驟後的結果，故移項法則並非必要的工具。
- 學生容易忘記移項法則所根據的原理為等量公理，單以口訣「移項後變號」的背誦解題，造成許多不必要的錯誤。例如，解 $2x = 4$ ，誤用「移項後變號」，將正 2 移到等號右邊變成負 2，所以得到 $x = -2$ 。應避免學生以口訣「移項後變號」取代移項法則為等量公理應用。
- 教師在講解移項法則時，應避免將移項法則視為反元素進行教學。對移項法則的補充說明如下：

(1) 解 $x + 5 = 8$

$$x + 5 = 8 \dots\dots\dots \text{第一式}$$

$$x + 5 - 5 = 8 - 5 \dots\dots\dots \text{第二式}$$

根據等量公理原則要將**加 5 消除**，兩邊需同時**減 5**

$$x = 8 - 5 = 3 \dots\dots\dots \text{第三式}$$

在僅含加法的方程式中，觀察第一式及第三式，學生較易看出移項法則為等量公理的省略步驟，利用移項之後**加 5 變成減 5**，**加法移項後變減法**。不是將正 5 變成負 5，教師不宜將加法的移項法則看成加上加法的反元素。

(2) 解 $x - 7 = -3$

$$x - 7 = -3 \dots\dots\dots \text{第一式}$$

$$x - 7 + 7 = -3 + 7 \dots\dots\dots \text{第二式}$$

根據等量公理原則要將**減 7 消除**，兩邊需同時**加 7**

$$x = -3 + 7 = 4 \dots\dots\dots \text{第三式}$$

在僅含減法的方程式中，觀察第一式及第三式，學生較易看出移項法則為等量公理的省略步驟，利用移項之後**減 7 變成加 7**，**減法移項後變加法**。不是將負 7 變成正 7，教師不宜將加法的移項法則看成加上加法的反元素。

(3) 解 $2x = 6$

$$2x = 6 \dots\dots\dots \text{第一式}$$

$$2x = x \times 2 = 6 \dots\dots\dots \text{第二式}$$

學生需先了解 $2x = x \times 2$

$$x \times 2 \div 2 = 6 \div 2 \dots\dots\dots \text{第三式}$$

根據等量公理原則要將**乘以 2 消除**，兩邊需同時**除以 2**

$$x = 6 \div 2 = 3 \dots\dots\dots \text{第四式}$$

在包含乘法的方程式中，學生不易看出移項法則其實是等量公理的省略步驟，容易誤用「移項後變號」的口訣，教師讓學生認識移項法則時須多做說明。

第三式利用移項之後**乘以 2 變成除以 2**，**不是將除以 2 視為乘以 $\frac{1}{2}$** ，教師不宜將乘法的移項法則看成乘上乘法的反元素進行教學。

A-7-4	二元一次聯立方程式的意義： 二元一次方程式及其解的意義；具體情境中列出二元一次方程式；二元一次聯立方程式及其解的意義；具體情境中列出二元一次聯立方程式。	a-IV-4
--------------	---	--------

基本學習內容

AC-7-4-1 列二元一次方程式及二元一次聯立方程式。

AC-7-4-2 二元一次方程式及其解的意義；二元一次聯立方程式及其解的意義。

基本學習表現

ACP-7-4-1-1 能依據生活情境，列出二元一次方程式。

ACP-7-4-1-2 能依據生活情境，列出二元一次聯立方程式。

ACP-7-4-2-1 認識係數為整數，形如 $ax + by = c$ 之二元一次方程式 (其中 $a^2 + b^2 \neq 0$)。

ACP-7-4-2-2 理解二元一次方程式解的意義。

ACP-7-4-2-3 認識二元一次聯立方程式。

ACP-7-4-2-4 理解二元一次聯立方程式解的意義。

◎ 本基本學習內容 AC-7-4-1 為 AC-7-2-1 之後續學習概念，故學生應該已能在具體情境中列出一元一次方程式。

本基本學習內容幫助學生在具體情境中列出二元一次方程式或二元一次聯立方程式。

■ 在具體情境中列式時，情境宜盡量簡單，不宜引入速率、濃度或三元情境等需要多一層轉換的問題，並以算式中不含括號為原則。

其中三元情境指的是情境中含有三個未知的項目，例如：「甲、乙、丙三人共有 2700 元，甲的錢比乙的兩倍多 100 元，乙的錢比丙的 2 倍少 300 元，試問甲、乙各有多少錢？」

上述問題中甲、乙、丙三人的錢皆未知，即屬於三元情境問題，此問題最容易的列式方式是假設三個未知數，列式時學生僅需照著題目翻譯成數學式子即可，倘

若我們要求學生使用二元一次聯立方程式或是一元一次方程式進行列式時，學生便需要多做一層或多層的轉換，對學生來說較為困難，茲說明如下：

使用三個未知數進行列式最為容易，僅需將題目翻譯成數學式子即可。

設甲、乙、丙三人的錢分別為 x 、 y 、 z 元，依題意列式：

$$\begin{cases} x + y + z = 2700 \\ x = 2y + 100 \\ y = 2z - 300 \end{cases}$$

僅能用兩個未知數列式時，列式需多一層轉換。

設甲、乙兩人的錢分別為 x 、 y 元，則丙的錢可表為 $2700 - x - y$ 元，依題意列式：

$$\begin{cases} x = 2y + 100 \\ y = 2(2700 - x - y) - 300 \end{cases}$$

只能用一個未知數列式時，列式需要多層次轉換。

設丙的錢為 x 元，則乙的錢可表為 $2x - 300$ 元，甲的錢可表為 $2(2x - 300) + 100$ 元，依題意列式：

$$[2(2x - 300) + 100] + (2x - 300) + x = 2700$$

- ◎ 基本學習內容 AC-7-4-2 為 AC-7-2-2、AC-7-3-1 及 AC-7-4-1 之後續學習概念，故學生應該已經理解一元一次方程式及其解的意義；也已經能使用等量公理或移項法則進行解題；也已經能在具體情境中列出二元一次方程式或二元一次聯立方程式。

本基本學習內容幫助學生理解二元一次方程式、二元一次聯立方程式及其解的意義。

- 二元一次方程式有無限多組解，這是學生第一次接觸到有兩個未知數的方程式而且解不只一組的狀況，教學時宜先複習一元一次方程式及其解的意義，再引入有兩個未知數的生活情境問題讓學生列式，幫助學生理解二元一次方程式及其解的意義。

例如：小剛到書局買了紅筆和藍筆共 10 枝，請問紅筆、藍筆可能有幾隻？假設藍筆有 x 枝、紅筆有 y 枝，請依題意列式，並求出 x 、 y 可能的值。

- 形如 $ax + by = c$ 之二元一次方程式 (其中 $a^2 + b^2 \neq 0$) 有以下三種形態：

(1) $a \neq 0$ 、 $b \neq 0$ ， $ax + by = c$ 。

(2) $a \neq 0$ 、 $b = 0$ ，此時 $ax + 0y = c$ 可簡記為 $ax = c$ 。

(3) $a = 0$ 、 $b \neq 0$ ，此時 $0x + by = c$ 可簡記為 $by = c$ 。

關於上述第(2)(3)種形態的二元一次方程式，學生可能較難理解，我們可透過下列情境，幫助學生列出這三種型態的二元一次方程式。

釋例：

「麗麗到夜市玩投球遊戲，一分鐘內可無限次投球，投到紅桶得5分，投到藍桶得3分，已知麗麗最後共得45分，請問紅桶、藍桶內各有幾顆球？」我們假設紅桶內有 x 顆球、藍桶內有 y 顆球，則可列式 $5x + 3y = 45$ ，此時滿足第(1)種二元一次方程式的形態。其次，若將遊戲規則改為投到紅桶得5分，投到藍桶得0分，且麗麗最後共得45分，則可列式 $5x + 0y = 45$ ，並可簡記為 $5x = 45$ ，此時滿足第(2)種二元一次方程式的形態。最後，同理若將遊戲規則改為投到紅桶得0分，投到藍桶得3分，且麗麗最後共得45分，則可列式 $0x + 3y = 45$ ，並可簡記為 $3y = 45$ ，此時滿足第(3)種二元一次方程式的形態。

- 由於找解的方法牽涉到代數運算規則，解題過程較為複雜，故不要求學生找出解。僅需讓學生將給定的數對代入該二元一次方程式，能滿足該二元一次方程式的數對。
- 雖然二元一次聯立方程式可能有無限多解，也可能沒有解，但是在生活中或應用上並不高，因此本基本學習內容不討論也不評量二元一次聯立方程式為無解或無限多解的題型。

A-7-5	二元一次聯立方程式的解法與應用 ：代入消去法；加減消去法；應用問題。	a-IV-4
--------------	---	--------

基本學習內容

AC-7-5-1 代入消去法或加減消去法解二元一次聯立方程式。

基本學習表現

ACP-7-5-1-1 能用代入消去法和加減消去法解二元一次聯立方程式。

ACP-7-5-1-2 能解決生活情境中列出的二元一次聯立方程式。

◎ 本基本學習內容 AC-7-5-1 為 AC-7-4-2 之後續學習概念，故學生應該已能利用等量公理或移項法則解一元一次方程式。

本基本學習內容幫助學生利用代入消去法或加減消去法解二元一次聯立方程式。

■ 代入消去法在解二元一次聯立方程式上，應用性較低，主要是因為計算複雜度往往較高。以下列二元一次聯立方程式為例：

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x - 5y = 8 \end{cases}$$

如果利用代入消去法來解題，則計算過程中會牽涉到分數的運算，導致很複雜。然而，代入的方法在後續數學學習中反覆出現，故可儘量安排簡易的數值，讓學生經歷代入的方法，例如：

$$\begin{cases} y = x \\ 2x + 3y = 10 \end{cases}, \quad \begin{cases} y = 2x \\ 2x + 3y = 1 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} y = x + 5 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

當以 $y = mx + n$ 代入另一式時， m 、 n 以整數為原則。

■ 本基本學習內容教學重點是讓學生學會解二元一次聯立方程式的方法，故盡量減少不必要的式子運算，需要去括號、同類項合併的式子都應避免。

■ 遇到形如

$$\begin{cases} y - x = 3 & (1) \\ 1 - 2y = -x & (2) \end{cases}$$

的二元一次聯立方程式時，若可由某式直接得到 y 為 x 或者 x 為 y 的關係式（例如：由 (1) 式得 $y = x + 3$ ），則可讓學生以代入消去法解題，或者整理成下列型式

$$\begin{cases} -x + y = 3 & (3) \\ x - 2y = -1 & (4) \end{cases}$$

再利用加減消去法來解題。

■ 遇到形如

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 & (1) \\ 3x + 5y = 6 & (2) \end{cases}$$

方程式未排成 $y = ax + b$ 或 $x = ay + b$ 的形式時，學生運用代入消去法整理式子時可能因為移項或等量公理的處理步驟增加造成計算錯誤。例如：

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 & (1) \\ 3x + 5y = 6 & (2) \end{cases}$$

由 (1) 式得

$$x = \frac{5 - 3y}{2} \quad (3)$$

再將 (3) 式代入 (2) 解 y ，將會面臨分數的四則運算，此類問題請學生直接以加減消去法解二元一次聯立方程式。

<p>A-7-6</p>	<p>二元一次聯立方程式的幾何意義： $ax + by = c$ 的圖形；$y = c$ 的圖形（水平線）；$x = c$ 的圖形（鉛垂線）；二元一次聯立方程式的解，只處理相交且只有一個交點的情況。</p>	<p>a-IV-1</p>
---------------------	---	---------------

基本學習內容

- AC-7-6-1 畫二元一次方程式的圖形。
- AC-7-6-2 畫二元一次聯立方程式的圖形。

基本學習表現

- ACP-7-6-1-1 認識整係數二元一次方程式 $ax = c$ 為 $ax + 0y = c$ 的簡記、 $by = c$ 為 $0x + by = c$ 的簡記。
- ACP-7-6-1-2 認識二元一次方程式的圖形為所有解所形成的圖形。
- ACP-7-6-1-3 認識二元一次方程式的圖形為直線。
- ACP-7-6-1-4 能以整係數二元一次方程式 $ax \pm by = c$ 的二個解畫出其圖形。
- ACP-7-6-1-5 能畫出形如 $x = a$ 及 $y = b$ 的二元一次方程式之圖形。
- ACP-7-6-1-6 認識水平線的方程式形如 $y = b$ ，鉛垂線的方程式形如 $x = a$ 。
- ACP-7-6-1-7 認識縱軸為二元一次方程式 $x = 0$ 的圖形，橫軸為二元一次方程式 $y = 0$ 的圖形。
- ACP-7-6-2-1 能在一直角坐標平面上畫出二元一次聯立方程式的圖形，並認識解的位置。
- ACP-7-6-2-2 認識兩個二元一次方程式圖形的交點為其聯立方程式的解。

◎ 基本學習內容 AC-7-6-1 是 GC-7-1-2 和 AC-7-4-2 的後續學習概念，故學生應已理解平面直角坐標系；也已理解二元一次方程式的解。

本基本學習內容幫助學生在直角坐標平面上畫出二元一次方程式的圖形。

■ 學生雖然會畫出二元一次方程式的圖形，但對於「圖形上的點為方程式的解」或是「圖形上的任何一點代入方程式會使方程式成立」之觀念較為薄弱。可先請學生利用二元一次方程式的部份解，轉成如同點坐標的數對，再將這些數對點描繪到坐標平面上，讓學生發現：(1) 這些點都會落在一條直線上；(2) 這條直線上的其他點當轉換成 x 與 y 的數對時，也可以滿足給定的二元一次方程式。

釋例：

請學生在坐標平面上畫出 $x + y = 5$ 的圖形時，先找到一些整數解，像是

$$(0, 5)、(1, 4)、(2, 3)、(3, 2)、(4, 1)、(5, 0)$$

描繪在坐標平面上可落在一條直線上，再請同學觀察這條直線上的其他點，轉成 x 與 y 的數對時，代入方程式是否滿足 $x + y = 5$ 。其次，再找這條直線以外的某些點，驗證這些點所轉換的數對，代入方程式後無法使方程式成立。

- 在基本學習內容 AC-7-4-2 中學習列出二元一次方程式的時候，學生已學會將只有一個未知數的方程式像是 $x = 5$ 或 $y = 5$ 視為 $x + 0y = 5$ 或 $0x + y = 5$ 的簡記，若遇到化簡後，形如 $x = k$ (常數) 或 $y = k$ (常數) 的圖形問題，同學應可以與二元一次方程式的標準式 $ax + by = c$ 作連結，將 $x = k$ 改為 $x + 0y = k$ 或將 $y = k$ 改為 $0x + y = k$ ，如此便可得到 $x + 0y = k$ 的圖形為通過 $(k, 0)$ 、 $(k, 1)$ 、 $(k, 2)$... 的垂直線；同理也可得到 $0x + y = k$ 的圖形為通過 $(0, k)$ 、 $(1, k)$ 、 $(2, k)$... 的水平線。最後讓同學發現 $x = 0$ 在表為 $x + 0y = 0$ 之後，可視為通過 $(0, 0)$ 的垂直線(即 y 軸)；而 $y = 0$ 在表為 $0x + y = 0$ 之後，可視為通過 $(0, 0)$ 的水平線(即 x 軸)。

◎ 基本學習內容 AC-7-6-2 為 AC-7-6-1 之後續學習概念，故學生已學會在直角坐標平面上畫出二元一次方程式的圖形。

本基本學習內容幫助學生畫二元一次聯立方程式的圖形。

- 本基本學習內容只處理二元一次聯立方程式只有一個解的情形，不引入無解或無限多解的聯立方程式，例如

$$(1) \text{ 無解：} \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 2x + 6y = 3 \end{cases}$$

$$(2) \text{ 無限多解：} \begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x + 6y = 2 \end{cases}$$

- 本基本學習內容不要求學生畫圖求二元一次聯立方程式的解，理由如下：以畫圖求二元一次聯立方程式的解時，學生會在精準度不足下，無法找出正確解。建議只需讓學生觀察解的坐標的大略位置以及落在 x 軸、 y 軸或哪一個象限。

A-7-7	一元一次不等式的意義：不等式的意義；具體情境中列出一元一次不等式。	a-IV-3
-------	-----------------------------------	--------

基本學習內容

AC-7-7-1 一元一次不等式的意義。

AC-7-7-2 列一元一次不等式。

基本學習表現

ACP-7-7-1-1 能理解生活情境中數量的大小關係。

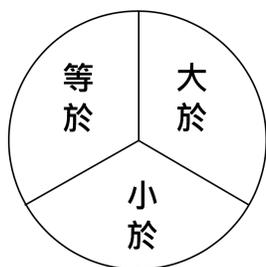
ACP-7-7-1-2 能理解生活中非相等關係的用語，如：以上、以下、超過、未滿等。

ACP-7-7-1-3 能理解生活中非相等關係的用語表徵轉換，如： \cdot 、 $>$ 或 $<$ 等符號。

ACP-7-7-2-1 能根據生活情境列出簡易一元一次不等式。

◎ 基本學習內容 AC-7-7-1 為 AC-7-2-1 之後續學習概念，故學生應該已經有一元一次方程式的基礎概念。本基本學習內容幫助學生理解一元一次不等式的意義。

- 「一元一次不等式」指的是不等式中恰有一個未知數，而此未知數的次方數為 1。
- 能理解不等式的意義以及口語上的約定，例如：「以上」意指「 \geq 」；「以下」意指「 \leq 」；「超過」意指「 $>$ 」及「未滿」意指「 $<$ 」。
- 在法條中，「以上」、「以下」的用語含等於的狀況，此乃約定成俗，不易選擇恰當的方法教學，建議多舉例幫助學生理解「以上」、「以下」用語。例如教師佈題時，不宜寫「60 分以上」，應寫成「60 分以上（含 60 分）」；不宜寫「70 分以下」，應寫成「70 分以下（含 70 分）」。
- 在強調三一律後，仍須安排「不大於」與「小於或等於」之間概念的轉換活動。另外，部分學生會認為「不大於」應如等號的方式使用「 \nlessgtr 」，故「不大於」與「小於或等於」此兩概念所使用符號之間的轉換也應有對應的教學活動。舉例來說，可讓學生寫出「小於」、「等於」、「大於」，在這三者有排他性的狀況下，如下圖，不是「第一者」，就是「第二或第三者」：



對於「不小於」與「大於或等於」的轉換，也建議安排類似的教學活動。

◎ 基本學習內容 AC-7-7-2 為 AC-7-7-1 之後續學習概念，故學生應該已經有一元一次方程式的基礎概念。本基本學習內容幫助學生在具體情境中列出一元一次不等式。

■ 能由具體情境中列出簡單的一元一次不等式。例如：「從台北坐高鐵到高雄至少要一小時半。」用不等式的符號來表示，可寫成「令 a 為從台北坐高鐵到高雄所需小時數，則 $a \geq 1.5$ 」。

■ 本基本學習內容建議不涉及有兩個不等號的一元一次不等式，
例如： $3 \leq 5x + 2 < 9$ 。

A-7-8	一元一次不等式的解與應用： 單一的一元一次不等式的解；在數線上標示解的範圍；應用問題。	a-IV-3
--------------	--	--------

基本學習內容

AC-7-8-1 一元一次不等式的解。

AC-7-8-2 在數線上標示一元一次不等式解的範圍。

基本學習表現

ACP-7-8-1-1 理解一元一次不等式解的意義。

ACP-7-8-1-2 能將 $a \leq x$ 這類 x 在不等號右邊的式子改記成 $x \geq a$ 。

ACP-7-8-1-3 能將生活情境中列出的一元一次不等式化簡為 $ax + b > 0$ 或 $ax > b$ 。

ACP-7-8-1-4 能熟練以等量公理解簡易一元一次不等式。

ACP-7-8-2-1 能在數線上標示 $x \square a$ 、 $x \geq a$ 、 $x \square a$ 、 $x \leq a$ 。

ACP-7-8-2-2 能熟練將一元一次不等式的解標示在數線上。

◎ **基本學習內容 AC-7-8-1 為 AC-7-3-1 及 AC-7-7-2 之後續學習概念，故學生應該已經理解一元一次方程式的解和意義，也能列出一元一次不等式。本基本學習內容幫助學生解一元一次不等式。**

■ 若將一個數代入一元一次不等式時，使得不等式成立，我們便稱此數為一元一次不等式的一個解。以 $3x + 2 > 5$ 為例說明，以 $x = 1$ 代入得 $3 + 2 \ngtr 5$ ，故 $x = 1$ 不是 $3x + 2 > 5$ 的解。以 $x = 2$ 和 $x = 2.5$ 代入得 $3 \times 2 + 2 > 5$ 和 $3 \times 2.5 + 2 > 5$ ，故 $x = 2$ 和 $x = 2.5$ 都是 $3x + 2 > 5$ 的解。教師可先向學生說明「不等式有很多解」，其次再說明「不等式有無窮多解」。

■ 部份學生會誤認 $x > 2$ 的解只包含整數解，例如寫成 $x = 3, 4, 5, \dots$ 。因此，建議教師教學時先舉生活中有分數或小數概念的例子。例如：小禾身高高於 160 公分，小禾身高可能為 162.5 公分、也可能為 165 公分。幫助學生澄清不等式的解，也可以是分數或小數。

- 在解一元一次不等式時，兩邊同加、同減或同乘正數時，可透過等式與不等式兩邊的比對方式，幫助學生看到等式和不等式的運算，但兩邊同時乘上負數時，需另外處理。例如：

在等式 $3x-1=5$ 中， $3x-1+1=5+1$ 在等式兩側同加 1。 $3x=5+1$ $3x=6$ $\frac{1}{3}\times 3x=\frac{1}{3}\times 6$ 等式兩側同乘 $\frac{1}{3}$ $x=2$	在一元一次不等式 $3x-1\leq 5$ 中。 $3x-1+1\leq 5+1$ 在不等式兩側同加 1。 $3x\leq 5+1$ $3x\leq 6$ $\frac{1}{3}\times 3x\leq \frac{1}{3}\times 6$ 不等式兩側同乘 $\frac{1}{3}$ $x\leq 2$
--	---

- 本基本對於不等式左、右同加、減一個負數時，無須改變不等號的作法，在教學中可透過簡易說明，讓學生明白。例如：以 $5 > 3$ 為例，不等式兩邊同時 $+(-3)$ ，因 $5 + (-3) = 2$ 與 $3 + (-3) = 0$ 且 $2 > 0$ ，得知 $5 + (-3) > 3 + (-3)$ ，故不等式兩邊同加一個負數，不改變不等式的方向。不等式兩邊同時 $-(-3)$ ，因 $5 - (-3) = 8$ 與 $3 - (-3) = 6$ 且 $8 > 6$ ，得知 $5 - (-3) > 3 - (-3)$ ，故不等式兩邊同減一個負數，不改變不等式方向。
- 對於不等式左、右同乘一個負數時，學生不容易引動要改變不等號的想法，建議老師透過等量加、減公理幫助學生看到不等式兩邊同乘一個數，會改變不等式方向。處理方式有兩種：

方式一：以 $-x > 3$ 為例，



$-x+x > 3+x$ 兩邊同加 x 。
 $0 > 3+x$
 $3+x < 0$
 $x < -3$ 兩邊同減 3 後得知。

建議老師引導學生觀察題目 $-x > 3$ 與運算結果 $x < -3$ 之變化，第一式左方 $-x$ 乘上 -1 後，得到 x 與第二式 x 同；第一式左方 3 乘上 -1 後，得到 3 與第二式 3 同，但不等式卻由大於變成小於，讓學生發現不等式兩邊同時乘上 -1 ，會改變不等式方向。

方式二：透過數字運算，讓學生發現不等式乘上負數後的關係

$5 > 3$	不等式兩邊同時乘-1，因 $5 \times (-1) = -5$ 與 $3 \times (-1) = -3$ 且 $-5 < -3$ ，得知 $5 \times (-1) < 3 \times (-1)$ ，故不等式兩邊同乘一個負數，會改變不等式方向。
$5 > -3$	不等式兩邊同時乘-1，因 $5 \times (-1) = -5$ 與 $(-3) \times (-1) = 3$ 且 $-5 < 3$ ，得知 $5 \times (-1) < (-3) \times (-1)$ ，故不等式兩邊同乘一個負數，會改變不等式方向。
$-5 < 3$	不等式兩邊同時乘-1，因 $(-5) \times (-1) = 5$ 與 $3 \times (-1) = -3$ 且 $5 > -3$ ，得知 $(-5) \times (-1) > 3 \times (-1)$ ，故不等式兩邊同乘一個負數，會改變不等式方向。
$-5 < -3$	不等式兩邊同時乘-1，因 $(-5) \times (-1) = 5$ 與 $(-3) \times (-1) = 3$ 且 $5 > 3$ ，得知 $(-5) \times (-1) > (-3) \times (-1)$ ，故不等式兩邊同乘一個負數，會改變不等式方向。

- 解一元一次不等式以式子中僅含一層括號為原則。
- 本基本學習內容只處理一個不等號，不處理牽涉到兩個不等號的一元一次不等式情況，如 $3 \leq 2x - 1 < 5$ 。
- 本基本學習內容不處理無解或所有實數解的題目。例如： $2x + 1 < 2x + 3$ 經化簡後形如 $0x < 2$ 的所有實數解題形，或 $2x + 1 \geq 2x + 3$ 經化簡後形如 $0x \geq 3$ 的無解題型。

◎ 基本學習內容 AC-7-8-2 為 AC-7-8-1 之後續學習概念，故學生應該已能解一元一次不等式。本基本學習內容在協助學生將一元一次不等式的解標示在數線上。

- 有時為了縮短或簡化解題過程，會將項移到或留在不等號的右邊，如此在解完時，就會得到形如這類的式子，雖然不一定需要轉換為，但在這個時機下，可讓學生練習將轉換為。在「小於等於」和「大於等於」表示方式，作法上建議透過圖示轉換，讓學生發現。

例如：



讓學生發現粗體數線部分，每個數都大於或等於 5，故可記為 $x \geq 5$ ；另外我們也可發現，5 小於或等於粗體數線的任何一數，故可記為 $5 \leq x$ 。

D-7-1	統計圖表： 蒐集生活中常見的數據資料，整理並繪製成含有原始資料或百分率的統計圖：直方圖、長條圖、圓形圖、折線圖、列聯表。遇到複雜數據時可使用計算機輔助，教師可使用電腦應用軟體演示教授。	n-IV-9 d-IV-1
--------------	---	------------------

基本學習內容

DC-7-1-1 統計圖表。

基本學習表現

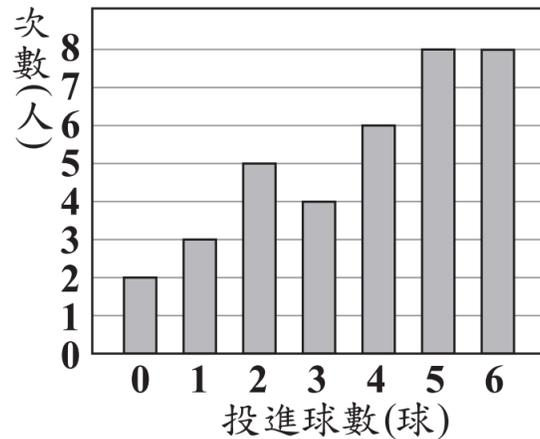
- DCP-7-1-1-1 理解直方圖、長條圖、圓形圖、折線圖的名稱與使用時機。
- DCP-7-1-1-2 能報讀直方圖、長條圖、圓形圖、折線圖。
- DCP-7-1-1-3 理解長條圖、圓形圖適合用於表現類別的資料。
- DCP-7-1-1-4 理解直方圖、折線圖適合用於表現數量的資料。
- DCP-7-1-1-5 理解長條間應有適當的距離作為間隔；直方圖中的長條之間沒有間隔，資料應依序排列且長條圖或直方圖之長條應同寬。
- DCP-7-1-1-6 理解長條圖各長條、折線圖各點及圓形圖各區塊所代表之意義。
- DCP-7-1-1-7 理解直方圖各長條所代表之意義。
- DCP-7-1-1-8 理解列聯表，並解決日常生活中問題。

◎ 基本學習內容 DC-7-1-1 為 DC-3-1-1、DC-4-1-1 及 DC-6-1-1 的後續學習概念，故學生應已認識一維及二維表格，並能報讀及繪製長條圖、折線圖與圓形圖。本基本學習內容幫助學生理解列聯表及直方圖。

- 國小三年級已引入一維及二維表格，四年級已能報讀折線圖及長條圖，並繪製長條圖，五年級能繪製折線圖，六年級能報讀及繪製圓形圖。國中階段教學以報讀直方圖為主，不宜要求學生製作各種圖表。
- 直方圖的教學以有序且連續性的數值型資料為主。
- 教學上應協助學生能分辨長條圖與直方圖的差別，以下為長條圖與直方圖的圖表。

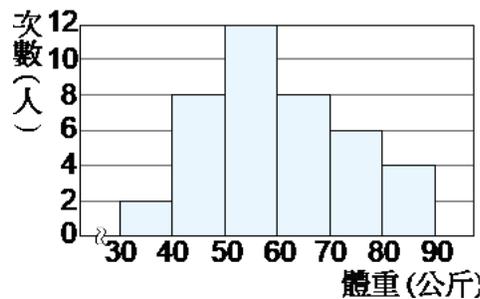
1. 長條圖：

如下圖（一）為甲班 36 名學生參加投籃測驗的投進球數長條圖：



2. 直方圖：

附圖為三年乙班學生的體重次數分配直方圖：



- 列聯表是一種二維數據表格，適合用於表現離散的類別型資料，其『欄』與『列』是同一母群體的兩種分割，並在每一欄的最下方、每一列的最右方、做『合計』，表格的右下角做『總計』。

下列以三位不同候選人在不同投開票所之得票數的列聯表為例：

今有甲、乙、丙三名候選人參與某村村長選舉，共發出 1445 張選票，得票數最高者為當選人，且廢票不計入任何一位候選人之得票數內。全村設有三個投開票所，各開票所及候選人的票數統計如下：

投開票所	候選人			廢票	合計
	甲	乙	丙		
一	200	211	147	12	570
二	286	85	144	15	530
三	94	34	209	8	345
合計	580	330	500	35	1445

- 計算複雜數據時，學生可使用計算機輔助。當教學設備允許時，可使用電腦應用軟體(如：Excel)輔助。

D-7-2	統計數據： 用平均數、中位數與眾數描述一組資料的特性；使用計算機的「M+」或「 Σ 」鍵計算平均數。	n-IV-9 d-IV-1
--------------	--	------------------

基本學習內容

DC-7-2-1 平均數的意義。

DC-7-2-2 中位數的意義。

DC-7-2-3 眾數的意義。

基本學習表現

DCP-7-2-1-1 理解平均數的名稱與意義。

DCP-7-2-1-2 從資料中計算平均數並解決簡單平均數問題。

DCP-7-2-2-1 理解中位數的名稱與意義。

DCP-7-2-2-2 從資料中計算中位數，並理解中位數的左邊資料個數與右邊資料個數相同。

DCP-7-2-3-1 理解眾數的名稱與意義。

DCP-7-2-3-2 從資料中找到眾數。

DCP-7-2-3-3 理解平均數易受極端值影響，而中位數及眾數則不受影響。

◎ 本基本學習內容為首次引入統計數，幫助學生利用平均數、中位數與眾數描述資料的特性。

■ 以全班 23 位學生的平均體重是 42 公斤為例，42 公斤是群體的代表數，指的是以 42 公斤代表該班的體重最恰當，42 公斤不是平分的活動，不是將全班體重合起來平分成 23 份後的重量是 42 公斤。

甲、乙兩班各有 23 人，分別有 23 個體重，數學上只能比較兩個數字的大小，無法比較兩堆數字的大小，甲、乙兩班必須各找出 1 個能代表這 23 個體重的數後，才能比較這兩個代表數的大小，以「全班的體重和」來代表各班的體重最恰當，也就是說，全班的體重和是甲、乙兩班體重的代表數，比較兩班體重和的大小就能判斷哪兩班體重的輕重。

教師可以透過比較活動引入平均數的教學，例如先以「甲班和乙班都有 23 人，哪

一班的體重比較重？」為例引入代表數的概念後，再以「甲班有 23 人，乙班有 19 人，哪一班的體重比較重？」為例引入平均數。

當學生掌握代表數的意義後，教師再引入兩班人數不同的情境，學生很容易知道，兩班人數不同時，以「全班的體重和」當作代表數不恰當，以「甲班的體重和 $\div 23$ 」當作甲班體重的代表數，以「乙班的體重和 $\div 19$ 」當作乙班體重的代表數比較恰當。

- 計算平均數、中位數或眾數時，資料個數不宜太多，以不超過 10 筆為原則。
- 學生求出中位數後，教師應幫助學生理解中位數左邊資料個數與右邊資料個數相同。以下列兩個例子為例：

(1) 有一組資料，分別為 22,43,35,7,16,51,19,11,28。

老師應協助學生將資料由小到大排列，得到 7,11,16,19,22,28,35,43,51，第五個數字 22 是中位數，再指導學生理解中位數的左右資料數量一樣多。

(2) 有一組資料，分別為 22,43,35,7,16,51,19,11,28,41。

老師應協助學生將資料由小到大排列，得到 7,11,16,19,22,28,35,41,43,51， $(22 + 28) \div 2 = 25$ 第五和第六個數字的平均是 25，所以 25 是中位數，再指導學生理解中位數的左右資料數量一樣多。

- 平均數易受極端值影響，而中位數及眾數則不受影響。宜舉簡單例子進行比較，讓學生直接感受極端值的影響。

例：公司裡有 8 個人，他們的月薪（單位：萬元）分別為 6、4、6、70、8、3、9、6，請問：

1. 月薪的平均數為多少萬元？
2. 月薪的中位數為多少萬元？
3. 月薪的眾數為多少萬元。

解：

1. $(6 + 4 + 6 + 70 + 8 + 3 + 9 + 6) \div 8 = 14$ (萬元)

2. 將月薪由小到大排列：3，4，6，6，6，8，9，70

中位數 = $(6 + 6) \div 2 = 6$ 萬元

3. 月薪的眾數為 6 萬元。

由例子可以看出，利用中位數或眾數來代表群體，較不受極值所影響。

- 本基本學習內容不宜引入加權平均數。
- 本基本學習內容限制計算眾數時，次數最高的資料不宜出現超過 1 個 (若超過 1 個，則它們同時均為眾數)。
- 眾數不一定是數字，以今年全校學生最喜歡的顏色是紫色為例，喜歡紫色的學生人數最多，眾數是紫色。

<p>N-8-1</p>	<p>二次方根：二次方根的意義；根式的化簡及四則運算。 備註：可使用乘法公式來化簡的根式，需乘法公式單元引入後再提及。</p>	<p>n-IV-5</p>
---------------------	---	---------------

基本學習內容

NC-8-1-1 二次方根的意義及化簡。

NC-8-1-2 根式的四則運算。

基本學習表現

NCP-8-1-1-1 認識平方根的意義。

NCP-8-1-1-2 認識 \sqrt{a} 僅能在 a 不為負數時才有意義。

NCP-8-1-1-3 認識 $\sqrt{0} = 0$ 。

NCP-8-1-1-4 認識若 $a > b > 0$ ， $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ 。

NCP-8-1-1-5 認識 $n\sqrt{a}$ 的意義。

NCP-8-1-1-6 能理解最簡根式的意義。

NCP-8-1-2-1 認識：若 $a > b > 0$ ， $n\sqrt{a} \pm m\sqrt{a} = (n \pm m)\sqrt{a}$ 。

NCP-8-1-2-2 認識：若 $a > 0$ ， $b > 0$ ， $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ 。

NCP-8-1-2-3 認識：若 $a > 0$ ， $b > 0$ ， $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ 。

NCP-8-1-2-4 能進行簡單的方根計算。

◎ 基本學習內容 NC-8-1-1 首次引入二次方根的意義。

- 帶有根號的數如 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$ 、 \dots 等對學生來講是新的數，因此對於引進 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$ 的學習動機，對學生能學好這些新的數是非常重要的。從數學史來講，發現 $\sqrt{2}$ 不是分數也是一件很重大的事情，可以透過講故事的方式（如希帕索斯與畢達哥拉斯學派的故事），讓學生知道引起興趣。
- 觀察 $1^2 = 1$ 、 $2^2 = 4$ 、 $3^2 = 9$ 、 \dots ，我們稱 1 、 4 、 9 、 \dots 為完全平方數。
- 建議教師在面積與邊長的情境下引入根式的意義，例如面積為 a 的正方形時，邊長設為 x ，利用面積公式得 $x^2 = a$ ，此時 x 的解恆為正數。學生學過一元二次方程式以後，知道一元二次方程式會有兩組解，所以解二次方根才会有正負數。

◎ 基本學習內容 NC-8-1-2 是 NC-8-1-1 的後續概念，學生應已理解二次方根（平方根）的意義。

本基本學習內容幫助學生進行根式的化簡及四則運算。

■ 本基本學習內容不引入 $\sqrt{a^2} = |a|$ ，而是以下列方式處理：

(1) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$ 。

(2) 當 $a, b \geq 0$ 時， $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ 。

因此 $\sqrt{8} = \sqrt{2 \times 4} = \sqrt{2} \times \sqrt{4} = \sqrt{2} \times 2 = 2\sqrt{2}$ ，宜改寫成

$$\sqrt{8} = \sqrt{2 \times 2 \times 2} = \sqrt{2 \times 2} \times 2 = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times 2 = (\sqrt{2} \times \sqrt{2}) \times 2 = 2\sqrt{2}$$

是故，學生計算根式的運算時，首要任務為「將根式內的數字都化成正數」。

■ 學生學習根式時，教師應強調 \sqrt{a} 為計數單位，可仿照引入未知數 x 的方式幫助學生理解 \sqrt{a} 為計數單位及其記錄。

步驟一：如同「5 個 x 加起來，可以記作 $5x$ 」，同樣地「5 個 $\sqrt{2}$ 加起來，可以記作 $5\sqrt{2}$ 」。

步驟二：類比「2 個 x 加 3 個 x 是 $5x$ 」記作 $2x + 3x = 5x$ 。同理「2 個 $\sqrt{2}$ 加 3 個 $\sqrt{2}$ 是 $5\sqrt{2}$ 」也可得到 $2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ 。

步驟三：幫助學生認識「同類型根式」，例如：因為 $\sqrt{8}$ 可以改寫成 $2\sqrt{2}$ （即 2 個 $\sqrt{2}$ ），我們說 $\sqrt{8}$ 和 $\sqrt{2}$ 是「同類型根式」。

■ 學生學習多個根式的合併紀錄時，教師也可仿照兩個未知數 x 、 y 的合併紀錄，引導學生合併兩個根式 \sqrt{a} 、 \sqrt{b} 的紀錄。

一、如同「5 個 x 和 6 合起來記作 $5x + 6$ 」，同樣地「5 個 $\sqrt{2}$ 和 6 合起來」記作「 $5\sqrt{2} + 6$ 」，也可以記成「 $6 + 5\sqrt{2}$ 」。

二、如同「5 個 x 和 6 個 y 合起來記作 $5x + 6y$ 」，同樣地「5 個 $\sqrt{2}$ 和 6 個 $\sqrt{3}$ 合起來記作 $5\sqrt{2} + 6\sqrt{3}$ 」。

- 學生學習根式的化簡時，教師可從強調「同類型根式」可以合成以相同的 \sqrt{a} 為計數單位來記錄，幫助學生理解根式化簡的意義。

一、教師可透過類似下列方式

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

說明 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 和 $\sqrt{2}$ 是「同類型根式」，進而發現 $\frac{1}{\sqrt{a}}$ 和 \sqrt{a} 都是「同類型根式」。

二：教師可透過「質因數分解式」幫助學生發現那些是「同類型根式」。例如：因為 $\sqrt{20} = \sqrt{2 \times 2 \times 5} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$ ，所以 $\sqrt{20}$ 和 $\sqrt{5}$ 是「同類型根式」。

三：應用「同類型根式」概念，進行根式的化簡。

以問題「化簡 $\frac{3+5\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{4} + 5\sqrt{8}$ 」為例說明。教師先將算式轉換成多個根式，如下

$$\frac{3+5\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{4} + 5\sqrt{8} = \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{4} + 5\sqrt{8}$$

因為 $\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ ，所以它們是「同類型根式」，可以合併紀錄，得

$$\frac{3}{\sqrt{2}} + \sqrt{8} = \frac{3}{2}\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = \frac{7}{2}\sqrt{2}$$

另一方面

$$\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{4} = 5 + 3 \times 2 = 11$$

綜合計算，可得

$$\begin{aligned} \frac{3+5\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{4} + 5\sqrt{8} &= \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{4} + 5\sqrt{8} \\ &= \overbrace{\left(\frac{3}{\sqrt{2}} + 5\sqrt{8}\right)}^{\text{合併同類型根式}} + \left(\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{4}\right) \\ &= \frac{7}{2}\sqrt{2} + 11 \end{aligned}$$

四、最後，像「 $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ 」和「 $\frac{3}{2}\sqrt{2} + 5$ 」已經將「同類型根式」合併紀錄，也就是可以直接看出它是幾個 $\sqrt{2}$ 和幾個 1 合起來的，我們稱為最簡根式。例如： $\sqrt{2} + 4\sqrt{3}$ 可以直接看出它是 1 個 $\sqrt{2}$ 和 4 個 $\sqrt{3}$ 合起來的，我們也稱它是最簡根式。但是，像 $\sqrt{4} + 3$ 可以再化成更簡單的 5，以及 $\sqrt{8}$ 可以再化成更小單位的根式 $2\sqrt{2}$ ，我們就說它們都不是最簡根式。

- 化簡後的最簡根式以不超過兩個根式為主。例如：不宜出現 $3\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + \sqrt{5}$ 的結果。
- 對於使用算式、分配律、和的平方、差的平方、或平方差等代數式來化簡根式的題目，不宜評量，例如：
$$\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{1}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})} \times \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{(\sqrt{5} - \sqrt{3})} = \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{2}。$$
- 學生可能出現 $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{2+3} = \sqrt{5}$ 、 $2\sqrt{3} = \sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{6}$ 等錯誤概念，建議教師可透過計算機幫助學生認識等式不成立。

<p>N-8-2</p>	<p>二次方根的近似值：二次方根的近似值；二次方根的整數部分；十分逼近法。使用計算機$\sqrt{\quad}$鍵。 備註：二次方根的整數部分，可用幾何、十分逼近法、計算機求近似值。</p>	<p>n-IV-6 n-IV-9</p>
---------------------	---	--------------------------

基本學習內容

NC-8-2-1 二次方根的近似值。

基本學習表現

NCP-8-2-1-1 認識二次方根的近似值。

NCP-8-2-1-2 能用查表求二次方根的近似值。

NCP-8-2-1-3 能用計算機求二次方根的近似值。

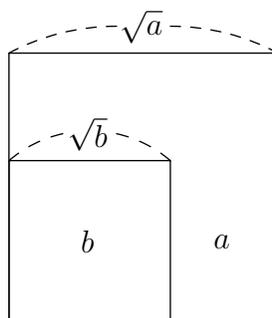
◎ 本基本學習內容 NC-8-2-1 為 NC-8-1-1 的後續概念，故學生應該已理解根式的意義。

本基本學習內容幫助學生透過查表及使用計算機算出二次方根的近似值。

■ 熟悉使用計算機 $\sqrt{\quad}$ 鍵，求出 \sqrt{a} 的近似值，其中 $a > 0$ 。

■ 教師可透過下列方法幫助學生理解「當 $a > b \geq 0$ 時， $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ 」。

方法一：利用正方形的面積為 a 時，其邊長為 \sqrt{a} 。再將兩個面積為 a, b 的正方形，對齊一個頂點併在一起，如下圖：



方法二：透過計算機的 $\sqrt{\quad}$ 鍵，發現「當 $a > b \geq 0$ 時， $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ 」。

■ 能利用完全平方數，求出 \sqrt{a} 的整數部分。例如：觀察 $14^2 = 196 < 220$ 及 $15^2 = 225 > 220$ ，能理解 $\sqrt{220}$ 的整數部分為14。

- 十分逼近法教學時，因計算一位小數較複雜，應由老師提供數據，教導學生判別，並正確估計至小數點後第 1 位。例如：請參考下表，以十分逼近法求出 $\sqrt{5}$ 介於哪兩個一位小數之間？

$2.1^2 = 4.41$	$2.4^2 = 5.76$	$2.7^2 = 7.29$
$2.2^2 = 4.84$	$2.5^2 = 6.25$	$2.8^2 = 7.84$
$2.3^2 = 5.29$	$2.6^2 = 6.76$	$2.9^2 = 8.41$

答：2.2 和 2.3 之間。

- 本基本學習內容不利用幾何(尺規作圖)求二次方根的近似值。

<p>N-8-3</p>	<p>認識數列：生活中常見的數列及其規律性（包括圖形的規律性）。</p>	<p>a-IV-7</p>
---------------------	---	---------------

基本學習內容

NC-8-3-1 數列的意義。

基本學習表現

NCP-8-3-1-1 認識數列的名稱與意義。

NCP-8-3-1-2 能發現生活中常見數列的規律性。

◎ **基本學習內容 NC-8-3-1 為 NC-6-9-1 之後續學習概念，學生應該已能利用常用的數量關係，列出恰當的算式，進行解題。**

本基本學習內容幫助學生發現生活中常見數列的規律性。

- 讓學生認識有次序地將一組數排成一列，則稱該列數為「數列」，並習慣以符號表示數列的任一項，例如：第 1 項（首項）可表為 a_1 ，第 2 項可表為 a_2 ， \dots ，第 n 項可表為 a_n 。
- 本基本學習內容之數列以等差數列、等比數列、平方數列、或規則明顯的數列（如：1,-2,3,-4,5,-6, \dots ）為原則，不宜引入規則不明顯的數列，例如：1,6,15,28,45,66,91 \dots （階梯數列）及 2,3,5,7, \dots （質數數列）。
- 等差數列可安排遞增與遞減的例子，然公差不宜太大，以 ± 10 以內為原則（如：10,20,30,40,50, \dots 或 25,20,15,10,5, \dots ）。
- 教學活動內容可引入具體操作情境，例如：用邊長為 1 的正方形排出邊長為 n 的正方形，其周長為 $4 \times n$ ，面積為 n^2 ；用邊長為 1 的正三角形排出邊長為 n 的正三角形，其周長為 $3 \times n$ 。
- 教學活動可與函數作結合，將數列的項次 n 設為自變數，該項的值为應變數，可以讓學生發現項次可以唯一對應到該項的值，但不宜讓學生試著寫出此函數對應關係的數學式，只需讓學生說明其規律性即可。
例如：

(1) 等差數列 $\langle a_n \rangle$

項次 n	1	2	3	4	5	6
值 a_n	1	4	7	10	13	16

讓學生理解每個下一項只需加 3，不需求出第 n 項的值。

(2) 平方數列 $\langle b_n \rangle$

項次 n	1	2	3	4	5	6
值 b_n	1	4	9	16	25	36

讓學生理解只需對項次取平方，不需求出第 n 項的值。

(3) 等比數列 $\langle c_n \rangle$

項次 n	1	2	3	4	5	6
值 c_n	2	4	8	16	32	64

讓學生理解每個下一項只需乘 2，不需求出第 n 項的值。

N-8-4	<p>等差數列：等差數列；給定首項、公差計算等數列的一般項。</p> <p>備註：不處理「已知等差數列不相鄰某兩項的值（不含首項），反求首項、項數或公差」，例如：給定 a_5 和 a_9 的值，求首項和公差。</p>	a-IV-7
--------------	--	--------

基本學習內容

- NC-8-4-1 等差數列的意義。
- NC-8-4-2 等差數列第 n 項公式。

基本學習表現

- NCP-8-4-1-1 理解等差數列的名稱與意義。
- NCP-8-4-1-2 能判別一數列是否為等差數列。
- NCP-8-4-2-1 認識首項、公差、項數、第 n 項的名稱。
- NCP-8-4-2-2 理解公差 $d = a_{m+1} - a_m$ 。
- NCP-8-4-2-3 理解第 n 項 $a_n = a_1 + (n - 1)d$ ， d 為公差。
- NCP-8-4-2-4 給定一等差數列，能依題意求出：公差 d 、或第 n 項、或某數為第幾項等。

- ◎ 基本學習內容 NC-8-4-1 為 NC-8-3-1 之後續學習概念，學生應該已認識生活中常見且具規律性的數列。

本基本學習內容幫助學生認識等差數列的意義。

- 本基本學習內容以整數為原則，不宜引入分數。

- 等差數列可安排遞增與遞減的例子，且公差不宜太大，以 ± 10 以內為原則。

- ◎ 基本學習內容 NC-8-4-2 為 NC-8-4-1 及 NC-8-3-1 之後續學習概念，學生應該已理解等差數列的意義及認識生活中常見且具規律性的數列。

本基本學習內容幫助學生理解等差數列第 n 項公式 $a_n = a_1 + (n - 1)d$ ， d 為公差。

著作財產權為教育部國民及學前教育署所有

■ 等差數列應介紹如奇數數列和偶數數列，特別是其第 n 項分別為 $a_n = 2n - 1$ 、 $a_n = 2n$ 。

■ 教學活動內容可引入具體操作情境，如用牙籤排出成一直線的 n 個正方形，其牙籤數為 $3 \times n + 1$ ；用牙籤排出成一直線的 n 個正三角形，如 ，其牙籤數為 $2 \times n + 1$ 。

■ 底下以等差數列 4,7,10,13,16...說明如何推導第 n 項的值：

項次	值	算式拆解(加法)	算式拆解(乘法)	一般項算式
1	$a_1=4$	4	$4+3 \times 0$	$4+3 \times (1-1)$
2	$a_2=7$	$4+3$	$4+3 \times 1$	$4+3 \times (2-1)$
3	$a_3=10$	$4+3+3$	$4+3 \times 2$	$4+3 \times (3-1)$
4	$a_4=13$	$4+3+3+3$	$4+3 \times 3$	$4+3 \times (4-1)$
5	$a_5=16$	$4+3+3+3+3$	$4+3 \times 4$	$4+3 \times (5-1)$

得到 $a_n = 4 + 3 \times (n - 1)$ ， $n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

■ 不處理「已知等差數列不相鄰某兩項的值（不含首項），反求首項、項數或公差」，例如：給定 a_5 和 a_9 的值，求首項和公差，因此本基本學習內容不處理等差中項。

N-8-5	<p>等差級數求和：等差級數求和公式；生活中相關的問題。</p> <p>備註：不處理「已知級數和反求首項、項數或公差」。</p>	n-IV-8
--------------	--	--------

基本學習內容

NC-8-5-1 等差級數求和。

基本學習表現

NCP-8-5-1-1 認識等差級數的名稱與意義， $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ 。

NCP-8-5-1-2 理解等差級數 s_n 的和之公式為 $s_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \times n$ ，其中 a_1 、 a_n 為原等差數列之首項及第 n 項。

NCP-8-5-1-3 能用等差級數解決生活中的問題。

- ◎ 本基本學習內容 NC-8-5-1 為 NC-8-4-1 之後續學習概念，學生應該已認識等差數列及一般項公式。
 本基本學習內容幫助學生認識等差級數的意義並求出等差級數和。

- 本基本學習內容限制等差級數中各項數字為整數，可以安排遞增及遞減之數列，且等差數列之公差宜適中，以 ± 10 以內為原則。

- 本基本學習內容僅使用 $s_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \times n$ 進行教學，不引入等差級數公式 $s_n = \frac{n \times [2a_1 + (n - 1)d]}{2}$ 。教學上，我們建議如下步驟：

步驟一、計算「公差=1」的等差數列的和：

以 $1 + 2 + 3 + \cdots + 100 = ?$ 為例說明

$$\text{令 } s = 1 + 2 + 3 + \cdots + 100$$

$$= 100 + 99 + 98 + \cdots + 1$$

共 100 個

$$\text{故 } 2s = \overbrace{101 + 101 + 101 + \cdots + 101}^{\text{共 100 個}}$$

$$= 101 \times 100$$

必要時，可讓學生多算幾個實例，使學生察覺「將等差數列顛倒相加，會變成為同數累加」。

步驟二、理解項數相同的兩個等差數列之逐項和仍為等差數列：

以 $2 + 4 + 6 + 8 + 10 = ?$ 和 $1 + 4 + 7 + 10 + 13 = ?$ 為例說明：

$$\begin{array}{r} \text{公差} = 2 \\ \overbrace{2 + 4 + 6 + 8 + 10} \\ +) \quad \overbrace{1 + 4 + 7 + 10 + 13} \\ \text{公差} = 3 \\ \hline \text{公差} = 5 \\ \overbrace{3 + 8 + 13 + 18 + 23} \end{array}$$

故項數相同的兩個等差數列之逐項和，所成的數列仍為等差數列，且公差為原兩個等差數列公差的和。

步驟三、理解等差數列的和為 $s_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \times n$ ：

以 $1 + 4 + 7 + 10 + 13 = ?$ 為例說明：

因為 $1 + 4 + 7 + 10 + 13$ 的公差為 3，且 $13 + 10 + 7 + 4 + 1$ 的公差為 -3。

所以

$$\begin{array}{r} \text{公差} = 3 + (-3) = 0 \\ \overbrace{(1 + 13) + (4 + 10) + (7 + 7) + (10 + 4) + (13 + 1)} \\ = (1 + 13) \times 5 \end{array}$$

$$\text{故 } 1 + 4 + 7 + 10 + 13 = \frac{1 + 13}{2} \times 5$$

- 學生在求等差級數時常常在求項數時遇到困難，建議教師透過等差數列第 n 項公式，引導學生計算出項數。

例如：求出 $5 + 8 + 11 + 14 + \dots + 101 = ?$

建議老師先引導學生看出此等差級數公差為 3，接著複習第 n 項公式

$a_n = a_1 + (n - 1)d$ ，利用公式求出項數。

$101 = 5 + 3 \times (n - 1)$ 解出 $n = 33$

接著代入公式計算級數和 $s_n = \frac{33 \times (a_1 + a_{33})}{2} = \frac{33 \times (5 + 101)}{2} = 1749$ 。

- 教學活動中，教師應特別注意等差數列及等差級數的用語不同。如教學時不應使用「等差級數前項和」、「等差級數的公差 d 」、和「等差級數的第項」之用語，應使用「等差數列前項的和」或「等差級數的和」、「原等差數列的公差 d 」、與「原等差數列的第項」等敘述。
- 不處理「已知級數和反求首項、項數或公差」。例如：等差級數 $3 + 5 + 7 + \dots$ 到第 n 項的和是 80，則 $n = ?$

<p>N-8-6</p>	<p>等比數列：等比數列；給定首項、公比計算等比數列的一般項。 備註：不處理「已知等比數列不相鄰某兩項的值（不含首項），反求首項、項數或公比」，例如：給定和的值，求首項和公比。</p>	<p>n-IV-7</p>
---------------------	---	---------------

基本學習內容

- NC-8-6-1 等比數列之意義。
 NC-8-6-2 等比數列第 n 項公式。

基本學習表現

- NCP-8-6-1-1 認識等比數列的名稱與意義。
 NCP-8-6-1-1 能判別一數列是否為等比數列。
 NCP-8-6-2-1 認識首項、前項、後項、公比、第 n 項的名稱。
 NCP-8-6-2-2 認識公比 $r = \frac{a_{m+1}}{a_m}$ ， $a \neq 0$ 。
 NCP-8-6-2-3 認識第 n 項 $a_n = a_1 r^{n-1}$ ， r 為公比。
 NCP-8-6-2-4 給定一等比數列，能依題意求出：公比、第 n 項、或某數為第幾項等。

◎ 本基本學習內容 NC-8-6-1 及 NC-8-6-2 為 N-8-4 之後續學習概念，學生應該已認識等差數列及一般項公式。

本基本學習內容幫助學生認識等比數列的意義及一般項公式。

- 本基本學習內容限制等比數列的首項以整數為原則。
- 本基本學習內容不引入等比中項。
- 本基本學習內容主要讓學生觀察數列中，若後項除以前項皆為定值時即為等比數列，如： $2, -2, 2, -2, \dots$ 也為等比數列。
- 本基本學習內容限制等比數列中的公比以正整數、負整數或單位分數(如： $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{3}$)為原則。

- 對於等比數列 $a_n = a_1 r^{n-1}$ 的教學，建議教師可以將項次與各項的值產生對應關係，幫助學生看到項次與指數的關係。例如：

底下以等比數列 3,6,12,24,48,768 說明如何推導第 n 項的值：

項次	值	算式拆解(乘法)	算式拆解(指數)	項次和指數的關係
1	$a_1=3$	3	3^0	3
2	$a_2=6$	3×2	3×2^1	$3 \times 2^{2-1}$
3	$a_3=12$	$3 \times 2 \times 2$	3×2^2	$3 \times 2^{3-1}$
4	$a_4=24$	$3 \times 2 \times 2 \times 2$	3×2^3	$3 \times 2^{4-1}$
5	$a_5=48$	$3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$	3×2^4	$3 \times 2^{5-1}$
n	$a_n=768$	$3 \times 2 \times 2 \dots$		$3 \times 2^{n-1}$

$$768 = 3 \times 2^{n-1} \text{ 解出 } n=8$$

$$\text{得到 } a_n = a_1 \times r^{n-1}, n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

- 不處理「已知等比數列不相鄰某兩項的值（不含首項），反求首項、項數或公比」，例如：給定 a_5 和 a_7 的值，求首項和公比。

<p>S-8-1</p>	<p>角：角的種類；兩個角的關係（互餘、互補、對頂角、同位角、內錯角、同側內角）；角平分線的意義。</p>	<p>s-IV-2</p>
---------------------	--	---------------

基本學習內容

SC-8-1-1 兩角的關係：互餘、互補、對頂角。

SC-8-1-2 同位角、內錯角、同側內角。

SC-8-1-3 角平分線。

基本學習表現

SCP-8-1-1-1 理解銳角、直角、鈍角的意義。

SCP-8-1-1-2 認識兩角的角度和為 90 度時，稱此兩角互為餘角。

SCP-8-1-1-3 認識兩角的角度和為 180 度時，稱此兩角互為補角。

SCP-8-1-1-4 認識兩對頂角相等。

SCP-8-1-2-1 認識同位角、內錯角、同側內角的意義。

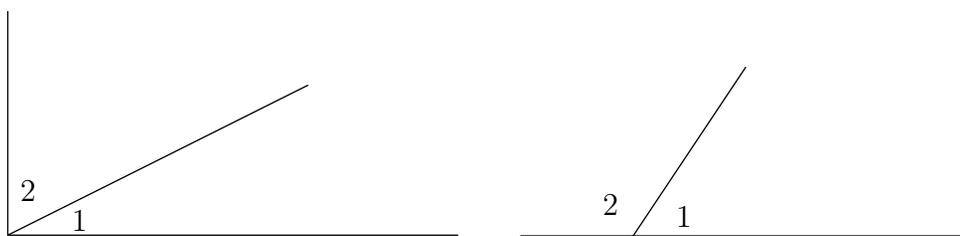
SCP-8-1-3-1 認識角平分線的意義。

◎ **基本學習內容 SC-8-1-1 為 SC-7-1-1 的後續學習概念，故學生應已認識角。本基本學習內容開始引入互餘、互補、對頂角。**

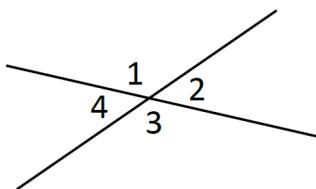
■ 銳角、直角、鈍角討論的是給定的一個角是否滿足某些條件限制，例如甲角的角度是 90 度，稱甲角為直角；乙角的角度是 60 度，稱乙角為銳角，因為討論的對象是一個角的性質，學生較容易掌握其意義。

互餘、互補、對頂角討論的是給定的二個角是否滿足滿足某些條件限制，例如甲角和乙角的角度和是 90 度，稱甲角和乙角互補，因為討論的對象是兩個角的關係，學生較不容易掌握其意義。

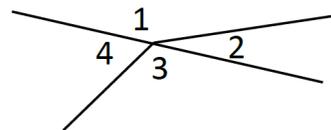
■ 如下圖，若 $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$ ，則稱 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 互為餘角；若 $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ ，則稱 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 互為補角。



- 如圖一，相交的兩直線可形成 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 、 $\angle 3$ 、 $\angle 4$ ，其中 $\angle 1$ 和 $\angle 3$ 稱為對頂角， $\angle 2$ 和 $\angle 4$ 也是對頂角。如圖二， $\angle 1$ 和 $\angle 3$ 、 $\angle 2$ 和 $\angle 4$ 都不是對頂角



圖一



圖二

- ◎ 基本學習內容 SC-8-1-2 為 SC-7-1-1 的後續學習概念，故學生應已認識角。本基本學習內容開始引入同位角、內錯角、同側內角等。

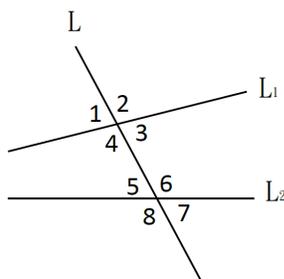
- 下面說明如何區分同側與異側，內錯與外錯，同位與異位的判斷方法。

L_1 及 L_2 被一線 L 所截， L 稱為截線

(1) 在 L 同一邊的兩角稱為同側，在 L 不同邊的兩角稱為異側。 $\angle 2$ 、 $\angle 3$ 、 $\angle 6$ 及 $\angle 7$ 是同側， $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是異側。

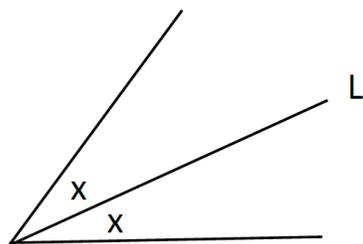
(2) 在 L_1 及 L_2 裡面交錯的兩角稱為內錯角，在 L_1 及 L_2 外面交錯的兩角稱為外錯角。例如：「 $\angle 3$ 和 $\angle 5$ 」及「 $\angle 4$ 和 $\angle 6$ 」都是內錯角， $\angle 1$ 和 $\angle 7$ 是外錯角，但不評量外錯角。

(3) 在 L_1 及 L_2 上面(或下面)同側的兩角稱為同位角。「 $\angle 2$ 和 $\angle 6$ 」及「 $\angle 4$ 和 $\angle 8$ 」都是同位角。



◎ 基本學習內容 SC-8-1-3 為 SC-7-1-1 的後續學習概念，故學生應已認識角。
本基本學習內容開始引入角平分線。

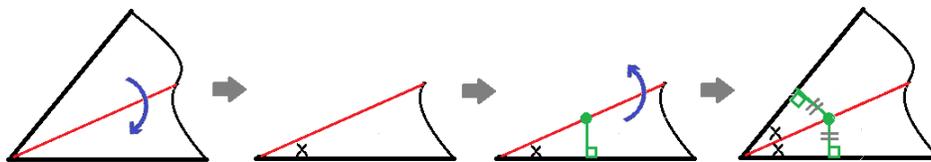
■ 從一個角的頂點引出一條射線 L ，把這個角分成兩個角度相同的角，這條射線叫做這個角的角平分線。



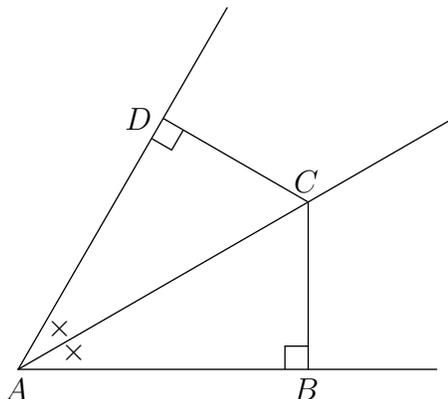
■ 可以透過摺紙的方式來做出角平分線。

■ 角平分線上任一點到角的兩邊距離相等，本基本學習內容提供兩種說明此性質的方法。

方法一：先透過摺紙找出角平分線，並隨意在角平分線取一點做出一邊的垂線，最後將摺紙攤開，便可發現「角平分線上一點做出兩邊的垂線會等長」，如下圖。



方法二：在 $\angle A$ 的角平分線上取一點 C 往 $\angle A$ 的兩邊分別做出垂線，設垂線與兩邊的交點分別為 B 、 D 兩點。觀察 $\triangle ABC$ 與 $\triangle ADC$ ，我們有 \overline{AC} 為公共邊、 $\angle BAC = \angle DAC$ 和 $\angle CBA = 90^\circ = \angle CDA$ 。由 AAS 三角形全等判定知 $\triangle ACB \cong \triangle ACD$ ，故 $\overline{CD} = \overline{CB}$ ，如下圖。



■ 垂直平分線是平角的角平分線。

<p>S-8-2</p>	<p>凸多邊形的內角和：凸多邊形的意義；內角與外角的意義；凸多邊形的內角和公式；正 n 邊形的每個內角度數。 備註：不處理多邊形外角和公式。</p>	<p>s-IV-2</p>
---------------------	---	---------------

基本學習內容

SC-8-2-1 凸多邊形的內角及內角和公式。

SC-8-2-2 三角形的外角及外角和。

基本學習表現

SCP-8-2-1-1 認識凸多邊形的內角與外角。

SCP-8-2-1-2 認識凸多邊形的內角和公式。

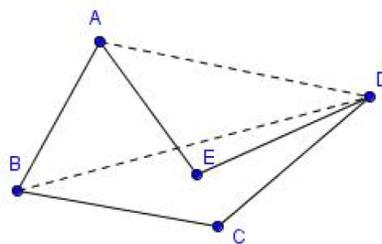
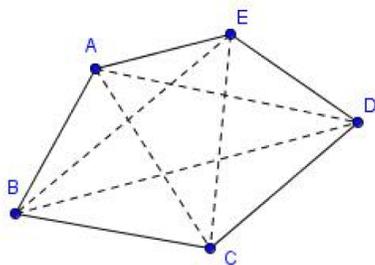
SCP-8-2-1-3 認識正 n 邊形的每個內角度數。

SCP-8-2-2-1 認識三角形的外角及外角和。

◎ 基本學習內容 SC-8-2-1 為 SC-5-1-1 的後續學習概念，故學生應已認識三角形三個角的角度和為 180 度。

本基本學習內容開始引入凸多邊形的內角和公式。

■ 如果一個多邊形所有的對角線都在此多邊形所圍的區域內，則稱此多邊形為「凸多邊形」，如下圖左為凸五邊形。如果一個多邊形有對角線的局部或全部出現在此多邊形所圍的區域外，則稱此多邊形為「凹多邊形」，如下圖右為凹五邊形。

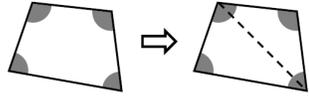
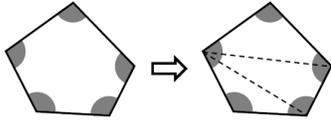
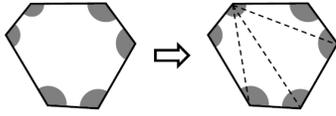


本基本學習內容只在凸多邊形情境討論多邊形的內角和公式。

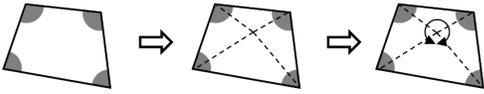
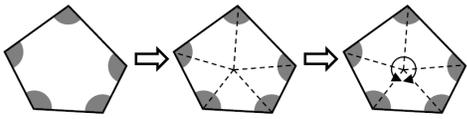
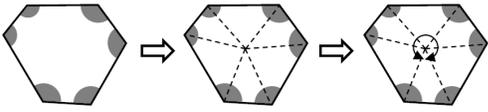
■ 國小五年級已經透過操作得知三角形內角和為 180 度，也能推論出四邊形內角和是 2×180 度，但是並沒有引入凸多邊形的內角和公式。國中階段引入 n 邊形內角和公式為 $(n - 2) \times 180$ 度， n 表示 3、4、5、... 中任意一個數字。

■ 建議多邊形內角和公式的引導可參考下面兩種方法：

方法一：選定一個頂點，跟其他頂點連出對角線

n 邊形	切 割	三角形個數	內 角 和
四邊形		2	$180^\circ \times 2 = 360^\circ$
五邊形		3	$180^\circ \times 3 = 540^\circ$
六邊形		4	$180^\circ \times 4 = 720^\circ$

方法二：從多邊形內部任取一點，連線段至各頂點

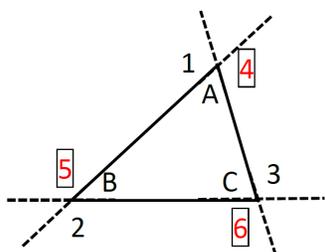
n 邊形	切 割	三角形個數	內 角 和
四邊形		4	$180^\circ \times 4 - 360^\circ$ $= 720^\circ - 360^\circ$ $= 360^\circ$
五邊形		5	$180^\circ \times 5 - 360^\circ$ $= 900^\circ - 360^\circ$ $= 540^\circ$
六邊形		6	$180^\circ \times 6 - 360^\circ$ $= 1080^\circ - 360^\circ$ $= 720^\circ$

◎ 基本學習內容 SC-8-2-2 為 SC-5-1-1 的後續學習概念，故學生應已認識三角形三個角的角度和為 180 度。

本基本學習內容幫助學生認識任三角形的外角和為 360 度。

■ 本基本學習內容僅處理三角形外角和，不處理 n 邊形外角和 ($n \geq 4$)。

■ 三角形的外角定義如下圖



$\angle A$ 有兩個外角，為 $\angle 1$ 和 $\angle 4$ 。

$\angle B$ 有兩個外角，為 $\angle 2$ 和 $\angle 5$ 。

$\angle C$ 有兩個外角，為 $\angle 3$ 和 $\angle 6$ 。

因為 $\angle 1 = \angle 4$ 、 $\angle 2 = \angle 5$ 且 $\angle 3 = \angle 6$ 。

我們稱 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$ 或 $\angle 4 + \angle 5 + \angle 6$ 都是三角形的外角和。

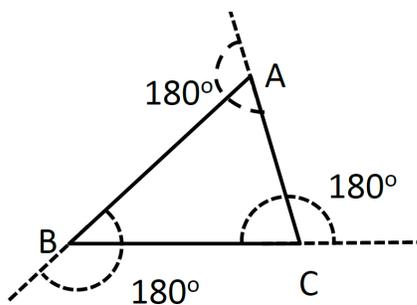
■ 本基本學習內容提供三種說明「三角形外角和為 360° 」的方法：

方法一：

三角形外角和

$$= \text{平角 } A + \text{平角 } B + \text{平角 } C - (\angle A + \angle B + \angle C)$$

$$= 540^\circ - 180^\circ = 360^\circ$$

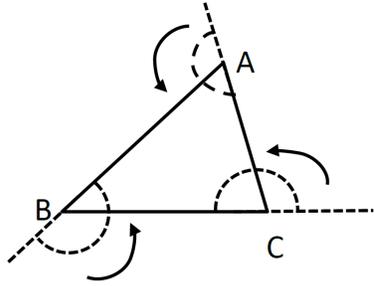


方法二：

透過動手操作將三個外角剪下來，拼貼成一個圓形，了解三角形外角和為 360° 。

方法三:

透過由 A 點出發開始朝 B 點走，在每個角轉彎一次皆轉了其外角度數，最後走回終點，繞一圈為 360° 。



S-8-3	平行： 平行的意義與符號；平行線截角性質；兩平行線間的距離處處相等。	s-IV-3
--------------	---	--------

基本學習內容

SC-8-3-1 平行線的截角性質。

SC-8-3-2 平行線的判別性質。

基本學習表現

SCP-8-3-1-1 理解平行的意義與符號。

SCP-8-3-1-2 在兩直線被一直線所截的情境下，認識內錯角、同位角、同側內角。

SCP-8-3-1-3 認識兩平行線被一直線所截時，內錯角相等、同位角相等、同側內角互補。

SCP-8-3-2-1 認識兩直線被一直線所截時，若內錯角相等、或同位角相等、或同側內角互補時，則兩直線平行。

SCP-8-3-2-2 兩平行線間的距離處處相等。

◎ 基本學習內容 SC-8-3-1、SC-8-3-2 為 SC-4-5-1 和 SC-4-5-2 的後續學習概念，故學生應已認識有一個夾角是直角的兩線互相垂直，同時垂直於一線的兩線互相平行。

本基本學習內容開始在兩直線被一直線所截的情境下認識平行線的截角性質及判別性質。

■ 國小四年級已引入判斷兩線互相平行的方法， L_1 與 L_2 同時垂直於 L ，稱 L_1 與 L_2 兩線互相平行。

■ 下面說明如何區分同側與異側，內錯與外錯，同位與異位的判斷方法。

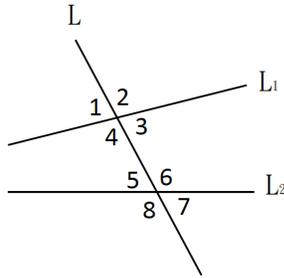
L_1 及 L_2 被一線 L 所截， L 稱為截線

(1) 在 L 同一邊的兩角稱為同側，在 L 不同邊的兩角稱為異側。 $\angle 2$ 、 $\angle 3$ 、 $\angle 6$ 及 $\angle 7$ 是同側， $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是異側。

(2) 在 L_1 及 L_2 裡面交錯的兩角稱為內錯角，在 L_1 及 L_2 外面交錯的兩角稱為外錯角。例如：「 $\angle 3$ 和 $\angle 5$ 」及「 $\angle 4$ 和 $\angle 6$ 」都是內錯角， $\angle 1$ 和 $\angle 7$ 是外錯角，但不評

量外錯角。

(3) 在 L_1 及 L_2 上面(或下面)同側的兩角稱為同位角。「 $\angle 2$ 和 $\angle 6$ 」及「 $\angle 4$ 和 $\angle 8$ 」都是同位角。



- 建議教師多強調在兩直線平行的條件下，同位角相等、內錯角相等、同側內角互補的關係才會成立，以免學生誤用。
- 國小透過長方形寬邊等長說明兩平行線距離處處相等，國中知道平行線上任一點到另一條直線距離都相等。
- 平行線的判別性質為透過同位角相等、內錯角相等、同側內角互補來判別兩線是否平行。平行線的截角性質為兩線平行時同位角相等、內錯角相等、同側內角互補。

S-8-4	全等圖形： 全等圖形的意義(兩個圖形經過平移、旋轉或翻轉可以完全疊合)；兩個多邊形全等則其對應邊和對應角相等(反之亦然)。	s-IV-4
--------------	--	--------

基本學習內容

SC-8-4-1 全等圖形的意義。

基本學習表現

SCP-8-4-1-1 理解全等圖形的意義。

SCP-8-4-1-2 能用對應邊及對應角描述兩全等圖形的邊和角對應關係。

SCP-8-4-1-3 理解兩多邊形全等時，對應邊相等，且對應角相等。

- ◎ 本基本學習內容 SC-8-4-1 為 SC-4-6-1 之後續學習概念，學生已認識平面圖形全等的意義，並能用對應點、對應邊及對應角描述兩全等圖形對應的關係。
本基本學習內容開始擴充國小三角形或四邊形的範圍至多邊形。

- 國小學生在四年級時，已經透過圖形疊合的操作，認識平面圖形全等的意義，引入「全等」的名詞，並能用「對應頂點」、「對應邊」及「對應角」描述兩全等圖形對應的關係。

- 教學時可以透過圖形疊合，引導探究全等的定義，和對應邊、對應角及對應頂點等名稱。

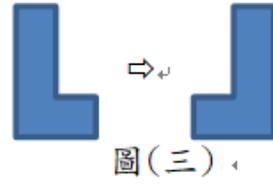
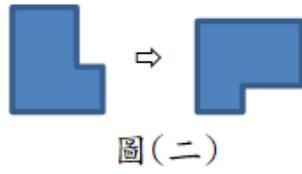
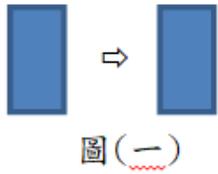
例如：

甲圖形經過平移、旋轉或翻轉後，和乙圖形完全疊合，稱甲、乙兩個圖形全等。下面以圖(一)、圖(二)及圖(三)為例說明。

在圖(一)中，只要將左邊的圖形平移至右邊，就能透過疊合的方式知道這兩個圖形全等。

在圖(二)中，必須先將左邊的圖形平移至右邊，再將左邊的圖形順時針旋轉 90 度，或逆時針旋轉 270 度，才能透過疊合的方式知道這兩個圖形全等。

在圖(三)中，將左邊的圖形平移至右邊，不論如何旋轉，這兩個圖形都無法完全疊合，必須將左邊的圖形翻轉，才能透過疊合的方式知道這兩個圖形全等。



- 學生常誤以為兩多邊形所有對應邊都相等就是全等圖形，可透過扣條的操作讓學生理解。例如：四條等長的扣條可圍成正方形和菱形，但非全等圖形。

S-8-5	三角形的全等性質： 三角形的全等判定(SAS、SSS、ASA、AAS、RHS)；全等符號(\cong)。	s-IV-9
--------------	---	--------

基本學習內容

SC-8-5-1 三角形的全等性質 SAS、SSS、ASA、AAS、RHS。

基本學習表現

- SCP-8-5-1-1 認識兩三角形的全等性質 SSS，且能利用這些性質判別兩三角形是否全等。
- SCP-8-5-1-2 認識兩三角形的全等性質 SAS，且能利用這些性質判別兩三角形是否全等。
- SCP-8-5-1-3 認識兩三角形的全等性質 ASA、AAS 且能利用這些性質判別兩三角形是否全等。
- SCP-8-5-1-4 認識兩三角形的全等性質 RHS，且能利用這些性質判別兩三角形是否全等。

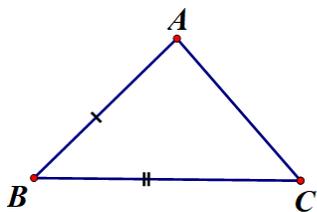
◎ 本基本學習內容 SC-8-5-1 為 SC-8-4-1 的後續學習概念，學生應已認識多邊形全等的意義，並能運用對應點、對應邊及對應角去描述兩個全等圖形對應的關係。本基本學習內容開始引入利用最少條件判斷三角形的全等。

■ 國小學生在四年級時，已經透過圖形疊合的操作，認識平面圖形全等的意義，引入「全等」的名詞，並能用「對應點」、「對應邊」及「對應角」描述兩全等圖形對應的關係。

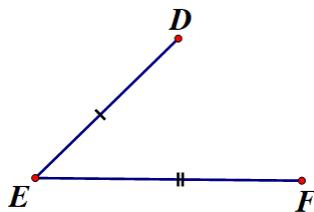
■ 國中可利用疊合的概念，發現兩個三角形只要 3 組對應邊與 3 組對應角相等，則兩個三角形全等，只要利用兩個 3 角形三組對應邊與 3 組對應角相等中的 3 個特定條件，則兩個三角形全等。教學時可以從最少的條件慢慢增加，以得知在何種條件下，可以找到兩個三角形全等。

釋例：

圖(一)為 $\triangle ABC$ ，圖(二)為已知 $\overline{AB} = \overline{DE}$ 、 $\overline{BC} = \overline{EF}$ 兩條件，試問再增加哪一個條件？可以使得 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ 。

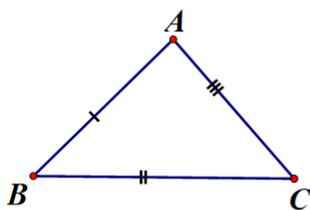


圖(一)

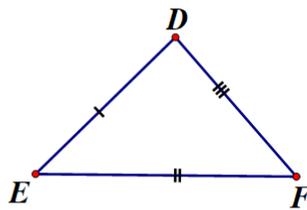


圖(二)

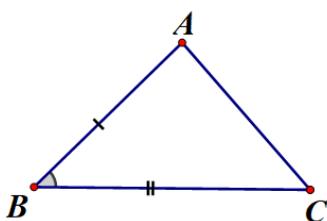
1. 加入 $\overline{AC} = \overline{DF}$ ， $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (SSS)，如圖(三)所示。



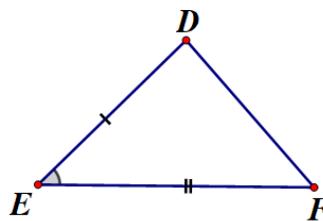
圖(三)



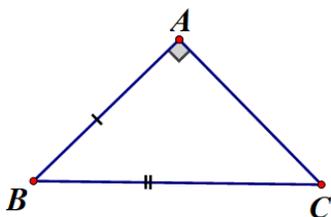
2. 加入 $\angle B = \angle E$ ， $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (SAS)，如圖(四)所示。



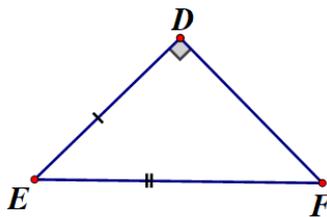
圖(四)



3. 加入 $\angle A = \angle D = 90^\circ$ ， $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (RHS)，如圖(五)所示

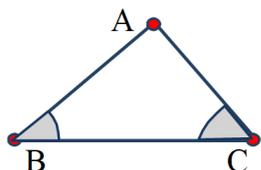


圖(五)

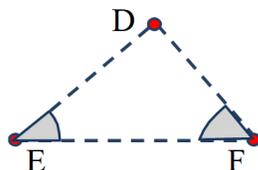


釋例：

圖(六)為 $\triangle ABC$ ，圖(七)為已知 $\angle B = \angle E$ 、 $\angle C = \angle F$ 兩條件，試問再增加哪一個條件？可以使得 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ 。

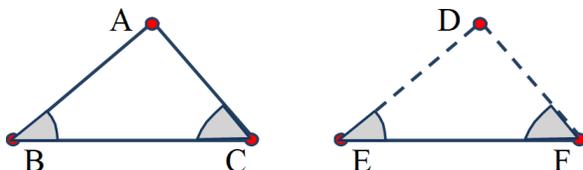


圖(六)



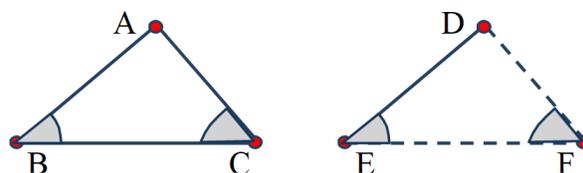
圖(七)

1. 加入 $\overline{BC} = \overline{EF}$ ， $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (ASA)，如圖(八)所示。



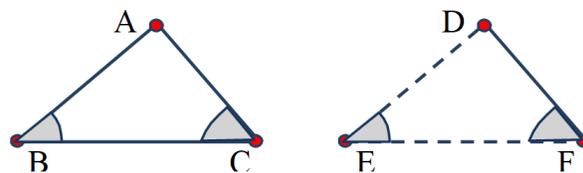
圖(八)

2. 加入 $\overline{AB} = \overline{DE}$ ， $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (AAS)，如圖(九)所示。



圖(九)

3. 加入 $\overline{AC} = \overline{DF}$ ， $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (AAS)，如圖(十)所示。

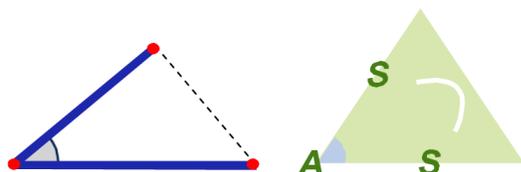


圖(十)

■ 教師可以舉 SSA 的例子，讓學生知道 SSA 不一定能構成三角形全等，不需特別強調或評量，而 RHS 及鈍角三角形只是 SSA 的特例。

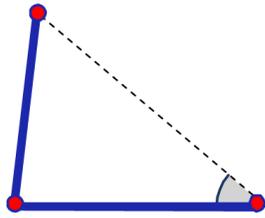
1. 兩個三角形的「兩組邊對應相等」及「一組對應角相等」的情形

A. 對應相等的角是已知兩組對應相等邊的夾角 (SAS)，如圖(十一)所示。



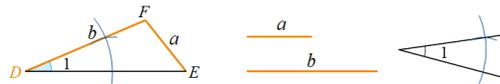
圖(十一)

B. 對應相等的角是已知一組對應相等邊的對角 (SSA)，如圖 (十二) 所示。

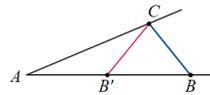


圖(十二)

如圖 (十三)，已知 $\triangle DEF$ 的兩邊長 $\overline{EF} = a$ 、 $\overline{DF} = b$ ， $\angle D = \angle 1$ 。作出一個三角形 ($\triangle ABC$)，使其中兩個邊長為 a 、 b ，且邊長 a 的對角為 $\angle 1$ 。我們可以發現作出圖形如圖 (十四)，可做出 $\triangle ABC$ 及 $\triangle AB'C$ ，故 SSA 不能作為全等三角形性質。



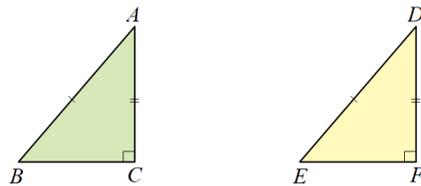
圖(十三)



圖(十四)

結論：SSA 不能作為全等的性質

2. RHS 全等性質 (SSA 中的 A 是直角) 如圖 (十五)，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中，已知 $\overline{AB} = \overline{DE}$ 、 $\overline{AC} = \overline{DF}$ ，且 $\angle C$ 和 $\angle F$ 為直角。



圖(十五)

由畢氏定理 (S-8-6) 可知，當兩個直角三角形的斜邊及一股分別對應相等時，這兩個直角三角形就會全等，這個性質稱為 RHS 全等性質。其中 R 代表直角 (Right angle)，H 代表斜邊 (Hypotenuse)，S 代表一邊 (Side)。

- 教師可以舉 AAA 的例子，讓學生知道 AAA 不一定能構成三角形全等。例如：正三角形每個內角均為 60 度，邊長為 3 的正三角形與邊長為 5 的正三角形不會全等。

S-8-6	畢氏定理： 畢氏定理（勾股弦定理、商高定理）的意義及其數學史；畢氏定理在生活上的應用；三邊長滿足畢氏定理的三角形必定是直角三角形。	s-IV-7
--------------	--	--------

基本學習內容

SC-8-6-1 畢氏定理。

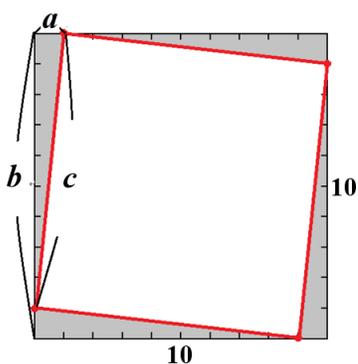
基本學習表現

- SCP-8-6-1-1 理解以直角三角形三邊分別作出的正方形中，以斜邊為邊長的正方形面積會等於以兩股為邊長的正方形面積之和。
- SCP-8-6-1-2 熟練若 a 、 b 分別為直角三角形的兩股長， c 為斜邊長，則 $c^2 = a^2 + b^2$ 。
- SCP-8-6-1-3 熟練若 a 、 b 、 c 為三角形三邊長且 $c^2 = a^2 + b^2$ ，則該三角形為直角三角形。
- SCP-8-6-1-4 能利用畢氏定理解決生活中的問題。

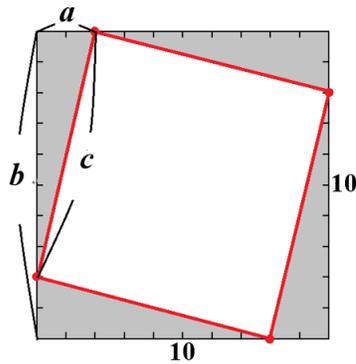
◎ 基本學習內容 SC-8-6-1 為 SC-5-2-1 之後續學習概念，故學生應已理解三角形面積公式。

本基本學習內容引入畢氏定理，並利用畢氏定理解決生活中的問題。

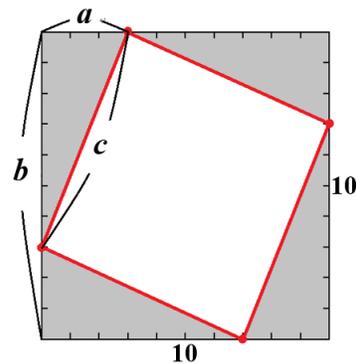
- 建議教師先講述與畢氏定理（勾股弦定理、商高定理）相關的數學史，引起學習動機，再說明畢氏定理的意義。
- 建議教師可以進行探索活動，幫助學生透過面積看到三角形三邊長平方的關係，也就是 $a^2 + b^2 = c^2$ 的現象，進而預期畢氏定理成立。探索活動如下：



圖一 1x9 直角三角形



圖二 2x8 直角三角形



圖一 3x7 直角三角形

	股長 a	股長 b	斜邊長 c^2 (正方形面積)	$a^2 + b^2 = c^2$
圖一	1	9	$100 - \frac{1 \times 9}{2} \times 4 = 82$	$1^2 + 9^2 = 82$
圖二	2	8	$100 - \frac{2 \times 8}{2} \times 4 = 66$	$2^2 + 8^2 = 66$
圖三	3	7	$100 - \frac{3 \times 7}{2} \times 4 = 58$	$3^2 + 7^2 = 58$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

- 國小階段已經學過只有一個角為直角的三角形稱為直角三角形，國中階段教學重點在認識直角三角形斜邊與股的名詞。教學時宜操作直角三角板教具，幫助學生認識斜邊位置可能的情形並能分辨兩股長與斜邊長。
- 本基本學習內容建議透過圖形拼排或面積計算，以實例探討畢氏定理即可，不必使用較嚴格的幾何或代數推理。
- 本基本學習內容建議教師引入畢氏定理在生活上的應用時，應使用計算機驗證畢氏定理。

S-8-7	平面圖形的面積： 正三角形的高與面積公式，及其相關之複合圖形的面積。	s-IV-8
--------------	---	--------

基本學習內容

SC-8-7-1 正三角形的高與面積求法。

基本學習表現

SCP-8-7-1-1 理解邊長為 a 的正三角形的高 $(\frac{\sqrt{3}}{2}a)$ 及面積公式 $(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2)$ 。

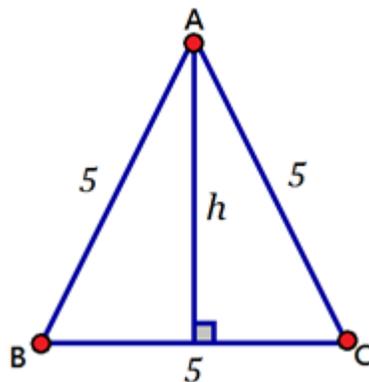
SCP-8-7-1-2 能求出含正三角形的複合圖形面積。

◎ 本基本學習內容 SC-8-7-1 為 SC-5-2-1 及 SC-8-6-1 之後續學習概念，學生已學過三角形面積公式及畢氏定理。本基本學習內容開始引入正三角形的高及面積公式。

■ 本基本學習內容建議教師先舉邊長為已知數的例子，求出高與面積的答案後，再推廣至邊長為 a 的高與面積的公式。

釋例：

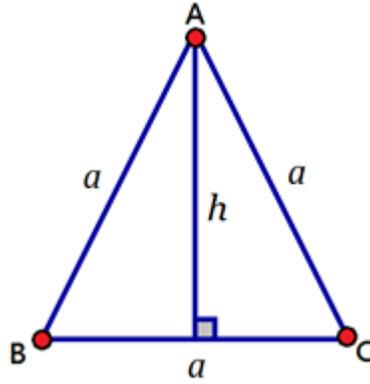
步驟一、 三角形的邊長為 5。



$$\text{求三角形的高 } h \Rightarrow h = \sqrt{5^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3 \times 5^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 5$$

$$\text{正三角形的面積} = \frac{1}{2} \times 5 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times 5\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 5^2$$

步驟二、 三角形的邊長為 a 。



$$\text{求三角形的高 } h \Rightarrow h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3 \times a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times a$$

$$\text{正三角形的面積} = \frac{1}{2} \times a \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times a\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \times a^2$$

- 複合圖形除正三角形外，其它圖形以三角形與四邊形為限，不宜出現與圓相關的複合圖形。

S-8-8	三角形的基本性質： 等腰三角形兩底角相等；非等腰三角形大角對大邊，大邊對大角；三角形兩邊和大於第三邊；外角等於其內對角和。	s-IV-4 s-IV-9
--------------	--	------------------

基本學習內容

- SC-8-8-1 三角形任兩邊和大於第三邊。
- SC-8-8-2 三角形外角等於其內對角和。
- SC-8-8-3 三角形大角對大邊；大邊對大角。

基本學習表現

- SCP-8-8-1-1 理解三角形任意兩邊之和大於第三邊。
- SCP-8-8-1-2 理解三角形比較短的兩邊之和大於第三邊。
- SCP-8-8-1-3 理解三角形任意兩邊差小於第三邊。
- SCP-8-8-2-1 理解三角形任一外角等於其內對角和。
- SCP-8-8-2-2 理解三角形的外角和為 360 度。
- SCP-8-8-3-1 理解等腰三角形兩底角相等。
- SCP-8-8-3-2 理解若三角形有兩角相等，則這個三角形就是等腰三角形。
- SCP-8-8-3-3 理解三角形大角對大邊。
- SCP-8-8-3-4 理解三角形大邊對大角。

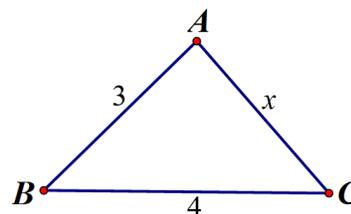
◎ 基本學習內容 SC-8-8-1 為 S-5-1 之後續學習概念，故學生已透過具體操作認識三角形任意兩邊之和大於第三邊。

本基本學習內容開始引入三角形任意兩邊和大於第三邊。

■ 不要求學生使用連續的不等式來表示線段的範圍。

例如：

如圖(一)所示，三角形的三邊為 x ， 3 ， 4 ，
學生只要能寫使用 $4 + 3 > x$ 與 $4 - 3 < x$ 表示即可，
不需特別要求表示成 $1 < x < 7$ 。



圖(一)

- 如果學生已掌握連接兩點的繩子，以直線為最短。教師可以利用這個性質，幫助學生理解三角形任意兩邊和大於第三邊。以三角形 ABC 為例，連接 A、B 兩點的繩子，以直線 AB 為最短，所以 $\overline{AC} + \overline{BC} > \overline{AB}$ ；連接 A、C 兩點的繩子，以直線 AC 為最短，所以 $\overline{BC} + \overline{BA} > \overline{AC}$ ；連接 B、C 兩點的繩子，以直線 BC 為最短，所以 $\overline{AB} + \overline{AC} > \overline{BC}$ ，也就是三角形任意兩邊和大於第三邊。
- 「三角形任兩邊的和大大於第三邊」與「三角形比較短的兩邊和大大於最長邊」是等價的定義。假設三角形三邊的長度是 $a、b、c$ ， $a \geq b \geq c$ ，如果 $b + c > a$ 成立，那麼 $a + b > c$ 、 $a + c > b$ 一定也會成立。所以當「三角形比較短的兩邊和大大於最長邊」成立時，「三角形任兩邊的和大大於第三邊」也會成立。
- 建議教師教學時必須說明「三角形任兩邊的和大大於第三邊」的性質，但是在判斷是否能圍成三角形時，只要判斷「比較短的兩邊和是否大大於最長邊」即可。學生只要掌握「比較短的兩邊和大大於最長邊」時，就能圍成三角形，就能發展出「比較短的三邊和大大於最長邊」時，就能圍成四邊形，以及「比較短的 $n - 1$ 邊和大大於最長邊」時，就能圍成 n 邊形的性質。
- 判斷給定的三線段是否能拼成三角形時，不必檢查任意兩邊和大大於第三邊，只要檢查較短的兩邊和是否大大於最長邊即可。
如圖（二），較短的兩邊和大大於最長邊，因此可以圍成一個三角形。
如圖（三），較短的兩邊和小於最長邊，因此不可以圍成一個三角形



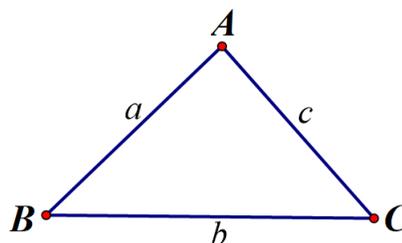
圖（二）



圖（三）

- 利用三角形任意兩邊和大大於第三邊的不等式移項，來理解兩邊長的差小於第三邊。如圖（四）所示，若三角形 ABC 的三邊長分別為 $a、b、c$ 可得到：

$$\begin{aligned} a + b > c &\Leftrightarrow a > c - b &\Leftrightarrow a > |b - c| \\ a + c > b & \quad a > b - c \\ a + b > c &\Leftrightarrow b > c - a &\Leftrightarrow b > |a - c| \\ b + c > a & \quad b > a - c \\ a + c > b &\Leftrightarrow c > b - a &\Leftrightarrow c > |a - b| \\ b + c > a & \quad c > a - b \end{aligned}$$

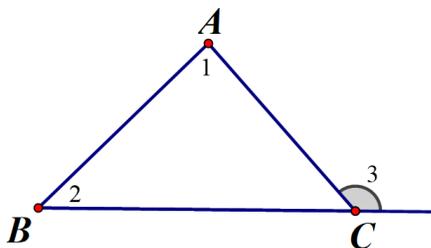


圖（四）

◎ 基本學習內容 SC-8-8-2 為 S-5-1 之後續學習概念，學生已學過三角形三內角和為 180 度。

本基本學習內容開始引入三角形任一外角等於其內對角和。

■ 教師可以透過讓學生直接利用量角器測量三角形的任意兩內角或剪下來與另一內角的外角拼成一個平角進行教學，讓學生藉由直觀觀察加以了解。例如：如圖(五)所示，三角形 ABC 中， $\angle C$ 的外角 $\angle 3$ 等於其內對角 $\angle 1 + \angle 2$ 之和，即 $\angle 3 = \angle 1 + \angle 2$ 。

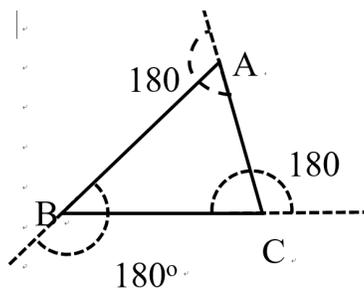


圖(五)

■ 建議三角形外角和為 360 度可以採用下列方法說明

方法一:

三角形外角和

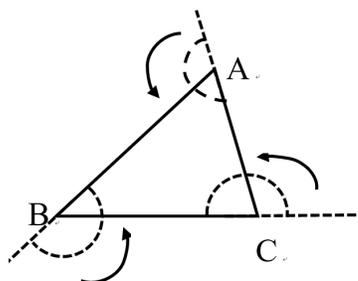


方法二:

透過動手操作將三個外角剪下來，拼貼成一個圓形，了解三角形外角和為 360 度。

方法三:

透過由 A 點出發開始朝 B 點走，在每個角轉彎一次皆轉了其外角度數，最後走回終點，繞一圈為 360 度。



■ 三角形的外角定義如下圖

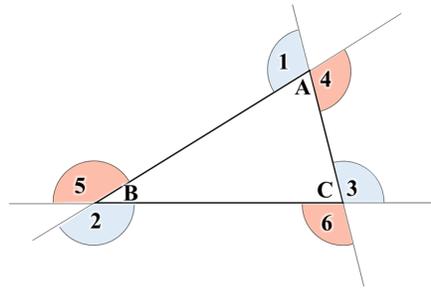
$\angle A$ 有兩個外角，為 $\angle 1$ 和 $\angle 4$ 。

$\angle B$ 有兩個外角，為 $\angle 2$ 和 $\angle 5$ 。

$\angle C$ 有兩個外角，為 $\angle 3$ 和 $\angle 6$ 。

因為 $\angle 1 = \angle 4$ 、 $\angle 2 = \angle 5$ 且 $\angle 3 = \angle 6$ 。

我們稱 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$ 或 $\angle 4 + \angle 5 + \angle 6$ 都是三角形的外角和。

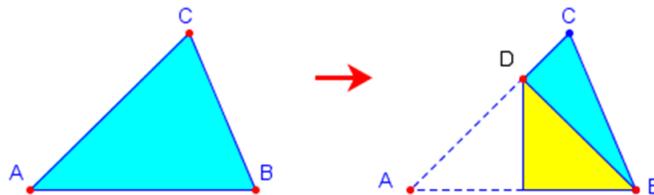


- ◎ 基本學習內容 SC-8-8-3 為 SC-8-8-1 和 SC-8-8-2 之後續學習概念，學生已理解三角形任意兩邊和大於第三邊及三角形任一外角等於其內對角和。
本基本學習內容開始引入三角形「大角對大邊」和「大邊對大角」。

■ 可透過摺紙檢驗等腰三角形是線對稱圖形，故兩底角相等。

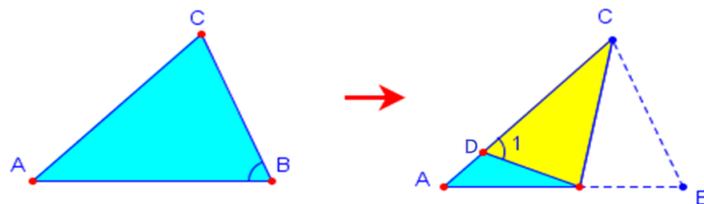
■ 教學時應透過觀察及三角形的摺紙活動，發現大角對大邊及大邊對大角性質，但不作形式化的證明。

如圖(六)所示，設 $\angle B > \angle A$ ，以 \overline{AB} 的垂直平分線對摺，得 $\overline{AD} = \overline{BD}$ ，因此 $\overline{AC} = \overline{CD} + \overline{BD}$ ，由三角形兩邊和大於第三邊可知 $\overline{AC} = \overline{CD} + \overline{BD} > \overline{BC}$ ，即得大角對大邊。



圖(六)

如圖(七)所示，設 $\overline{AC} > \overline{BC}$ ，以 $\angle C$ 的角平分線對摺，得 $\overline{BC} = \overline{CD}$ 、 $\angle B = \angle 1$ 。因為 $\overline{AC} > \overline{CD}$ ，所以 $\angle A$ 是 $\angle 1$ 的一個內對角，由三角形外角等於其內對角和可知 $\angle B = \angle 1 > \angle A$ ，即可得大邊對大角。



圖(七)

S-8-9	平行四邊形的基本性質 ：關於平行四邊形的內角、邊、對角線的幾何性質。	s-IV-8
--------------	---	--------

基本學習內容

SC-8-9-1 平行四邊形的內角、邊、對角線的幾何性質。

基本學習表現

SCP-8-12-1-1 理解平行四邊形兩組對角相等。

SCP-8-12-1-2 理解平行四邊形兩組對邊相等。

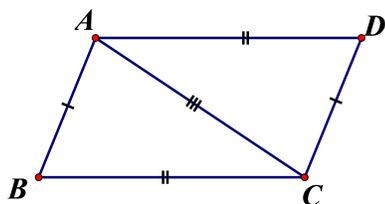
SCP-8-12-1-3 理解平行四邊形的一條對角線，將平行四邊形分割成兩個全等的三角形。

SCP-8-12-1-4 理解平行四邊形對角線互相平分。

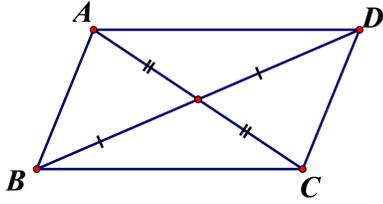
- ◎ 基本學習內容 SC-8-9-1 為 SC-5-1-3 之後續學習概念，故學生已透過操作認識平行四邊形對邊相等、對角相等。
本基本學習內容幫助學生認識平行四邊形的內角、邊、對角線的幾何性質及平行四邊形對角線互相平分。

■ 國小學生應已認識平行四邊形兩組對邊平行、兩組對邊相等、對角相等。

■ 教師可以透過摺紙找出平行四邊形的其中一條對角線，再沿著對角線剪開，形成 2 個三角形，利用翻轉、疊合找出兩三角形全等，即可得知平行四邊形的任一條對角線，將平行四邊形分割成兩個全等的三角形。



- 教師可以透過摺紙找出平行四邊形的對角線，再沿著對角線剪開，形成 4 個三角形，利用翻轉、疊合找出兩兩全等的三角形，即可得知平行四邊形對角線互相平分。



S-8-10	正方形、長方形、等形的基本性質： 長方形的對角線等長且互相平分；菱形對角線互相垂直平分；等形的其中一條對角線垂直平分另一條對角線。	s-IV-8
---------------	--	--------

基本學習內容

SC-8-10-1 理解正方形、長方形、菱形及等形的對角線性質。

基本學習表現

SCP-8-10-1-1 理解正方形的對角線互相垂直平分且相等，並作簡單的計算。

SCP-8-10-1-2 理解長方形的對角線等長且互相平分，並作簡單的計算。

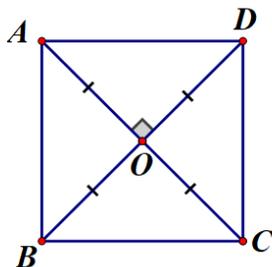
SCP-8-10-1-3 理解菱形對角線互相垂直平分，並作簡單的計算。

SCP-8-10-1-4 認識等形，並作簡單的計算。

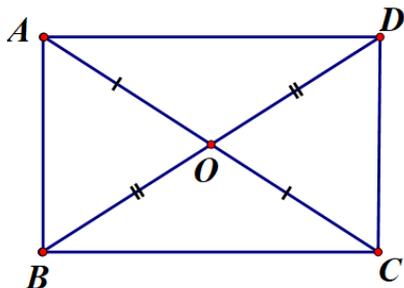
◎ 基本學習內容 SC-8-10-1 為 SC-7-4-1 其後續學習概念，故學生已理解線對稱圖形中，對稱線段相等，對稱角相等，對稱點的連線段會被對稱軸垂直平分。本基本學習內容開始引入正方形、長方形、菱形、等形的對角線性質。

■ 學生在七年級已理解線對稱圖形的性質，本基本學習內容建議以「恰有一條對角線是對稱軸的四邊形」來定義等形。觀察此對稱軸未通過的剩下兩個頂點，可發現恰為對稱點。因此，這兩個頂點的連線必被對稱軸垂直平分，即「對角線互相垂直，且恰有一條對角線平分另一條」。

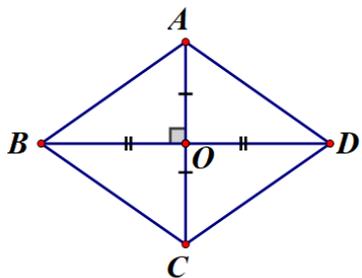
■ 學生透過摺紙去了解線對稱圖形—正方形的對角線長度相等且互相平分的學習，透過線對稱的直觀引導，不作全等推理或證明。



- 學生透過摺紙或畢氏定理去了解線對稱圖形—長方形的對角線長度相等且互相平分的學習，透過線對稱的直觀引導，不作全等推理或證明。



- 學生透過摺紙或畢氏定理去了解線對稱圖形—菱形的對角線互相平分，但長度不相等的學習，透過線對稱的直觀引導，不作全等推理或證明。



- 當學生對於線對稱圖形的操作有困難時，教師可讓學生使用直尺直接測量線段長度去認識正方形、長方形、菱形及箏形的對角線性質。
- 當兩對角線可以互相垂直且平分時，兩對角線亦可分別為此圖形的對稱軸，例如：正方形和菱形；當一條對角線垂直平分另一條對角線時，對角線亦可為此圖形的對稱軸，例如：箏形；當兩對角線並沒有垂直時，對角線並不是此圖形的對稱軸，例如：長方形。

<p>S-8-11</p>	<p>梯形的基本性質：等腰梯形的兩底角相等；等腰梯形為線對稱圖形；梯形兩腰中點的連線段長等於兩底長和的一半，且平行於上下底。</p>	<p>s-IV-8</p>
----------------------	---	---------------

基本學習內容

SC-8-11-1 梯形兩腰中點的連線段長等於兩底長和的一半，且平行於上下底。

基本學習表現

SCP-8-11-1-1 等腰梯形的兩底角相等。

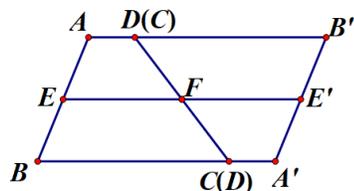
SCP-8-11-1-2 認識梯形兩腰中點的連線段的意義。

SCP-8-11-1-3 認識梯形兩腰中點的連線段長平行於上下兩底，且為上下兩底和的一半。

◎ 基本學習內容 SC-8-11-1 為 S-5-2 之後續學習概念，學生已學過梯形面積公式。本基本學習內容開始引入梯形兩腰中點的連線段長與上底及下底的關係。

■ 學生已知道以摺紙檢驗等腰梯形是線對稱圖形，且等腰梯形兩底角相等。

■ 如下圖所示，透過將兩個全等梯形翻轉與拼合，知道梯形兩腰中點的連線段，並觀察梯形兩腰中點的連線段平行於上下兩底，且為上下兩底和的一半即可。



■ 學生在學習到梯形兩腰中點的連線段長為上下兩底和的一半後，應可推得

$$\text{梯形面積} = \frac{\text{上底} + \text{下底}}{2} \times \text{高} = \text{兩腰中點連線段的長} \times \text{高}$$

但是，教師評量時此概念時，不宜在沒有提供上底和下底的長度時，直接要求學生利用「兩腰中點連線段的長 × 高」計算梯形面積。

<p>S-8-12</p>	<p>尺規作圖與幾何推理：複製已知的線段、圓、角、三角形； 能以尺規作出指定的中垂線、角平分線、平行線、垂直線； 能寫出幾何推理所依據的幾何性質。</p>	<p>s-IV-13</p>
----------------------	--	----------------

基本學習內容

SC-8-12-1 能作等線段、等圓、等角、等三角形的尺規作圖。

基本學習表現

SCP-8-12-1-1 認識以尺規作圖作出與已知線段相等的線段。

SCP-8-12-1-2 認識以尺規作圖作出與已知圓相等的圓。

SCP-8-12-1-3 認識以尺規作圖作出與已知角相等的角。

SCP-8-12-1-4 認識以尺規作圖作出與已知三角形全等的三角形。

◎ **基本學習內容 SC-8-12-1 為 SC-7-1 之後續學習概念，教師僅需教導簡單的基本作圖概念即可。本基本學習內容開始引入尺規作圖，複製線段、圓、角及三角形。**

■ 本基本學習內容不處理分年細目 S-8-12。

■ 本基本學習內容原則上，不進行教學，但若學生的程度允許下，教師可進行複製線段、圓、角及三角形的教學，但不宜過度評量。

■ 使用圓規時，請學生將圓規的針尖與筆尖圈上橡皮筋，連絡兩點距離和線段長度的關係，使學生能真正感受到畫圓，其實都是在作等線段作圖。

■ 學生可以利用具有刻度的直尺輔助作相等的線段。

■ 教師僅需教導學生學會基本的尺規作圖，不需要進行進一步的推論或證明。

G-8-1	直角坐標系上兩點距離公式： 直角坐標系上兩點 $A(a, b)$ 和 $B(c, d)$ 的距離為 $\overline{AB} = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$ ；生活上相關問題。	g-IV-1
--------------	---	--------

基本學習內容

GC-8-1-1 直角坐標上兩點的距離公式：若 $A(a, b)$ ， $B(c, d)$ 則 $\overline{AB} = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$ 。

基本學習表現

GCP-8-1-1-1 給予已知坐標之兩點，能算出兩點的距離。

◎ 本基本學習內容為 GC-7-1-1 與 SC-8-6-1 之後續學習概念，故學生已認識直角坐標相關名詞及畢氏定理。

本基本學習內容開始引入直角坐標上兩點的距離公式。

- 教師宜在直角坐標上繪圖並結合畢氏定理的應用，幫助學生看到直角三角形斜邊與兩點距離的關係。
- 基本學習評量時，主要在評量學生是否能夠正確的應用公式，故建議兩點坐標以整數為原則，避免複雜的計算或方根的化簡造成的錯誤。
- 本基本學習內容不評量兩點的中點坐標。

A-8-1	<p>二次式的乘法公式：$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$；$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$；$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$；$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$。</p>	a-IV-5
--------------	---	--------

基本學習內容

AC-8-1-1 乘法公式 $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$ 。

AC-8-1-2 乘法公式 $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ 。

AC-8-1-3 乘法公式 $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ 。

基本學習表現

ACP-8-1-1-1 理解乘法公式： $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$ ，其中 a 、 b 、 c 、 d 為整數。

ACP-8-1-2-1 理解乘法公式： $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ ，其中 a 、 b 為整數。

ACP-8-1-3-1 理解乘法公式： $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ ，其中 a 、 b 為整數。

◎ 基本學習內容 AC-8-1-1 為 NC-7-4-1 之後續學習概念，故學生應該已經理解數的交換律、結合律及分配律。

本基本學習內容幫助學生理解乘法公式 $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$ 。

■ 教師宜先協助學生理解乘法對加法的分配律 $c \times (a + b) = c \times a + c \times b$ 、 $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$ ，再協助學生專注在由左式展開到右式的過程，並可利用圖形面積及箭頭方式幫助學生記憶，例如：

1. 箭頭方式：(左分配和右分配皆可得到相同結果)

$$c \times (a + b) = c \times a + c \times b$$

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c$$

2. 面積方式：



大長方形面積 = 甲長方形面積 + 乙長方形面積

大長方形面積 = $c \times (a + b)$

甲長方形面積 = $c \times a$ ，乙長方形面積 = $c \times b$

故可得 $c \times (a + b) = c \times a + c \times b$

- 學生熟悉分配律之後，再協助學生利用乘法對加法的分配律來引導出乘法公式 $(a+b)(c+d) = (a+b) \times c + (a+b) \times d = ac + ad + bc + bd$ ，引導的過程是利用兩次分配律進行拆解，教師可以先用數字舉例說明：

$$32 \times 45 = 32 \times (40 + 5) = 32 \times 40 + 32 \times 5$$

$$= (30 + 2) \times 40 + (30 + 2) \times 5$$

$$= 30 \times 40 + 2 \times 40 + 30 \times 5 + 2 \times 5$$

$$\text{故 } 32 \times 45 = (30 + 2) \times (40 + 5) = 30 \times 40 + 2 \times 40 + 30 \times 5 + 2 \times 5$$

學生理解之後，可利用圖形面積及箭頭方式幫助學生記憶，例如：

1. 箭頭方式：

從上述乘法公式乘開的結果 $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$ ，先引導學生觀察右式和左式的關係，發現右式四項分別是左式兩個括號中各取一項互乘後的結果，因此可使用下列方式便於記憶：

$$(a+b)(c+d) = ac + bc + ad + bd$$

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

2. 面積方式：

	a	b	
c	甲	乙	
d	丙	丁	

大長方形面積 = 甲長方形 + 乙長方形 + 丙長方形 + 丁長方形

$$\text{大長方形面積} = (a+b)(c+d)$$

甲長方形面積 = $a \times c$ ，乙長方形面積 = $b \times c$ ，

丙長方形面積 = $a \times d$ ，丁長方形面積 = $b \times d$ ，

故可得 $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$ 。

- ◎ 基本學習內容 AC-8-1-2、AC-8-1-3 為 AC-8-1-1 之後續學習概念，故學生應該已經理解乘法公式 $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$ 。

本基本學習內容幫助學生理解二次式的乘法公式 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ；
 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ； $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ 。

- 學生理解乘法公式 $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$ 之後，其他乘法公式皆可視為展開後合併項或消去項的結果，可讓學生自行操作一次以加深印象。例如：

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2，$$

因此 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 。

$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

因此 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ 。

- 二次式的乘法公式為後續學習一元二次方程式及其解法的重要先備，宜協助學生熟練。

A-8-2	多項式的意義 ：一元多項式的定義與相關名詞（多項式、項數、係數、常數項、一次項、二次項、最高次項、升冪、降冪）。	a-IV-5
--------------	---	--------

基本學習內容

AC-8-2-1 理解 x 多項式的定義及相關名詞。

基本學習表現

ACP-8-2-1-1 理解 x 的多項式(含常數多項式)。

ACP-8-2-1-2 理解 x 的多項式相關名詞，如：項、項數、係數、常數項、次數、一次項、二次項、最高次項。

ACP-8-2-1-3 理解 x 的多項式升冪(升次)排列、降冪(降次)排列。

- ◎ 基本學習內容 AC-8-2-1 為 AC-7-1-1 之後續學習概念，故學生應該已能認識一元一次式及二元一次式。

本基本學習內容幫助學生理解 x 多項式的意義、相關名詞及升冪和降冪排列。

- 若一個代數式是由一些未知數的正整數次方及常數，透過加法及乘法形成的，我們稱此代數式為「多項式」。若此多項式只有一個未知數，則稱為「一元多項式」。

- 教學上可透過下列表格引入多項式的記法。例如：

千 10^3	百 10^2	十 10^1	個 10^0
5	12	23	4

由上方我們可以發現有 5 個 1000，12 個 100，23 個 10 及 4 個 1，可以記成 $5 \times 1000 + 12 \times 100 + 23 \times 10 + 4 \times 1$ ，亦可記成 $5 \times 10^3 + 12 \times 10^2 + 23 \times 10^1 + 4 \times 1$ 。

若我們以 x 代表 10

x^3	x^2	x	$x^0 (=1)$
5	-12	3	4

可記成 $5x^3 + (-12)x^2 + 3x^1 + 4x^0$ ，亦可簡記為 $5x^3 - 12x^2 + 3x^1 + 4$ 。

■ 一元 n 次多項式 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-3} x^{n-3} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0$ ，一般我們會簡記為 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-3} x^{n-3} + \dots + a_2 x^2 + \mathbf{a_1 x} + \mathbf{a_0}$ ，其中 $a_n x^n$ 、 $a_{n-1} x^{n-1}$ 、 $a_{n-2} x^{n-2}$ 、 $a_{n-3} x^{n-3}$ 、 \dots 、 $a_2 x^2$ 、 $a_1 x$ 、 a_0 稱為項，且 a_n 為 x^n 的係數； a_{n-1} 為 x^{n-1} 的係數； a_{n-2} 為 x^{n-2} 的係數； a_{n-3} 為 x^{n-3} 的係數； \dots ； a_2 為 x^2 的係數； a_1 為 x 的係數； a_0 為常數項，也稱為常數項的係數。

■ 教學上可多舉實際數值的例子，從實例中介紹的多項式之定義及相關名詞，如：單項式、多項式、項、項數、係數、常數項、一次項、二次項、最高次項、升冪與降冪。

例如： x 的二次多項式 $2x - 1 - 3x^2$ 共有三項，它的降冪排列表示法為 $-3x^2 + 2x - 1$ ，最高次項為 $-3x^2$ ，二次項、一次項及常數項分別為 $-3x^2$ 、 $2x$ 及 -1 ，而二次項係數、一次項係數及常數項分別為 -3 、 2 及 -1 。

■ 將一元多項式各項依次方數由小排到大，稱為「升冪」排列；由大排到小則為「降冪」排列。部分學生會依係數大、小進行排列，教師宜澄清。

■ 常數多項式包含

1. 零次多項式 (例如： $p(x) = 3$ ， $\text{deg} p(x) = 0$)

2. 零多項式 (如： $r(x) = 0$ ，不定義次數)

零多項式不定義次數的緣由是因為避免與 $\text{deg} f(x) \cdot g(x) = \text{deg} f(x) + \text{deg} g(x)$ 立論相違背，因此零次多項式不包含零多項式。

舉例說明如下：

$$(1) (x^2 + 3x + 5)(x + 7) = x^3 + 10x^2 + 26x + 35$$

我們可以發現 $\text{deg} f(x) \cdot g(x) = 3$ 且 $\text{deg} f(x) + \text{deg} g(x) = 3$ ，符合 $\text{deg} f(x) \cdot g(x) = \text{deg} f(x) + \text{deg} g(x)$ 。

$$(2) (x^2 + 3x + 5) \times 3 = 3x^2 + 9x + 15$$

我們可以發現 $\text{deg} f(x) \cdot g(x) = 2$ 且 $\text{deg} f(x) + \text{deg} g(x) = 2$ ，符合 $\text{deg} f(x) \cdot g(x) = \text{deg} f(x) + \text{deg} g(x)$ 。

$$(3) (x^2 + 3x + 5) \times 0 = 0$$

我們可以發現 $\text{deg} f(x) \cdot g(x) = 0$ 且 $\text{deg} f(x) + \text{deg} g(x) = 2 \neq 0$ ，不符合 $\text{deg} f(x) \cdot g(x) = \text{deg} f(x) + \text{deg} g(x)$ 。

■ 本基本學習內容討論的多項式為一元多項式，故不討論形如是否為多項式，或其次數為何等問題。

A-8-3	<p>多項式的四則運算：直式、橫式的多項式加法與減法；直式的多項式乘法（乘積最高至三次）；被除式為二次之多項式的除法運算。</p> <p>備註：不涉及使用分離係數法。</p>	a-IV-5
--------------	---	--------

基本學習內容

AC-8-3-1 整係數多項式的加、減法運算。

AC-8-3-2 整係數多項式的乘法運算。

AC-8-3-3 整係數多項式的除法運算。

基本學習表現

ACP-8-3-1-1 熟練以橫式及直式進行兩整係數多項式的加、減法運算。

ACP-8-3-2-1 熟練以橫式及直式進行整係數多項式的乘法運算。

ACP-8-3-3-1 理解以長除法進行整係數多項式的除法運算。

ACP-8-3-3-2 能以「被除式 = 除式商式餘式」的式子表示被除式、除式、商式和餘式之間的關係。

ACP-8-3-3-2 熟練整係數多項式的簡易加、減、乘法混合運算。

◎ 基本學習內容 AC-8-3-1 為 AC-7-1-1 及 AC-8-2-1 之後續學習概念，故學生應該已能進行一元一次式及二元一次式的化簡並認識多項式。

本基本學習內容幫助學生能運用橫式或直式熟練多項式加、減法運算。

■ 一元多項式裡，未知數次方相同的項稱為「同類項」。將兩個多項式的同類項相加（或相減），形成新的多項式，此過程稱為多項式的「加法」（或「減法」）。

■ 多項式加法和減法的代數運算不宜過於複雜，建議此處仍以一層括號為限。

■ 以直式做多項式加法與減法若有缺項（即係數為零），可補零以避免錯誤，例如計算 $(3x^2 + 1) + (2x^2 - 2x - 3)$ 時，以 $(3x^2 + 0x + 1) + (2x^2 - 2x - 3)$ 計算之。

◎ 基本學習內容 AC-8-3-2 為 AC-8-1-1 和 AC-8-3-1 之後續學習概念，故學生應該已能進行乘法公式運算及兩整係數多項式的橫式及直式加法運算。

本基本學習內容幫助學生能運用橫式或直式熟練多項式乘法運算。

- 本基本學習內容最多只評量兩次乘以一次(或一次乘以兩次)的多項式，多數學生習慣使用乘法公式的方式進行運算，因此不限制學生使用橫式或直式來運算，只要能算出答案即可。

◎ 基本學習內容 AC-8-3-3 為 AC-8-3-1 和 AC-8-3-2 之後續學習概念，故學生應該已能進行兩整係數多項式的乘法和減法運算。

本基本學習內容幫助學生能運用橫式或直式理解多項式除法運算。

- 被除式 A 除以除式 B，得到商式 Q 及餘式 R，一般學生會記為 $A \div B = Q \cdots R$ ，因 $A \div B = Q \cdots R$ 其中的等號只說明 A 式除以 B 式得到商式 Q 和餘式 R，並不代表兩邊相等，因此無法同加、同減、同乘或同除，建議老師引導學生將其記為 $A = B \times Q + R$ 。

- 當學生能將 $A \div B = Q \cdots R$ 記為 $A = B \times Q + R$ 的式子時，學生只要能夠知道被除式、除式、商式和餘式之間關係，在已知其中三式的情況下，透過除法原理推導出另一式即可，如：「一個多項式除以 $x - 3$ 得商式 $2x - 1$ ，餘式 4，求此多項式。」

- 本基本學習內容之多項式的四則運算，屬於重要且基本的學習內容，建議多項式乘法裡，乘積次數最高為三次；其除法的計算中，被除式次數最高為二次。

- 本學習內容之多項式運算，不引入分離係數法進行多項式的運算。

A-8-4	因式分解： 因式的意義（限制在二次多項式的一次因式）；二次多項式的因式分解意義。	a-IV-6
--------------	---	--------

基本學習內容

AC-8-4-1 整係數多項式的因式、倍式。

AC-8-4-2 認識因式分解的意義。

基本學習表現

ACP-8-4-1-1 認識因式、倍式。

ACP-8-4-1-2 能利用除法判別兩整係數多項式間是否有因式、倍式的關係。

ACP-8-4-1-3 能從「 $A \div B = Q$ 」中判別 A 是 B 和 Q 的倍式，B 和 Q 是 A 的因式（以整係數多項式為限）。

ACP-8-4-1-4 能從「 $A = B \times Q$ 」中判別 A 是 B 和 Q 的倍式，B 和 Q 是 A 的因式（以整係數多項式為限）。

ACP-8-4-2-1 認識因式分解的意義。

◎ 基本學習內容 AC-8-4-1 為 AC-8-3-2 和 AC-8-3-3 之後續學習概念，學生應該已熟練多項式的乘法與除法運算。

本基本學習內容幫助學生認識整係數多項式的因式與倍式。

■ 本基本學習內容在整係數多項式的限制下，討論因式、倍式的問題。

■ 本基本學習內容限制多項式只能分解成兩個一次因式的乘積，不討論分解成常數與二次因式的乘積。

■ $2x^2 - 6x + 4 = (2x - 2)(x - 2)$ ，可問 $(2x - 2)$ 、 $(x - 2)$ 是否為 $2x^2 - 6x + 4$ 的因式。
 $2x^2 - 6x + 4 = (2x - 2)(x - 2)$ ，可問 $(x - 1)$ 、 $(x - 2)$ 是否為 $2x^2 - 6x + 4$ 的因式。
 但不需要討論 2 是否為 $2x^2 - 6x + 4$ 的因式。

- 國小已討論 $132 \div 12 = 11$ 時，11 和 12 是 132 的因數，132 是 11 及 12 的倍數。國中可以類比到多項式進行因式和倍式的討論，例如：

(1) 給定 $(x^2 + 3x + 2) \div (x + 2) = (x + 1)$ 時，

我們說 $(x + 1)$ 和 $(x + 2)$ 是 $x^2 + 3x + 2$ 的因式， $x^2 + 3x + 2$ 是 $(x + 1)$ 和 $(x + 2)$ 的倍式。

(2) 給定 $(x^2 + 3x + 4) \div (x + 2) = (x + 1) \dots 2$ 時，

我們說 $(x + 1)$ 和 $(x + 2)$ 都不是 $x^2 + 3x + 4$ 的因式， $x^2 + 3x + 4$ 不是 $(x + 1)$ 和 $(x + 2)$ 的倍式。

- ◎ 基本學習內容 AC-8-4-2 為 AC-8-4-1 之後續學習概念，學生應該已理解因式與倍式的意義。

本基本學習內容幫助學生認識因式分解的意義。

- 給定 $(x^2 + 3x + 2) \div (x + 2) = (x + 1)$ 時，可得 $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$ ，我們稱 $x^2 + 3x + 2$ 的因式分解為 $(x + 1)(x + 2)$

- $2x^2 - 6x + 4 = (2x - 2)(x - 2)$ 和 $2x^2 - 6x + 4 = 2(x - 1)(x - 2)$ 都稱為 $2x^2 - 6x + 4$ 的因式分解。

- 給定 $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)(x + 1) = (x + 1)^2$ ，我們稱 $(x + 1)$ 為 $x^2 + 2x + 1$ 的因式， $x^2 + 2x + 1$ 為 $(x + 1)$ 的倍式，且 $(x + 1)^2$ 為 $x^2 + 2x + 1$ 的因式分解，也稱 $x^2 + 2x + 1$ 為完全平方式。

A-8-5	<p>因式分解的方法：提公因式法；利用乘法公式與十字交乘因式分解。</p> <p>備註：只處理整係數 $ax^2 + bx + c$ 的因式分解或與乘法公式直接相關者，不處理一般二元齊次或二元非齊次式但有一次介入者。</p>	a-IV-6
--------------	---	--------

基本學習內容

- AC-8-5-1 提公因式作整係數二次多項式的因式分解。
- AC-8-5-2 乘法公式作整係數二次多項式的因式分解。
- AC-8-5-3 十字交乘法作整係數二次多項式的因式分解。

基本學習表現

- ACP-8-5-1-1 能認識兩個整係數多項式(至多二次)的公因式。(公因式亦限制為整係數)。
- ACP-8-5-1-2 能判別兩個整係數多項式(至多二次)的公因式。(公因式亦限制為整係數)。
- ACP-8-5-1-3 能利用提出整係數的公因式作整係數二次多項式的因式分解。
- ACP-8-5-2-1 能用乘法公式因式分解整係數二次多項式。
- ACP-8-5-3-1 能用十字交乘法因式分解整係數二次多項式。

◎ 基本學習內容 AC-8-5-1 為 AC-8-4-2 之後續學習概念，學生應該已理解多項式因式分解的意義。

本基本學習內容幫助學生利用提公因式法作因式分解。

■ 學生已學會利用分配律將 $78 \times (99 + 1)$ 化為 $78 \times 99 + 78 \times 1 = 78 \times 99 + 78$ 也能將 $78 \times 99 + 78$ ，化簡為 $78 \times (99 + 1)$ 幫助計算。

我們也可以利用分配律引導學生看到多項式用提出公因式的方法因式分解。

例如：學生知道

$$\begin{aligned} & x(2x+3) \\ &= x \cdot 2x + x \cdot 3 \\ &= 2x^2 + 3x \end{aligned}$$

學生能發現 $2x$ 和 $3x$ 都有公因式 x ，

將 $2x^2 + 3x$ 改記成 $2x \times x + 3 \times x = x \times (2x + 3) = x(2x + 3)$ ，這樣的過程稱為提公因式作因式分解。

- 讓學生了解形如 $b - a$ 值的相反數 $-(b - a)$ 轉換方法，未來會有助於某些多項式的因式分解以及後續學習，宜有教學活動讓學生對此形式的轉換確實掌握。

例如：因式分解

$$\begin{aligned} & 3x(x-1) + 1 - x \\ &= 3x(x-1) + (-x+1) \\ &= 3x(x-1) - (x-1) \\ &= 3x \cdot (x-1) - 1 \cdot (x-1) \\ &= (3x-1)(x-1) \end{aligned}$$

若還是無法理解，也可以讓同學乘開再用十字交乘法分解。

- ◎ 基本學習內容 AC-8-5-2 為 AC-8-1-1 及 AC-8-4-2 之後續學習概念，學生應該已理解二次式的乘法公式及多項式因式分解的意義。

本基本學習內容幫助學生利用乘法公式：

(1) $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ ；(2) $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ ；(3) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ 作因式分解。

- 使用完全平方公式 $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ 或平方差公式 $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ 因式分解的題目，本基本學習內容限制 a 或 b 只能採用 x 的單項式或常數，不宜評量形如 $(x - 2)^2 - 4(x - 2) + 4$ 的因式分解。

- 若學生不熟悉乘法公式，建議改用十字交乘法解題。

- ◎ 基本學習內容 AC-8-5-3 為 AC-8-5-2 之後續學習概念，學生應該已理解多項式因式分解的意義。

本基本學習內容幫助學生利用十字交乘法作因式分解。

- 本基本學習內容只處理二次項係數是正的整係數多項式之因式分解。
- 十字交乘法學習內容的安排，建議從二次項係數為 1，再到二次項係數是其它正整數。
- 建議先跟學生示範以下的多項式乘法展開式，理解用十字交乘法因式分解時常數項分解兩數乘積的正負數類型：假設 $(x+p)(x+q) = x^2 + (p+q)x + pq$ ，
 - (1) $p > 0$ 及 $q > 0 \iff p+q > 0$ 及 $pq > 0$ ，例如： $x^2 + 6x + 8$ 可分解成 $(x+p)(x+q)$ ，得到 $p、q$ 皆為正
 - (2) $p < 0$ 及 $q < 0 \iff p+q < 0$ 及 $pq > 0$ ，例如： $x^2 + 6x + 8$ 可分解成 $(x+p)(x+q)$ ，得到 $p、q$ 皆為負
 - (3) 若 $p > 0, q < 0$ ，則 $pq < 0, p+q$ 無法確認正負；同理若 $p < 0, q > 0$ ，則 $pq < 0, p+q$ 無法確認正負，例如： $x^2 + 2x - 8$ 可分解成 $(x+p)(x+q)$ ，因常數項為負，得到 $p、q$ 為性質符號相異
- 十字交乘法因式分解時，先確定常數項分解的正負項類型後，接下來考慮常數項的兩數分解數值大小，並以原多項式的 x 項係數驗算。

例如：

(1) $x^2 + 9x + 8 = (x + \text{正數}p)(x + \text{正數}q)$ ，考慮 $p \leq q$

正數 p	1	2
正數 q	8	4
正數 p +正數 q	9	6
驗算 x 項係數	合	不合

所以 $x^2 + 9x + 8 = (x+1)(x+8)$

(2) $x^2 + 2x - 8 = (x + \text{正數}p)(x + \text{負數}q)$ ，考慮 $|\text{正數}p| \geq |\text{負數}q|$ ，使得 x 項係數為正

正數 p	4	8
負數 q	-2	-1
正數 p +負數 q	2	7
驗算 x 項係數	合	不合

所以 $x^2 + 2x - 8 = (x+4)[x+(-2)] = (x+4)(x-2)$

(3) $x^2 - 4x - 12 = (x + \text{正數}p)(x + \text{負數}q)$ ，考慮 $|\text{正數}p| \leq |\text{負數}q|$ ，使得 x 項係數為負

正數 p	1	2	3
負數 q	-12	-6	-4
正數 p +負數 q	-11	-4	-1
驗算 x 項係數	不合	合	不合

所以 $x^2 + 8x + 12 = (x + 2)[x + (-6)] = (x + 2)(x - 6)$

(4) $x^2 - 7x + 12 = (x + \text{負數}p)(x + \text{負數}q)$ ，考慮 $|\text{負數}p| \leq |\text{負數}q|$

負數 p	-1	-2	-3
負數 q	-12	-6	-4
負數 p +負數 q	-13	-8	-7
驗算 x 項係數	不合	不合	合

所以 $x^2 - 7x + 12 = [x + (-3)][x + (-4)] = (x - 3)(x - 4)$

- 十字交乘時，常數項除了考慮數字大小外，也要注意不要可多組分解的數，如 60、80、120...，或不要兩個較大質數乘積，如 $209 = 11 \times 19$ ，重點在習得十字交乘的方法，而不是為難學生。

A-8-6	一元二次方程式的意義：一元二次方程式及其解，具體情境中列出一元二次方程式。	a-IV-6
-------	---------------------------------------	--------

基本學習內容

AC-8-6-1 從具體情境中列出一元二次方程式。

AC-8-6-2 一元二次方程式及其解的意義。

基本學習表現

ACP-8-6-1-1 認識一元二次方程式的通式為 $ax^2 + bx + c = 0$ ， $a \neq 0$ 。

ACP-8-6-1-2 從具體情境中列出一元二次方程式。

ACP-8-6-2-1 能檢驗整係數一元二次方程式的解或根。

◎ 基本學習內容 AC-8-6-1 為 AC-7-2-1 之後續學習概念，故學生應該已能在具體情境中列出一元一次方程式。

本基本學習內容幫助學生在具體情境中列出一元二次方程式。

■ 若方程式經過移項化簡後可整理成形式為 $ax^2 + bx + c = 0$ 的方程式，且 $a \neq 0$ ，則此方程式稱為一元二次方程式。

■ 牽涉一元二次方程式的具體情境在假設未知數或者列方程式時都較為複雜，建議從簡單的情境開始，例如：一條 20 公分的繩子想圍出一面積為 12 平方公尺的長方形，請問寬為多少？若假設寬為 x ，可以列出 $(10 - x)x = 12$ 。

◎ 基本學習內容 AC-8-6-2 為 AC-8-6-1 之後續學習概念，故學生應該已能在具體情境中列出一元二次方程式。

本基本學習內容幫助學生理解一元二次方程式解的意義。

■ 學生從一元一次方程式中，已經知道方程式解的意義就是能使方程式的等號成立的值。所以可以將此概念延伸至一元二次方程式解的意義。

- 本學習內容不需要特別強調一元二次方程式的解有 2 個，只需知道解為代入式子後讓等式成立的值。例如：找出 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的答案。學生只要將 3 和 2 代入得到 $3^2 - 5 \times 3 + 6 = 0$ 及 $2^2 - 5 \times 2 + 6 = 0$ ，來得到 3 和 2 為 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的解。

- 在 $x^2 - 6x + 9 = 0$ 中，學生只要將 3 代入得到 $3^2 - 6 \times 3 + 9 = 0$ ，得到 3 為此一元二次方程式的解，但不說明 $x = 3$ 為重根。

- 檢驗一元二次方程式的解時需作平方的計算，學生可能會將乘法與平方的計算次序弄錯，教師可以在此強調指數的運算次序優先於乘法運算。例如將 $x = 2$ 代入 $3x^2$ ，誤把 3×2^2 計算成 $(3 \times 2)^2$ 得到的結果是 36，教師強調 $3x^2 = 3x \times x$ ，將 $x = 2$ 代入得到的值為 $3x^2 = 3 \times 2 \times 2 = 12$ 。

<p>A-8-7</p>	<p>一元二次方程式的解法與應用：利用因式分解、配方法、公式解一元二次方程式；應用問題；使用計算機計算一元二次方程式根的近似值。</p>	<p>a-IV-6</p>
---------------------	---	---------------

基本學習內容

AC-8-7-1 能利用因式分解來解一元二次方程式。

AC-8-7-2 能利用公式解一元二次方程式。

基本學習表現

ACP-8-7-1-1 能理解若 $(ax + b)(cx + d) = 0$ ，則 $ax + b = 0$ 或 $cx + d = 0$ 。

ACP-8-7-1-2 能熟練用十字交乘法解整係數一元二次方程式。

ACP-8-7-1-3 能利用乘法公式解整係數一元二次方程式。

ACP-8-7-1-4 能熟練用提公因式法解整係數一元二次方程式。

ACP-8-7-2-1 能用公式解找出整係數一元二次方程式的根。

ACP-8-7-2-2 能利用一元二次方程式解應用問題。

- ◎ 基本學習內容 AC-8-7-1 為 AC-8-5-3 及 AC-8-6-2 之後續學習概念，故學生應該已能將一元二次式做因式分解，並理解一元二次方程式解的意義。
本基本學習內容幫助學生利用因式分解來解一元二次方程式。

- 本基本學習內容以討論整係數的一元二次方程式為原則，如果係數為分數，讓學生先將一元二次方程式化為整係數方程式再進行計算。教師不宜過度評量係數為分數之一元二次方程式。
- 本基本學習內容所談及之一元二次方程式標準式為 $ax^2 + bx + c = 0$ ，非 $x^2 + px + q = 0$ ，因為使用 $x^2 + px + q = 0$ 為標準式時，由於要將 x^2 係數化成 1， $p \cdot q$ 易產生分數不易進行計算。在使用公式解、十字交乘法解一元二次方程式時，也以 $ax^2 + bx + c = 0$ 為通式進行教學。
- 學生遇到 $(x - 2)(x - 3) = 1$ 常去類比 $(x - 2)(x - 3) = 0$ 作法得到 $(x - 2) = 1$ 及 $(x - 3) = 1$ ，此時得到 $x = 3$ 及 $x = 4$ 。

老師在澄清這個迷思概念時，可以將 $x = 3$ 代入 $(x-2)(x-3) = 1$ 會得到 $1 \times 0 \neq 1$ ，讓學生了解這個概念只能在 $(x-2)(x-3) = 0$ 時使用。讓學生經由比較，知道一定是在等號右邊是 0 時，才能夠得到藉由解 $x-2 = 0$ 及 $x-3 = 0$ 得到 $x = 2$ 及 $x = 3$ 。

- 利用因式分解解一元二次方程式時題目以運算盡量簡單、最多一層括號為原則，例如： $x^2 - 2x - 2 = x + 2$ 、 $(2x + 1)^2 - 9 = 0$ 、 $x^2 = 3x$ 。

◎ 基本學習內容 AC-8-7-2 為 AC-8-6-1 之後續學習概念，故學生應該已能在具體情境中列出一元二次方程式。

本基本學習內容幫助學生利用公式解來解一元二次方程式。

- 教師仍可以用配方法帶出公式解，但不宜要求學生使用配方法來解一元二次方程式。
- 教師在評量公式解一元二次方程式的題目時，應提供公式 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 讓學生使用。
- 學生利用公式解出的一元二次方程式解含有根號時，例如： $x = \frac{5 \pm \sqrt{47}}{2}$ 時，學生可以利用計算機將根號值求出 $x = \frac{5 \pm 6.86}{2} \approx 8.43$ 或 -0.925 ，培養學生的量感及數感。
- 在說明公式解時，若以 $ax^2 + bx + c = 0$ 進行推導，推導過程會產生，學生較難理解。可以利用下列方式進行教學幫助學生理解公式解的推導過程，將等號左右兩邊同乘以，再利用配方法進行推導。推導過程如下：

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2|a|}$$

- 本學習內容會學習到利用乘法公式、因式分解、十字交乘法及公式解來解一元二次方程式，評量如何解出一元二次方程式時，教師不宜限制學生使用何種方法來解題。

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2$$

$$(2ax + b)^2 = -4ac + b^2$$

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

■ 本基本學習內容在學習利用一元二次方程式解應用問題時，情境盡量以簡單為主，例如：

1. 有兩個連續整數，若其平方和為 145，求此二數。
2. 一面積為 36 平方公尺的長方形，已知長比寬多 5 公尺，求長、寬。
3. 一長方形土地的長比寬多 5 公尺，在四周規畫一條寬 1 公尺的小徑，剩下的土地面積為原來的 $\frac{5}{8}$ ，求此塊土地原來的長、寬。

F-8-1	一次函數 ：透過對應關係認識函數（不要出現 $f(x)$ 的抽象型式）、常數函數 ($y = c$)、一次函數 ($y = ax + b$)。	f-IV-1
--------------	--	--------

基本學習內容

- FC-8-1-1 函數的意義。
- FC-8-1-2 常數函數與一次函數。

基本學習表現

- FCP-8-1-1-1 認識函數是一種對應關係。
- FCP-8-1-1-2 能判斷生活情境中哪些關係是函數。
- FCP-8-1-1-3 能判斷數量的對應關係中哪些是函數。
- FCP-8-1-1-4 認識從 x 對應到 $ax + b$ 可將對應關係記為 $y = ax + b$ 。
- FCP-8-1-2-1 給定 $y = ax + b$ 及 x 值，能找出對應的函數 y 值。
- FCP-8-1-2-2 認識一次函數 $y = ax + b$ ($a \neq 0$)。
- FCP-8-1-2-3 認識常數函數 $y = c$ 。

◎ 基本學習內容 FC-8-1-1 為首次引入，幫助學生由數量和數量的對應關係認識函數。

■ 多從生活的實例來介紹數量和數量的對應關係來認識函數。例如：下表是將水加熱時，加熱時間和水溫的對照表。

時間(分)	0	3	6	9	12	15	18
水溫(°C)	32	50	68	86	100	100	100

由上表知，只要給定時間，就能得到水溫，因此溫度是時間的函數。相反地，知道溫度是 100°C，並不能完全知道加熱的時間，所以時間不是溫度的函數。

■ 多對一、一對多、一對一、多對多概念的教學，不宜用在佈題敘述中，也不宜評量學生。

- 舉函數的例子，可由生活物件對應逐漸轉換到數的對應。在數的對應上，可考慮「整數」對應到「完全平方數」，此例可做為未來 $y = x^2$ 的前置經驗；教學活動的安排應先從正方形邊長（正整數）對應到正方形面積（正整數）開始舉例，再將這個對應加以擴充，包含對稱的負整數對應及 0 的對應，學生可以透過此例體會二個對一個的關係（除了 0 以外）

◎ 基本學習內容 FC-8-1-2 為 AC-7-4-2 之後續學習概念，故學生已理解二元一次方程式及其解的意義。

本基本學習內容幫助學生認識常數函數和一次函數以及計算其函數值。

- 「 $y = f(x)$ 」這種函數型式，學生會覺得抽象，不要出現。
- 在兩個變數 x 與 y 的關係式中，如果給定一個 x 的值，就恰有一個 y 的值，便稱 y 是 x 的函數，也就是當 x 的值確定時（例如 $x = a$ ），對應的 y 值就隨之確定。此時的 y 值就稱為函數在 $x = a$ 時的函數值。
- 從對應關係轉換到一次函數時，宜由淺入深，由真實生活數量到抽象數字或符號，透過多樣性的表徵，讓學生認識。例如，一次函數 $y = ax$ 的舉例，可以如下表所示，先以表格表徵方式寫出正方形邊長與周長的實際數值對應，再將此對應以一般化 x 對應到 $4x$ 的符號表徵紀錄，同時引出 $y = 4x$ 之式子表徵。

邊長	1	2	3	4	...	x
周長	4	8	12	16	...	$4x$

由上表可得對應關係為「周長是邊長的 4 倍」，如果此時假設 y 表示周長，則 $y = 4x$ 。然而單看此式，若 x 代表的不是邊長，那麼也可以是負值，此時 $4x$ 就是規範對應關係的一次式。

- 教師可以舉一些生活中的例子，幫助學生認識一次函數。例如：「阿得春捲一捲 40 元，加購 1 個購物袋需加 1 元，為了方便計算，店家把春捲數與售價的對照表列出來。」

春捲(捲)	1	2	3	4	5	6	7	8
春捲金額	40	80	120	160	200	240	280	320
購物袋金額	1	1	1	1	1	1	1	1
費用(元)	41	81	121	161	201	241	281	321

我們可以用一個數學式子： $40 \text{ 元} \times \text{春捲數} + 1 \text{ 元 (購物袋)}$ ，春捲數為任意正數，把對照表記下來，也可以假設春捲數為 x (捲)，售價為 y (元)，把上述對應關係改記成 $y = 40x + 1$ ， x 為任意正數。

- 常數函數 $y = c$ 的對應關係及函數值不如一次函數般容易觀察，宜由具體實例引入。例如，「智慧型手機 4G 上網吃到飽，不管網路流量使用多少，月租費只要 599 元。下面是小明上半年流量費用明細表，請用一個算式表示流量費用明細表。」從流量費用明細表，我們發現不管是哪一個月份的網路使用量，月租費都是 599 元，我們可以用一個算式記下來：

(網路流量) x (MB) \rightarrow (費用) 599(元)， x 為 0 或任意正數

月份	1 月	2 月	3 月	4 月	5 月	6 月
網路流量 (GB)	2.34	5.28	3.56	0	4.66	6.08
費用 (元)	599	599	599	599	599	599

F-8-2	一次函數的圖形： 常數函數的圖形；一次函數的圖形。	f-IV-1
--------------	----------------------------------	--------

基本學習內容

FC-8-2-1 常數函數在直角坐標平面上的圖形。

FC-8-2-2 一次函數在直角坐標平面上的圖形。

基本學習表現

FCP-8-2-1-1 能以描繪 x 及其對應的函數值 y 之方式，畫出常數函數在直角坐標平面上的圖形。

FCP-8-2-1-2 能以找出兩點的方式畫出常數函數在直角坐標平面上的圖形。

FCP-8-2-1-3 知道常數函數 $y = b$ ($b \neq 0$)、 $y = 0$ 在直角坐標平面上的圖形為水平直線。

FCP-8-2-2-1 能以描繪 x 及其對應的函數值 y 之方式，畫出一次函數在直角坐標平面上的圖形。

FCP-8-2-2-2 能以找出兩點的方式畫出一次函數在直角坐標平面上的圖形。

FCP-8-2-2-3 知道一次函數 $y = ax + b$ ($a \neq 0$) 在直角坐標平面上的圖形為斜直線。

◎ 基本學習內容 FC-8-2-1 和 FC-8-2-2 為 AC-7-6-1 之後續學習概念，故學生應該已經能在直角坐標平面上畫出二元一次方程式的圖形。

本基本學習內容幫助學生在直角坐標平面上畫出常數函數和一次函數的圖形，並知道常數函數的圖形為一條水平線，以及一次函數的圖形為一條斜直線。

■ 在教學中，可協助學生將 $y = b$ 轉換成 $y = 0x + b$ ，引導學生由舊經驗中畫出 $0x + y = b$ 在直角坐標平面上的圖形。

■ 在教學中，可協助學生將 $y = 0$ 轉換成 $y = 0x + 0$ ，引導生由舊經驗中知道 $y = 0$ 在直角坐標平面上的圖形為 x 軸。

■ 在教學中，可進行 $y = ax + b$ 與 $ax - y + b = 0$ 之間的轉換，引導學生舊經驗中畫直線 $ax - y + b = 0$ 的經驗畫出 $y = ax + b$ 在直角坐標平面上的圖形。

- 雖然透過將 $y = ax + b$ 轉換為 $ax - y + b = 0$ ，即可用畫二元一次方程式圖形的方式畫出一次函數與常數函數的圖形，然而，最終仍應使學生可不經式子的轉換，直接畫出 $y = ax + b$ 的圖形；如此可將方程式中描繪「使等式相等的解」的圖形之概念轉換為函數中描繪「 x 與其對應值 y 」的圖形之概念。

D-8-1	統計資料處理： 累積次數、相對次數、累積相對次數折線圖。	n-IV-9 d-IV-1
--------------	-------------------------------------	------------------

基本學習內容

DC-8-1-1 累積次數、相對次數、累積相對次數。

DC-8-1-2 累積相對次數折線圖。

基本學習表現

DCP-8-1-1-1 理解次數分配表、累積次數分配表的名稱與意義。

DCP-8-1-1-2 理解相對次數分配表、累積相對次數分配表的名稱與意義。

DCP-8-1-1-3 理解累積次數分配表和累積相對次數分配表可提供資料在整體中的相對位置。

DCP-8-1-1-4 將原始資料整理成次數分配表、或累積次數分配表。

DCP-8-1-1-5 將原始資料整理成相對次數分配表、或累積相對次數分配表。

DCP-8-1-2-1 能繪製累積相對次數折線圖。

DCP-8-1-2-1 能解讀累積相對次數折線圖折點所代表的意義。

- ◎ **基本學習內容 DC-8-1-1 為 DC-7-1-1 之後續學習概念，學生應該已能夠蒐集生活中常見的數據資料，整理並繪製成含有原始資料或百分率的統計圖表。本基本學習內容引入累積次數、累積相對次數分配表，幫助學生了解資料的分配狀況。**

- 本基本學習內容宜限制有序且具連續性的資料。
- 將資料發生的「次數」或「人數」加以排序或分組整理而成的表格統稱為次數分配表，學生練習的題目其分組的組數不宜超過 8 組。
- 相對次數是將各筆或各組資料的次數除以總次數所得的比值（以百分比呈現）。
- 累積次數為經排序或分組整理後，依序累加至各筆或各組資料的次數；累積相對次數則為依序累加至各筆或各組的相對次數。透過累積次數或累積相對次數可了解資料在整體中的相對位置。

- ◎ **基本學習內容 DC-8-1-2 為 DC-8-1-1 之後續學習概念，學生應該已理解累積次數、相對次數、累積相對次數的意義。**

本基本學習內容幫助學生繪製累積相對次數折線圖。

- 教師應指導學生認識製作次數分配折線圖或相對次數分配折線圖時，會以各組中點來代表該組之資料值；而在製作累積次數分配折線圖，或相對累積次數分配折線圖時，則常以各組的右端點來取折點，這樣才符合累積的意義。

<p>N-9-1</p>	<p>連比：連比的記錄；連比推理；連比例式；及其基本運算與相關應用問題；涉及複雜數值時使用計算機協助計算。</p>	<p>n-IV-4 n-IV-9</p>
---------------------	--	--------------------------

基本學習內容

NC-9-1-1 連比與連比例式的意義及記法。

NC-9-1-2 連比例式的基本運算。

基本學習表現

NCP-9-1-1-1 理解連比的名稱與意義。

NCP-9-1-1-2 理解連比例式的名稱與意義。

NCP-9-1-1-3 能由 $x:y = a:b$ 、 $y:z = b:c$ 的條件，求得 $x:y:z$ 的連比例。

NCP-9-1-2-1 認識：若 $a:b:c = d:e:f$ ，則 $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$

NCP-9-1-2-2 認識：若 $a:b:c = d:e:f$ ，則 $a = dk$ ， $b = ek$ ， $c = fk$ ($k \neq 0$)。

NCP-9-1-2-3 能解決生活情境中有關連比例的問題。

◎ 基本學習內容 NC-9-1-1 為 NC-7-9-1 (比與比例式) 之後續學習概念，學生應該已理解比、比例式、正比、反比的意義。

本基本學習內容引入連比與連比例式，幫助學生理解連比與連比例式的意義及記法。

■ 本基本學習內容限制連比的個數在三個數量。

■ 可以從生活中的例子引入連比，例如：以飲料店的「柳鳳汁」調配方式為例，調配一桶柳鳳汁需要 5 公升柳橙汁、3 公升鳳梨汁及 4 公升的水，可以用這三者的比 (記為 5:3:4)，幫助學生認識連比。

■ 幫助學生將 $a:b = 2:3$ 及 $b:c = 3:5$ 改記成一個連比 $a:b:c = 2:3:5$ ，也能從 $a:b:c = 2:3:5$ 知道 $a:b = 2:3$ 、 $b:c = 3:5$ 及 $a:c = 2:5$ 。

■ 比例問題數字以簡易的正整數為原則。

例如：以「 $a:b = 1:4$ ， $b:c = 6:5$ ，請問 $a:b:c = ?$ 」為例，建議教師透過下列步驟幫助學生解題。

步驟一：分別列出 $a:b$ 和 $b:c$ 相等的比：

$$a:b = 1:4 = 2:8 = 3:12 = 4:16 = 5:20 = 6:24 = \dots$$

$$b:c = 6:5 = 12:10 = 18:15 = 24:20 = \dots$$

步驟二：建議教師透過上列兩組算式找出 b 相等時兩組的比，得到

$$a:b:c = 3:12:10 = 6:24:20 = \dots$$

幫助學生發現 b 相等時 ($b = 12$ 和 24)， 12 和 24 皆為 4 和 6 的公倍數。

◎ 基本學習內容 NC-9-1-2 為 NC-7-9-3 之後續學習概念，學生應該學會比與比例式的基本運算，並能解決生活中有關比例的問題。

本基本學習內容幫助學生學會連比與連比例式的基本運算，並能解決生活中有關連比及連比例式的問題。

■ 假設小明的班上在學校園遊會賣「柳鳳汁」，我們可以利用柳橙汁、鳳梨汁、水的調配比例列表（如下表）察覺這三者的最簡整數比，並利用最簡整數連比來調配出一樣風味的「柳鳳汁」。

柳橙汁	鳳梨汁	水
20 公升	12 公升	16 公升
50 公升	30 公升	40 公升
5 公升	3 公升	4 公升
$\frac{5}{12}$ 公升	$\frac{1}{4}$ 公升	$\frac{1}{3}$ 公升
0.5 公升	0.3 公升	0.4 公升

教師可透過比較活動引入最簡單整數比，例如：從上表這些數值寫成的連比中， $5:3:4$ 比 $20:12:16$ 簡單，也比 $50:30:40$ 簡單，也比 $\frac{5}{12}:\frac{1}{4}:\frac{1}{3}$ 簡單。連比 $5:3:4$ 的最大公因數是 1，我們稱 $5:3:4$ 為這些相等連比中的最簡單整數比。

最簡單整數比 $5:3:4$ 的意義為「柳橙汁 5 份、鳳梨汁 3 份、水 4 份可以調配出一樣的口味」，因此假設一份為 r 公升，其中 $r \neq 0$ ，則柳橙汁要 $5r$ 公升、鳳梨汁要 $3r$ 公升、水要 $4r$ 公升。

- 學生解含有未知數的連比時，本基本學習內容提供兩種解法。

以問題「 $5:3:4 = x:y:6$ 」為例說明：

方法一：簡化成兩數的比。

由「 $5:3:4 = x:y:6$ 」可得「 $5:4 = x:6$ 」和「 $3:4 = y:6$ 」，學生可以利用此兩個兩數的比來解決問題。

方法二：利用最簡單整數比。

因為 $5:3:4$ 為問題的最簡單整數比，其任何相等的比都是最簡單整數比乘上某個倍數，即「 $x = 5r$ 」、「 $y = 3r$ 」和「 $4 = 6r$ 」，學生可解得 $r = \frac{2}{3}$ ，在代入另兩個方程式以解出 $x = \frac{10}{3}$ 和 $y = 2$ 。

- 比例問題情境不宜過度複雜，應能直接使用問題所提供的「比」求解為原則。例如：現有一些 1 元、5 元和 10 元的硬幣，合計 165 元。已知 1 元、5 元，10 元的硬幣個數比為 $5:4:3$ ，請問 1 元、5 元和 10 元的硬幣有多少個？

S-9-1	相似形 ：平面圖形縮放的意義；多邊形相似的意義；對應角相等；對應邊長成比例。	S-IV-6
--------------	---	--------

基本學習內容

SC-9-1-1 多邊形相似的意義。

基本學習表現

SCP-9-1-1-1 認識相似多邊形。

SCP-9-1-1-2 認識兩多邊形相似時，對應邊成比例，對應角相等。

SCP-9-1-1-3 認識兩多邊形對應邊成比例，對應角相等時，此兩多邊形相似。

◎ **基本學習內容 SC-9-1-1 是 SC-6-1-1 的後續學習概念，故學生應已認識放大圖與縮小圖的意義。**

本基本學習內容 SC-9-1-1 幫助學生理解多邊形相似的意義。

■ 學生在八年級時，已經能使用「對應頂點」、「對應邊」及「對應角」描述兩全等圖形對應的關係。教師可藉此概念，幫助學生使用「對應頂點」、「對應邊」及「對應角」描述兩相似圖形對應的關係。

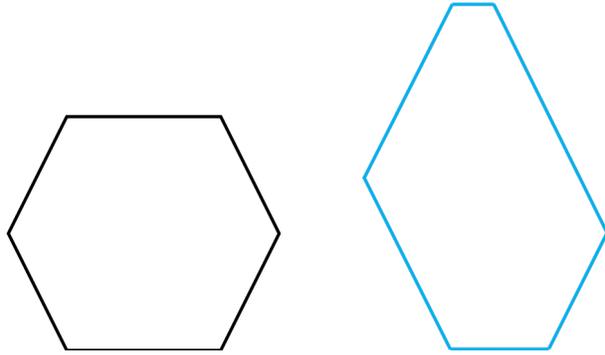
■ 透過圖形的放大與縮小，理解縮放前後的對應邊長成比例，對應角相等。

■ 幫助學生認識多邊形甲與多邊形乙相似，多邊形乙與多邊形丙相似，則多邊形甲與多邊形丙亦相似。

■ 兩個邊數相同的多邊形，若對應角都相等且對應邊長都成比例時，則這兩個多邊形會相似。在辨別多邊形相似時，應讓學生認識除了對應角相等，且對應邊長都要成比例時，這兩個多邊形才會相似。

例 1: 兩個菱形的對應邊長都相等，但對應角不一定相等，則兩菱形不相似。

例 2: 下圖中，兩個六邊形的每個內角都是 120 度，但其對應邊長沒有成比例，因此這兩六邊形不相似。



- 任意兩個正 n 邊形，因為對應角皆相等，且對應邊長皆成比例，故這兩正 n 邊形會相似。

S-9-2	三角形的相似性質： 三角形的相似判定（AA、SAS、SSS）；對應邊長之比＝對應高之比；對應面積之比＝對應邊長平方之比；利用三角形相似的概念解應用問題；相似符號（ \sim ）。	S-IV-10
--------------	--	---------

基本學習內容

SC-9-2-1 三角形的 AA、SAS、SSS 相似性質。

SC-9-2-2 相似三角形對應面積之比為其對應邊長平方之比。

基本學習表現

SCP-9-2-1-1 認識三角形的 AA 相似性質，且能利用此性質判斷兩三角形是否相似。

SCP-9-2-1-2 認識三角形的 SAS 相似性質，且能利用此性質判斷兩三角形是否相似。

SCP-9-2-1-3 認識三角形的 SSS 相似性質，且能利用此性質判斷兩三角形是否相似。

SCP-9-2-2-1 認識相似三角形對應邊長之比等於對應高之比。

SCP-9-2-2-2 認識相似三角形對應面積之比等於對應邊（或對應高）平方之比。

◎ 基本學習內容 SC-9-2-1 是 SC-9-1-1 的後續學習概念，故學生應已認識多邊形相似的意義。

本基本學習內容幫助學生認識三角形的 AA、SAS、SSS 相似性質。

■ 本基本學習內容僅討論三角形相似性質。

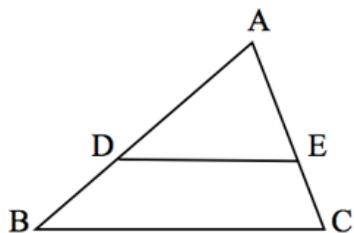
■ 使用相似符號「 \sim 」記錄兩相似三角形。

■ 認識甲、乙兩三角形相似時，甲三角形透過平移、旋轉與翻轉後，仍會與乙三角形相似。

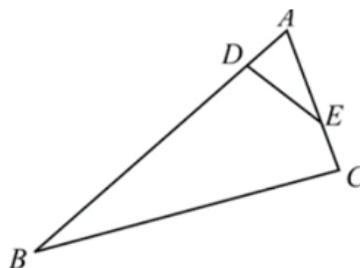
■ 也就是說，丙三角形和甲三角形全等，則丙三角形和乙三角形也會相似。

■ 教師可以先說明三角形三組對應角相等時，兩三角形相似，稱為 AAA 相似，再透過三角形內角和為 180 度，幫助學生簡化為 AA 相似。

- 學生對於在三角形內，從兩邊做平行於底邊的平行線，會截出相似三角形較為容易接受。例如：下圖(一)中， $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，則可得 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ 。但是對於做截線但不平行底邊時 (\overline{DE} 不平行 \overline{BC})，其中一截角 ($\angle ADE$) 等於底邊另一底角 ($\angle C$) 時，因為 $\angle A$ 是公共角，依據 AA 相似， $\triangle ADE \sim \triangle ACB$ ，容易出現迷思概念，對應點與對應邊容易對錯；如圖(二)所示。



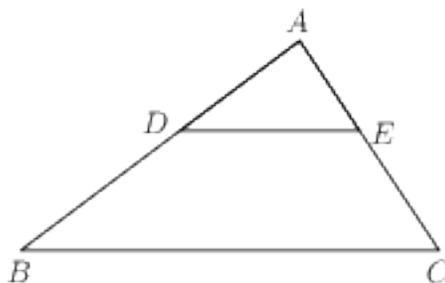
圖(一)



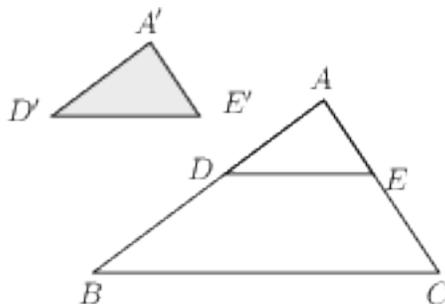
圖(二)

本基本學習內容建議以下列步驟，幫助學生澄清迷思概念：

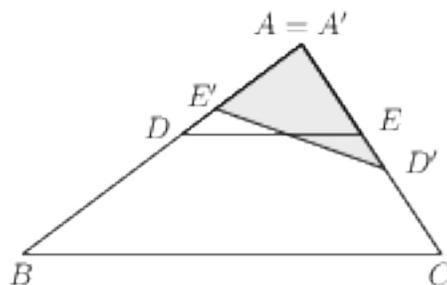
步驟一：先劃出 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，幫助學生澄清 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，如下圖。



步驟二：複製一個與 $\triangle ADE$ 全等的圖卡 $\triangle A'D'E'$ ，如下圖。



步驟三：先將 $\triangle A'D'E'$ 翻轉，再將頂點 A' 和頂點 A 疊在一起，而且 $\triangle A'D'E'$ 和 $\triangle ABC$ 的兩邊也對齊，如下圖。

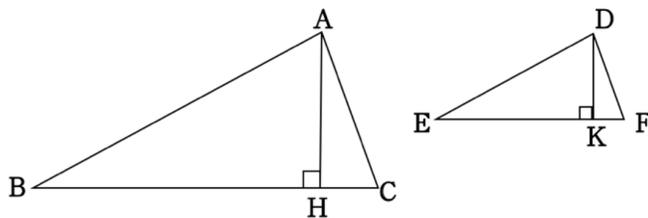


步驟四：因為 $\triangle ADE$ 和 $\triangle ABC$ 相似， $\triangle ADE$ 和 $\triangle A'D'E'$ 全等。所以， $\triangle A'D'E'$ 也會和 $\triangle ABC$ 相似。

◎ 基本學習內容 SC-9-2-2 是 SC-9-2-1 的後續學習概念，故學生應已認識三角形的 AA、SAS、SSS 相似性質。

本基本學習內容將學習相似三角形中，透過對應邊長之比等於其對應高之比，幫助學生理解面積之比等於其對應邊長平方之比。

■ 例如： $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 為兩相似三角形，如下圖。



所以對應角相等，對應邊成比例。即

$$\overline{AB} : \overline{DE} = \overline{BC} : \overline{EF} = \overline{AC} : \overline{DF}$$

和

$$\angle A = \angle D, \quad \angle B = \angle E, \quad \angle C = \angle F$$

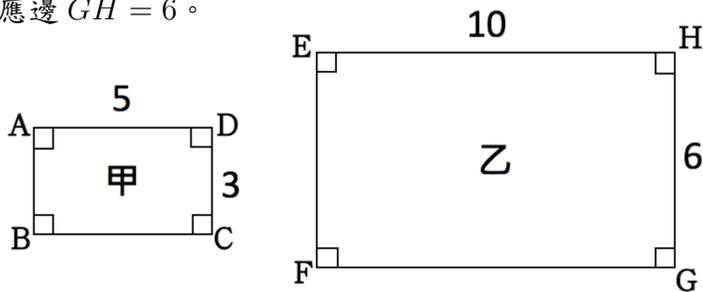
設 \overline{AH} 為 $\triangle ABC$ 中 \overline{BC} 對應的高， \overline{DK} 為 $\triangle DEF$ 中 \overline{EF} 對應的高。

因為 $\angle B = \angle E$ 且 $\angle AHB = 90^\circ = \angle DKE$ ，由「AA 相似」可得

$$\triangle ABH \sim \triangle DEK。$$

因此， $\overline{AH} : \overline{DK} = \overline{AB} : \overline{DE}$ ，即兩相似三角形中，對應邊長之比＝對應高之比。

- 首先，理解兩相似長方形中，對應面積之比＝對應邊長平方比。以下圖為例說明，長方形 $ABCD$ 與長方形 $EFGH$ 相似，且 $\overline{AD} = 5$ ，其對應邊 $\overline{EH} = 10$ ； $\overline{CD} = 3$ ，其對應邊 $\overline{GH} = 6$ 。



因為

$$\overline{AD} : \overline{EH} = 5 : 10 = 1 : 2$$

$$\overline{CD} : \overline{GH} = 3 : 6 = 1 : 2$$

$$\text{甲長方形的面積} = 5 \times 3$$

$$\text{乙長方形的面積} = (5 \times 2) \times (3 \times 2)$$

所以

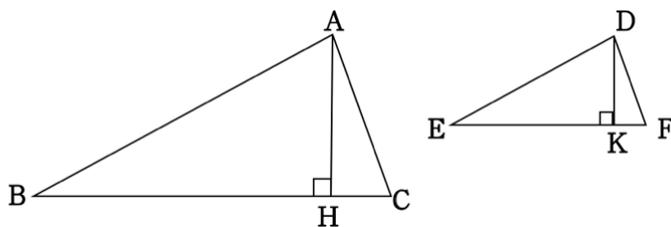
$$\text{甲長方形的面積} : \text{乙長方形的面積} = 5 \times 3 : (5 \times 2) \times (3 \times 2)$$

$$= 1^2 : 2^2$$

$$= 5^2 : (5 \times 2)^2 = \overline{AD}^2 : \overline{EH}^2$$

$$= 3^2 : (3 \times 2)^2 = \overline{CD}^2 : \overline{GH}^2$$

其次，理解兩相似三角形中，對應面積之比＝對應邊長平方比。以下圖為例說明， $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 相似，且 $\overline{BC} = 15$ ，其對應邊 $\overline{EF} = 7$ 。



因為對應邊長之比＝對應高之比，所以 $\overline{BC} : \overline{EF} = \overline{AH} : \overline{DK} = 15 : 7$ 。

設 $\overline{AH} = 15r$ 、 $\overline{DK} = 7r$ 。則

$$\triangle ABC \text{ 的面積} = \frac{\overline{BC} \times \overline{AH}}{2} = \frac{15 \times 15r}{2}$$

$$\triangle DEF \text{ 的面積} = \frac{\overline{EF} \times \overline{DK}}{2} = \frac{7 \times 7r}{2}$$

所以

$$\triangle ABC \text{ 的面積} : \triangle DEF \text{ 的面積} = \frac{15 \times 15r}{2} : \frac{7 \times 7r}{2}$$

$$= 15^2 : 7^2$$

$$= \overline{BC}^2 : \overline{EF}^2$$

S-9-3	平行線截比例線段 ：連接三角形兩邊中點的線段必平行於第三邊（其長度等於第三邊的一半）；平行線截比例線段性質；利用截線段成比例判定兩直線平行；平行線截比例線段性質的應用。	s-IV-6 s-IV-10
--------------	---	-------------------

基本學習內容

- SC-9-3-1 連接三角形兩邊中點的線段必平行於第三邊，且其長度等於第三邊的一半。
- SC-9-3-2 設一直線平行於三角形的一邊，且與另兩邊相交，則此直線把這兩邊截成比例線段。
- SC-9-3-3 若一直線把一個三角形的兩邊截成比例線段，則這直線必平行於此三角形的第三邊。

基本學習表現

- SCP-9-3-1-1 三角形兩邊中點的線段長度等於第三邊的一半。
- SCP-9-3-1-2 連接三角形兩邊中點的線段必平行於第三邊。
- SCP-9-3-2-1 認識若一直線平行於三角形的一邊，且與另兩邊相交，則此直線把這兩邊截成比例線段。
- SCP-9-3-3-1 認識若一直線把一個三角形的兩邊截成比例線段，則這直線必平行於此三角形的第三邊。

◎ 基本學習內容 SC-9-3-1 是 SC-8-11-1 的後續學習概念，故學生應已認識梯形兩腰中點連線長為上底與下底總和的一半。

本基本學習內容幫助學生認識連接三角形兩邊中點的線段必平行於第三邊，且其長度等於第三邊的一半。

■ 學生已經學過梯形中點連線是上底與下底總和的一半，老師可透過下底不變，上底長度趨近於零的方式，幫助學生透過極限認識三角形兩邊中點的線段長度等於第三邊的一半，且兩邊中點連線和底邊平行。

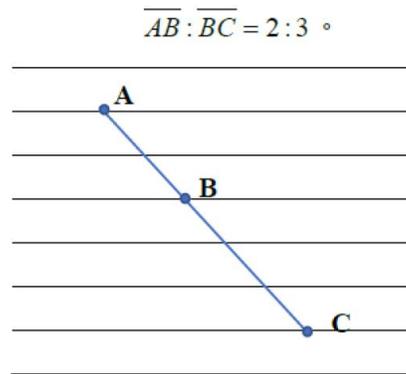
◎ 基本學習內容 SC-9-3-2、SC-9-3-3 是 NC-7-9-3、SC-9-2-1 的後續學習概念，故學生應已認識比與比例式，也應已認識相似三角形對應邊成比例。

基本學習內容 SC-9-3-2 幫助學生理解一直線平行於三角形的一邊，且與另兩邊相交，則此直線把這兩邊截成比例線段。

基本學習內容 SC-9-3-3 幫助學生理解一直線把一個三角形的兩邊截成比例線段，則這直線必平行於此三角形的第三邊。

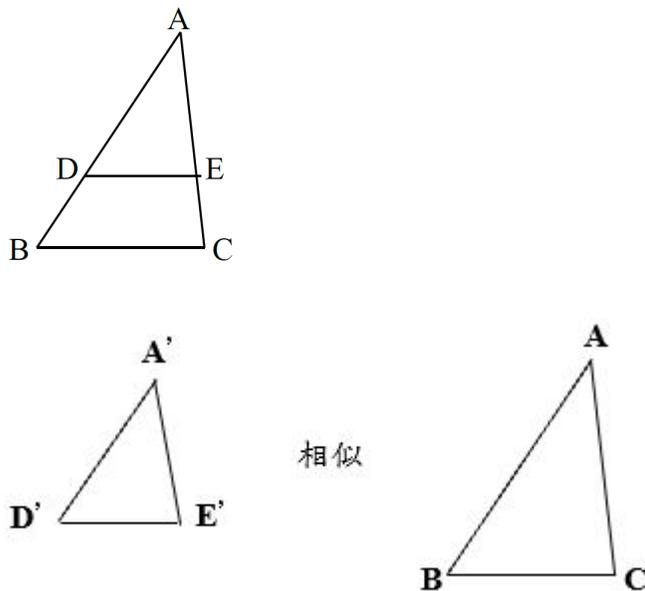
- 教師可以透過橫線作業簿幫助學生看到平行線截比例線段。

在印有橫線的筆記本上，可以量測出被橫線分割出來的每一段都一樣長。若想分割出 $a : b$ 只要分割出 $a + b$ 段就可以



- 以「如圖，在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{AD} = 8$ ， $\overline{AE} = 6$ ， $\overline{CE} = 3$ ， $\overline{DE} = 4$ ，求 \overline{DB} 及 \overline{BC} 的長？」為例。

學生不易在圖中察覺 $\triangle ADE$ 和 $\triangle ABC$ 相似，建議教師應利用全等性質將 $\triangle ADE$ 複製出 $\triangle A'D'E'$ ，幫助學生看到 $\triangle A'D'E'$ 和 $\triangle ABC$ 兩個三角形相似。



著作財產權為教育部國民及學前教育署所有

- SC-9-3-3 為 SC-9-3-2 的逆定理。教師在課堂活動中可以討論 SC-9-3-3，但不評量。
- 本基本學習中不討論三條以上(含三條)平行線的截比例線段的性質。

<p>S-9-4</p>	<p>相似直角三角形邊長比值的不變性：直角三角形中某一銳角的角度決定邊長比值，該比值為不變量，不因相似直角三角形的大小而改變；三內角為 $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ 其邊長比記錄為「$1 : \sqrt{3} : 2$」；三內角為 $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ 其邊長比記錄為「$1 : 1 : \sqrt{2}$」</p> <p>備註：學生無使用計算機時，角度限於 30 度、45 度、60 度。</p>	<p>a-IV-6</p>
---------------------	---	---------------

基本學習內容

SC-9-4-1 三內角為 $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ 及 $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ 的三角形邊長比。

基本學習表現

SCP -9-4-1-1 認識三內角為 $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ 的三角形邊長比為 $1 : \sqrt{3} : 2$ 。

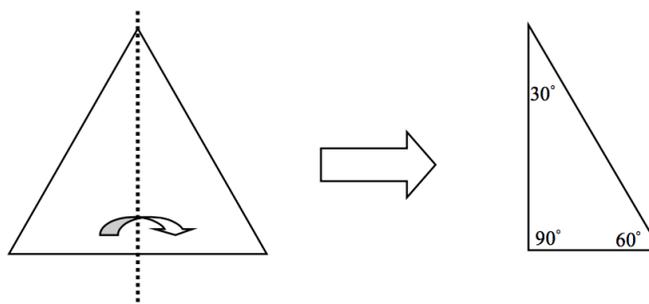
SCP -9-4-2-1 認識三內角為 $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ 的三角形邊長比為 $1 : 1 : \sqrt{2}$ 。

◎ **基本學習內容 SC-9-4-1 為 SC-8-6-1 的後續學習概念，故學生應已認識畢氏定理。本基本學習內容幫助學生認識 $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ 以及 $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ 直角三角形之三邊長比例。**

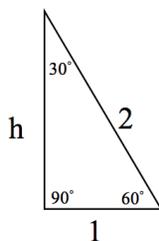
■ 學生應該已經認識直角三角板有兩款，角度分別為 $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ 及 $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ 。

■ 建議教師依下列步驟，認識 $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ 三角形之邊長比。

步驟一：將一個正三角形沿著對稱軸對摺，形成兩個全等的三角形。則對摺後所形成的三角形，可發現它的三個內角分別為 30° 、 60° 、 90° ，如下圖。



步驟二：建議教師可多舉例，引導學生觀察出直角三角形三邊長的比例關係。以問題「若原正三角形的邊長為2，則對摺後所成的三角形，如下圖。它的三個邊長分別為何？」為例說明。



由畢氏定理得知：

$$2^2 = h^2 + 1^2 \quad \text{得} \quad h = \pm\sqrt{3}$$

已知 $h > 0$ ，故 $h = \sqrt{3}$ ，即三邊長為 1 、 $\sqrt{3}$ 、 2 。

若原正三角形的邊長為 $2k$ ，同理可得此時三邊長為 k 、 $\sqrt{3}k$ 、 $2k$ 。

- 本基本學習內容放在九年級的主要原因是九年級才引入連比，要幫助學生要透過任兩邊的比，教師應多舉幾個直角三角形，讓學生發現只要是 30° - 60° - 90° 的直角三角形，其邊長比皆為 $1 : \sqrt{3} : 2$ 。教師應多舉幾個直角三角形，讓學生發現只要是 45° - 45° - 90° 的直角三角形，其邊長比皆為 $1 : 1 : \sqrt{2}$ 。

S-9-5	圓弧長與扇形面積 ：以 π 表示圓周率；弦、圓弧、弓形的意義；圓弧長公式；扇形面積公式。	s-IV-14
-------	---	---------

基本學習內容

SC-9-5-1 圓弧長公式。

SC-9-5-2 扇形面積公式。

基本學習表現

SCP-9-5-1-1 能用 π 表示圓周率。

SCP-9-5-1-2 熟練圓弧長度為「 $2\pi r \times \frac{\text{圓心角度數}}{360}$ 」。

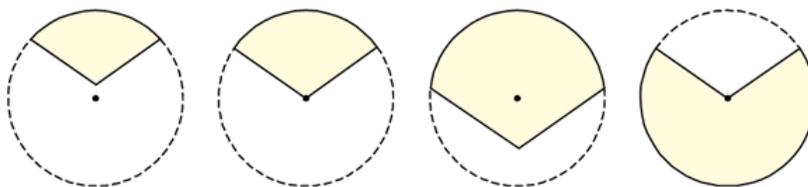
SCP-9-5-2-1 熟練扇形面積為「 $\pi r^2 \times \frac{\text{圓心角度數}}{360}$ 」。

- ◎ 本基本學習內容 SC-9-5-1 為 SC-6-3-2 的後續學習概念，故學生應已能求出扇形弧長。

本基本學習內容幫助學生以 π 表示圓周率，熟練圓弧長度為 $2\pi r \times \frac{\text{圓心角度數}}{360}$ 。

- 學生常會誤認為長得像扇子形狀即為扇形，扇形是在圓上由兩條半徑及一弧所圍成的圖形，建議教師可多舉例讓學生判別。

例：判斷下列圖形的陰影部分是否為扇形？



- 國小階段對於扇形的認識，是透過將一圓等分，扇形即為幾分之幾的圓，計算扇形弧長時，即為「圓周長的幾分之幾」；國中階段對於扇形的認識，是將一圓等分為 360 份，故圓心角 1 度的扇形為 $\frac{1}{360}$ 圓。當扇形圓心角為 x 度時，扇形即為 $\frac{x}{360}$ 圓，計算此扇形的弧長時，就變成為「 $2\pi r \times \frac{x}{360}$ 」。

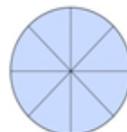
- 圓周率的率指的是比率，比率相等指的是所有的圓都相似，對應邊會成比例。圓的周長是曲線，不易測量其長度，而圓的直徑是直線，比較容易測量，因此只要知道「圓周長：直徑長」的比值，測量出直徑後就能算出圓的周長，數學上稱「圓周長：直徑長」的比值為圓周率。在國小圓周率我們以 3.14 表示，但因圓周率是無理數，在國中我們將以 π 表示圓周率。
- 在國小我們教過「圓周長 \div 直徑長=圓周率」和「圓周長=直徑長 \times 3.14」是相同的關係。前者較容易幫助學生認識圓周率的意義，而後者只幫助學生記憶圓周率是 3.14。建議教師教學時，宜強調「圓周長 \div 直徑長=圓周率(π)」，幫助學生掌握圓周率的意義，不宜只強調「圓周長=直徑長 $\times\pi$ 」。

◎ 本基本學習內容 SC-9-5-2 為 SC-6-3-3 的後續學習概念，故學生應已能求出扇形的面積。

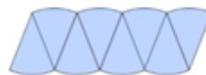
本基本學習內容幫助學生熟練扇形面積為「 $\pi r^2 \times \frac{\text{圓心角度數}}{360}$ 」。

- 國小階段對於扇形的認識，是透過將一圓等分，扇形即為幾分之幾的圓，計算扇形面積時，即為「圓面積的幾分之幾」；國中階段對於扇形的認識，是將一圓等分為 360 份，故圓心角 1 度的扇形為 $\frac{1}{360}$ 圓。當扇形圓心角為 x 度時，扇形即為 $\frac{x}{360}$ 圓，計算此扇形的扇形面積時，就變成為「 $\pi r^2 \times \frac{x}{360}$ 」。
- 圓面積計算時，可先將圓切成兩個半圓，再將兩個半圓都切成很多個(例如 8 個或 24 個)全等的扇形，將這兩個切成扇形的半圓上下交錯疊合起來，會變成一個接近平行四邊形(或長方形)的圖形，平行四邊形的底(長方形的長)是圓周長的一半，平行四邊形的高(長方形的寬)是圓的半徑，可以透過平行四邊形(長方形)面積求出圓面積。

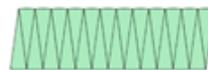
$$\begin{aligned} \text{圓面積} &= \text{平行四邊形面積} \\ &= \text{底} \times \text{高} \\ &= \text{圓周長的一半} \times \text{半徑} \\ &= (\text{直徑} \times \pi) \div 2 \times \text{半徑} \\ &= (\text{直徑} \div 2 \times \pi) \times \text{半徑} \\ &= \text{半徑} \times \text{半徑} \times \pi \end{aligned}$$



一個被八等分分割的圓



重新組合一個被八等分割的圓



重新組合一個被二十四等分割的圓

S-9-6	圓的幾何性質： 圓心角、圓周角與所對應弧的度數三者之間的關係；圓內接四邊形對角互補；切線段等長。	s-IV-14
-------	---	---------

基本學習內容

- SC-9-6-1 圓心角的度數等於所對弧的度數。
- SC-9-6-2 圓周角的度數等於所對弧度數的一半。
- SC-9-6-3 切線段等長。

基本學習表現

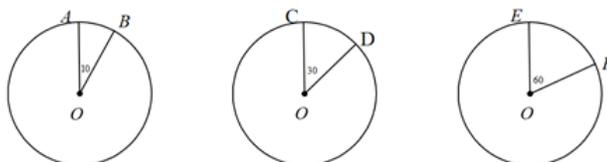
- SCP-9-6-1-1 認識圓心角的度數等於所對弧的度數。
- SCP-9-6-2-1 認識圓周角的度數等於所對弧的度數的一半。
- SCP-9-6-2-2 認識同一弧所對圓周角度數都是所對圓心角度數的一半。
- SCP-9-6-2-3 認識半圓的圓周角是直角。
- SCP-9-6-2-4 認識圓內接四邊形的對角互補。
- SCP-9-6-3-1 認識切線的意義。
- SCP-9-6-3-2 認識圓外一點作圓的兩條切線段等長。

◎ 本基本學習內容 SC-9-6-1 為 SC-6-3-2 的後續學習概念，故學生應已認識扇形的「圓心角：360 = 扇形弧長：圓周長」。

本基本學習內容幫助學生認識圓心角的度數與所對弧的度數相等。

■ 本基本學習內容不介紹弦切角、圓內角、圓外角及圓幂性質。

■ 圓心角的度量方式有兩種：度度量和弧度量。如下三個圖，圓半徑均為 1 單位長。



左圖圓心角張開 10 度， AB 的弧長 $= 2 \times \pi \times \frac{10}{360} = \frac{1}{18}\pi$ ；

中圖圓心角張開 30 度， CD 的弧長 $= 2 \times \pi \times \frac{30}{360} = \frac{1}{6}\pi$ ；

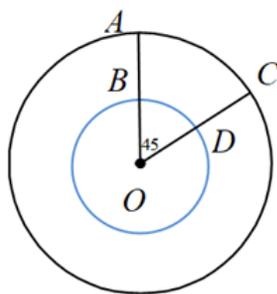
右圖圓心角張開 60 度， EF 的弧長 $= 2 \times \pi \times \frac{60}{360} = \frac{1}{3}\pi$ 。

我們可以發現，三個圖的圓心角度數比為 $10 : 30 : 60 = 1 : 3 : 6$ 。因此，

$$AB \text{ 的弧長} : CD \text{ 的弧長} : EF \text{ 的弧長} = \frac{1}{18}\pi : \frac{1}{6}\pi : \frac{1}{3}\pi = 1 : 3 : 6$$

可說明圓心角張開度數比會等於弧長張開程度比。所以，我們可以用弧長來代表圓心角的角度(弧度量)，例如： $\angle AOB = \widehat{AB}$ ，也可以說 $\widehat{AB} = 30^\circ$ 。

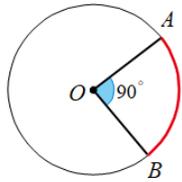
- 有不等長半徑的兩同心圓，不同的弧長會對應到相同的弧度。如下圖，因周長會受半徑大小影響，故我們可以發現 AC 弧長會大於 BD 弧長。以小圓來說 BD 弧長佔了整小圓周長的 $\frac{45}{360}$ ，以大圓來說 AC 弧長佔了整大圓周長的 $\frac{45}{360}$ ，得知其所佔其圓的比例不變，因此我們可以發現，不等長半徑的同心圓圓心角度數一樣時，其所對的弧長會不相等。相反的， AC 弧度佔整圓的 $\frac{1}{8}$ ， BD 弧度佔整圓的 $\frac{1}{8}$ ，我們可以發現在此 AC 弧長大於 BD 弧長，但 AC 弧度 $= BD$ 弧度。



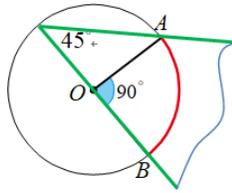
- ◎ 本基本學習內容 SC-9-6-2 為 SC-9-6-1 的後續學習概念，故學生應已認識圓心角的度數與所對弧的度數。

本基本學習內容幫助學生認識圓周角與所對弧的關係。

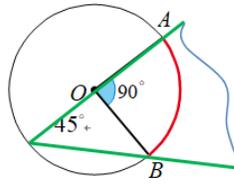
- 學生不易理解「圓周角角度為所對弧度數的一半」，建議教學時可進行操作活動。例：如下圖左，已知圓心角 $\angle AOB = 90$ 度，拿一張白紙將直角對摺(即摺出 45 度角)，並將 45 度角紙張的頂點在圓周上，一邊擺放在通過 \overline{OB} 位置，可以發現另一邊會通過 A 點的位置(如下圖二)，接著；若將 45 度角的紙張另一邊擺放在通過 \overline{OA} 位置，可以發現另一邊會通過 B 點的位置(如下圖三)；將 45 度角的紙張擺放在圓周上任一點，我們可以發現該角度兩邊會通過 A 和 B 點的位置(如下圖四)，來引導學生觀察發現「圓周角角度為所對弧度數的一半」。



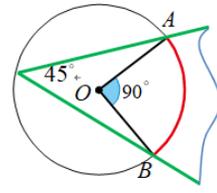
圖一



圖二

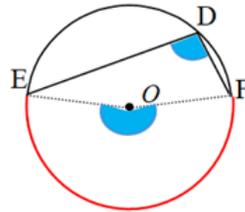
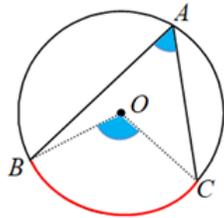


圖三

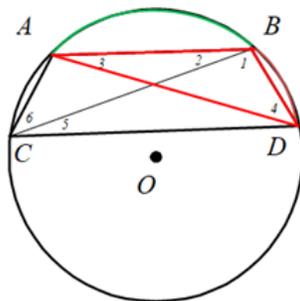


圖四

例：如下兩圖，已知圓周角 $\angle BAC$ 及 $\angle EDF$ ，用量角器測量圓周角 $\angle BAC$ 、 $\angle EDF$ 以及圓心角 $\angle BOC$ 、 $\angle EOF$ 的角度，並引導學生觀察發現 $\angle BOC$ 與 $\angle BAC$ 關係及 $\angle EOF$ 與 $\angle EDF$ 關係，讓學生發現 $\angle BOC$ 與 $\angle BAC$ 都對 BC 弧，圓周角 $\angle BAC$ 為圓心角 $\angle BOC$ 之一半；同樣的， $\angle EOF$ 與 $\angle EDF$ 都對 EF 弧，圓周角 $\angle EDF$ 也為圓心角 $\angle EOF$ 之一半，進而讓學生發現圓周角角度為所對弧度數的一半。



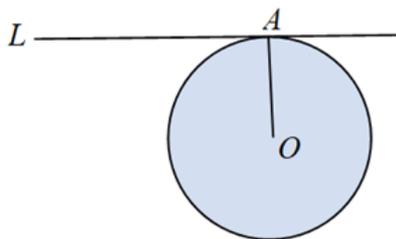
- 學生不易理解「圓內接四邊形的對角互補」，如下圖，建議教學時可透過由 $\triangle ABD$ 內角和 180° ，得到 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$ ，對 BD 弧之圓周角 $\angle 3 = \angle 5$ ，對 AB 弧之圓周角 $\angle 6 = \angle 4$ ，我們可以得到 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 5 + \angle 6 = 180^\circ$ ，得知 $\angle ABD + \angle ACD = 180^\circ$ ，故圓內接四邊形的對角互補。



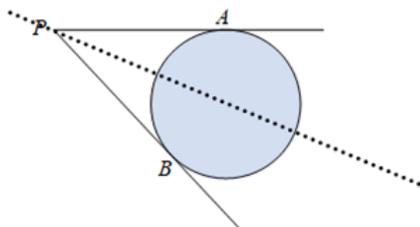
◎ 本基本學習內容 SC-9-6-3 為 SC-8-1-2 角平分線與 SC-8-4-1 全等圖形的後續學習概念。

本基本學習內容幫助學生認識從圓外一點作圓的兩條切線，此兩切線等長的性質。

■ 當直線 L 與圓 O 恰交於一點時，如下圖所示，我們稱直線 L 與圓 O 相切，直線 L 為圓 O 的切線，交點 A 為切點。



■ 學生在國小階段已學過圓為對稱圖形，任意通過圓心的直線皆為圓的對稱軸。教學時可將圓外一點 P 與圓心 O 的連線段對摺 (如下圖)，觀察到兩切線段即為對稱線段，故兩切線段等長。



<p>S-9-7</p>	<p>點、直線與圓的關係：點與圓的位置關係（內部、圓上、外部）；直線與圓的位置關係（不相交、相切、交於兩點）；圓心與切點的連線垂直此切線（切線性質）；圓心到弦的垂直線段（弦心距）垂直平分此弦。</p>	<p>s-IV-14</p>
---------------------	---	----------------

基本學習內容

SC-9-7-1 點與圓、直線與圓的位置關係。

SC-9-7-2 切線性質。

SC-9-7-3 弦心距。

基本學習表現

SCP-9-7-1-1 認識點與圓的位置關係，並依據點到圓心的距離判斷此點位於圓的外部、圓上或圓的內部。

SCP-9-7-1-2 認識直線與圓的位置關係，並依據直線到圓心的距離判斷此直線與圓不相交、交於一點（相切）或交於兩點。

SCP-9-7-2-1 認識切線性質：圓心與切點的連線必垂直此切線。

SCP-9-7-3-1 認識弦心距垂直平分弦。

◎ 本基本學習內容 SC-9-7-1 為 SC-7-3-1 的後續學習概念，故學生應已認識點到直線距離的意義。

本基本學習內容幫助學生認識點和圓及直線與圓的位置關係。

■ 本基本學習內容不處理兩圓的位置關係。

◎ 基本學習內容 SC-9-7-2 為 SC-9-7-1 的後續學習概念，故學生應已認識直線與圓恰交於一點時，此直線即為圓的切線。

本基本學習內容幫助學生認識切線的性質。

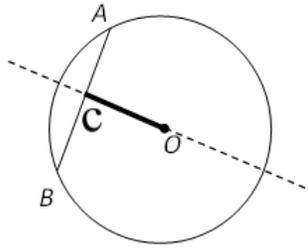
■ 切線的性質不易理解，建議舉生活實例輔助說明。

例：從獨輪車輪胎與地面接觸的位置關係，認識切點與圓心的連線段（即半徑）垂直於切線。

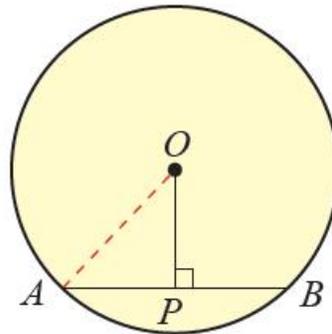
◎ 本基本學習內容 SC-9-7-3 為 SC-9-7-1 的後續學習概念，故學生應已認識點到直線距離的意義。

本基本學習內容幫助學生認識弦心距的性質。

■ 弦心距為圓心到弦的距離，可透過將弦 AB 對摺，交弦 AB 於 C 點，觀察出摺痕 OC 即為該弦的垂直平分線， \overline{OC} 長即為弦心距。如：



■ 如下圖，弦心距、弦的一半、圓半徑形成直角三角形，可利用畢氏定理求得未知邊長，學生常誤將 \overline{AP} 當作弦長計算，建議教學上請學生先畫出弦後，再計算 \overline{AB} 。



S-9-8	<p>三角形的外心：外心的意義與外接圓；三角形的外心到三角形的三個頂點等距；直角三角形的外心即斜邊的中點。</p>	s-IV-11
-------	--	---------

◎ 本基本學習內容不處理學習內容 S-9-8。

S-9-9	<p>三角形的內心：內心的意義與內切圓；三角形的內心到三角形的三邊等距；三角形的面積＝周長×內切圓半徑÷2；直角三角形的內切圓半徑＝（兩股和－斜邊）÷2。</p>	s-IV-11
-------	--	---------

◎ 本基本學習內容不處理學習內容 S-9-9。

S-9-10	<p>三角形的重心：重心的意義與中線；三角形的三條中線將三角形面積六等份；重心到頂點的距離等於它到對邊中點的兩倍；重心的物理意義。</p>	s-IV-11
--------	--	---------

◎ 本基本學習內容不處理學習內容 S-9-10。

S-9-11	<p>證明的意義：幾何推理（須說明所依據的幾何性質）；代數推理（須說明所依據的代數性質）。</p> <p>備註：證明的題材以學習內容直接推理可得為限，勿涉及引用延伸學習內容。</p>	<p>s-IV-3 s-IV-4 s-IV-5 s-IV-6 s-IV-9 s-IV-10 a-IV-1</p>
--------	---	--

◎ 本基本學習內容不處理學習內容 S-9-11。

S-9-12	空間中的線與平面： 長方體與正四面體的示意圖，利用長方體與正四面體作為特例，介紹線與線的平行、垂直與歪斜關係，線與平面的垂直與平行關係。 備註： S-5-6 僅教授「面與面的平行與垂直」，並且以操作活動為主。本條目則新增「空間中的線與線的垂直、平行、歪斜，以及線與面的平行與垂直」，且以理解數學概念為主。	s-IV-15
---------------	---	---------

基本學習內容

SC-9-12-1 空間中線與面的平行與垂直。

SC-9-12-2 空間中線與線的垂直、平行與歪斜關係。

基本學習表現

SCP-9-12-1-1 在長方體中，認識線與面的平行關係。

SCP-9-12-1-2 在長方體中，認識線與面的垂直關係。

SCP-9-12-2-1 在長方體中，認識線與線的垂直關係。

SCP-9-12-2-1 在長方體中，認識線與線的平行關係。

SCP-9-12-2-3 在長方體及四面體中，認識線與線的歪斜關係。

◎ **基本學習內容 SC-9-12-1 及 SC-9-12-2 是 SC-5-6-1 的後續學習概念，故學生應該已認識面與面的平行與垂直。**

本基本學習內容幫助學生認識空間中線與線的垂直、平行與歪斜關係，以及空間中線與面的平行與垂直。

■ 本基本學習內容限制在長方體中，討論線與線的平行及垂直關係。限制在長方體與正四面體中，討論線與線的歪斜關係。

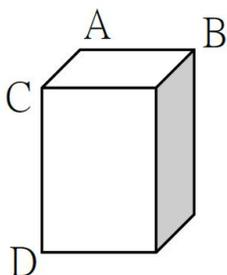
■ 教師應幫助學生認識兩平行線會在同一個平面上。兩條歪斜線不會在同一個平面上。

■ 本基本學習內容不討論「空間中兩線不相交時，線與線的垂直關係」。

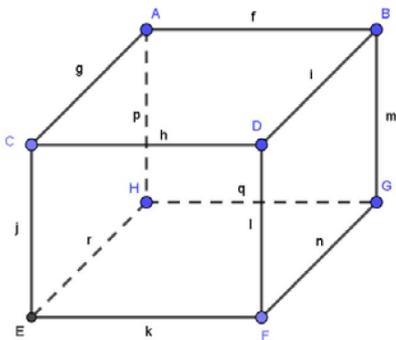
以下圖中 \overleftrightarrow{AB} 和 \overleftrightarrow{CD} 為例，國小階段討論兩線垂直時，其定義為兩線相交的夾角

為直角，且討論的對象是兩條給定的線段。圖中 \overleftrightarrow{AB} 和 \overleftrightarrow{CD} 是兩條永不相交的直線，所以並沒有相交的夾角，無法討論 \overleftrightarrow{AB} 和 \overleftrightarrow{CD} 兩線是否垂直。

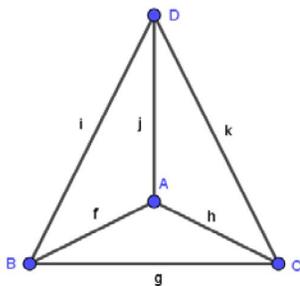
高中階段討論的對象是兩類直線(等價類)，我們可以製定一個三維的直角坐標，將 \overleftrightarrow{AB} 的 A 點平移至原點， \overleftrightarrow{CD} 的 C 點也平移至原點，平移後的 \overleftrightarrow{AB} 和 \overleftrightarrow{CD} 相交於原點，且有一個交角是直角，所以高中階段稱 \overleftrightarrow{AB} 和 \overleftrightarrow{CD} 互相垂直。教師在評量時，不宜出現此類問題，避免引起爭議。



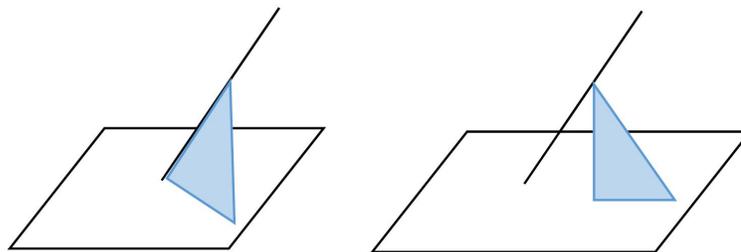
- 若已知直線 L 同時垂直於兩個已知的平面，則兩平面相互平行。
- 已知直線 L 垂直於平面，且交於平面的 P 點，則此平面上通過點 P 的任一直線都與直線 L 垂直。
- 長方體中稜邊與相交的面有垂直關係，與不相交的面有平行的關係。如圖：線 (g) 與面 $CDFE$ 、 $ABGH$ 相互垂直，線 (g) 與面 $EFGH$ 、 $BDFG$ 相互平行。



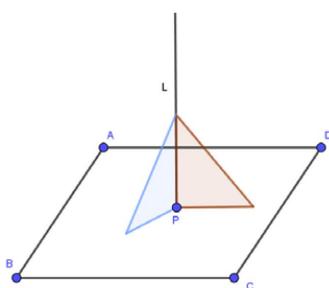
- 正四面體的 4 個面與 6 直線皆不平行也不垂直。



- 空間中平面與直線的垂直關係很多老師僅用一個直角三角板檢驗，可能會發生如下圖的誤差，誤以為直線與平面垂直。因此建議老師應以兩個直角三角板擺放不同方向，才能真正確認直角三角板、直線及平面是處處貼合，如下圖。



使用三角板僅檢驗一次無法確認直線與平面垂直



建議老師以兩個直角三角板擺放不同方向

<p>S-9-13</p>	<p>表面積與體積：直角柱、直圓錐、正角錐的展開圖；直角柱、直圓錐、正角錐的表面積；直角柱的體積。</p> <p>備註：S-6-4 僅教授「直柱體的體積」，本條目除了複習並加深直柱體的體積概念，並且透過直柱體與正錐體的展開圖，計算其表面積。</p>	<p>s-IV-16</p>
----------------------	--	----------------

基本學習內容

SC-9-13-1 多面體的意義。

SC-9-13-2 直角柱、正角錐、直圓柱、直圓錐的展開圖、側面積及表面積。

SC-9-13-3 直角柱、直圓柱的體積。

基本學習表現

SCP-9-13-1-1 認識多面體、頂、面、邊、側面的意義。

SCP-9-13-2-1 認識直角柱、正角錐、直圓柱、直圓錐的相關名稱及意義。

SCP-9-13-2-2 認識直角柱、正角錐、直圓柱、直圓錐的展開圖。

SCP-9-13-2-3 認識直圓柱底面圓的周長等於展開圖中矩形的一邊長。

SCP-9-13-2-4 認識直圓錐底面圓的周長等於展開圖中扇形的弧長。

SCP-9-13-2-5 能利用展開圖，計算直角柱、正角錐、直圓柱、直圓錐的側面積及表面積。

SCP-9-13-2-6 在提供展開圖的狀況下，學生能計算長方體表面上兩點之最短距離。

SCP-9-13-3-1 理解直角柱、直圓柱的體積為底面積與高的乘積。

◎ 基本學習內容 SC-9-13-1 是 S-5-7-1 的後續學習概念，故學生應該已經認識球、柱體與錐體。

本基本學習內容幫助學生認識多面體。

■ 角柱可以區分為直角柱及斜角柱二類。

角柱的側面和上底及下底垂直，稱該角柱為直角柱，直角柱的側面是長方形。

正角柱也是直角柱，如果直角柱的上底和下底都是正多邊形，稱這些直角柱為正角柱。例如上、下底為正五邊形的角柱稱為正五角柱。

角柱的側面和上底及下底不垂直，稱該角柱為斜角柱，斜角柱的側面不是長方形而是平行四邊形。

本基本學習內容只討論直角柱，不討論斜角柱，稱直角柱為角柱。

- 類比角柱的命名方式，底為圓區域的柱體稱為圓柱。

圓柱也區分為直圓柱和斜圓柱兩類，上、下兩個底面圓心的連線垂直於兩個底面，稱該圓柱為直圓柱，上、下兩個底面圓心的連線不垂直於兩個底面，稱該圓柱為斜圓柱。

本基本學習內容只討論直圓柱，不討論斜圓柱，稱直圓柱為圓柱。

- 數學上透過底面多邊形區域的形狀來命名角錐，例如底面是三角形區域的錐體稱為三角錐，底面是五邊形區域的錐體稱為五角錐。

數學上並沒有把角錐區分為直角錐和斜角錐，只有仿正角柱的方式定義正角錐，稱底面是正多邊形，且頂點到底面的垂線剛好經過底面正多邊形內切圓的圓心的角錐為正角錐。本基本學習內容只討論正角錐，稱正角錐為角錐。

- 底面為圓形的錐體稱為圓錐，和圓柱一樣，圓錐也可以區分為直圓錐和斜圓錐兩類，稱頂點到底面圓心的連線垂直於底面的圓錐為直圓錐，稱頂點到底面圓心的連線不垂直於底面的圓錐為斜圓錐。

本基本學習內容只討論直圓錐，稱直圓錐為圓錐。

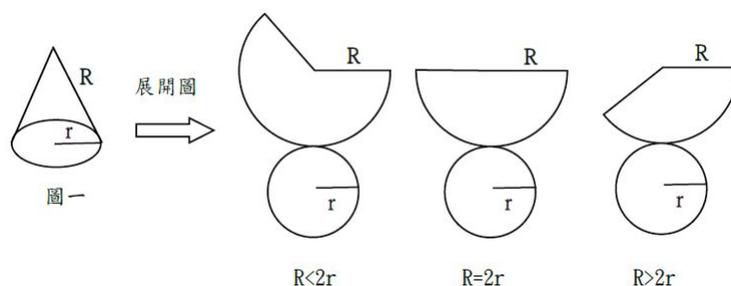
- ◎ 基本學習內容 SC-9-13-2 是 S-6-4-1 的後續學習概念，故學生應該已經認識柱體表面積。

本基本學習內容透過直柱體與正錐體的展開圖，計算其表面積。

- 討論展開圖應避免從過於複雜的展開圖反推原有的立體圖形。

- 評量時，應避免在未提供展開圖的狀況下，要求學生計算長方體表面上兩點之最短距離。

- 有一圓錐(圖一)所示，其展開圖應該要注意展開後側面扇形半徑(R)與底面積圓半徑(r)之關係



◎ 基本學習內容 SC-9-13-3 是 S-6-4-1 的後續學習概念，故學生應該已經認識柱體體積。

本基本學習內容幫助學生學習直多角柱的體積。

■ 國小僅討論三角柱及四角柱的體積，國中增加討論正六角柱的體積。

■ 建議老師應先做下列說明，

(1) 三角柱體積為底面三角形面積與高的乘積

(2) 梯形柱體體積為底面梯形面積與高的乘積

(3) 圓柱體體積為底面圓面積與高的乘積

幫助學生看到三角形面積、梯形面積及圓面積都是底面積，再歸納出柱體體積是底面積與高的乘積。

F-9-1	二次函數的意義： 二次函數的意義；具體情境中列出兩量的二次函數關係。	f-IV-2
--------------	---	--------

基本學習內容

FC-9-1-1 二次函數。

基本學習表現

FCP-9-1-1-1 能以具體情境來理解二次函數。

FCP-9-1-1-2 認識二次函數的形式為 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)。

FCP-9-1-1-3 能求二次函數的函數值。

◎ 基本學習內容 FC-9-1-1 為 FC-8-1-1 之後續學習概念，故學生已理解函數的對應關係及認識常數函數及一次函數。

本基本學習內容幫助學生認識二次函數及計算其函數值。

■ 學生在此之前已有一次函數的先備知識，故可由此直接引入二次函數並利用具體實例或情境（如正方形面積 y 與邊長 x 的對應關係為 $y = x^2$ ）複習與加強函數的概念，從生活情境關係逐步抽象到數的關係。

邊長(公分)	1	2	3	4	5	6
面積(平方公分)	1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2

我們可以假設邊長 x (公分)，面積為 y (平方公分)， x 為任意正數，把上述關係改記成 $y = x^2$ 。

■ 二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ 也可看成是一個對應：將 x 值對應到的 y 值為 $ax^2 + bx + c$ 。因此，二次多項式中「先化簡或運算，再代入值」與「先代入值，再化簡或運算所得的值」均相等。

■ 學生在一次函數的單元，已練習過求一次函數之函數值的方法，在此求函數值的作法雖然一樣，但二次函數牽涉到求 ax^2 的值，在教學時可銜接學生的舊經驗，強調欲求當 $x = t$ 時 $y = ax^2$ 的函數值，在把 $x = t$ 代入的過程中，應先平方再乘以 a ，而不能先把 t 乘以 a 之後再一起平方。

<p>F-9-2</p>	<p>二次函數的圖形與極值：二次函數的相關名詞（對稱軸、頂點、最低點、最高點、開口向上、開口向下、最大值、最小值）；描繪 $y = ax^2$、$y = ax^2 + k$、$y = a(x - h)^2$、$y = a(x - h)^2 + k$ 的圖形；對稱軸就是通過頂點（最高點、最低點）的鉛垂線；$y = ax^2$ 的圖形與 $y = a(x - h)^2 + k$ 的圖形的平移關係；已配方好之二次函數的最大值與最小值。 備註：「二次函數的配方法」及「二次函數的應用問題」為 10 年級課程（F-10-1），本條目的教學聚焦在其圖形的特性。</p>	<p>f-IV-2 f-IV-3</p>
---------------------	--	--------------------------

基本學習內容

- FC-9-2-1 描繪 $y = ax^2$ 、 $y = ax^2 \pm k$ 、 $y = a(x \pm h)^2$ 、 $y = a(x \pm h)^2 \pm k$ 的圖形。
- FC-9-2-2 已配方好之二次函數圖形的開口向上(下)、頂點、最高(低)點、對稱軸。
- FC-9-2-3 已配方好之二次函數的最大值與最小值。

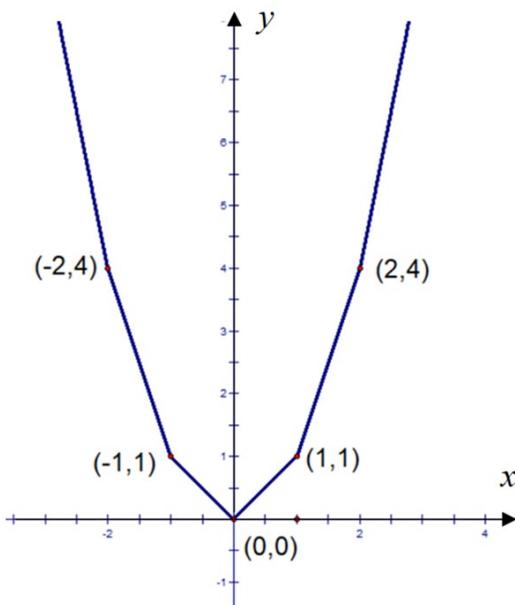
基本學習表現

- FCP-9-2-1-1 能利用描點的方法繪製二次函數 $y = ax^2$ 的圖形。
- FCP-9-2-1-2 認識二次函數的圖形為拋物線。
- FCP-9-2-1-3 認識拋物線是線對稱圖形。
- FCP-9-2-2-1 能根據 x^2 項的係數來判斷二次函數的開口方向。
- FCP-9-2-2-2 能夠找出二次函數的頂點坐標(最高或最低點)與對稱軸。
- FCP-9-2-2-3 能標出頂點，並找出拋物線上另二個點，進而畫出已配方好之二次函數的圖形。
- FCP-9-2-3-1 認識二次函數頂點之 y 坐標值為函數的最大值或最小值。
- FCP-9-2-3-2 認識二次函數之 x 值為頂點的 x 坐標時，函數會有最大值或最小值。
- FCP-9-2-3-3 能由二次函數圖形理解函數的最小值或最大值。
- FCP-9-2-3-4 能由二次函數圖形的開口方向判斷其有最大值或最小值。

◎ 基本學習內容 FC-9-2-1 為 FC-8-2-1 及 FC-8-2-2 之後續學習概念，故學生已學會畫出一次函數及常數函數的函數圖形。

本基本學習內容開始引入二次函數的圖形。

- 本基本學習內容為二次函數圖形的描繪與認識，期望透過描繪 $y = ax^2$ 的二次函數圖形經驗，來繪製其他形式的二次函數圖形，如 $y = ax^2$ 、 $y = ax^2 \pm k$ 、 $y = a(x \pm h)^2$ 、 $y = a(x \pm h)^2 \pm k$ 等，並觀察、歸納這些二次函數圖形之間的平移情形。但此教學方法需要學生熟練二次函數求函數值與描點的能力。
- 利用描點法畫函數圖形，極耗費課堂時間，建議此處圖形除 $y = ax^2$ 之外，皆由教師來繪製，或是利用數學繪圖軟體繪製，讓學生相信只要是形如： $y = ax^2$ 、 $y = ax^2 \pm k$ 、 $y = a(x - h)^2$ 及 $y = a(x \pm h)^2 \pm k$ 的二次函數，其圖形皆為拋物線。
- 描繪圖形時亦同時呈現 $y = x^2$ 與 $y = x^2 + k$ 、 $y = a(x - h)^2$ 及 $y = a(x - h)^2 + k$ 之點坐標對應關係。且須安排程序性的練習，讓學生能找出拋物線的頂點坐標，並從頂點坐標判讀出圖形如何平移，如 $y = a(x - h)^2 + k$ 的圖形是由 $y = ax^2$ 的圖形向右移動 h 單位、向上移動 k 單位，可由 $y = ax^2$ 的頂點 $(0,0)$ 平移至 $y = a(x - h)^2 + k$ 的頂點 (h,k) 看出。
- 有些學生會誤認二次函數的圖形為折線圖，例如： $y = x^2$ 的圖形常被學生誤認為下圖：



建議教師「多描幾個點」，或者使用繪圖軟體畫出更精確的圖形

- 拋物線的圖形表徵在任何媒介中都無法展示出全貌，學生從視覺上來看，常會認為向兩邊延伸至遠方的部分是鉛垂直線。教學時，應幫住學生澄清這些畫不出來的部分之圖形特徵。等到高中學到漸近線的意義時，再釐清它們的差異。

◎ 基本學習內容 FC-9-2-2 為 FC-9-2-1 之後續學習概念，故學生已能描繪二次函數的圖形。

本基本學習內容開始判斷已配方好之二次函數的開口方向，求其頂點與對稱軸。

- 觀察已配方好之二次函數的圖形，歸納得知，若 x^2 項的係數為正數，則圖形開口向上，其頂點為最低點；若 x^2 項的係數為負數，則圖形開口向下，其頂點為最高點。另外需察覺對稱軸為通過頂點的鉛垂線，例如： $y = 4x^2 - 2$ 的圖形開口向上、頂點 $(0, -2)$ 為最低點、且 $x = 0$ 為對稱軸。
- 描繪圖形時亦同時呈現 $y = x^2$ 與 $y = x^2 + k$ 及 $y = (x - h)^2$ 之點坐標對應關係。須安排程序性的練習，讓學生能找出拋物線的頂點坐標，並從頂點坐標判讀出圖形如何平移。
- 教師在課程活動可以進行已知 $y = ax^2$ ，求 $y = ax^2 \pm k$ 、 $y = a(x \pm h)^2$ 及 $y = a(x \pm h)^2 \pm k$ 二次函數圖形的活動，並觀察、歸納這些二次函數圖形之間的平移情形，但不宜過度評量。

◎ 基本學習內容 FC-9-2-3 為 FC-9-2-1 之後續學習概念，故學生已能描繪二次函數的圖形。

本基本學習內容開始求已配方好之二次函數的最大值與最小值。

- 學生能由二次函數圖形理解函數的最大值或最小值。在此不考慮二次函數 x 的值有範圍限制的情形下，求最大值與最小值的狀況。
- 在本基本學習內容中所指涉的最大值和最小值，其「值」即為二次函數的函數值。最大值和最小值指的是最大函數值和最小函數值。學生已能從圖形判讀出該二次函數圖形有最高點或最低點，但在描點繪製函數圖形的過程中，學生腦中一直同時存在 x 和 y 兩個數值，當題目轉而求最大值、最小值的問題時，只需考慮 y 值的變動情形，學生若無法清楚了解函數值的意義，就不容易從二次函數圖形上的「點」轉換成「值」，故在此宜安排教學活動讓學生理解最高(低)點和最大(小)值之間的關係。

- 建議教師教學上先讓學生觀察到 $y = ax^2 + k$ 的最大值或最小值，然後再幫同學發現 $y = a(x - h)^2 + k$ 的最大值或最小值相同。
- 本基本學習內容建議國中只教授由已配方的 $y = a(x \pm h)^2 \pm k$ 求二次函數圖形的頂點坐標，對稱軸方程式或求函數的最大值與最小值。高中時，再處理給定一般二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ ，經由配方法，再找出函數圖形的頂點坐標，對稱軸方程式或函數的最大值與最小值。
- 不涉及「二次函數圖形與 x 軸的兩個交點，為其對應一元二次方程式的根」的概念，更不可處理「由判別式 $b^2 - 4ac$ 的值判斷 $y = ax^2 + bx + c$ 之圖形與 x 軸的交點個數」的題目，只可由繪製已配方的二次函數圖形判斷圖形與 x 軸的交點個數。

D-9-1	<p>統計數據的分佈：全距；四分位距；盒狀圖。</p> <p>備註：D-7-2 處裡單一統計量(平均數、中位數、眾數)表達數據，本條目則傳達以盒狀圖描述數據的集中程度。</p>	<p>n-IV-9 d-IV-1</p>
--------------	--	--------------------------

基本學習內容

DC-9-1-1 全距、四分位距與盒狀圖。

基本學習表現

DCP-9-1-1-1 理解全距。

DCP-9-1-1-2 理解第 1 四分位數、第 2 四分位數、第 3 四分位數。

DCP-9-1-1-3 理解四分位距＝第 3 四分位數－第 1 四分位數。

DCP-9-1-1-4 理解全距與四分位距均可以表示資料的分散程度。

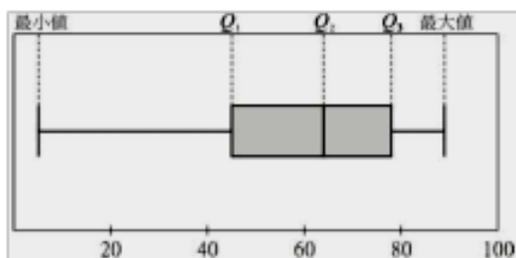
DCP-9-1-1-5 理解盒狀圖。

◎ 本基本學習內容 DC-9-1-1 為 DC-7-1-1 和 DC-7-2-1 之後續學習概念，故學生應該已經理解統計圖表和統計數。

本基本學習內容幫助學生理解全距、四分位距及盒狀圖的意義與性質。

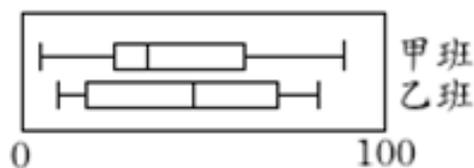
- 全距是最大數與最小數的差，個數相同的資料全距大通常表示資料較疏散，全距小則是指資料較集中。
- 認識第 1、第 2、第 3 四分位數（可記為 Q_1 、 Q_2 、 Q_3 ）的意義，知道如何運用資料的累積相對次數分配表來找出 Q_1 、 Q_2 、 Q_3 。知道第 2 四分位數 Q_2 即為中位數；四分位距則為第 3 四分位數與第 1 四分位數的差，即 $Q_3 - Q_1$ 。
- 第 2 四分位數為整筆資料的中位數，它可以將資料分割成前半段與後半段。第 1 四分位數為前半段資料的中位數，第 3 四分位數為後半段資料的中位數。計算四分位數的方法很多，教師宜評量學生是否理解四分位數的概念即可，不必強調計算方法。
- 全距與四分位距均可以代表資料的分散程度，但是全距易受極端值影響，而四分位距較不易受極端值影響。

- 盒狀圖可以表徵資料的集中程度，它是由最大值、最小值與四分位數構成，如下圖。透過盒狀圖可以很容易觀察到四分位距和全距間的差異性，以及資料集中在 Q_1 到 Q_3 之間。



- 比較各組資料間的關係時，教師可透過盒狀圖表徵各組資料後，再幫助學生進行分析，如下所示：

下圖為甲、乙兩班某次數學成績的盒狀圖。甲班的中位數低於乙班的中位數，甲班的全距較乙班大，但成績也較乙班集中。



- 本基本學習內容只處理一組資料的四分位數及其盒狀圖，不宜宣告兩組資料的四分位數之後將兩組資料混合，再詢問混合後資料的四分位數及盒狀圖會有什麼變化。
- 本基本學習內容不要求學生製作盒狀圖。
- 基本學習內容 DC-7-2-1 處理單一統計量(平均數、中位數、眾數)表達數據，本基本學習內容則傳達以盒狀圖描述數據的集中程度。

<p>D-9-2</p>	<p>認識機率：機率的意義；樹狀圖(以兩層為限)。 備註：以樹狀圖分析所有的可能性(節點相同)的樹狀圖為主。</p>	<p>d-IV-2</p>
---------------------	--	---------------

基本學習內容

DC-9-2-1 認識機率。

基本學習表現

DCP-9-2-1-1 透過樹狀圖認識可能發生的所有事件。

DCP-9-2-1-2 從重複試驗中認識機率的意義。

◎ 本基本學習內容 DC-9-2-1 是 DC-6-2-1 的後續學習概念，學生應已能理解事件發生可能性的大小。

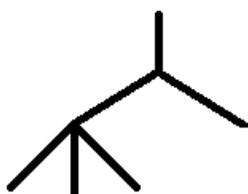
本基本學習內容幫助學生透過樹狀圖認識可能發生的所有事件。

- 本基本學習內容限制樹狀圖以兩層為限，例如投擲銅板以投擲 2 次為限，不宜出現過度複雜的情境。
- 對於同時或連續進行兩隨機實驗，每一隨機實驗中的基本事件應需區隔，且需說明為隨機事件，以減少學生解題的疑慮。
以「一袋子中有 6 顆白球，若自袋中任取…」為例，建議布題時加上編號，如「一袋子中有 6 顆白球，球上分別標記號碼 1、2、3、4、5、6，且各個號碼被抽中的機會都相等，若自袋中任取…」。
- 教學活動舉例或檢測可透過樹狀圖來協助計算所有可能的事件，不宜使用排列與組合概念。
- 建議教師提供學生實驗的機會，例如投擲骰子多次，從實驗結果發現 1~6 點出現的次數很接近；投擲硬幣多次，從實驗結果發現正反面出現的次數很接近，為後續引入古典機率鋪路。

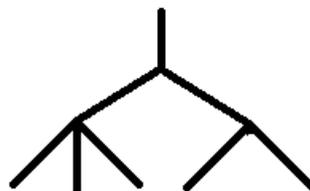
- 本基本學習內容以樹狀圖分析所有的可能性，國中階段以對稱性(節點相同)的樹狀圖為主。



只討論
節點相同



不討論
節點不同



不討論
節點相同但不對稱

D-9-3	古典機率： 具有對稱性的情境下(銅板、骰子、撲克牌、抽球等)之機率；不具對稱性的物體(圖釘、圓錐、爻杯)之機率探究。	n-IV-9 d-IV-2
--------------	---	------------------

基本學習內容

DC-9-3-1 具有對稱性的情境下之機率。

DC-9-3-2 不具對稱性的情境下之機率。

基本學習表現

DCP-9-3-1-1 理解在對稱性的情境下(銅板、骰子、撲克牌、抽球等)，每一種可能發生的結果出現的機率相同。

DCP-9-3-1-2 認識在對稱性的情境下，若有 n 種可能發生的結果，每種結果發生的機率均為 $\frac{1}{n}$ 。

DCP-9-3-1-3 認識在對稱性的情境下：若一事件有 n 種可能發生的結果，而且每種結果發生的機會相等。如果有 m 種可能結果滿足某特定事件(條件)，那麼，該特定事件發生的機率為 $\frac{m}{n}$ 。

DCP-9-3-2-1 理解在不具對稱性的情境下(圖釘、圓錐、爻杯)，每一種可能發生的結果出現的機率不一定相同。

DCP-9-3-2-2 認識事件出現的機率介於 0 和 1 之間。

DCP-9-3-2-3 認識在樣本空間給定一個分割下，所產生的事件機率總和為 1。

DCP-9-3-2-4 認識一定會發生事件的機率為 1，不可能發生事件的機率為 0。

◎ 基本學習內容 DC-9-3-1 為 DC-9-2-1 之後續學習概念，故學生已能透過樹狀圖認識可能發生的所有事件。

本基本學習內容幫助學生認識具對稱性的情境下每種結果發生的機會相等。

■ 教學活動舉例或檢測以古典機率為原則，同時配合學生直觀上容易相信每一基本事件出現的機會相等的生活情境布題。

■ 教師宜引導學生從活動的實驗發現某事件的每一種結果出現的次數很接近，在規定機率總和為 1 的限制下，假設每一個點出現的機會都相同。

例如擲一顆骰子 600 次，1~6 點出現的次數如下表，因為各點數出現的次數很接近，所以規定各點數出現的機會均等，因此骰子的 1~6 點出現的機率皆為 $\frac{1}{6}$ 。

點數	1點	2點	3點	4點	5點	6點
出現次數	105	95	101	99	107	93

教師可補充說明，透過實驗發現，出現的相對頻率與古典機率所定義的機率值很接近。

- 本基本學習內容限制樹狀圖以兩層為限，故機率事件以兩層為限，例如投擲銅板以投擲 2 次為限，不宜出現過度複雜的情境。

- 教學時應強調「每一基本事件出現的機會相等」，如「已知每一球被取出的機會相等」。教師可舉例說明如下：

「如果擲一枚銅板十次均出現正面，一般來說我們會認為這是一枚不公正的銅板，所以第 11 次出現正面機會較大，但是在古典機率下假設每次出現的機會都是 $\frac{1}{2}$ ，所以第 11 次出現正面或反面的機率相等。」

- 如果情境是具對稱性的，則每一種事件出現的機率都相等，其機率總和為 1。

- ◎ 基本學習內容 DC-9-3-2 為 DC-9-2-1 之後續學習概念，故學生已能透過樹狀圖認識可能發生的所有事件。

本基本學習內容幫助學生認識不具對稱性的情境其下每種結果發生的機會不一定相等。

- 不具對稱性的情境(投擲圖釘、圓錐、爻杯)出現的結果只有兩種，每一種結果出現的機率通常並不是 $\frac{1}{2}$ 。

- 如果情境是不具對稱性的，則每一種事件出現的機率不一定相等，但其機率總和為 1。