數學思惟與解題—簡化原則

數學王子 蘇恭弘

挑戰

已知等差數列的前 n 項和為 a，前 $2n$ 項和為 b，求前 $3n$ 項和．

簡化原則—從國二的題目看起

- 已知$S_{10}=10$, $S_{20}=30$, 求$S_{30}=?$

法一:

設首項a_1 公差d

$S_{10}=\frac{10}{2}(2a_1+(10-1)\mathrm{d})=10$ $S_{20}=\frac{20}{2}(2a_1+(20-1)\mathrm{d})=30$

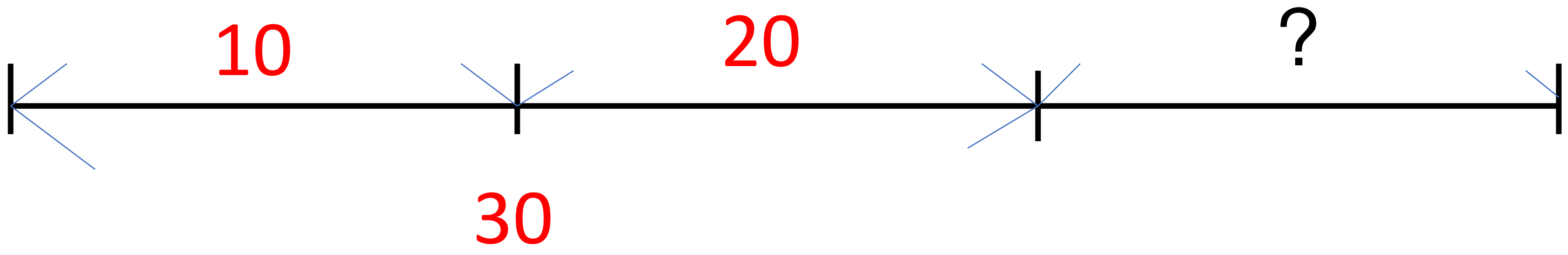
$\begin{cases} 5(2a_1+9\,d)=10 \\ 10(2a_1+19\,d)=30 \end{cases}$ 解得， $a_1=\frac{11}{20}$ d= $\frac{1}{10}$

所以 $S_{30}=\frac{30}{2}\left(2\times\frac{11}{20}+(30-1)\times\frac{1}{10}\right)=15\times4=60$

簡化原則—從國二的題目看起

- 已知$S_{10} = 10$, $S_{20} = 30$, 求$S_{30} =?$

法二:圖解



挑戰

已知等差數列的前 n 項和為 a ，前 $2n$ 項和為 b ，求前 $3n$ 項和．

解：由題設　$S_n = a$　$S_{2n} = b$

$\therefore a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n} = b - a$　而

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (a_{2n+1} + a_{2n|2} + \cdots + a_{3n}) = 2(a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n})$$

從而：

$$S_{3n} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n}) + (a_{2n+1} + a_{2n|2} + \cdots + a_{3n})$$

$$= 3(a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n}) = 3(b - a)$$