淺介台南市國中數學領域素養導向教學與評量

左太政/高雄師範大學數學系

壹、數學領域綱要之特色與重要內涵解析

數學的學習需涵蓋學習數學知識及其應用，國中階段的應用層面以學生生活情境及結合現代科技的運用為主，此為數學素養之概念。

一、 數學領域之基本理念

(一) 數學是一種語言，宜由自然語言的題材導入學習

數學的發展是融入自然語言的生活經驗，無論是數量、形狀及其相互關係的描述，都是生活中常見的用語。數學連結文字及符號語言，能夠以簡馭繁，用簡明的公式與理論，解釋各種繁雜的現象；因其精確，可以適時彌補自然語言的不足。數學更是演算能力、邏輯訓練、抽象思維的推手。數學教學應該盡可能保持學習自然語言的方式，透過實例的操作與解說，精熟概念與演算之後，再逐步進入抽象理論的學習。

(二) 數學是一種實用的規律科學，其教學宜重視跨領域的統整

數學實用的例子甚多，例如：比例可用於各種錢幣的兌換及各種溶液百分濃度的稀釋；利用質數的性質發展出來的加密系統(例如RSN密碼)，能夠大幅提高資訊傳輸的安全；指數定律用來協助計算銀行利息的複利、闡明生物成長的速度、計算周期元素的半衰期等；統計用於對未知世界的預測以及分析大數據等等。數學應用既是跨領域的，其教學也宜重視跨領域的統整。

(三) 數學是一種人文素養，宜培養學生的文化美感

教學可融入數學史，增進學生人文素養。

(四) 數學應提供每位學生有感的學習機會

適時進行差異化教學及課程規劃，提供每位學生每節課都有感的學習活動機會。對於學習緩慢的學生，可以降緩教學速度，僅著重最基本的內容。對於學習超前的學生，可以設計加深、加廣、專題探究等各類課程，激發學生學習動力。對於學習落後的學生，應規劃補救教學，及時補救。

(五) 數學教學應培養學生正確使用工具的素養

工具對於數學教學助益極大。除了傳統教具如圓規、三角板、方格紙等，資訊時代的計算機（calculator）、電腦（computer）、網路、多媒體、行動工具等都是有用的學習工具。

二、 課程目標:

(一)提供所有學生公平受教、適性揚才的機會，培育其探索數學的信心與正向態度。

(二) 培養學生觀察規律、演算、抽象、推論及溝通等各項能力。

(三) 培養學生使用工具，運用於數學程序及解決問題的正確態度。

(四) 培養學生運用數學思考問題、分析問題和解決問題的能力。

(五) 培養學生日常生活應用與學習其他學科所需的數學知能。

(六) 培養學生欣賞數學的人文內涵中，以簡馭繁的精神與結構嚴謹完美的特質。

三、國中領綱核心素養面向

在課程設計上，核心素養是十二年國教的總體目標，由全體的學科領 域共同達成。各領域可因其學科特色與學習階段需要，選取其中幾項的核心素養，進一步具體轉化為領域的「學習表現」與「學習內容」，不需要對應所有的 核心素養項目。

課程發展以核心素養做為主軸，它是指一個人為適應現在生活及面對未來挑戰，所應具備的知識、能力與態度。數-A1、 數-A3、數-C1、數-C2 為跨階段之核心素養，具體展現在「實施要點」的「教學實施」項下， 以彰顯數學素養培養的理念。

(一)數學教學應培養學生正確使用工具的素養工具對於數學教學助益極大。除了傳統教具如圓規、三角板、方格紙等，資訊時代的計算機（calculator）、電腦（computer）、網路、多媒體、行動工具等都是有用的學習工具。本次課綱修訂，重視計算工具的有效運用。計算工具教應從計算機開始，逐漸引導學生使用各種高階工具。數學是一種規律的科學，計算機及電腦可以協助落實探究活動，惟因計算機的計算有一定的誤差，應強調其使用時機及侷限，培養學生使用計算機的正確態度。學生在熟練計算原理後，為避免繁複計算而降低學習效率，可適當使用計算，執行複雜數字、

統計數據及三角比的計算。

(二) 數學領綱核心素養面向

A、自主行動:

A1 身心素質與自我精進

數-J-A1 對於學習數學有信心和正向態度，能使用適當的數學語言進行溝通，並能將所學應用於日常生活中。

A2 系統思考與解決問題

數-J-A2 具備有理數、根式、坐標系之運作能力，並能以符號代表數或幾何物件，執行運算與推論，在生活情境或可理解的想像情境中，分析本質以解決問題。

A3 規劃執行與創新應變

數-J-A3 具備識別現實生活問題和數學的關聯的能力，可從多元、彈性角度擬訂問題解決計畫，並能將問題解答轉化於真實世界。

B、溝通互動

(1) B1符號運用與溝通表達

數-J-B1 具備處理代數與幾何中數學關係的能力，並用以描述情境中的現象。能在經驗範圍內，以數學語言表述平面與空間的基本關係和性質。能以基本的統計量與機率，描述生活中不確定性的程度。

(2) B2科技資訊與媒體素養

數-J-B2 具備正確使用計算機的素養，包含知道其適用性與限制、認識其與數學知識的輔成價值、並能用以執行數學程序。能認識統計資料的基本特徵。

(3) B3藝術涵養與美感素養

數-J-B3 具備辨認藝術作品中的幾何形體或數量關係的素養。並能在數學的推導中，享受數學之美。

C、社會參與:

C1 道德實踐與公民意識

數-J-C1 具備從證據討論與反思事情的態度，提出合理的論述，並能和他人進行理性溝通與合作。

C2人際關係與團隊合作

數-J-C2 具備樂於協助他人及與人合作解決數學問題的素養

C3多元文化國際理解與

數-J-C3 具備敏察和接納數學發展的全球性歷史與地理背景的素養

四、學習重點

學習重點由「學習表現」與「學習內容」兩個向度所組成。學習重點用以引導課程設計、教材發展、教科書審查及學習評量等，並配合教學加以實踐。

(一) 學習表現

學習表現強調以學習者為中心，重視認知（求知、應用、推理）與情意態度（賞識）的學習展現，代表「非內容」向度，具體展現或呼應核心素養。

專有名詞:

1.認識、理解、熟練

(1)「認識」包含察覺、認識；

(2)「理解」包含辨識、概念連結、理解；

(3)「熟練」包含可做應用解題、推理，以及程序課題上的熟練。

如果一個數學概念在一個階段可完成，學習表現以較成熟的學習階段來描述。因此如果學習表現只有「理解」沒有「認識」，則表示「認識」已完成，或「認識」與「理解」必須在同一階段完成。

2.情境

學生在理解概念或規律，以及解題應用時，經常需要連結於某經驗脈絡中，既學生在理解概念或規律，以及解題應用時，經常需要連結於某經驗脈絡中，既可協助學習，亦有益於日後應用。課程綱要中常用到的情境，一種泛指這些經驗的脈絡特徵，例如：生活情境、具體情境。另一種則指某核心類型的學習經驗，例如：平分情境、測量情境。

3. 具體情境

(1) 學生在學習時，經常需要先有恰當的範例、應用來提示與引導，這些情境泛稱為具體情境（對應於「認識」與「理解」)。

(2) 從第三階段起，學生學習數學所依賴的具體情境，就不限於生活情境。例如：學生在五、六年級學因數、倍數或質數課題時，最恰當的具體情境，就是學生對整數性質的熟悉，而非日常生活的問題。從第四階段起，具體情境甚至包括數學或其他領域的局部理論。

4.解題

在課程綱要中，數學的解題泛指能應用數學概念與程序，解決日常、數學、其他領域的應用問題。解題過程包括了解問題意義、選擇可能之策略、轉換該策略為數學問題、

5.操作活動

操作活動泛指由操作中察覺、形成概念，甚至簡單連結各概念的各種活動。

6.報讀

泛指資料的閱讀，因此包括能正確理解資料呈現方式（表格、統計圖)，也能回答關於資料的直接問題與簡單延伸的問題（如和其他數學概念連結的問題)。

學習表現依學習階段編寫，學習階段的劃分方式如下：國小一至二年級（低年級）為第一學習階段、三至四年級（中年級）為第二學習階段、五至六年級（高年級）為第三學習階段、國中一至三年級為第四學習階段、高級中等教育一至三年級為第五學習階段。其編碼方式如後所述。

第1碼為「表現類別」，分別以英文小寫字母n（數與量）、s（空間與形狀）、g（坐標幾何）、r（關係）、a（代數）、f（函數）、d（資料與不確定性）表示。其中r 為國小階段專用，到了國、高中之後轉換發展為a和f。

第2碼為學習階段別，依序為I（國小低年級）、II（國小中年級）、III（國小高年級）、IV（國中）、V（高級中等教育）。

第3碼為流水號（教科書在同一階段可以不依照流水號順序編寫）。

(二) 學習內容：為方便參照，各學習內容之末列出對應的學習表現。

1. 學習內容涵蓋數學基礎重要的事實、概念、原理原則、技能與後設認知等知識，學校、地方政府或出版社得依其專業需求與特性，將學習內容做適當的轉化，以發展適當的教材。

2. 學習內容的編碼方式依年級編寫:

第1碼為「主題類別」，分別以英文大寫字母N（數與量）、S（空間與形狀）、G（坐標幾何）、R（關係）、A（代數）、F（函數）、D（資料與不確定性）表示。其中R 為國小階段專用，到了國、高中之後轉換發展為A和F。

第2碼 為「年級階段」別，依年級區分，依序為1至12年級，以阿拉伯數字1至12表示。11年級分11A與11B兩類，12年級加深加廣選修課程分12甲與12乙兩類。

第3碼 為流水號。

3.學習內容注意事項

7-12年級的學習內容，已從九年一貫97年課程綱要與高中95/99課程綱要中刪除、以及未列入現有內容且較難者，不可在教科用書呈現。若有必要，僅可列入教科用書之教師手冊，提供教師對學習超前的學生補充時參考；教師運用此補充資料時，應考慮教學時數與教材的脈絡。

4.學習內容加註符號之意義

7-12年級的一部分學習內容條文及補充說明有※、★、＃之標註，其意義如下：

※ 為進階或延伸教材，教師宜適當補充，建議不納入全國性考試的範圍。

★ 建議不列為評量的直接命題對象，可融入其他課題的評量之中。

＃ 不必設置獨立的教學單元，宜融入適當課題，在合理脈絡中作教學

5. 學習內容補充說明(依年級排序)

以108課綱國中數學領域新增三項學習內容為例說明(刪除直角三角形的三角比):

(1) S-7-2三視圖：立體圖形的前視圖、上視圖、左（右）視圖。立體圖形限制內嵌於 $3\times3\times3$ 的正方體且不得中空。

(2) N-8-6等比數列：給定首項、公比計算等比數列的一般項。

※由一般項反求首項、項數或公差。

【註】: 不處理「由一般項反求首項、項數或公比」。

(3) S-9-13 空間中的線與平面：長方體的示意圖，利用長方體作為特例，介紹線與線的平行、垂直與歪斜關係，線與平面的垂直與平行關係、平面與平面的垂直與平行關係

【註】: S-9-13僅教授「面與面的平行與垂直」，並且以操作活動為主。本條目則新增

空間中的線與線的垂直、平行、歪斜，以及「線與面的平行與垂直」，且以理解數學概念為主

(4) S-9-5 直角三角形的三角比：對直角三角形的一個銳角定義 「斜邊」、「鄰邊」、「對邊」，並引入符號 tan A、sin A、 cos A；直角三角形內，給定一邊的長和一個銳角的角度， 決定另一邊的邊長；學生無使用計算機時，角度限於 30 度、45 度、60 度。

【註】: S-9-5 建議由特殊直角三角形 30-60-90 及 45-45-90 的直角三角形引 入日常生活中常見的「坡度」與邊長比固定，來定義 tanA 的 值，再延伸至 sinA 與 cosA。使學生熟悉基本定義即可，勿過度 延伸、勿介紹三角函數的中文命名。

五、課程發展

課程發展依學生需求調整，對於學**習緩慢的學生，可以降緩教學速度**。對**學習超前的學生，可以設計加深、加廣的課程、專題探究各類課程**。對於學習落後的學生，應規劃補救教學，及時補救。

六、教材編寫

(一) 學習內容的安排以清楚呈現某組數學概念為原則，並非一條目對應一教學單元，教科書在同一年級可以不依照學習內容的流水號順序編寫。7-12 年級部分學習內容條文及補充說明有※、★、＃之標註，教科用書編寫時應充分掌握其意義，並且在書內標明、解釋清楚。

(二)國民中學初次介紹計算機，宜有專門單元以實例說明計算機的特性與易犯錯誤。教材

應該讓學生明白，計算機及電腦的數值計算會因有效位數的限制而有一定的誤差，以及計算機操作時可能發生錯誤與誤差，如鍵入錯誤、程序錯誤、有效位數不足等問題。

教師手冊中亦可強調，教師應該在學生先有描點繪圖的經驗後，才以電腦繪圖加強觀察函數圖形的特徵，並解釋其意涵。

(三) 教科用書之編寫可適當編入數學史、民族數學及數學家介紹，以引發學生興趣、培養其欣賞數學發展的素養，並了解不同性別者的成就與貢獻。

(四) 教科用書之選用應考量學生程度之適切性，必要時，**教師可以自編教材。**

七、教學實施

(一)學習重點的訂定，以該階段或年級結束時，學生應具備的數學素養為考量。

(二)課程綱要的制定，並未預設特定的教學法，教師應能依學生的年齡、前置經驗、授課主題特性與教學現場的狀況，因時制宜，採用能提供學生充分有意義學習的方法，順暢地進行教學，例如：合作解題、探究教學等有效的教學方法。

(三) 數學教學應注重數、量、形的聯繫，讓學生在實作、實測與直覺中，精熟數、量、形及其相互關係的概念，並逐步抽象化與程序化成為精鍊有效的數學語言，再經由反思、論證、練習與解題，讓學生逐步穩定，達到精熟學習，掌握其概念，作為進一步學習的基礎。

(四) 當學生學習數學時，在生活應用解題與抽象形式能力兩課題間，必須來回往返地相互加強，才能真正順利地發展數學能力。

(五)教師應將學生的錯誤視為學習歷程，診斷學生發生問題的根源（例如：語言未溝通、肆意擴張約定、推理的謬誤等），並針對問題協助學生。

(六)為落實培養學生使用計算機能力，學生在國民中學教育階段時，應具備標準型計算機，教師亦需配合數學課程綱要內容，教導學生正確使用計算機的方法及態度。

(七)教師在教學過程中可適當介紹數學史、民族數學及數學家，引發學生興趣、培養其欣賞數學發展的素養，但不可將這些內容納入評量。

(八) 教師可運用數學奠基與探索活動，鼓勵學生利用數學解決生活中的實際問題。數學教師可協同其他領域教師，發展出各領域使用數學的實例，幫助學生建立其他領域所需的數學素養。

八、教學資源

(一) 教學時應適度使教學器材，協助學生視覺及思維上的理解，增加教學效果。

(二) 教學器材以自製為優先，簡易的器材可由師生彈性就地取材設計，複雜的器材應由學校提供，必要時得成立教具室。

(三) 數學是一種規律的科學，其探究的過程須操作大量的數字（數學語言的基本詞彙），所以應該具備操作計算機的能力，以落實數學的探究活動。

九、計算機教學應重視，培養學生正確使用計算機的態度；

應該讓學生明白，計算機及電腦的數值計算都因為有效位數的限制而有一定的誤差，在應用上要了解此侷限性的可接受度；並應該讓學生了解，計算機操作時所可能發生的錯誤與誤差，如鍵入錯誤、程序錯誤、有效位數不足等問題。在前述之基礎上，學生可使用計算機解決問題或協助驗算，並搭配心算與概算，覺察計算結果的合理性，強化學

生的數字感。

十、教學評量

(一) 評量有多種方式，譬如紙筆測驗、實作、討論、口頭回答、視察、作業、專題研究或分組報告等。教師 宜視教學現場需要，選擇適切的評量方式。

(二) 除了總結性評量之外，教師應於課堂教學運用形成性評量探查學生的學習情況、學習困難以及與學習目標之間的落差，即時給予學生回饋或調整教學，以促進其學習。

(三) 在學習評量中，不宜出現高難度的問題。**學習內容補充說明與《課程手冊》(配合課綱而發展出來)的建議**， 可作為教師命題難度的參考。

(四) 本次數學課程綱要的重要變革之一，在於**強調培養學生使用計算機的能力**及正確態度用以解題與作答。另外，其他學生常用的器材，例如直尺、量角器、圓規等，亦宜參考國際上類似考試，准許學生帶入考場；出題的技術上，附圖可以用示意圖呈現，並在其旁註明為示意圖。

貳、數學素養導向教學與評量之設計

「素養導向教學」實則包含兩大意涵：一方面是指培養數學素養，另一方面，則指促進總綱三面九項核心素養 （如系統思考、規劃創新、團隊合作…）。教師進行素養導向教學設計時，除了要思考所設計的學習活動如何有助於 「總綱核心素養」的達成，也要參照數學領域課程綱要中的「領域核心素養」，亦即如何透過數學領域的內涵來體現、落實總綱核心素養的精神。教師的課程與教學設計， 可以彈性選擇適當的學習重點（學習內容與學習表現），以協助學生具備並精進三面九項的核心素養。

一、數學素養四個面向

(一)數學學科知識的素養

(二)應用到學習、生活與職業生涯的素養

(三)正確使用工具的素養

(四)有用的與他人溝通的素養

二、數學素養導向教學模組的設計原則

(一)透過現實情境、寓言故事或數學史引入教材，營造數學學習需求；

(二)以任務鋪陳數學學習脈絡，引導學生進行探索與發展概念；

(三)讓學生運用相關數學知識與能力解決問題，提出合理的觀點與他人溝通；

(四)教材安排從具體到抽象，提供學生有感的學習機會；

(五)教材設計具備多重表徵；

(六)學習任務具備形成性評量的功能，以評估與促進數學學習。

三、教學設計須要那些要項

(一)學習目標

(二)教材內容

(三)學習過程

(四)評量

四、素養導向課程與教學設計四點基本原則

(一) 連結實際的情境脈絡，讓學習產生意義

素養導向教學強調知識與情境脈絡之間的連結，在課程與教學中並不排斥學科內容，

而是強調透過與情境脈絡的連結，來建立學習意義，並有助於將所學應用到所需要的情境。

例如以「比與比值」這一單元為例，比與比值的概念與運算當然包括許多數學符號與關係的理解，但若能鋪陳一個脈絡、情境，讓學生知道：什麼樣的情況下會用得到比與比值？利用這些比值概念是要因應什麼問題或情境？將會有助於學習，也使得學習更有意義。

(二) 強調學生參與和主動學習，得以運用與強化相關能力

素養的養成不單是指學習某些知識內容，更強調要具備能力與情意面向，是一種綜合性表現。素養導向的課程與教學，強調學生中心，而非教師中心，更重視學生的參與與主動學習。從課程設計的角度來說，更重視歷程模式所強調的，如學生在歷程中所學到的主動、參與、嘗試、探究、討論、尊重、反思、選擇等。

以「A2系統思考與解決問題」為例，應不只是記住思考的原則或方法，而是要親自經歷思考與解決的實踐經驗；「規劃執行（A3）」與「溝通表達（B1）」也很難透過講授與聆聽的傳統教學方式來達成，仍需要有學生的實際參與，從行動中學習與精進。

(三) 兼顧學習的內容（學習內容）與歷程（學習表現），以彰顯素養乃包含知識、技能、情意的統整能力

核心素養的課程與教學可以融入於各學科當中，透過適當的教材或教法，並兼顧數學領域的「學習內容」或「學習表現」，以促成學生在知識、技能與情意面向的均衡統整。

(四) 針對不同核心素養項目，應有不同設計重點

總綱中所列核心素養共有三面九項，這些項目的內涵不盡相同，為了引導學生培養這些核心素養，應該有不同的教學重點，而不只是前述有關教學歷程的一般性原則。例如，促成「媒體素養（B2)」與促成「國際理解（C3)」的課程設計應是有所不同的。若是為了增進學生的「媒體素養（B2)」，可適當地提供媒體素材，再加上教學過程中討論與分析。若為了強化學生的「國際理解（C3)」，可以在課程中加入國際元素，或設計國際交流活動，則更為貼切。

從上述四個原則看來，素養導向教學強調情境脈絡的連結、學生的主動與參與、 關照認知技能情意的統整、並能針對不同素養項目能有適當的調整。

五、素養導向教學設計注意事項

(一) 教案的格式不一，各有重點與功能。但教案若要強調核心素養，建議能在教案中加上「呼應核心素養之說明」乙項，以說明該教案中的哪個部分、哪些活動、哪些設計是用以促進哪幾項核心素養之養成。

(二) 素養導向的教案設計，強調教學應能強化其情境脈絡的連結，使學生不僅透過實際的情境脈絡來學習數學內容，也能將所學的原理原則應用、實踐到情境脈絡去。因此，情境脈絡的鋪陳，乃成了教學設計的重要元素。教學活動設計中 是否連結了適當的情境或脈絡？情境脈絡的設計是否導向或促進教學目標的達成？都應該是教案呈現的重點。

(三) 素養導向設計重視學生主動學習的角色，教案的敘寫不應只有知識能力的表述，而要能考慮到學生的學習動機、且是否有設計並提供讓學生有探索的機會？並透過學習歷程，能促進學生溝通表達、團隊合作、問題解決...等能力。在撰寫教案時，應該不只是「認

識」，而建議可以更強調「理解」、 「分析」、「探索」、「發表」...等等，以便能體現核心素養的精神。

(四)每一個單元的教學目標不同，未必設計教學活動都得涵蓋核心素養的養成。教師得考量教材內容與學生需求，挑選適當的教學單元來加以規劃即可。

參考資料:

心測中心(2018)。107年素養導向評量命題知能研習會學領域。台北市:台灣師大。

周淑卿、吳璧純、林永豐、張景媛、陳美如(2018)。**素養導向教學設計參考手冊**。教育部國民及學前教育署出版。

教育部(2018)。**十二年國民基本教育課程綱要--國民中小學暨普通型高級中等學校-數學領域**。台北市:教育部

教育部(2018，9月)。**十二年國民基本教育課程綱要--國民中小學暨普通型高級中等學校-議題融入說明手冊**。台北市:教育部

教育部(2018，11月)。**十二年國民基本教育課程綱要--國民中小學暨普通型高級中等學校-數學領域課程手冊(初稿)**，更新第六版。台北市:教育部

十二年國民基本教育數學素養教材研發編輯小組(2017)。**十二年國教數學素養導向課程設計與教學案例**。單維彰、鄭章華主編，初版。新北市:國家教育研究院。

鄭章華、單維彰(n.d.)。**素養導向之數學教材初探**

參考文獻

李國偉、黃文璋、楊德清、劉柏宏 (2013)。**教育部提昇國民素養實施方案—數學素養研究計畫結案**

報告。臺北市：教育部。

林碧珍、蔡文煥（2006）。**TIMSS 2003 國小四年級學生的數學成就及其相關因素之探討**。載於張秋男（主編），TIMSS 2003 國際數學與科學教育成就趨 勢調查國家報告（123-161 頁）。臺北市：國立台灣師範大學科學教育研究中心。

林福來、單維彰、李源順、鄭章華（2013）。**十二年國民基本教育領域綱要內容前導研究」整合型研究子計畫三：十二年國民基本教育數學領域綱要內容之前導研究研究報告**（編號：NAER-102-06-A-1-02-03-1-12）。新北市：國家 教育研究院。

洪裕宏 (2008)。**界定與選擇國民核心素養:概念參考架構與理論基礎研究**。行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告(NSC 95-2511-S-010-001)。臺北市: 國立陽明大學。

徐偉民 (2013)。國小教師數學教科書使用之初探。**科學教育學刊，21(1)**，25-48。

張芬芬、陳麗華、楊國楊 (2010)。臺灣九年一貫課程轉化之議題與因應。**教科書研究**，3(1)，1-40。

翁穎哲、譚克平(2008) 。設計研究法簡介及其在教育研究的應用範例。**科學教育月刊**，307，15-30。

教育部 (2014)。**十二年國民基本教育課程綱要總綱**。臺北市：作者。

教育部 (2015)。**十二年國民基本教育數學課程綱要**。取自： http://12basic-forum.naer.edu.tw/?q=node/70

國家教育研究院 (2014)。**十二年國民基本教育課程發展指引**。新北市：作者。

蔡清田、陳延興 (2013)。國民核心素養之課程轉化。**課程與教學季刊**，16(3)， 59-78。

附錄、數感(Numeracy, or number sense) 談數字之美

一、緒言：數學奇才 PAUL ERDÖS 的故事

Paul Erdos （匈牙利，1913-1996）專長於組合、圖論與數論，學術論文有 1475 篇。尤其對數論有極大貢獻，是近代偉大數學家之一。

二、美妙的質數：

1、Russia 數學家 Christian Goldbach 於 1742 年提出著名的 Conjecture:

「任意大於 2 的偶數必可表為兩個質數之和」，迄今未必解決。

2、於 1845 年 Bertrand 提出 conjecture:

「當 n > 3 時，必有一質數介於 n 與 2n 之間」，於 1850 年首先由 Chebyshev 使用「lim（$\pi(n)\log n$）$/n=1$， 當 $n\to\infty$ 」結果證明了這個性質，但卻未 給出極限存在之證明。直至 Chebyshev 逝世二年後才由 Hadamard 和 de la Vallee Possin 給完整證明。但當 Erdos 在 18 歲時，便以漂亮的簡易方法證明此性質。

3、Erdos 證明：Prime Number Theorem「小於正整數 n 的質數個數正好與

$n / \log_e n$ 的極限值相同當 $n \to \infty$ 時」。但卻被他的同事 Atle Selberg 搶先發表，由此人享有該成果的絕大部分功勞，更因此於 1950 年獲得 Fields Medal。質數定理最先由 Gauss 提出，卻未給證明，是第一個預測質數分部的公式。

4、質數的分布圖：Erdos 的一位合作學者 Stanislaw Ulam 曾從 1 開始，由內向外以逆時鐘方向排列連續正整數，

67	38	17	16	15	14	13	30	55	88
68	39	18	5	4	3	12	29	54	87
69	40	19	6	1	2	11	28	53	86
70	41	20	7	8	9	10	27	52	85
71	42	21	22	23	24	25	26	51	84
72	43	44	45	46	47	48	49	50	83

由上表可觀察到質數都排列在一條條對角線上。Euler（Switzerland,1707-1783）

曾提及質數的二個公式：

（1）n^2+n+17，當 $n=0,1,2,\cdots,15$ 時，這些數都是質數，正好與上圖中主對角線上的數相吻合。

但當 $n=16$ 時得到合數 289。

（2）n^2+n+41，當 $n=0,1,2,\cdots,39$ 時，這些數都是質數，正好與上圖中主對角線上的數相吻合。

但當 $n=40,41$ 時都是合數。

三、魯斯-阿倫數對（Ruth-Aaron pairs）

1.貝比•魯斯（Ｂabe Ruth,1895-1948）自 1914 年至 1935 年在美國職棒大聯盟曾打過 Boston Red Sox, New York Yankees, Boston Braves, 於 1935 年締造全壘打 714 支記錄；於 1936 年入選 The Hall of Fame by BBWAA。

2.漢克•阿倫（Hank Aaron, 1934-）自 1954 年至 1976 年在美國職棒大聯盟曾打過 Milwaukee and Atlanta Braves, Milwaukee Braves,於 1974 年創下全壘打 715 支；他締造美國職棒全壘打紀錄：755 支，於 1982 年入選 The Hall of Fame by BBWAA。

3.喬治亞大學教授卡爾•帕默蘭斯發現這二數的乘積正好是前七個質數的乘積：

$$714 \times 715 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17$$

且這二數的質因數之和又正好相等，即：

$$714 = 2 \times 3 \times 7 \times 17,$$

$$715 = 5 \times 11 \times 13$$

$$2 + 3 + 7 + 17 = 5 + 11 + 13$$

默蘭斯將具有這種性質的二連續正整數稱作「魯斯-阿倫數對」；這種數對在使用電腦搜尋 20000 以內，只有 26 對魯斯-阿倫數對，其中最小的是 5 和 6，最大的是 18490 和 18491。由 Erdos 證明這種魯斯-阿倫數對有無限多對。

四、史密斯數：起源於一個電話號碼

1、在 1982 年 Lehigh University 的艾柏特 • 韋蘭斯基(Albert Wilansky 發現其姊夫史密斯(H. Smith) 的電話號碼有一個特殊的性質，即「它的各個數字之和正好等於它的質因數的各個數字之和」。史密斯的史密斯是 493-7775，

$$4937775 = 3 \times 5 \times 5 \times 65837\,,$$

此號碼的數字和為 $4+9+3+7+7+7+5=42$,

此號碼的各質因數之數字和為 $3+5+5+6+5+8+3+7=42$。

凡是具有這樣性質的正整數稱作「史密斯數」，例如 9985 ,6036 都是史密斯數，已知最小的史密斯數是 4。

2、University of Puerto 的 Sham Oltikar 和 Keith Wayland 發現可利用數字均是 1 的質數來構造史密斯數；即 11 和 1,111,111,111,111,111,111 都是質數，如果將任何大於 11 的這樣的質數乘以 3304 即可構造一個史密斯數。他們也證明「任何完全由 0 和 1 組成的質數必有某倍數是史密斯數」。

3、Wayne McDonald 證明史密斯數有無窮多個。

五、卡布列克數

1.何謂卡布列克(Die R. Kaprekar,印度數學家,1905-1986?)數---

[定義:]在 1949 年時, Kaprekar 發現 6174 滿足下列性質:

(1)給一個四位數,其每個數字皆相異(即 abcd, 其中 $a<b<c<d$);

(2)由此相異的四個數字構成最大和最小的數,令分別為 A, B;

(3)試求 A-B 的值。如果此值是 6174,則停止;若不是,繼續 (2) 的做法,直到出現 6174 為止。

這個四位數稱為「Kaprekar 數」。範例說明:

例 1.給一個四位數 1746, 則 A=7641, B=1467, 且 A-B=6174.

例 2.給一個四位數 5324, 則

步驟 (1) A=5432, B=2345, 且 A-B=3087;

步驟 (2) A=8730, B=0378, 且 A-B=8352;

步驟 (3) A=8532, B=2358, 且 A-B=6174;

練習、請檢驗 5644, 7652.

問題 1、能否證明所有四位數中除了 1111, 2222, 3333, 4444, 5555,6666, 7777, 8888, 9999 外都是

Kaprekar 數? % 已於 1978 年由 Wissenschaft, Erstausgabe 解決。

問題 2、其它位數是否有類似情形?

2.卡布列克怪數是類似 55 及 2223 這樣的二數,使得 $55^2=3025=(30+25)^2$ 與 2223^2

$=4,941,729=(494+1729)^2$ 成立,因此,一個正整數 k 為卡布列克怪數時需滿足下列性質之一:

(1) 當 k^2 為一個 2n 位數時,把前 n 位數當作一個數加上這個數的後面 n 位數,它們之和的平方正好等於 k^2。

(2) 當 k^2 為一個 2n+1 位數,把前 n 位數當作一個數加上這個數的後面 n+1 位數,它們之和的平方正好等於這個 k^2。

這是 Kaprekar 於 1980 年發表在 Journal of Recreational Arithmetic。試問 k^2 是四位數中有那些卡布列克怪數 k?(能否找出所有卡布列克怪數?)

問題：試證六位卡布列克怪數只有 181819, 818181.

六、貝林卓米克 (palindromic) 數:

一正整數 n 由左至右的數字排列恰好是由右至左的數字排列,稱為貝林卓米克 (palindromic) 數,例如: 9,9559,4078704 等。試找出所有偶數位數的貝林卓米克完全平方數。

(如:$831{,}775{,}153{,}121{,}251{,}039{,}203{,}514^2$

$=691{,}849{,}905{,}349{,}880{,}612{,}384{,}525{,}525{,}483{,}216{,}088{,}943{,}509{,}948{,}196$ 四十八位數)

七、冰雹問題(3n+1 problem)

任給一個正整數,依下列方式操作:

(1)若此數為偶數,則將此數除以 2;

(2)若此數為奇數,則將此數乘以 3 再加上 1。

依上述操作方式繼續下去,最後的結果必為 4-2-1。目前尚未解決此問題。

『練習』:仿照上面的做法,請檢驗 37,44.

八、196 問題

(1)給一個三位數(設 abc);

(2)構造一個新數為 cba,即將該數的數字反過來排列;

(3)試求 abc+cba 的值。如果此值是貝林卓米克(palindromic) 數,則停止;若不是,繼續 (2) 的做法,直到出現貝林卓米克 (palindromic) 數為止。

範例說明:

例 1.給一個數 49,則

第一次和:49+94=143,此值不是貝林卓米克數;

第二次和:143+341=484,此值是貝林卓米克數。

例 2.給一個數 88,則

第一次和:88+88=176,此值不是貝林卓米克數;

第二次和:176+671=847,此值不是貝林卓米克數;

第三次和:847+748=1595,此值不是貝林卓米克數;

第四次和:1595+5951=7546,此值不是貝林卓米克數;

第五次和:7546+6457=14003,此值不是貝林卓米克數;

第六次和:14003+30041=44044,此值是貝林卓米克數。

九、Automorphic 數

k 為一個 Automorphic 數的定義是 k^2 的右邊後面位數恰好是 k.

例如:1,5,6,25^2=625,76,376,625,9376,…等。

十、Trimorphic 數

k 為一個 trimorphic 數的定義是 k^3 的右邊後面位數恰好是 k.

例如:1,4,5,6,9,24,25,49,51,75,76,99,125,249,251,375,376,…等。

十一、經濟數(Economical Numbers)

設 NOD(n) 表示正整數 n 中相異數字的個數, 且 NODPF(n)表示正整數 n 的標準分解式中相異質數的個數,當 NOD(n) > NODPF(n)時,則 n 稱為「經濟數」。例如:125=5^3.

十二、快樂數(Happy Numbers)

如果一個正整數 n 的數字之平方和 m 是 1,則停止;如不是,重覆前面的做法直至 1 出現,這樣的 n 稱為「快樂數」。

例如: $7 \to 49 \to 97 \to 130 \to 10 \to 1$, 所以 7 是快樂數,但 4 不是快樂數。

問題 1、能否找出所有快樂數在正整數中的密度?大約為 $\frac{1}{7}$ 。

問題 2、在連續兩個快樂數之間隔的數目可以任意多?

問題 3、能找出多大的快樂數?

十三、循環小數

如果將 $\frac{1}{7}$ 化成小數，即 $\frac{1}{7}=0.\overline{142857}$ ，我們發現其循環節是六位數且前三位數與後三位數之和正好是三位數：$142+757=999$ 。

問題：設 p 為質數，如果 $\frac{1}{p}$ 化成小數，其循環節是 $2n$ 位數且前 n 位數與後 n 位數之和正好是 n 位數 $99\cdots9$ ：即 $\frac{1}{p}=\overline{A+B}$,其中 A,B 為 n 位數且 $A+B=99\cdots9$,試求滿足這樣條件的所有可能 p 值。

十四、數感(Numeracy)

$$
\begin{aligned}
&1\times8+1=9\\
&12\times8+2=98\\
&123\times8+3=987\\
&1234\times8+4=9876\\
&12345\times8+5=98765\\
&123456\times8+6=987654\\
&1234567\times8+7=9876543\\
&12345678\times8+8=98765432\\
&123456789\times8+9=987654321
\end{aligned}
$$

參、從108年會考非選題評閱談數學素養導向教學評量

一、108 年國中會考數學科非選試題

第 1 題、市面上販售的防曬產品標有防曬係數 SPF，而其對抗紫外線的防護率算法為

防護率 $= \dfrac{\text{SPF}-1}{\text{SPF}} \times 100\%$，其中 $\text{SPF} \geq 1$。

請回答下列問題：

(1)廠商宣稱開發出防護率 90% 的產品，請問該產品的 SPF 應標示為多少？

(2)某防曬產品文宣內容如圖(二十)所示。

請根據 SPF 與防護率的轉換公式，判斷此文宣內容是否合理，並詳細解釋或完整寫出你的理由。

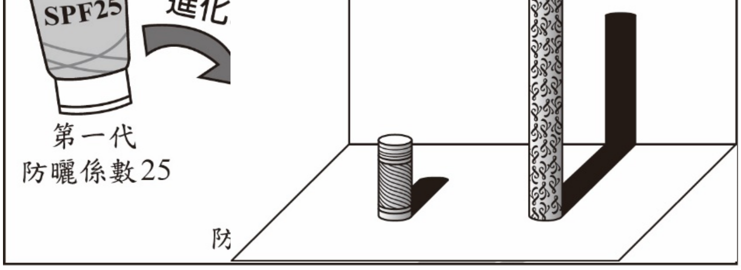
第 2 題、在公園有兩座垂直於水平地面且高度不一的圓柱，兩座圓柱後面有一堵與地面互相垂直的牆，且圓柱與牆的距離皆為 120 公分。敏敏觀察到高度 90 公分矮圓柱的影子落在地面上，其影長為 60 公分；而高圓柱的部分影子落在牆上，如圖(二十一)所示。

已知落在地面上的影子皆與牆面互相垂直，並視太陽光為平行光，在不計圓柱厚度與影子寬度的情況下，請回答下列問題：

(1)若敏敏的身高為 150 公分，且此刻她的影子完全落在地面上，則影長為多少公分？

(2) 若同一時間量得高圓柱落在牆上的影長為 150 公分，則高圓柱的高度為多少公分？請詳細解釋或完整寫出你的解題過程，並求出答案。

圖(二十一)



二、107 年國中會考數學科非選試題

第1題、一個箱子內有 **4** 顆相同的球，將 **4** 顆球分別標示號碼 **1**、**2**、**3**、**4**，今翔翔以每次從箱子內取一顆球且取後放回的方式抽取，並預計取球 **10** 次，現已取了 **8** 次，取出的結果如表(二) 所列：

次數	第 1 次	第 2 次	第 3 次	第 4 次	第 5 次	第 6 次	第 7 次	第 8 次	第 9 次	第 10 次
號碼	1	3	4	4	2	1	4	1		

若每次取球時，任一顆球被取到的機會皆相等，且~~取出的號碼即為得分~~，請回答下列問題：

(1) 請求出第**1**次至第**8**次得分的平均數。

(2) 承**(1)**，翔翔打算依計畫繼續從箱子取球 **2** 次，請判斷是否可能發生「這 **10** 次得分的平均數~~不小於~~ **2.2**，且~~不大於~~ **2.4**」的情形？若有可能，請計算出發生此情形的機率，並完整寫出你的解題過程；若不可能，請完整說明你的理由。

(一)【評量目標】能理解題意，求出平均數，依據題意，判斷出第9次及第10次可能得分情形，並求出其機率。

(二)素養評量:機率之生活情境題

(三)學生作答之錯誤類型:

1.誤將中位數視為算術平均數(雖然答案皆為 2.5)

2. 缺乏平均數概念

3. 缺乏機率概念

第2題、嘉嘉參加機器人設計活動，需操控機器人在 5×5 的方格棋盤上從 A 點行走至 B 點，且每個小方格皆為正方形。主辦單位規定了三條行走路徑 R_1、R_2、R_3，其行經位置如圖(十六)與表(三)所示：

已知 A、B、C、D、E、F、G 七點皆落在格線的交點上，且兩點之間的路徑皆為直線， 在無法使用任何工具測量的條件下，請判斷 R_1、R_2、R_3 這三條路徑中，最長與最短的路徑分別為何？請寫出你的答案，並完整說明理由。

(一)【評量目標】能理解題意，依據題意，利用幾何相關性質(三角形兩邊和大於第三邊及平行四邊形等)或利用畢氏定理求出三條路徑長，進而判斷出R_1、R_2、R_3 這三條路徑中，何者最長與最短的路徑。

(二)素養評量: 二點之間以直線距離最短或使用估算的能力

(三)學生作答之錯誤類型:

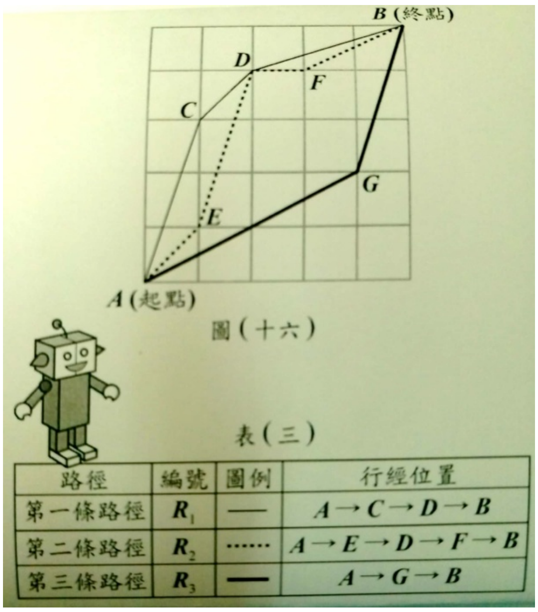
1.不瞭解題意

2.根號數化簡錯誤

3.根號數計算錯誤，例如: $\sqrt{10}+\sqrt{5}=\sqrt{15}$

4.誤用平方公式，例如: $(1+\sqrt{5})^2=1+5=6$

5.誤用十分逼近法，例如:根號數取整數值，或未考慮取至小



圖(十六)

表(三)

路徑	編號	圖例	行經位置
第一條路徑	R_1	——	$A \to C \to D \to B$
第二條路徑	R_2	……	$A \to E \to D \to F \to B$
第三條路徑	R_3	━━	$A \to G \to B$

數點後第一位數字

近似值之誤差範圍內

二、數學素養的評量要求

(一)PISA

PISA嘗試想清楚地描述並評量出十五歲學生的數學素養。因應這樣的目的，

學生的數學知識和技能是根據三個向度來進行評定：

(1) 與問題有關的各種數學內容、

(2) 以數學來連結所觀察到的現象接著進行解題的歷程、

(3)做為題材來源以及問題設計的情境和脈絡。

因此，有三個成分是需要被重視的：

(1)把問題置於一個脈絡或情境中。

(2)數學的內容必需用來解決問題，並且組織成豐富的想法。

(3)為了連結真實的世界，能力必需要被活化，用數學的能力去解決問題。

素養評量什麼，素養評量就是不僅評量「了解」的程度，還要評量有何「見解」。了解和見解的評量就是素養的評量。所以概略的說，素養是了解與見解的表現。

(二)情境和脈絡

將數學素養在數學之中的一個重要層面：在各類的情境中使用以及做數學。這意味著數學處理、數學方法的選擇以及表徵通常依賴問題呈現的情境。

情境是作業內容中學生世界的部分，試題的脈絡是在情境中被特定化，它包含問題形成中的所有細節要素。對PISA 而言，最接近的情境為學生的個人生活；接著是學校生活、工作以及休

間；然後是日常生活中所會碰到的社區及社會；最後是科學和數學情境。個人部份的情境則是直接和學生個人日常活動有關；教育或職業部分的情境則和學生在校生活或者工作場合有關；公眾情境則和當地或廣泛的社群有關，需要學生觀察週遭環境的某些層面或環節。科學情境則較為抽象，可能包含技術的過程、理論情境或者明確數學問題的理解。

三、範例說明

範例 1. 參考自羅浩源編著(1997)。生活的數學。香港:香港教育圖書公司。P.73

由捲筒式衛生紙的包裝紙上得到以下的資料:兩層(2-ply)300 格，每格 11.4cm×11cm。以尺量出整卷衛生紙的半徑(R)與內層捲筒的半徑(r)分別為 5.8cm 和 2.3cm。試求每張兩層衛生紙的厚度。

【參考解法】設 t 為每張兩層衛生紙的厚度，依據體積的計算，可得下列式子：

體積=拉出來衛生紙總面積×厚度=$(11.4\times 11)\times 300\times t$ **，或**

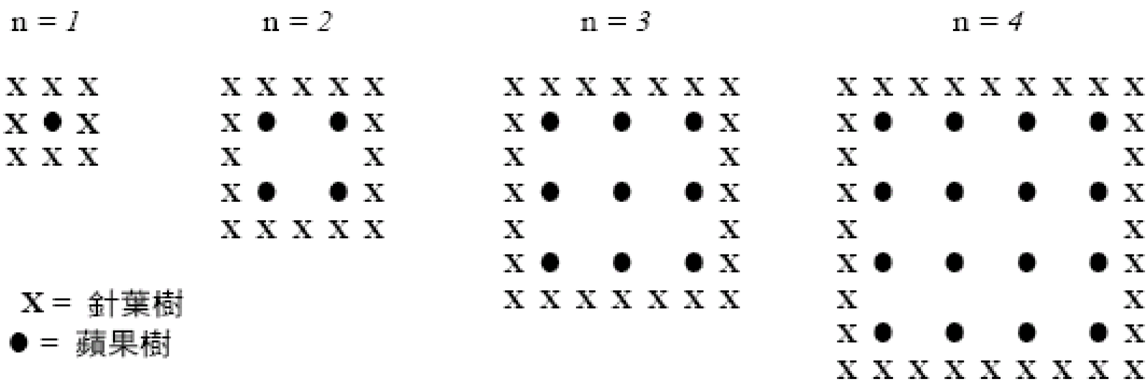
體積=整卷衛生紙總體積−內部中空紙筒卷的體積=$\pi(R^2-r^2)\times 11$**，因此得方程式**

$(11.4\times 11)\times 300\times t=\pi(5.8^2-2.3^2)\times 11\Rightarrow t=0.026$ **cm**。

【提問】下圖為我們日常生活中常用的平版衛生紙與抽取式衛生紙，請由表面提供的資料說明，求出每張計兩層衛生紙的厚度。

範例 2 蘋果　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(PISA 範例)

一個農夫按照正方形的規律種植蘋果樹。為了保護果樹免受強風侵襲，他在果園的周圍栽種了針葉樹。下面是栽種情況的示意圖，根據蘋果樹的行數（n），你可以看到蘋果樹和針葉數的種植規律。



n	蘋果樹棵數	針葉樹棵數
1	1	8
2	4	
3		
4		
5		

(1)你可以用以下兩條公式，計算出上述方式所種植的蘋果樹和針葉數的棵樹：

蘋果樹的棵樹＝ n^2

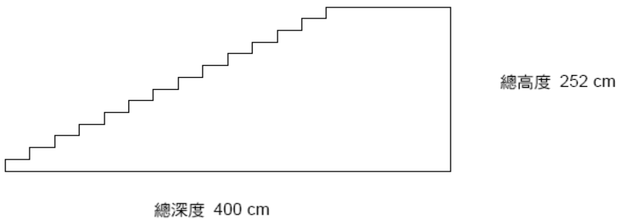
針葉樹的棵樹＝ $8n$

其中 n 是蘋果樹的行數。

若 n 等於某個數值時，蘋果樹的棵數與針葉樹的棵數便會相等。現試求出這個 n 的數值，並說明計算方法。

(2).假設這個農夫要建一個更大、可以種植更多果樹的果園。當他擴建果園時，哪一種樹的棵數會增加的較快？請解釋你是如何找到答案的。

範例 3 (梯級樣式) (PISA 範例)



下圖是一座樓梯，共有 14 級，總高度為 252cm:在這 14 級梯級中，每級梯級的高度應是多少呢?

高度 =____________________ cm。

範例 4. 小輝用正方形砌成梯級的樣式。以下是他依照的階段。從上圖可見，在「階段 1」，他用一個正方形，「階段 2」用三個正方形，「階段 3」用六個正方形。試問在第四階段，他應該用多少個正方形呢? 答案 :________________個正方形。

範例 5：數字立方體(PISA 範例)

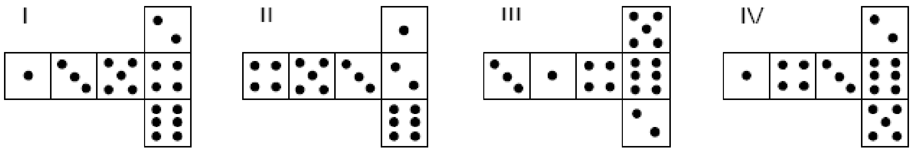
右圖是兩顆骰子。骰子是一種特別的數字立方體(number cube)，它有以下的規則:

相對的兩面(opposite faces) 的點數之和總是七。

骰子是一種特別的數字立方體，它符合以下的規則:相對的兩面的點數之和總是七。你可以用卡紙以減、摺及貼的方法製造一顆簡單的骰子。這也有很多不同的做法。

從下圖可見，有四種用來做骰子的剪法，而每面也有點數的樣式。

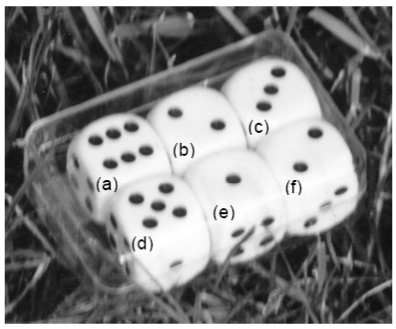
下列哪種樣式在摺成一顆骰子後，是否符合相對兩面的總和是 7 的規則呢?請就每項樣式，在下表圈出「是」或「否」。



樣式	是否符合相對兩面的總和是 7 的規則?
I	是 / 否
II	是 / 否
III	是 / 否
IV	是 / 否

範例 6. 骰子(PISA 範例)

照片中有 (a) 至 (f) 六粒骰子，每粒骰子都符合同樣的規則：



每粒骰子相對的兩面的點數之和都是 7。請回答下列問題：

請看看照片，並在下面方格內，寫出每粒骰子底面的點數。

(a)	(b)	(c)
(d)	(e)	(f)

範例 7：數字立方體(PISA 範例)

如右圖所示，三顆骰子堆疊在一起，一顆骰子疊在另一顆骰子之上。骰子 1 頂端的點數是四。在圖中看不見的五個水平面(骰子 1 的底部、骰子 2 及 3 的頂部和底部)之點數的總和是多少呢?

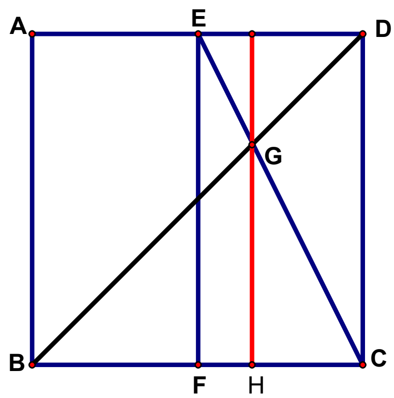
範例 8.我們可以將一張正方形紙張試問如何將一張正方形摺出 $\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},\cdots,\frac{1}{2^n}$ **的圖形，試問如何摺出** $\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{7},\cdots,\frac{1}{2n+1}$ **的圖形？**

問題(1) 如何將一線段長三等分?

做法: (a)取一張正方形紙張，其邊長為原來線段長。

(b)先將上面及下面兩對邊中點連線對摺一次後打開乘原來正方形形狀，其次，再摺出此正方形的對角線來，再打開;再將原來對摺後的右半之長方形取其對角線長，與正方形的對角線之交點，即為所求(如下圖所示)。

驗證: 如果 $\overline{AB}=1$**，試證:** $\overline{CH}=\frac{1}{3}$ 。



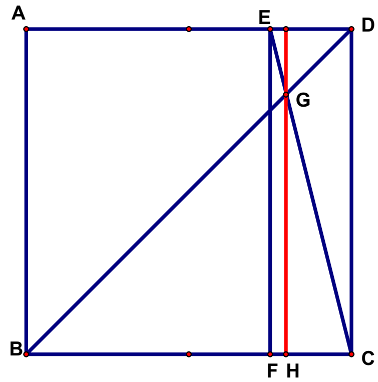
【說明】首先將 C 點沿著 $\overline{BC}$ **邊摺過去，其摺痕為** $\overline{GH}$

即過 G 點作 $\overline{GH}\perp\overline{BC}$ **交** $\overline{BC}$ **於 H 點。因為** $\Delta CGH\sim\Delta CEF\Rightarrow\frac{\overline{CH}}{\overline{CF}}=\frac{\overline{GH}}{\overline{EF}}$ **，令**

$$\overline{CH} = x \Rightarrow \frac{\overline{CH}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{EF}} \Rightarrow \frac{x}{1/2} = \frac{\overline{GH}}{1} \Rightarrow \overline{GH} = 2x \Rightarrow \overline{BH} = 2x$$

$$\Rightarrow \overline{BC} = 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3} = \overline{CH}$$

問題(2) 如何將一線段長五等分?



做法: (a)取一張正方形紙張，其邊長為原來線段長。

(b)先將上面及下面兩對邊中點連線對摺一次後打開乘原來正方形形狀，其次，再摺出此正方形的對角線來，再打開;再將原來對摺二次後的右半之長方形取其對角線長，與正方形的對角線之交點，即為所求(如下圖所示)。

驗證: 如果 $\overline{AB} = 1$，**且** $\overline{CF} = \frac{1}{4}$ **試證:** $\overline{CH} = \frac{1}{5}$ 。

過 G 點作 $\overline{GH} \perp \overline{BC}$ **交** $\overline{BC}$ **於 H 點。因為** $\Delta CGH \sim \Delta CEF \Rightarrow \frac{\overline{CH}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{EF}}$ ，**令**

$$\overline{CH} = x \Rightarrow \frac{\overline{CH}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{EF}} \Rightarrow \frac{x}{1/4} = \frac{\overline{GH}}{1} \Rightarrow \overline{GH} = 4x \Rightarrow \overline{BH} = 4x$$

$$\Rightarrow \overline{BC} = 5x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{5} = \overline{CH}$$

問題(3) 如何六等分一線段?

資料來源：

Krier, J. L.(2007).Mathematics and Origami: The Ancient Arts Unite.The University of Texas at Tyler.math.uttyl.edu/nathan/classes/senior-seminar/Jaem

範例9. 中式燈籠(Chinese Lamp)

小明打算在家舉辦一次餐敘，想要製作中式燈籠佈置會場。每一中式燈籠是使用二張大小相同特殊紙質之長方形紙張去製作：第一張紙捲成一個圓柱體(如圖4-1)，且將第二張紙去摺出12個三角形並

包住此圓柱體(如圖4-2)。

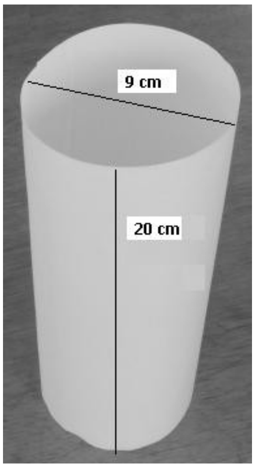


圖 4-1

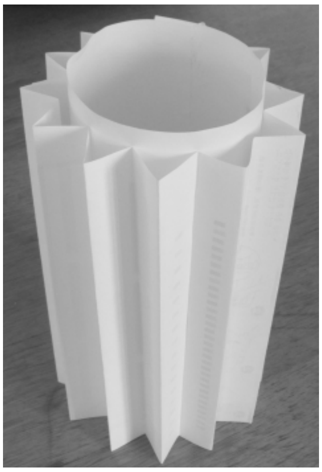


圖 4-2

已知內部的圓柱體的直徑為9公分，高為20公分，且圖4-2中的第二張紙所摺出12個三角形為正三角形。

(1) 小明要買的特殊紙張的商店有許多不同尺寸的紙，且所有這些紙張都是20公分高，但長度都不一樣。試問小明要製作如圖4-1的圓柱體，需購買下列哪一種最小的長度的紙張？此紙張黏成圓柱體時至少需重疊0.5公分。

(A) 20 公分 (B) 30 公分 (C) 40 公分 (D) 50 公分 (E) 60 公分

(2)已製作完成的中式燈飾如圖4-2所需紙張的長度是圖4-1紙張捲成圓柱體之長度的幾倍？

(A) 約1.5倍 (B) 約2倍 (C) 約3倍 (D) 約12倍

(3)小明想要再製作另一個相似型態的中式燈籠，試問圖4-2的燈籠依下列的敘述來改變是否會影響所摺紙張的長度？對於下列三種改變條件分別圈選「對」或「錯」？

(a) 如圖4-1圓柱體紙張的大小不變，但將圖4-2中的12個正三角形頂角 60° 改成 30° 。對/錯

(b)如圖4-1圓柱體紙張的大小不變，但將圖4-2中的12個正三角形改成20個正三角形。對/錯

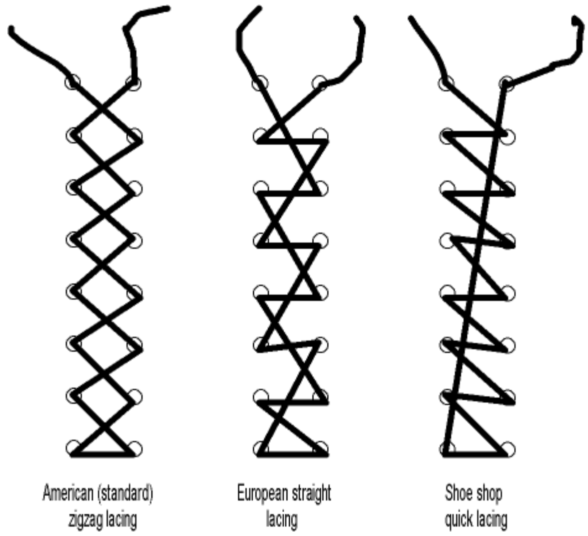
(c) 如圖4-1圓柱體紙張的內直徑改變，但圖4-2中仍保持摺成12個正三角形。對/錯

主題：圖形與空間(Shape and Space)

資料來源：Kaye Stacey(2012). 12th International Congresson Mathematical Education Program Name , 8. July–15 July, 2012, COEX, Seoul, Korea .

範例 10、綁鞋帶問題(Shoe lacing problem)

右邊三個圖形表示不同的綁鞋方式，如果前端二孔突出的鞋帶長不計，試問:



(1) 何種綁法需要最長的鞋帶? 何者最短呢?

(2) 如果一隻鞋子上有 8 對孔，且上下相鄰二孔距離為 3 公分，左右相鄰二孔距離為 4 公分，試分別求此三種綁法所需鞋帶長。

鞋帶最長是:______________ ，鞋帶最短是:_____________________。

(3) 如果一隻鞋子上有 n 對孔，且上下相鄰二孔距離為 d 單位，左右相鄰二孔距離為 g 單位，試分別求此三種綁法所需鞋帶長。

美國式綁法:________________________________單位。

歐洲式綁法:________________________________單位。

鞋店式綁法:________________________________單位。

參考文獻

林素微（2008）。臺灣學生的數學素養表現。載於林煥祥主編：臺灣學生PISA2006的表現（P.131-P.150）。國立花蓮教育大學科學教育中心。

林素微、蕭嘉偉（2011）。學生數學表現分析。載於臺灣PISA國家中心主編：臺灣PISA2009結果報告（P.115-P.150）。心理出版社。

羅浩源編著(1997)。生活的數學。香港:香港教育圖書公司。

Kaye Stacey(2012). 12thInternationalCongressonMathematicalEducation ProgramName ,8July–15July,2012,COEX,Seoul,Korea .

Krier, J. L.(2007).Mathematics and Origami: The Ancient Arts Unite.The University of Texas at Tyler.math.uttyl.edu/nathan/classes/senior-seminar/Jaem

OECD(2002).Programmefor international student assessment.
上網日期：2006年9月 5日 。

OECD (2003).*The PISA 2003 Assessment Framework – Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. Paris: OECD Publications.

OECD (2009).*PISA: Take the test.* Paris: OECD Publications. http://www.oecd.org/dataoecd/47/23/41943106.pdf

OECD (2010).*PISA 2012 Mathematics Framework*. Paris: OECD Publications http://www.oecd.org/dataoecd/8/38/46961598.pdf

Ojose, B.(2011). Mathematics Literacy: Are we able to put the mathematics we learning into everyday use? *J. of Mathematics Education, Vol. 4*, No.1, 89-100.

附錄一、

數學精熟的多股能力(the Strands of Mathematical Proficiency)

參考文獻:

Kilpatrick, J., Swafford, J., &Findell, B. (2001). Adding it up: Helping children learn mathematics. Washington, DC: National Academy Press.

內文重點：

20 世紀期間，關於"成功的數學學習"的定義經歷了幾個轉變。從前半世紀強調算術的過程技能，到 1960 新數學時代強調了解數學結構和一致性的概念，在 1980-90 強調”數學力”就包含了推理、解題、連結數學概念、與他人溝通數學等。作者提出”Mathematcial Proficiency”數學精熟應該包含五股能力: 五股能力意義及內涵

1.概念理解(conceptual understanding): 對數學概念、運算，及關係的理解。

2.程序的流暢(procedural fluency):進行程序的技巧是有彈性的、準確的、高效率的，和適切的。

3.策略應用(strategic competence):公式化、抽象化，和解決數學問題的能力。

4.適應推論(adaptive reasoning): 邏輯思考、反思、解釋，和辯證的處理能力

5.建設性傾向(productive disposition):視數學為可察覺的、有用的、和有價值的慣性傾向，此傾向與勤勉的信念和個人效能相連結。

這五股能力並非是獨立的；他們描述著一個複雜個體的不同層面。也就是這五個成分是交織且相互依賴的建立在數學精通的發展上。

附錄二、108數學課綱之計算機規格說明

十二年國教課程綱要國民中小學暨普通型高中 數學領域課程手冊 p.755

一、前言

本課綱自國中階段（7年級）起，要求計算機（calculator）融入數學之教材、教法、評 量。

本文所謂之「計算機」皆指掌上型計算機，或稱電子計算器。以下說明相容於國民中學 與普通高中之數學科「設備基準」，也符合考選部公告之「國家考試電子計算器措施」 。

二、用途

課綱規劃計算機融入數學教學與評量，成為數學教育的一部份，培養學生正確使用工具 的素養。計算機可以在適當的時機取代筆算或心算，此外，它還具有更積極的數學教育意義。 在適當的時機，計算機促成探究、觀察實驗、歸納臆測、合作討論等教學方法的設計與執行，這本《課程手冊》已經提供了基本的建議與範例。在應用與評量的場合，計算機的操作，使得命題更能夠貼近真實的生活、職場、社會或科技情境。計算機的融入教學與評量，協助教師更容易達成素養導向的教學目標。

三、國中階段之學習所需

為融入國中階段的數學課程，計算機至少需具備以下功能（國中必備功能）:

1. 輸入整數與小數、小數（含正負號）、輸入科學記號數字。□
2. 切換 ±、倒數（1/ x）。 □
3. 四則運算（+、 - 、×、÷）、百分比（%）、平方根（ ）。 □
4. 調整四則運算之計算順序（括號）。 □
5. 記憶加法功能（MR、MC、M+ 、M - ）。 □
6. 度度量之銳角三角比（sin、cos、tan）。

未列於上述必備功能，且未列於以下（第五節）「不得具備」之功能者，委請教師或學校斟酌是否使用。

四、普通高中階段之學習所需

為融入普通高中階段的數學課程，計算機至少需具備以下功能（普高必備功能）:

1. 所有國中必備功能。
2. 常數π。

3. 平方（ 2 x ）、次方（ y x ）、次方根（ y x ）。

4. 角的弧度量與度度量互相轉換、度度量的十進制和六十進制轉換。

5. 弧度量與度度量之廣義角三角比（sin、cos、tan）、反三角（sin^{-1} 、cos^{-1} 、 $\tan^{-1}$ ）。

6. 常用與標準的指數、對數（10x、log、ex、ln）。

7. 階乘（n!）。

雖然數據功能有助於課堂學習，卻引進了數據儲存功能。而這項功能，是引起考試主管 機關疑慮的關鍵項目之一（請看下一節）。因此，計算機可否具備數據功能，也許值得將會考、學測或指考的規範考慮在內。 未列於上述必備功能，且未列於以下（第五節）「不得具備」之功能者，委請教師或學校 斟酌是否使用。

五、考試的顧慮

完整的課程包括評量，所以，融入計算機的數學課程，必須適度地容許學生在考試時使用計算機。計算機只要滿足各階段的學習需求，就能滿足考試之所需。為了支援考試，計算機並不需要更多功能，反而不能有過多功能。為維護數學 考試的公平性，以下列舉計算機不得具備的功能：

1. 不得具備輸入文字的功能。

2. 不得具備繪圖功能。

3. 不得具備程序記憶功能，不能提供使用者自訂函式。

4. 不得具備MR、MC、M＋、M－以外的數值記憶功能（請看下一節詳細說明）。

5. 不得具備通訊、錄音、攝錄影功能。

6.不得發聲、震動。 □

7.不得提供任何外插或內部擴充功能。 □

8.不得具備內建鍵盤以外的任何輸入功能。 □

9.不得具備內建屏幕以外的任何輸出功能。 □

10. 不可外接電源（容許太陽能）。

附錄三、計算機融入教學與評量

1. 需先理解數學定義後，才使用計算機簡化與加速計算，不能將計算機按鍵當成定義來理解。例如方根概念，學生須先理解方根的意義後，在使用計算機來了解方根的近似值。

2. 至於解題需不需要使用計算機是學生的抉擇，而可以使用計算機的試題宜配合教學理念，引用自然的數據，不需要自行設計「計算機考題」。

範例: 使用計算機評量 (課室評量使用)

Example: A man stood at the top of a tower. He threw a ball vertically upwards. The height, *h* metres, of t**he ball above the top of the tower**. At a time *t* seconds after it was thrown is given by the formula $h = 22t - 4.9t^2$. The table below shows some values of *t* and the corresponding values of *h*, correct 1 decimal place.

t	0	1	2	3	4	5	6
h	0.0	17.1	24.4	21.9	9.6	--12.5	*p*

(a) Explain the significance of the value $h = -12.5$ when $t = 5$.
(b) Find the value of *p*.
(c) Using the a scale of 2 cm to 1 second, draw a horizontal *t*-axis for $0 \le t \le 6$.
Using the a scale of 2 cm to 10 metres, draw a vertical *h*-axis for $-50 \le h \le 30$.
On your axes, plot the points given in the table and joint them with a smooth curve.
(d) Using your graph to find:
(i) The greatest height of the ball above the top of the tower,

(ii) The length of time for which the ball was more than 20 metres above the top of the tower.

(e) (i) By drawing a tangent, find the gradient of the graph at (4, 9.6).

(iii) Explain what your answer to (e)(i) tells you about the motion of the ball at $t = 4$.

(f) The ball hit the ground 5.4 seconds after it was thrown.

Use your graph to find the height of the tower.