<table>
<tr><td>題號</td><td colspan="3">1</td></tr>
<tr><td>內容領域</td><td>數與量</td><td>認知歷程向度</td><td>程序執行</td></tr>
<tr><td>學習內容</td><td colspan="3">N-8-4 等差數列：等差數列；給定首項、公差計算等差數列的一般項。</td></tr>
<tr><td>試題內容</td><td colspan="3">1. 已知一個等差數列的第 3 項為 22 ，第 4 項為 18 ，則第 18 項為？
① −29
② −34
③ −38
④ −45</td></tr>
<tr><td>選答率
選項</td><td colspan="3">答題反應比率（＊表正確答案）</td></tr>
<tr><td></td><td>整體</td><td>低分組</td><td>高分組</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0.03</td><td>0.09</td><td>0.00</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0.12</td><td>0.23</td><td>0.03</td></tr>
<tr><td>3*</td><td>0.80</td><td>0.57</td><td>0.96</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0.05</td><td>0.11</td><td>0.00</td></tr>
<tr><td>未作答</td><td>0.00</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>通過率</td><td>0.80</td><td>鑑別度</td><td>0.38</td></tr>
<tr><td>試題品質分析</td><td colspan="3">(一) 評量目標說明
本題給定等差數列相鄰兩項的數值，要求學生算出指定項的數值，評量學生是否理解等差數列的意義。
(二) 選項及學生表現說明
1.本題鑑別度為 0.38，正確答案為選項 3，通過率為 80%，顯示有八成的學生已理解等差數列的意義。
2.有 12%的學生選擇選項 2（低分組有 23%），這些學生可能尚未理解等差數列的意義，或者將等差數列的第 n 項公式誤記成 $a_n = a_1 + nd$ ，而得到錯誤答案 −34 。</td></tr>
<tr><td>教材地位分析</td><td colspan="3"><table>
<tr><td></td><td>先備的知識</td><td>本題所需的知識</td><td>延伸的知識</td></tr>
<tr><td>學習內容</td><td>R-6-3
數量關係的表示：代數與函數的前置經驗。將具體情境或模式中的數量關係，學習以文字或符號列出數量關係的關係式。</td><td>N-8-4
等差數列：等差數列；給定首項、公差計算等差數列的一般項。
備註
不處理「已知等差數列不相鄰某兩項的值（不含首項），反求首項、項數或公差」，例如：給定 a_5 和 a_9 的值，求首項和公差。</td><td>N-10-6
數列、級數與遞迴關係：有限項遞迴數列，有限項等比級數，常用的求和公式，數學歸納法。
<s>備註：遞迴關係以一階為主，連結國中的等差數列和等比數列。數學歸納法應先透過觀察發現規律，然後用以證明；</s></td></tr>
</table></td></tr>
</table>

				~~將數學歸納法的範例與應用，融入後續的課程，不必在此過度練習。可連結常用對數而求解 $a^x=b$ 之近似值。~~
補救教學建議	(一) 先複習等差數列的定義： 觀察下面等差數列：  可以發現後項減去前項都等於 4。像這樣，一個數列中，任意相鄰兩項，後項減去前項所得的差都相同，稱為等差數列，這個差稱為公差，通常用 d 表示。 (二) 接下來說明如何用首項、項次及公差形成等差數列的一般項： 設首項為 a_1，公差為 d 第 2 項為 $a_2=a_1+d$（首項加 1 個公差） 第 3 項為 $a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2d$（首項加 2 個公差） 第 4 項為 $a_4=a_3+d=(a_1+2d)+d=a_1+3d$（首項加 3 個公差） 第 5 項為 $a_5=a_4+d=(a_1+3d)+d=a_1+4d$（首項加 4 個公差）…… 依此類推，第 n 項為 $a_n=a_1+(n-1)d$（首項加 $n-1$ 個公差） (三) 以本例來說： 由題意知 $a_3=22$ 和 $a_4=18$，所以公差 $d=-4$。 又 $a_3=a_1+2d$，可得 $a_1=22+2\times4=30$。 因此，$a_{18}=a_1+(18-1)d=30+17\times(-4)=-38$。			

題號	2		
內容領域	數與量	認知歷程向度	解題思考
學習內容	N-8-3 認識數列：生活中常見的數列及其規律性（包括圖形的規律性）。		
試題內容	2. 小芬將真分數依分母由小到大寫成一列，如下： $\frac{1}{2}、\frac{1}{3}、\frac{2}{3}、\frac{1}{4}、\frac{2}{4}、\frac{3}{4}、\frac{1}{5}、\frac{2}{5}、\frac{3}{5}、\frac{4}{5}、\frac{1}{6}、\frac{2}{6}、\cdots$ 例如：第 1 個數是 $\frac{1}{2}$、第 8 個數是 $\frac{2}{5}$。請問 $\frac{7}{10}$ 是第幾個數？ ① 62 ② 52 ③ 43 ④ 37		

選答率 / 選項	答題反應比率（＊表正確答案）		
	整體	低分組	高分組
1	0.04	0.09	0.01
2	0.16	0.24	0.09
3*	0.72	0.52	0.88
4	0.08	0.14	0.02
未作答	0.00		
通過率	0.72	鑑別度	0.36

試題品質分析

(一) 評量目標說明

本題給定一串有規律的分數數列，要求學生算出指數值是第幾項，評量學生掌握數列的規律的能力。

(二) 選項及學生表現說明

1.本題鑑別度為 0.36，正確答案為選項 3，通過率為 72%，顯示超過七成的學生已具備掌握數列的規律的能力。

2.有 16%的學生選擇選項 2(低分組有 24%)，這些學生可能尚未具備掌握數列的規律的能力，或者直接算分母 1~9，加上分母 10 的七項：(1+2+3+…+9)+7 而得到錯誤的答案 52。

教材地位分析

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	R-6-2 數量關係：代數與函數的前置經驗。從具體情境或數量模式之活動出發，做觀察、推理、說明。	N-8-3 認識數列：生活中常見的數列及其規律性（包括圖形的規律性）。	N-10-6 數列、級數與遞迴關係：有限項遞迴數列，有限項等比級數，常用的求和公式，數學歸納法。

補救教學建議

(一) 複習四則運算最簡單的一些模式:

(1)和不變：例如 24 個蘋果分給小明和小華兩個人。

(2)差不變：例如小英和她父親的年齡差是固定的（年齡問題）。

(3)積不變：例如總飲料量固定，每杯飲料的容量和杯數的乘積不變。

(4)商不變：任何比和比值中相等比的問題，例如物品價格、速度、濃度、利率固定。

(二) 接下來分別針對上述四個模式，引導學生觀察兩變數的變化情況。例如”和不變”模式，可引導學生觀察小明和小華的分得個數變化的規律(每人至少分得 1 個)，從中找到小明增加 1 個，小華減少 1 個，再分析所有整數變化共有 23 種，與總個數 24 個剛好少 1。

晝長	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
夜長	23	22	21	20	18	18	17	16	15	14	13	12
晝長	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
夜長	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	

(三) 複習等差級數(請參閱第 4 題的教學建議(二))

(四) 以本例來說:

先觀察分子與分母:以分母做分類

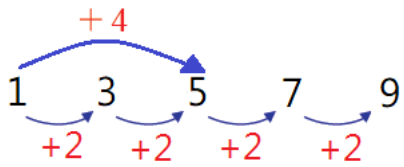
分數	分析	個數
$\frac{1}{2}$ 、	分母：2 分子：1	1 個
$\frac{1}{3}$ 、$\frac{2}{3}$ 、	分母：3 分子：1、2	2 個
$\frac{1}{4}$ 、$\frac{2}{4}$ 、$\frac{3}{4}$ 、	分母：4 分子：1、2、3	3 個
$\frac{1}{5}$ 、$\frac{2}{5}$ 、$\frac{3}{5}$ 、$\frac{4}{5}$ 、	分母：5 分子：1、2、3、4	4 個
…	…	…
$\frac{1}{9}$	分母：9 分子：1、2、…、8	8 個
$\frac{1}{10}$ 、…、$\frac{7}{10}$	分母：10 分子：1、2、…、7	1 個

再將個數加總(1+8)×8/2+7=43 得到正確答案。

<table>
<tr><td>題號</td><td colspan="3">3</td></tr>
<tr><td>內容領域</td><td>數與量</td><td>認知歷程向度</td><td>解題思考</td></tr>
<tr><td>學習內容</td><td colspan="3">N-8-1 二次方根：二次方根的意義；根式的化簡及四則運算。</td></tr>
<tr><td>試題內容</td><td colspan="3">3. 已知 $\sqrt{60+a}=3$ ，求 $a=?$
① -51
② -69
③ 31
④ 21</td></tr>
<tr><td>選答率
選項</td><td colspan="3">答題反應比率（＊表正確答案）</td></tr>
<tr><td></td><td>整體</td><td>低分組</td><td>高分組</td></tr>
<tr><td>1*</td><td>0.74</td><td>0.38</td><td>0.98</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0.12</td><td>0.26</td><td>0.01</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0.05</td><td>0.15</td><td>0.00</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0.08</td><td>0.20</td><td>0.01</td></tr>
<tr><td>未作答</td><td>0.00</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>通過率</td><td>0.74</td><td>鑑別度</td><td>0.60</td></tr>
<tr><td>試題品質分析</td><td colspan="3">(一) 評量目標說明
本題給定一個有未知數根式方程式，要求學生算出未知數的數值，評量學生是否能理解平方根的意義。
(二) 選項及學生表現說明
1.本題鑑別度為 0.60，正確答案為選項 1，通過率為 74%，顯示超過七成的學生已具備理解平方根的意義的能力。
2.有 12%的學生選擇選項 2(低分組有 26%)，這些學生可能尚未具備理解平方根的意義的能力，或者運算時，兩邊平方得 60+a=9，a=-60+9=-69 而得到錯誤的答案-69。</td></tr>
<tr><td>教材地位分析</td><td colspan="3"><table>
<tr><td></td><td>先備的知識</td><td>本題所需的知識</td><td>延伸的知識</td></tr>
<tr><td>學習內容</td><td>N-7-6
指數的意義：指數為非負整數的次方；$a\neq 0$ 時 $a^0=1$；同底數的大小比較；指數的運算。</td><td>N-8-1
二次方根：二次方根的意義；根式的化簡及四則運算。
備註
可使用乘法公式來化簡的根式，待乘法公式單元再提及。</td><td>N-10-3
指數：非負實數之小數或分數次方的意義，幾何平均數與算幾不等式，複習指數律，實數指數的意義，使用計算機的 x^y 鍵。</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>補救教學建議</td><td colspan="3">(一) 複習指數的意義與運算，一元一次方程式解的運算。
1.以 $2^5 = 2\times2\times2\times2\times2 = 32$ 為例，讓學生理解次方為底數字成次方次數的結果，並引入”平方”就是”二次方”的概念。
2.以 20 + x = 3 為例，x = -20 +3 = -(20+3)= -23
(二) 平方根教學</td></tr>
</table>

	1.以平方是兩個相同的數開始，引導學生先找□×□=4，□內要填入相同的數，提醒學生可以填入兩個負數，讓學生得到 $2\times2=2^2=4$，$(-2)\times(-2)=(-2)^2=4$ 的結論。 2.請學生找□×□=3，□要填多少，因為無法填入整數，引入$\sqrt{3}$的符號表示法，依據前述結果$(\sqrt{3})\times(\sqrt{3})=(\sqrt{3})^2=3$，$(-\sqrt{3})\times(-\sqrt{3})=(-\sqrt{3})^2=3$。 (三) 以本例來說， $\sqrt{60+a}=3$，代表 $(\sqrt{60+a})\times(\sqrt{60+a})=(\sqrt{60+a})^2=3^2$， 所以$60+a=9$，$a=-60+9=-(60-9)=-51$

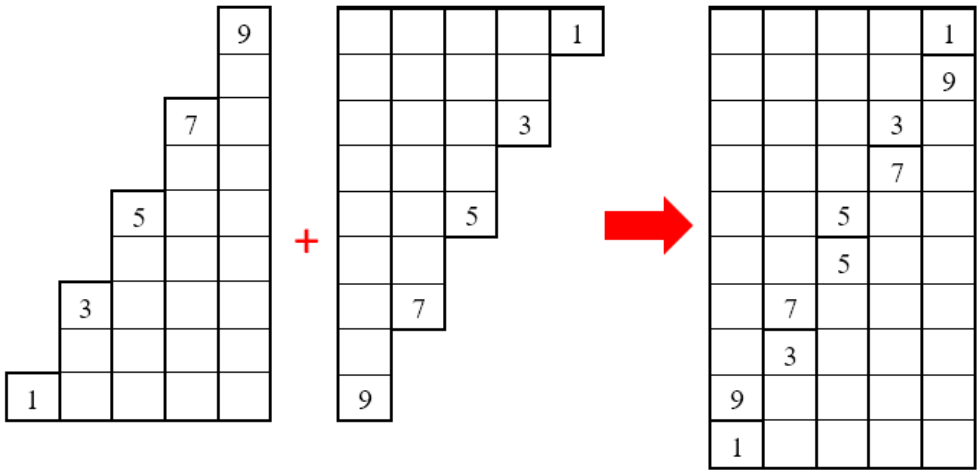
<table>
<tr><td>題號</td><td colspan="3">4</td></tr>
<tr><td>內容領域</td><td>數與量</td><td>認知歷程向度</td><td>程序執行</td></tr>
<tr><td>學習內容</td><td colspan="3">N-8-5 等差級數求和：等差級數求和公式；生活中相關的問題。</td></tr>
<tr><td>試題內容</td><td colspan="3">4. 段考在即，城武決定認真算數學，第一天算 1 題，接下來每一天都比前一天多算 2 題，就這樣努力的算了 10 天。請問這 10 天城武總共算了幾題？
① 19
② 20
③ 55
④ 100</td></tr>
<tr><td>選答率
選項</td><td colspan="3">答題反應比率（＊表正確答案）</td></tr>
<tr><td></td><td>整體</td><td>低分組</td><td>高分組</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0.23</td><td>0.35</td><td>0.07</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0.05</td><td>0.13</td><td>0.00</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0.09</td><td>0.17</td><td>0.02</td></tr>
<tr><td>4*</td><td>0.63</td><td>0.34</td><td>0.91</td></tr>
<tr><td>未作答</td><td>0.00</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>通過率</td><td>0.63</td><td>鑑別度</td><td>0.57</td></tr>
<tr><td>試題品質分析</td><td colspan="3">(一) 評量目標說明
本題給定首項(第一天的題數)和公差(每天多算題數)，要求學生算出前 10 項總和，評量學生掌握等差級數總和運算的能力。
(二) 選項及學生表現說明
1.本題鑑別度為 0.57，正確答案為選項 4，通過率為 63%，顯示超過六成的學生已具備掌握等差級數總和運算的能力。
2.有 23%的學生選擇選項 1(低分組有 35%)，這些學生可能尚未具備掌握等差級數總和運算的能力，或者只算出第 10 天算的題數 1+(10-1)×2=19，而得到錯誤的答案 19。</td></tr>
<tr><td>教材地位分析</td><td colspan="3"><table><tr><td></td><td>先備的知識</td><td>本題所需的知識</td><td>延伸的知識</td></tr><tr><td>學習內容</td><td>N-8-4 等差數列：等差數列；給定首項、公差計算等差數列的一般項。</td><td>N-8-5
等差級數求和：等差級數求和公式；生活中相關的問題。
備註
不處理「已知級數和反求首項、項數或公差」。</td><td>N-10-6
數列、級數與遞迴關係：有限項遞迴數列，有限項等比級數，常用的求和公式，數學歸納法。</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>補救教學建議</td><td colspan="3">(一) 先複習等差數列的定義：
觀察下面等差數列：</td></tr>
</table>



可以發現後項減去前項都等於 2。像這樣，一個數列中，任意相鄰兩項，後項減去前項所得的差都相同，稱為等差數列，這個差稱為公差，通常用 d 表示。

(二) 等差級數總和計算：

觀察下列兩個圖形的組合



$(1+3+5+7+9)+(9+7+5+3+1)$

$=(1+9)+(3+7)+(5+5)+(7+3)+(9+1)$

$=10\times 5$

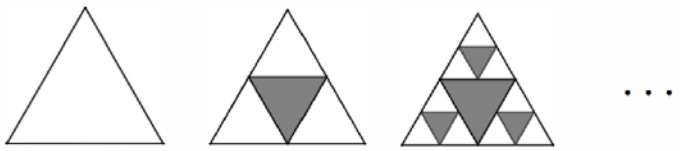
所以，$(1+3+5+7+9)=(1+9)\times 5/2$，亦即 $Sn=(a_1+a_n)\times n/2$

(三) 以本例來說，

第一天算 1 題，a_1=1，每一天都比前一天多算 2 題，d=2，努力 10 天，n=10

$a_{10}=a1+(n-1)\times d=1+(10-1)\times 2=19$

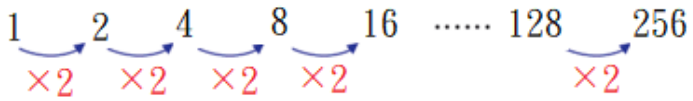
$S_{10}=(a_1+a_n)\times n/2=(1+19)\times 10/2=100$

<table>
<tr><td>題號</td><td colspan="3">5</td></tr>
<tr><td>內容領域</td><td>數與量</td><td>認知歷程向度</td><td>程序執行</td></tr>
<tr><td>學習內容</td><td colspan="3">N-8-6 等比數列：等比數列；給定首項、公比計算等比數列的一般項 0。</td></tr>
<tr><td>試題內容</td><td colspan="3">5. 如圖，圖（一）到圖（三）為具有某種規律的圖形：

圖（一）　圖（二）　圖（三）　．．．

圖（一）有 1 個未著色的正三角形，圖（二）有 3 個未著色的正三角形，
圖（三）有 9 個未著色的正三角形，依次類推。
請問圖（五）有幾個未著色的正三角形？

① 81
② 121
③ 243
④ 729</td></tr>
<tr><td>選答率
選項</td><td colspan="3">答題反應比率（＊表正確答案）</td></tr>
<tr><td></td><td>整體</td><td>低分組</td><td>高分組</td></tr>
<tr><td>1*</td><td>0.74</td><td>0.51</td><td>0.93</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0.10</td><td>0.21</td><td>0.01</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0.12</td><td>0.19</td><td>0.04</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0.04</td><td>0.09</td><td>0.01</td></tr>
<tr><td>未作答</td><td>0.00</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>通過率</td><td>0.74</td><td>鑑別度</td><td>0.43</td></tr>
<tr><td>試題品質分析</td><td colspan="3">(一) 評量目標說明
本題給定一個有規律的等比數列圖形，要求學生從中算出第五項，評量學生是否理解等比數列的第 n 項的意義。

(二) 選項及學生表現說明
1.本題鑑別度為 0.43，正確答案為選項 1，通過率為 74%，顯示超過七成的學生已具備理解等比數列的第 n 項的意義的能力。
2.有 10%的學生選擇選項 2(低分組有 21%)，這些學生可能尚未具備理解等比數列的第 n 項的意義的能力。
3.有 12%的學生選擇選項 3(低分組有 19%)，這些學生可能尚具備理解等比數列的第 n 項的意義的能力，或在計算時多乘一次公比 3，計算成 $1\times3^5=243$，而得到錯誤的答案 243。</td></tr>
<tr><td>教材地位</td><td colspan="3">先備的知識　本題所需的知識　延伸的知識</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>分析</td><td>學習內容</td><td>R-6-3
數量關係的表示：代數與函數的前置經驗。將具體情境或模式中的數量關係，學習以文字或符號列出數量關係的關係式。</td><td>N-8-6
等比數列：等比數列；給定首項、公比計算等比數列的一般項。
備註
不處理「已知等比數列不相鄰某兩項的值（不含首項），反求首項、項數或公比」，例如：給定 a_5 和 a_9 的值，求首項和公比。</td><td>N-10-6
數列、級數與遞迴關係：有限項遞迴數列，有限項等比級數，常用的求和公式，數學歸納法。</td></tr>
<tr><td>補救教學建議</td><td colspan="4">(一) 等比數列教學
觀察下面等比數列：

可以發現後項除以前項都等於 2。像這樣，一個數列中，任意相鄰兩項，後項除以前項所得的商都相同，稱為等比數列，這個差稱為公比，通常用 r 表示。
(二) 接下來說明如何用首項、項次及公差形成等差數列的一般項：
設首項為 a_1，公差為 r
第 2 項為 $a_2 = a_1 \times r$（首項乘 1 個公比）
第 3 項為 $a_3 = a_1 \times r^2$（首項乘 2 個公比）
第 4 項為 $a_4 = a_1 \times r^3$（首項乘 3 個公比）
第 5 項為 $a_5 = a_1 \times r^4$（首項乘 4 個公比）……
依此類推，第 n 項為 $a_n = a_1 \times r^{(n-1)}$（首項乘 n-1 個公比）
(三) 以本例來說：
由題意知第一個圖未著色為 $a_1 = 1$，公比 r = 3，得可第五個圖未著色為 $a_5 = 1 \times 3^{(5-1)} = 81$。</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>題號</td><td colspan="3">6</td></tr>
<tr><td>內容領域</td><td>數與量</td><td>認知歷程向度</td><td>概念理解</td></tr>
<tr><td>學習內容</td><td colspan="3">N-8-5 等差級數求和：等差級數求和公式；生活中相關的問題。</td></tr>
<tr><td>試題內容</td><td colspan="3">6. 已知一等差數列前 9 項的和大於 0 ，且大於此等差數列前 10 項的和。
對於此等差數列的首項 a 與公差 d 的描述，下列何者正確？
① $a>0$ 且 $d>0$
② $a>0$ 且 $d<0$
③ $a<0$ 且 $d>0$
④ $a<0$ 且 $d<0$</td></tr>
<tr><td>選答率
選項</td><td colspan="3">答題反應比率（＊表正確答案）</td></tr>
<tr><td></td><td>整體</td><td>低分組</td><td>高分組</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0.13</td><td>0.22</td><td>0.02</td></tr>
<tr><td>2*</td><td>0.64</td><td>0.34</td><td>0.94</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0.14</td><td>0.28</td><td>0.02</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0.08</td><td>0.16</td><td>0.01</td></tr>
<tr><td>未作答</td><td>0.00</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>通過率</td><td>0.64</td><td>鑑別度</td><td>0.60</td></tr>
<tr><td>試題品質分析</td><td colspan="3">(一) 評量目標說明
本題給定等差數列前幾項和的正負大小關係，要求學生從中判斷出手校和公差的正負，評量學生運用等差級數的變化推斷出首項和公差正負的能力。
(二) 選項及學生表現說明
1.本題鑑別度為 0.60，正確答案為選項 2，通過率為 64%，顯示超過六成的學生已具備運用等差級數的變化推斷出首項和公差正負的能力。
2.有 13%的學生選擇選項 1(低分組有 22%)，這些學生可能尚未具備運用等差級數的變化推斷出首項和公差正負的能力。
3.有 14%的學生選擇選項 3(低分組有 28%)，這些學生可能尚未具備運用等差級數的變化推斷出首項和公差正負的能力。</td></tr>
<tr><td>教材地位分析</td><td colspan="3"><table><tr><td></td><td>先備的知識</td><td>本題所需的知識</td><td>延伸的知識</td></tr><tr><td>學習內容</td><td></td><td>N-8-5
等差級數求和：等差級數求和公式；生活中相關的問題。
備註
不處理「已知級數和反求首項、項數或公差」。</td><td>N-10-6
數列、級數與遞迴關係：有限項遞迴數列，有限項等比級數，常用的求和公式，數學歸納法。</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>補救教學建議</td><td colspan="3">(一) 等差數列公差對總和的影響
觀察下列等差級數的變化 a=10 ，d=-2</td></tr>
</table>

	$S_3 = 10 + 8 + 6$ =24 $S_4 = 10 + 8 + 6 + 4$ =28 $S_5 = 10 + 8 + 6 + 4 + 2$ =30 $S_6 = 10 + 8 + 6 + 4 + 2 + 0$ =30 $S_7 = 10 + 8 + 6 + 4 + 2 + 0 + (-2)$ =28 $S_8 = 10 + 8 + 6 + 4 + 2 + 0 + (-2) + (-4)$ =24 …… 可知當公差為負數時，等差級數總和會先變大再變小，但如果公差為政則只會越來越大。 (二) 等差數列首項對總和的影響 觀察下列等差級數的變化 a=-1 ，d=-2 $S_3 = (-1) + (-3) + (-5)$ = -9 $S_4 = (-1) + (-3) + (-5) + (-7)$ = -16 $S_5 = (-1) + (-3) + (-5) + (-7) + (-9)$ = -25 …… 可知當首項為負數時，等差級數總和不可能大大於零。

題號	7		
內容領域	數與量	認知歷程向度	程序執行
學習內容	N-8-2 二次方根的近似值：二次方根的近似值；二次方根的整數部分；十分逼近法。使用計算機 √ 鍵。		
試題內容	7. 有一個面積為 1000 平方公分的正方形，請問它的邊長大約是幾公分？ ① 250 ② 100 ③ 32 ④ 10		
選答率 選項	答題反應比率（＊表正確答案）		
	整體	低分組	高分組
1	0.15	0.34	0.00
2	0.19	0.33	0.04
3*	0.51	0.18	0.85
4	0.15	0.15	0.11
未作答	0.00		
通過率	0.51	鑑別度	0.67

試題品質分析

(一) 評量目標說明

本題給定一個面積為 1000 的正方形，要求學生從中估算出邊長，評量學生掌握二次方根的近似值估算的能力。

(二) 選項及學生表現說明

1.本題鑑別度為 0.67，正確答案為選項 3，通過率為 51%，顯示超過五成的學生已具備掌握二次方根的近似值估算的能力。

2.有 15%的學生選擇選項 1(低分組有 34%)，這些學生可能尚未具備掌握二次方根的近似值的能力，直接把面積當邊長將 1000/4=250。

3.有 19%的學生選擇選項 2(低分組有 33%)，這些學生可能尚未具備掌握二次方根的近似值估算的能力，或運算成$\sqrt{1000} = \sqrt{10 \times 100} = 10 \times 10 = 100$。

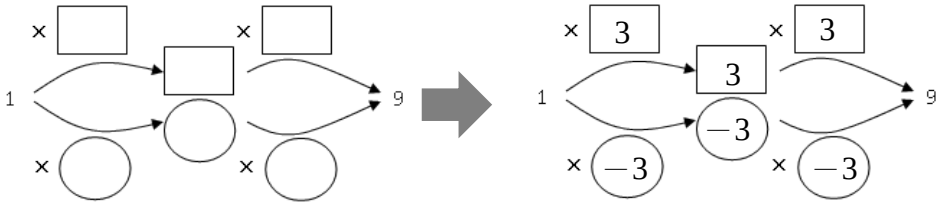
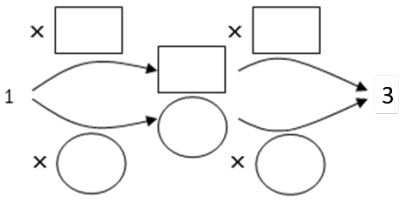
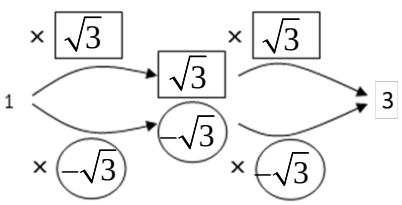
4.有 15%的學生選擇選項 4(低分組有 15%)，這些學生可能尚未具備掌握二次方根的近似值估算的能力。

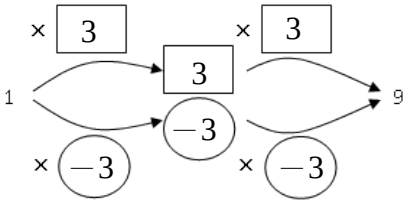
教材地位分析

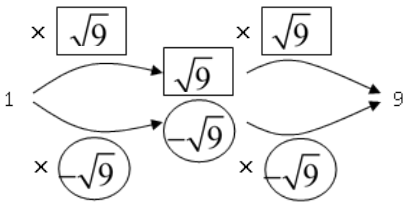
	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	N-7-6 指數的意義：指數為非負整數的次方；$a \neq 0$ 時 $a^0 = 1$；同底數的大小比較；指數的運算。 N-7-7	N-8-2 二次方根的近似值：二次方根的近似值；二次方根的整數部分；十分逼近法。使用計算機√鍵。 備註	N-10-1 實數：數線，十進制小數的意義，三一律，有理數的十進制小數特徵，無理數之十進制小數的估算，(2 為無理數的

			指數律：以數字例表示「同底數的乘法指數律」（$a^m \times a^n = a^{m+n}$、$(a^m)^n = a^{mn}$、$(a \times b)^n = a^n \times b^n$，其中$m, n$為非負整數）；以數字例表示「同底數的除法指數律」（$a^m \div a^n = a^{m-n}$，其中 $m \geq n$且m,n為非負整數）。	二次方根的整數部分，可用幾何、十分逼近法、計算機求近似值。	證明 ★），科學記號數字的運算。
補救教學建議	(一) 複習指數律 舉一些同底指數相乘的例子，以 $3^2 \times 3^5$ 為例，幫學生察覺： $3^2 \times 3^5$ $=(3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3)$ $=3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ $=3^{2+5}$ $=3^7$ (二) 複習平方根的運算並估算平方根 1.舉例說明$\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{2 \times 3}$ $(\sqrt{2} \times \sqrt{3})^2 = (\sqrt{2} \times \sqrt{3}) \times (\sqrt{2} \times \sqrt{3}) = (\sqrt{2} \times \sqrt{2}) \times (\sqrt{3} \times \sqrt{3})$ $= 2 \times 3 = (\sqrt{2 \times 3})^2$ 2.舉例說明 $2 < \sqrt{8} < 3$ 因為 $2^2 = 2 \times 2 = 4$，$(\sqrt{8})^2 = \sqrt{8} \times \sqrt{8} = 8$，$3^2 = 3 \times 3 = 9$ 可得$2^2 < (\sqrt{8})^2 < 3^2$，所以 $2 < \sqrt{8} < 3$ (三) 以本題來說$\sqrt{1000} = \sqrt{10^3} = \sqrt{10^2 \times 10} = 10 \times \sqrt{10}$ 因為$3^2 = 3 \times 3 = 9$，$(\sqrt{10})^2 = \sqrt{10} \times \sqrt{10} = 10$，$4^2 = 4 \times 4 = 16$ 可得$3^2 < (\sqrt{10})^2 < 4^2$，所以 $3 < \sqrt{10} < 4$， $10 \times 3 < 10 \times \sqrt{10} < 10 \times 4$，故$30 < \sqrt{1000} < 40$				

<table>
<tr><td>題號</td><td colspan="3">8</td></tr>
<tr><td>內容領域</td><td>數與量</td><td>認知歷程向度</td><td>程序執行</td></tr>
<tr><td>學習內容</td><td colspan="3">N-8-1 二次方根：二次方根的意義；根式的化簡及四則運算。</td></tr>
<tr><td>試題內容</td><td colspan="3">8. 下列哪個選項中的兩數經化簡後<u>不是</u>同類方根？
① $\sqrt{0.02}$ 和 $\sqrt{72}$
② $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{12}$
③ $\sqrt{3}$ 和 $5\sqrt{3}$
④ $\sqrt{8}$ 和 $\sqrt{18}$</td></tr>
<tr><td>選答率
選項</td><td colspan="3">答題反應比率（＊表正確答案）</td></tr>
<tr><td></td><td>整體</td><td>低分組</td><td>高分組</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0.17</td><td>0.26</td><td>0.03</td></tr>
<tr><td>2*</td><td>0.51</td><td>0.16</td><td>0.93</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0.17</td><td>0.33</td><td>0.02</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0.15</td><td>0.24</td><td>0.02</td></tr>
<tr><td>未作答</td><td>0.00</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>通過率</td><td>0.51</td><td>鑑別度</td><td>0.77</td></tr>
<tr><td>試題品質分析</td><td colspan="3">(一) 評量目標說明
本題給定一些二次方根，要求學生找出非同類方根的選項，評量學生是否掌握根式化簡的能力。
(二) 選項及學生表現說明
1.本題鑑別度為 0.77，正確答案為選項 2，通過率為 51%，顯示超過五成的學生已具備根式化簡的能力。
2.有 17%的學生選擇選項 1(低分組有 26%)，這些學生可能不知道$\sqrt{0.02}$如何化簡(或是以為$\sqrt{0.02}$不能化簡)，因此選了此選項。
3.有 17%的學生選擇選項 3(低分組有 33%)，這些學生可能誤解題意，將題目看成「何者是同類方根」，因此選擇不需化簡便呈現同類方根的$\sqrt{3}$和$5\sqrt{3}$。
4.有 15%的學生選擇選項 4(低分組有 24%)，這些學生可能不理解同類方根的意義，或是不知道二次方根如何化簡，因此在選項中進行猜測而選到本選項。</td></tr>
<tr><td>教材地位分析</td><td colspan="3"><table>
<tr><td></td><td>先備的知識</td><td>本題所需的知識</td><td>延伸的知識</td></tr>
<tr><td>學習內容</td><td>N-7-6
指數的意義：指數為非負整數的次方；a≠0 時 $a^0=1$；同底數的大小比較；指數的運算。
N-7-7
指數律：以數字例表示「同底數的乘法指</td><td>N-8-1
二次方根：二次方根的意義；根式的化簡及四則運算。
備註
可使用乘法公式來化簡的根式，待乘法公式單元再提及。</td><td>S-9-6
圓的幾何性質：圓心角、圓周角與所對應弧的度數三者之間的關係；圓內接四邊形對角互補；切線段等長。</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

		數律」（$a^m*a^n=a^{m+n}$、$(a^m)^n=a^{mn}$、$(a*b)^n=a^n*b^n$，其中 m,n 為非負整數）；以數字例表示「同底數的除法指數律」（$a^m/a^n=a^{m-n}$，其中 m≧n 且 m,n 為非負整數）。		
補救教學建議	(一) 複習二次方根的意義 使用下列圖示，幫助學生理解平方根的意義，平方根就是要找到「經過相同倍率兩次縮放的數字」。 1. 先舉完全平方數的例子，下圖中□內可填 3，○內可填－3。  $3\times3=9$ → 3 的平方是 9 → 9 的平方根是 3 $(-3)\times(-3)=9$ → －3 的平方是 9 → 9 的平方根是－3 2. 再舉非完全平方數的例子  (1) 空格先讓學生自己填，找不到就先找最接近的數字，例如：$1.7\times1.7=2.89$ 或 $1.8\times1.8=3.24$，所以□內可先填 1.7，○內可先填－1.7。 (2) 接著討論其他可能的答案，發現可以更接近 3，但無法剛好等於 3。 (3) 因為找不到「經過相同倍率兩次縮放」剛好是 3 的數，於是使用新的符號 $\sqrt{3}$ 來代替這個數。 (4) 因此□內可填 $\sqrt{3}$，○內可填 $-\sqrt{3}$。  (二) 複習二次方根的化簡 1. 說明 $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$ (1) 先用完全平方數舉例，例如：9 可表為下列兩種形式的乘積。		





因此$\sqrt{9}$=3，又$\sqrt{9}=\sqrt{3\times3}$，$3=\sqrt{3}\times\sqrt{3}$，故$\sqrt{3\times3}$=$\sqrt{3}\times\sqrt{3}$。

(2) 舉例說明$\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{2\times3}$ (一樣使用上述圖示輔助讓學生有感，以下省略)

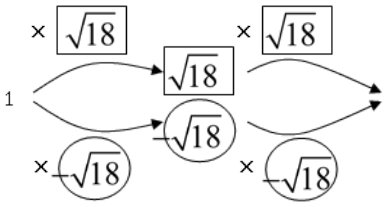
$6=\sqrt{6}\times\sqrt{6}=\sqrt{2\times3}\times\sqrt{2\times3}$

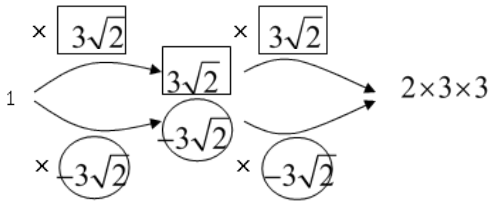
$6=2\times3=\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}=(\sqrt{2}\times\sqrt{3})\times(\sqrt{2}\times\sqrt{3})$

故$\sqrt{2\times3}=\sqrt{2}\times\sqrt{3}$

2. 以$\sqrt{18}$為例，說明根式的化簡

(1) 先以圖示輔助，讓學生有感。



18


2×3×3

(2) 以數字運算再演練一次：

$\sqrt{18}=\sqrt{3\times3\times2}=\sqrt{3\times3}\times\sqrt{2}=3\times\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

3. 說明$\sqrt{a}\div\sqrt{b}=\sqrt{a\div b}$，直接舉數字例說明學生較有感。

(1) $2\div3=\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

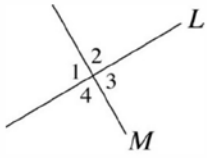
$2\div3=\frac{2}{3}=\sqrt{\frac{2}{3}}\times\sqrt{\frac{2}{3}}$

故$\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

(2) 以化簡$\sqrt{0.02}$為例，說明如何化簡根號內為分數的數。

$\sqrt{0.02}=\sqrt{\frac{2}{100}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{100}}=\frac{\sqrt{2}}{10}$

4. 複習同類方根的意涵：以本題為例，$\sqrt{3}$和$5\sqrt{3}$是同類方根，但尚未化簡的根式無法判斷，因此須將選項中所有的根式都化為最簡根式，$\sqrt{72}=6\sqrt{2}$、$\sqrt{12}=2\sqrt{3}$、$\sqrt{18}=3\sqrt{2}$，故選項 2→$\sqrt{2}$和$\sqrt{12}\,(=2\sqrt{3})$不是同類方根。

題號	9		
內容領域	空間形狀與座標幾何	認知歷程向度	概念理解
學習內容	S-8-1 角：角的種類；兩個角的關係（互餘、互補、對頂角、同位角、內錯角、同側內角）；角平分線的意義。		
試題內容	9. 如圖，直線 L 與 M 交於一點，已知 $\angle 2 = 93°$。則下列敘述何者**錯誤**？  ① $\angle 1 = 87°$ ② $\angle 1$ 是 $\angle 3$ 的對頂角 ③ $\angle 3 = 87°$ ④ $\angle 2$ 與 $\angle 4$ 兩角互補		
選答率 / 選項	答題反應比率（＊表正確答案）		
	整體	低分組	高分組
1	0.04	0.11	0.00
2	0.08	0.21	0.00
3	0.06	0.15	0.00
4*	0.82	0.53	0.99
未作答	0.00		
通過率	0.82	鑑別度	0.46

試題品質分析

(一) 評量目標說明

本題給定交於一點的兩直線及四個夾角中其中一個角的角度，要求學生判斷四個角之間的關係，評量學生是否理解對頂角的意義。

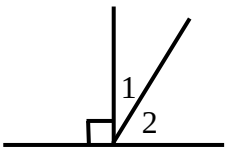
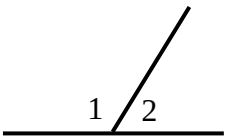
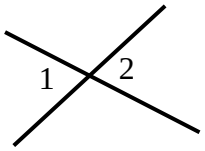
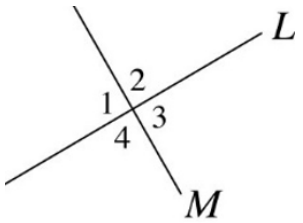
(二) 選項及學生表現說明

1.本題鑑別度為 0.46，正確答案為選項 4，通過率為 82%，顯示超過八成的學生已經理解對頂角的意義。

2.有 8%的學生選擇選項 2(低分組有 21%)，這些學生可能誤解題意，將題目看成「何者正確」，而本選項「$\angle 1$是$\angle 3$的對頂角」最容易判斷為正確選項。

教材地位分析

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	S-7-1 **簡單圖形與幾何符號**：點、線、線段、射線、角、三角形與其符號的介紹。 S-7-3 **垂直**：垂直的符號；線段的中垂線；點到	S-8-1 **角**：角的種類；兩個角的關係（互餘、互補、對頂角、同位角、內錯角、同側內角）；角平分線的意義。	S-9-1 **相似形**：平面圖形縮放的意義；多邊形相似的意義；對應角相等；對應邊長成比例。 S-9-2 **三角形的相似性**

		直線距離的意義。		**質**：三角形的相似判定（AA、SAS、SSS）；對應邊長之比＝對應高之比；對應面積之比＝對應邊長平方之比；利用三角形相似的概念解應用問題；相似符號（~）。
補救教學建議	(一) 複習兩個角之間的關係-互餘、互補、對頂角。  ∠1和∠2互餘  ∠1和∠2互補  ∠1和∠2為對頂角 (二) 以本題為例，說明交於一點的兩直線所夾的四個角之間的關係。  1. 請學生從圖中找出任一組互補的兩個角，確認學生理解兩角互補的概念。 2. 請學生找出任一組對頂角，確認學生理解對頂角的意義。 3. 由$\angle 2=93^\circ$，請學生算出其他三個角的角度。			

題號	10		
內容領域	空間形狀與座標幾何	認知歷程向度	程序執行
學習內容	S-8-6 畢氏定理：畢氏定理（勾股弦定理、商高定理）的意義及其數學史；畢氏定理在生活上的應用；三邊長滿足畢氏定理的三角形必定是直角三角形。		
試題內容	10. 一個長方形的長為 5 公分，寬為 3 公分，請問對角線長多少公分？ ① 4 ② $2\sqrt{7}$ ③ $\sqrt{34}$ ④ 8		
選答率 選項	答題反應比率（＊表正確答案）		
	整體	低分組	高分組
1	0.14	0.21	0.04
2	0.13	0.29	0.00
3*	0.62	0.23	0.95
4	0.11	0.25	0.00
未作答	0.00		
通過率	0.62	鑑別度	0.72

試題品質分析

(一) 評量目標說明

本題給定一長方形的長和寬，要求學生算出長方形的對角線，評量學生是否能掌握畢氏定理的解題。

(二) 選項及學生表現說明

1.本題鑑別度為 0.72，正確答案為選項 3，通過率為 62%，顯示超過六成的學生已具備應用畢氏定理進行解題的能力。

2.有 14%的學生選擇選項 1(低分組有 21%)，這些學生可能背誦了畢氏數「3、4、5」，但未看清題目中 3 和 5 在直角三角形中的位置關係，因此選了本選項。

3.有 13%的學生選擇選項 2(低分組有 29%)，這些學生可能在使用畢氏定理解題時發生錯誤，計算 $\sqrt{5^2+3}=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$。

4.有 11%的學生選擇選項 4(低分組有 25%)，這些學生可能不理解題意，因此直接將長和寬相加，得到 5+3=8。

教材地位分析

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	S-5-1 三角形與四邊形的性質：操作活動與簡單推理。含三角形三內角和為 180 度。三角形任意兩邊和大於第三邊。平行四邊形的對邊相等、對角	S-8-6 畢氏定理：畢氏定理（勾股弦定理、商高定理）的意義及其數學史；畢氏定理在生活上的應用；三邊長滿足畢氏定理的三角形必定是直角三	S-9-12 空間中的線與平面：長方體與正四面體的示意圖，利用長方體與正四面體作為特例，介紹線與線的平行、垂直與歪斜關係，線與平面的垂

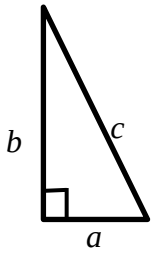
		相等。 S-7-1 簡單圖形與幾何符號：點、線、線段、射線、角、三角形與其符號的介紹。	角形。	直與平行關係。

補救教學建議

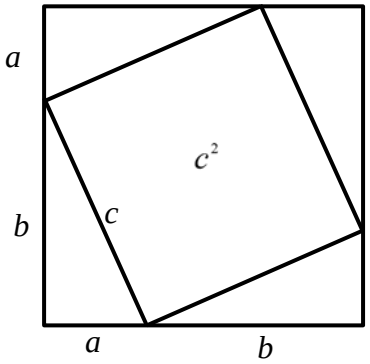
(一) 複習小學學過的長方形性質：有四個直角、對邊等長、對邊平行，對角線等長。

(二) 複習三角形的性質，確認學生理解何謂直角三角形、鈍角三角形及銳角三角形。

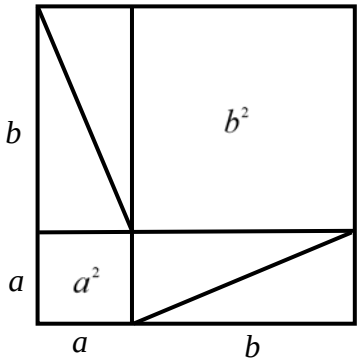
(三) 複習畢氏定理



1. 先複習直角三角形。



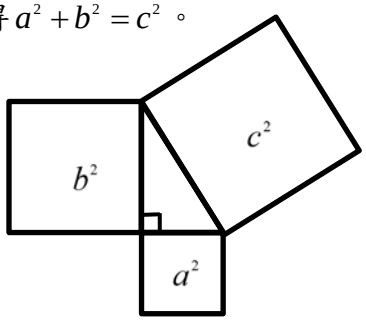
2. 將四個相同的直角三角形擺成上圖，觀察圖中有大小兩個正方形，其邊長分別為$(a+b)$和 c。



3. 調整直角三角形的位置，並補上a^2、b^2這兩個小正方形的邊，發現可以拼成另一個邊長亦為 $a+b$ 的正方形。

4. 觀察上述 2、3 兩個大正方形，由於其邊長皆為$(a+b)$，故面積相等，因此$a^2+b^2+\frac{4\times a\times b}{2}=c^2+\frac{4\times a\times b}{2}$，可推得$a^2+b^2=c^2$。

5. 最後歸納一下，並透過右圖說明畢氏定理：在直角三角形中，兩股平方和等於斜邊的平方，即$a^2+b^2=c^2$。



(四) 以本題為例，說明如何求長方形的對角線長。

1. 請學生畫出一個長方形，長標示為 5、寬標示為 3。
2. 請學生畫出任一條長方形的對角線，詢問學生：「現在你看到哪些形狀？」
   若學生僅回答：「三角形」，則追問：「是哪一種三角形？」
3. 學生發現直角三角形後，幫助學生連結畢氏定理，由其中兩邊(兩股長)求出第三邊(斜邊)，$\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$。

題號	11		
內容領域	空間形狀與座標幾何	認知歷程向度	程序執行
學習內容	G-8-1 直角坐標系上兩點距離公式：直角坐標系上兩點$A\,(a,\,b)$和$B(c,\,d)$ 的距離為 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$；生活上相關問題。		
試題內容	11. 直角坐標平面上有三點 $A(3,4)$、$B(-5,-2)$、$C(3,-2)$，請問 $\triangle ABC$ 的周長為何？ ① 24 ② 14 ③ $14+2\sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{2}+2\sqrt{5}+2\sqrt{10}$		
選答率 選項	答題反應比率（＊表正確答案）		
	整體	低分組	高分組
1*	0.64	0.24	0.98
2	0.10	0.23	0.01
3	0.19	0.35	0.02
4	0.07	0.17	0.00
未作答	0.00		
通過率	0.64	鑑別度	0.73
試題品質分析	**(一) 評量目標說明** 本題給定直角坐標平面上三點，要求學生算出這三點所圍成的三角形周長，評量學生是否能掌握直角坐標系上兩點距離公式。 **(二) 選項及學生表現說明** 1.本題鑑別度為 0.73，正確答案為選項 1，通過率為 64%，顯示超過六成的學生已具備運用直角坐標系上兩點距離公式解題的能力。 2.有 10%的學生選擇選項 2(低分組有 23%)，這些學生可能不理解題意，且誤用了兩點距離公式，直接將 A、B 兩點的 x 坐標相減、y 坐標相減，得到 6 和 8，6+8=14。 3.有 19%的學生選擇選項 3(低分組有 35%)，這些學生可能不會使用兩點距離公式，僅能從坐標平面上三點的位置關係得出 $\overline{AC}$=6、$\overline{BC}$=8，但是不會算 $\overline{AB}$，於是猜測一個看起來像$6+8+\overline{AB}$的選項。		

教材地位分析		先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
	學習內容	N-7-5 **數線**：擴充至含負數的數線；比較數的大小；絕對值的意義；以|a-b|表示數線上兩點 a,b 的距離。	G-8-1 直角坐標系上兩點距離公式：直角坐標系上兩點 $A(a,b)$和 $B(c,d)$的距離為線段 $\overline{AB}=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$；生活上相關問題。	F-9-2 **二次函數的圖形與極值**：二次函數的相關名詞（對稱軸、頂點、最低點、最高點、開口向上、開口向下、

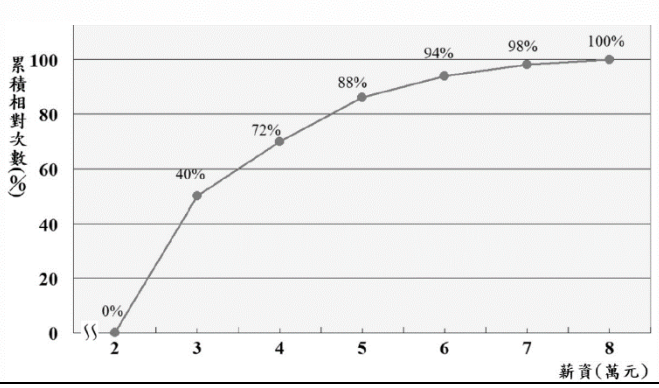
		G-7-1 **平面直角坐標系**：以平面直角坐標系、方位距離標定位置；平面直角坐標系及其相關術語（縱軸、橫軸、象限）。		最大值、最小值）；描繪 $y=ax^2$、$y=ax^2+k$、$y=a(x-h)^2$、$y=a(x-h)^2+k$ 的圖形；對稱軸就是通過頂點（最高點、最低點）的鉛垂線；$y=ax^2$ 的圖形與 $y=a(x-h)^2+k$ 的圖形的平移關係；已配方好之二次函數的最大值與最小值。
補救教學建議	(一) 複習平面直角坐標系：確認學生能正確標示任一點坐標的位置。 (二) 複習畢氏定理：畢氏定理需要有直角三角形，而平面直角坐標上很容易製造直角三角形，這部分教師宜幫助學生進行連結。 (三) 以本題為例，說明如何幫助學生解題： 1. 請學生將 $A(3,4)$、$B(-5,-2)$、$C(3,-2)$三點分別描繪在直角坐標平面上。 2. 接著將 A、B、C 三點連成三角形，請學生觀察它是哪一種三角形。由於 $\overline{BC}$ 是水平線、$\overline{AC}$ 是鉛直線，因此三角形 ABC 是直角三角形。 3. 詢問學生：「這個三角形有哪些邊長知道？哪些邊長還不知道？」，發現有兩個邊知道(兩股長)，斜邊還不知道。 4. 直角三角形已知兩股長，如何求出第三邊？引導學生使用畢氏定理解題。			

<table>
<tr><td>題號</td><td colspan="3">12</td></tr>
<tr><td>內容領域</td><td>資料與不確定性</td><td>認知歷程向度</td><td>程序執行</td></tr>
<tr><td>學習內容</td><td colspan="3">D-8-1 統計資料處理：累積次數、相對次數、累積相對次數折線圖。</td></tr>
<tr><td>試題內容</td><td colspan="3">12. 下表是某國職棒 2020 年球季單場比賽擊出全壘打數量與場數的統計表，
例如：單場擊出剛好 5 支全壘打共有 16 場比賽。
<table><tr><td>全壘打數量（支）</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr><tr><td>場數（場）</td><td>31</td><td>56</td><td>56</td><td>47</td><td>30</td><td>16</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr></table>請問 2020 年球季中，單場全壘打合計 4 支以上（含）的場數，在總場數中所占的百分率為多少？
① 12%
② 24%
③ 30%
④ 76%</td></tr>
<tr><td>選答率
選項</td><td colspan="3">答題反應比率（＊表正確答案）</td></tr>
<tr><td></td><td>整體</td><td>低分組</td><td>高分組</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0.12</td><td>0.18</td><td>0.05</td></tr>
<tr><td>2*</td><td>0.57</td><td>0.28</td><td>0.88</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0.22</td><td>0.37</td><td>0.05</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0.09</td><td>0.16</td><td>0.01</td></tr>
<tr><td>未作答</td><td>0.00</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>通過率</td><td>0.57</td><td>鑑別度</td><td>0.60</td></tr>
<tr><td>試題品質分析</td><td colspan="3">(一) 評量目標說明
本題給定某球季棒球比賽單場擊出全壘打數量與場數的統計表，要求學生算出單場全壘打數 4 支以上之場數佔總場數的比例，評量學生是否掌握統計資料處理(計算相對累積次數)的能力。
(二) 選項及學生表現說明
1.本題鑑別度為 0.6，正確答案為選項 2，通過率為 57%，顯示近六成的學生已具備統計資料處理(計算相對累積次數)的能力。
2.有 12%的學生選擇選項 1(低分組有 18%)，這些學生可能誤解題意，以為是要算 4 支全壘打所佔的比例，因此先求出總場數 250 場後，換算比例 30/250=12%。
3.有 22%的學生選擇選項 3(低分組有 37%)，這些學生可能不理解題意，直接從表格中找到 4 支全壘打的場數有 30 場，故認為答案是 30。
4.有 9%的學生選擇選項 4(低分組有 16%)，這些學生可能誤解題意，計算了未滿 4 支全壘打的場數為 190 場，換算比例 190/250=76%。</td></tr>
<tr><td>教材地位分析</td><td colspan="3"><table><tr><td></td><td>先備的知識</td><td>本題所需的知識</td><td>延伸的知識</td></tr><tr><td>學習內</td><td>D-7-1</td><td>D-8-1</td><td>D-9-1</td></tr></table></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>
<table>
<tr><td>容</td><td>統計圖表：蒐集生活中常見的數據資料，整理並繪製成含有原始資料或百分率的統計圖表：直方圖、長條圖、圓形圖、折線圖、列聯表。遇到複雜數據時可使用計算機輔助，教師可使用電腦應用軟體演示教授。
D-7-2
統計數據：用平均數、中位數與眾數描述一組資料的特性；使用計算機的「M+」或「Σ」鍵計算平均數。</td><td>統計資料處理：累積次數、相對次數、累積相對次數折線圖。</td><td>統計數據的分布：全距；四分位距；盒狀圖。
D-9-2
認識機率：機率的意義；樹狀圖（以兩層為限）。
D-9-3
古典機率：具有對稱性的情境下（銅板、骰子、撲克牌、抽球等）之機率；不具對稱性的物體（圖釘、圓錐、爻杯）之機率探究。</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>補救教學建議</td><td>
(一) 複習各種統計圖表，確認學生能解讀以不同形態呈現的資料。
(二) 複習累積次數、相對次數、累積相對次數的意義。
(三) 以本題為例，說明如何幫助學生解題：
1. 透過提問確認學生是否能讀懂題目中的統計表。
<table>
<tr><td>全壘打數量(支)</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr>
<tr><td>場數(場)</td><td>31</td><td>56</td><td>56</td><td>47</td><td>30</td><td>16</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr>
</table>
Q：單場完全沒有出現全壘打的場次有幾場？
Q：單場出現最多支的全壘打是幾支？
Q：單場出現 4 支全壘打的場次有幾場？
2. 請學生計算單場出現 4 支以上(含)全壘打的場次，共 30+16+5+4+3+2=60 場。
3. 詢問學生「若是要知道上述這 60 場占總場數的百分率，那麼還需要什麼資料？」，確認學生知道還需要計算總場次，共 250 場。
4. 計算百分率，60/250=24%。
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>題號</td><td colspan="3">13</td></tr>
<tr><td>內容領域</td><td>代數與函數</td><td>認知歷程向度</td><td>概念理解</td></tr>
<tr><td>學習內容</td><td colspan="3">A-8-6 一元二次方程式的意義：一元二次方程式及其解，具體情境中列出一元二次方程式。</td></tr>
<tr><td>試題內容</td><td colspan="3">13.「有一個長方形的長是寬的 3 倍少 2 公分，其面積為 65 平方公分，請問此長方形的寬為何?」假設長方形的寬為 x 公分，依題意所列出的一元二次方程式為何？
① $2x+2(3x+2)=65$
② $2x+2(3x-2)=65$
③ $x(3x+2)=65$
④ $x(3x-2)=65$</td></tr>
<tr><td>選答率
選項</td><td colspan="3">答題反應比率（＊表正確答案）</td></tr>
<tr><td></td><td>整體</td><td>低分組</td><td>高分組</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0.06</td><td>0.17</td><td>0.00</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0.11</td><td>0.27</td><td>0.01</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0.10</td><td>0.20</td><td>0.03</td></tr>
<tr><td>4*</td><td>0.72</td><td>0.37</td><td>0.97</td></tr>
<tr><td>未作答</td><td>0.00</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>通過率</td><td>0.72</td><td>鑑別度</td><td>0.60</td></tr>
<tr><td>試題品質分析</td><td colspan="3">(一) 評量目標說明
本題給定一長方形中長和寬的數量關係及其面積，要求學生依題意列式，評量學生是否具備在具體情境中列出一元二次方程式的能力。
(二) 選項及學生表現說明
1.本題鑑別度為 0.6，正確答案為選項 4，通過率為 72%，顯示超過七成的學生已具備在具體情境中列出一元二次方程式的能力。
2.有 11%的學生選擇選項 2(低分組有 27%)，這些學生可能誤解題意，在求出長為 $3x-2$ 之後，將面積誤認為是周長，因此列式 $2x+2(3x-2)=65$。
3.有 10%的學生選擇選項 3(低分組有 20%)，這些學生可能在解讀「長是寬的 3 倍少 2 公分」時發生錯誤，誤認為長是 $3x+2$，因此列式 $x(3x+2)=65$。</td></tr>
<tr><td>教材地位分析</td><td colspan="3"><table>
<tr><td></td><td>先備的知識</td><td>本題所需的知識</td><td>延伸的知識</td></tr>
<tr><td>學習內容</td><td></td><td>A-8-6
一元二次方程式的意義：一元二次方程式及其解，具體情境中列出一元二次方程式。</td><td>F-9-1
二次函數的意義：二次函數的意義；具體情境中列出兩量的二次函數關係。</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

補救教學建議	(一) 複習一元一次方程式的意義：以符號代表數、一元一次式、一元一次方程式。 (二) 複習一元二次方程式的列式。 (三) 以本題為例，說明如何幫助學生解題： 1. 以提問確認學生理解題意。 師：題目中和長方形有關的東西有哪些？ 生：長、寬、面積 師：那麼有哪些已經知道了？ 生：知道面積是 65。 師：還知道什麼嗎？ 生：知道長是寬的 3 倍少 2 公分。 2. 請學生將「長是寬的 3 倍少 2 公分」翻譯為數學式，長=寬×$3-2$。 3. 依題意設寬為 x 公分，將「長=寬×$3-2$」算式中的寬替換成 x，那麼算式會變成「長=$x\times3-2$」，簡記為「長=$3x-2$」。 4. 師：現在長、寬、面積都有了，接下來就要來「拉關係」了，這者之間有什麼關係嗎？ 生：長乘以寬等於面積。 師：很好，請寫下來：長×寬=面積，另外我們知道長=$3x-2$、寬=x，面積=65 (教師在黑板上一一寫下)，接下來請把長、寬、面積替換成他們所代表的數字或符號。 生：$(3x-2)\times x=65$。 師：接下來我們可以省略乘號，將列式簡記為 $x(3x-2)=65$。

題號	14		
內容領域	資料與不確定性	認知歷程向度	概念理解
學習內容	D-8-1 統計資料處理：累積次數、相對次數、累積相對次數折線圖。		
試題內容	14. 下表為某公司員工月薪的累積相對次數分配折線圖，月薪的單位為萬元。已知該公司全體員工總共有 50 人，請問月薪 4 萬元以上（含 4 萬元）、未滿 5 萬元（不含 5 萬元）的員工人數共有多少人？ ① 8 ② 14 ③ 16 ④ 44 		
選答率 選項	答題反應比率（＊表正確答案）		
	整體	低分組	高分組
1*	0.50	0.19	0.82
2	0.14	0.26	0.04
3	0.24	0.37	0.10
4	0.11	0.18	0.04
未作答	0.00		
通過率	0.50	鑑別度	0.64
試題品質分析	**(一) 評量目標說明** 本題給定某公司月薪的累積相對次數分配折線圖，要求學生判斷某月薪區間的人數，評量學生是否理解累積相對次數折線圖的意義。 **(二) 選項及學生表現說明** 1.本題鑑別度為 0.64，正確答案為選項 1，通過率為 50%，顯示有五成的學生已判讀累積相對次數折線圖的能力。 2.有 14%的學生選擇選項 2(低分組有 26%)，這些學生可能誤解題意，以為只問具備月薪 4 萬以上的人數，得 50x(100-72)%=14(人) 3.有 24%的學生選擇選項 3(低分組有 37%)，這些學生可能誤解題意，以為求具備此種月薪的人數比例：88%－72%=16% 4.有 11%的學生選擇選項 4(低分組有 18%)，這些學生可能誤解題意，以為只問月薪末滿 5 萬的人數，得 50x88%=44(人)		

教材地位分析		先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
	學習內容	D-7-1 **統計圖表：**蒐集生活中常見的數據資料，整理並繪製成含有原	D-8-1 **統計資料處理：**累積次數、相對次數、累積相對次數折線圖。	D-9-1 **統計數據的分布：**全距；四分位距；盒狀圖。

			始資料或百分率的統計圖表：直方圖、長條圖、圓形圖、折線圖、列聯表。遇到複雜數 據時可使用計算機輔助，教師可使用電腦應用軟體演示教授。 D-7-2 **統計數據**：用平均數、中位數與眾數描述一組資料的特性；使用計算機的「M+」或「Σ」鍵計算平均數。		**備註：** D-7-2 處理單一統計量（平均數、中位數、眾數）表達數據，本條目則傳達以盒狀圖描述數據的集中程度。

補救教學建議

(一) 複習累積相對次數：

下表為大山國中三年級數學競試的次數分配表，製作出累積相對次數分配表的教學過程如下：

①複習相對次數的意義及換算方式，接著在「次數(人)」右邊新增「相對次數(%)」欄位，並請學生完成。

大山國中三年級數學競試次數分配表

成績（分）	次數（人）
40~50	45
50~60	55
60~70	60
70~80	36
80~90	30
90~100	24
合計	250

大山國中三年級數學競試相對次數分配表

成績（分）	次數（人）	相對次數(%)
40~50	45	18
50~60	55	22
60~70	60	24
70~80	36	14.4
80~90	30	12
90~100	24	9.6
合計	250	100

②複習「累積」的概念及算法，教師示範累積次數的計算方式，請學生練習相對累積次數，並記入累積相對次數(%)該欄中，完成累積相對次數分配表如下表：

大山國中三年級數學競試相對次數分配表

成績（分）	次數（人）	相對次數(%)	累積相對次數(%)	
40~50	45	18	18	←18
50~60	55	22	40	←18 + 22=40
60~70	60	24	64	←40 + 24=64
70~80	36	14.4	78.4	←64 + 14.4=78.4
80~90	30	12	90.4	←78.4 + 12=90.4
90~100	24	9.6	100	←90.4 + 9.6=100
合計	250	100		

(二) 複習累積相對次數分配折線圖：

我們以右表為例說明累積相對次數分配折線圖的繪製方法。

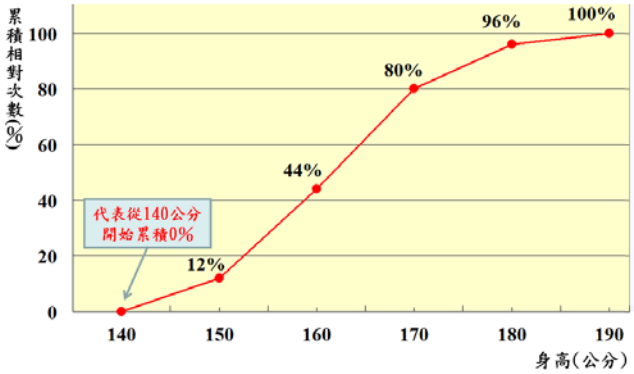
大山國中 203 班學生身高累積相對次數分配表

身高(公分)	次數(人)	累積次數(人)	累積相對次數(%)
140~150	3	3	12
150~160	8	11	44
160~170	9	20	80
170~180	4	24	96
180~190	1	25	100
合計	25		

①**定義橫軸**：用來表示身高，在橫軸末端標示「身高(公分)」，並標示出各組的刻度，如 140、150、160、170、180、190 等。

②**定義縱軸**：用來表示分配的累積相對次數，在縱軸末端標示「累積相對次數(%)」，並分別標示出適當的刻度，如 0、20、40、60、80、100。

③**標點及連線**：將各組的上限與對應累積次數(人)設為一個點的 x、y 坐標，得到 5 個點坐標(150,12)、(160,44)、(170,80)、(180,96)、(190,100)，連同第一組的下限 140 公分與累積 0%所得到的點坐標(140,0)，代表從 140 公分起開始累積，再將這些點由左到右依序以線段連接。



大山國中二年三班學生身高累積相對次數分配折線圖

④報讀累積相對次數分配折線圖：

例如：未滿 180 公分的同學佔全體 80%，未滿 160 公分的同學佔全體 44%，故 160 公分以上且未滿 180 公分佔全體的(80－44)%=36%

題號	15		
內容領域	代數與函數	認知歷程向度	程序執行
學習內容	A-8-7 一元二次方程式的解法與應用：利用因式分解、配方法、公式解一元二次方程式；應用問題；使用計算機計算一元二次方程式根的近似值。		
試題內容	15. 下列何者為一元二次方程式 $x^2-4x+1=0$ 的解？ （一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的解為 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$） ① $x=-2+\sqrt{3}$ 或 $x=-2-\sqrt{3}$ ② $x=-2+\sqrt{5}$ 或 $x=-2-\sqrt{5}$ ③ $x=2+\sqrt{3}$ 或 $x=2-\sqrt{3}$ ④ $x=2+\sqrt{5}$ 或 $x=2-\sqrt{5}$		
選答率 / 選項	答題反應比率（＊表正確答案）		
	整體	低分組	高分組
1	0.16	0.25	0.04
2	0.17	0.29	0.03
3*	0.55	0.25	0.91
4	0.12	0.20	0.03
未作答	0.01		
通過率	0.55	鑑別度	0.66

試題品質分析

(一) 評量目標說明

本題給定一個一元二次方程式及求解的公式，要求學生利用公式解求解，評量學生是否具備利用公式解求一元二次方程式解的能力。

(二) 選項及學生表現說明

1.本題鑑別度為 0.66，正確答案為選項 3，通過率為 55%，顯示超過五成的學生已具備利用公式解求一元二次方程式解的能力

2.有 16%的學生選擇選項 1(低分組有 25%)，這些學生錯看公式:

$\frac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，故得 $x=\frac{-4\pm\sqrt{(-4)^2-4\times1\times1}}{2}=\frac{-4\pm2\sqrt{3}}{2}=-2\pm\sqrt{3}$

3.有 17%的學生選擇選項 2(低分組有 29%)，這些學生錯看公式：

$\frac{b\pm\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$，且 b^2-4ac 變號錯誤，得

$x=\frac{-4\pm\sqrt{(-4)^2+4\times1\times1}}{2}=\frac{-4\pm2\sqrt{5}}{2}=-2\pm\sqrt{5}$

4.有 12%的學生選擇選項 4(低分組有 20%)，這些學生 b^2-4ac 變號錯誤，得到 $x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2+4\times1\times1}}{2}=\frac{4\pm2\sqrt{5}}{2}=2\pm\sqrt{5}$

教材地位		先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識

<table>
<tr><td>分析</td><td>
<table>
<tr><td>學習內容</td><td>A-7-3
一元一次方程式的解法與應用：等量公理；移項法則；驗算；應用問題。</td><td>A-8-7
一元二次方程式的解法與應用：利用因式分解、配方法、公式解一元二次方程式；應用問題；使用計算機計算一元二次方程式根的近似值。</td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>補救教學建議</td><td>
下面以「解 $x^2+5x+2=0$ 」為例，說明如何幫助學生解題：
(一) 複習配方法
例如： $x^2+2x+\square=(x+\triangle)^2 \rightarrow \square=1^2=1$，$\triangle=1$
$x^2+3x+\square=(x+\triangle)^2 \rightarrow \square=(\frac{3}{2})^2=\frac{9}{4}$，$\triangle=\frac{3}{2}$
(二) 說明利用配方法解 $x^2+5x+2=0$
$x^2+5x=-2$ 先將常數項移到等號右邊
$x^2+5x+(\frac{5}{2})^2=-2+(\frac{5}{2})^2$ 等號兩邊同時加 $(\frac{5}{2})^2$
$(x+\frac{5}{2})^2=\frac{17}{4}$ $(x+\frac{5}{2})$ 是 $\frac{17}{4}$ 的平方根
$x+\frac{5}{2}=\pm\frac{\sqrt{17}}{2}$ ， $x=-\frac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{17}}{2}$
(三) 說明利用公式解解 $x^2+5x+2=0$
一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的解為 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
$x^2+5x+2=0 \rightarrow a=1, b=5, c=2$
先計算根號裡面的部分： $b^2-4ac=5^2-4\times1\times2=17>0$ (有兩相異實根)
所以 $x=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2\times1}=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>題號</td><td colspan="3">16</td></tr>
<tr><td>內容領域</td><td>代數與函數</td><td>認知歷程向度</td><td>解題思考</td></tr>
<tr><td>學習內容</td><td colspan="3">A-8-1 二次式的乘法公式：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$；$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$；$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$；$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$。</td></tr>
<tr><td>試題內容</td><td colspan="3">16. 計算 $2021^2-2\times2021\times21+20\times22=?$
① 3999
② 3999979
③ 3999999
④ 4000881</td></tr>
<tr><td>選答率
選項</td><td colspan="3">答題反應比率（＊表正確答案）</td></tr>
<tr><td></td><td>整體</td><td>低分組</td><td>高分組</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0.06</td><td>0.11</td><td>0.01</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0.23</td><td>0.32</td><td>0.08</td></tr>
<tr><td>3*</td><td>0.53</td><td>0.30</td><td>0.84</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0.17</td><td>0.27</td><td>0.06</td></tr>
<tr><td>未作答</td><td>0.01</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>通過率</td><td>0.53</td><td>鑑別度</td><td>0.55</td></tr>
<tr><td>試題品質分析</td><td colspan="3">(一) 評量目標說明
本題給定一個隱含$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$；$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$樣式的算式，要求學生利用乘法公式計算算式的值，評量學生應用二次式的乘法公式計算的能力。
(二) 選項及學生表現說明
1.本題鑑別度為 0.55，正確答案為選項 3，通過率為 53%，顯示超過五成的學生已具備利用二次式的乘法公式計算的能力。
2.有 23%的學生選擇選項 2(低分組有 32%)，這些學生計算錯誤如下：
$2021^2-2\times2021\times21+20\times22$
$=2021^2-2\times2021\times21+(21-1)\times21$
$=2021^2-2\times2021\times21+21^2-21$
$=(2021-21)^2-21=3999979$
3.有 17%的學生選擇選項 4(低分組有 27%)，這些學生計算錯誤如下：
$2021^2-2\times2021\times21+20\times22$
$=2021^2-2\times2021\times21+(21-1)\times(21+1)$
$=[2021^2-2\times2021\times21]+21^2+21^2-1^2$
$=(2021-21)^2+21^2\times2-1=4000881$</td></tr>
<tr><td>教材地位</td><td colspan="3"><table><tr><td></td><td>先備的知識</td><td>本題所需的知識</td><td>延伸的知識</td></tr></table></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>分析</td><td>學習內容</td><td>A-7-1
代數符號:以代數符號表徵交換律、分配律、結合律;一次式的化簡及同類項;以符號記錄生活中的情境問題。</td><td>A-8-1
二次式的乘法公式:
$(a+b)2=a^2+2ab+b^2$;
$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$;
$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$;
$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$。</td><td></td></tr>
<tr><td>補救教學建議</td><td colspan="4">(一) 下面以「$2019^2-2\times2019\times19+19^2$＝？」為例，說明如何運用$(a-b)^2$幫助解題：
① 透過乘法對加法的分配律，引入$(a-b)^2$的公式
$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-ab-ba+b^2=a^2-2ab+b^2$
② 將$a=2019$，$b=19$，代入公式右邊$a^2-2ab+b^2$，得到
$2019^2-2\times2019\times19+19^2$，可改寫為$(2019-19)^2=2000^2=4000000$
(二) 下面以「201×199＝？」為例，說明如何運用$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$幫助解題：
① 透過乘法對加法的分配律，引入$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$的公式
$(a+b)(a-b)=a^2-ab+ba-b^2=a^2-b^2$
幫助學生察覺若以$a=201$，$b=1$代入，可得
$201\times199=(200+1)(200-1)=200^2-1^2=40000-1=39999$
(三) 下面以「$2019^2-2\times2019\times19+20\times18$＝？」為例，說明如何幫助學生解題：
$2019^2-2\times2019\times19+20\times18$
$=2019^2-2\times2019\times19+(19+1)(19-1)$
$=2019^2-2\times2019\times19+19^2-1^2$
$=(2019-19)^2-1$
$=4000000-1$
$=3999999$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>題號</td><td colspan="3">17</td></tr>
<tr><td>內容領域</td><td>代數與函數</td><td>認知歷程向度</td><td>概念理解</td></tr>
<tr><td>學習內容</td><td colspan="3">A-8-2 多項式的意義：一元多項式的定義與相關名詞（多項式、項數、係數、常數項、一次項、二次項、最高次項、升冪、降冪）。</td></tr>
<tr><td>試題內容</td><td colspan="3">17. 關於多項式 $2x^3-6x+1$ 的敘述，下列選項何者正確？
① x 項的係數是 6
② x^2 項的係數是 0
③ 此多項式是二次多項式
④ 將此多項式升冪排列後可表為 $1+2x^3-6x$</td></tr>
<tr><td>選答率
選項</td><td colspan="3">答題反應比率（＊表正確答案）</td></tr>
<tr><td></td><td>整體</td><td>低分組</td><td>高分組</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0.20</td><td>0.31</td><td>0.04</td></tr>
<tr><td>2*</td><td>0.51</td><td>0.23</td><td>0.84</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0.19</td><td>0.27</td><td>0.10</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0.10</td><td>0.18</td><td>0.02</td></tr>
<tr><td>未作答</td><td>0.00</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>通過率</td><td>0.51</td><td>鑑別度</td><td>0.61</td></tr>
<tr><td>試題品質分析</td><td colspan="3">(一) 評量目標說明
本題給定一個 x 的三次多項式，要求學生判斷此多項式的相關名詞（係數、次數、升冪排列...），評量學生是否理解多項式的意義。
(二) 選項及學生表現說明
1.本題鑑別度為 0.61，正確答案為選項 2，通過率為 51%，顯示超過五成的學生已理解多項式的意義。
2.有 20%的學生選擇選項 1(低分組有 31%)，這些學生可能忽略 x 項係數的性質符號。
3.有 19%的學生選擇選項 3(低分組有 27%)，這些學生可能誤以為最前項的係數代表多項式的次數。
4.有 10%的學生選擇選項 4(低分組有 18%)，這些學生可能誤以為升冪排列指的是將多項式各項次數不管性質符號由小排到大故得 $1+2x^3-6x$。</td></tr>
<tr><td>教材地位分析</td><td colspan="3"><table>
<tr><td></td><td>先備的知識</td><td>本題所需的知識</td><td>延伸的知識</td></tr>
<tr><td>學習內容</td><td>A-7-1
代數符號：以代數符號表徵交換律、分配律、結合律；一次式的化簡及同類項；以符號記錄生活中的情境問題。</td><td>A-8-2
多項式的意義：一元多項式的定義與相關名詞（多項式、項數、係數、常數項、一次項、二次項、最高次項、升冪、降</td><td></td></tr>
</table></td></tr>
</table>

			冪）。	
補救教學建議	(一) 複習「項、係數、次數」的意義 例如：多項式$3x^2+4x-1$的最高次數為二次，故為二次多項式，項數為3。二次項為$3x^2$，一次項為$4x$，常數項為－1。 各項係數分別為：二次項係數為 3，一次項為 4 ，常數項為－1，係數除了數字部份也要考慮其性質符號。 (二) 以多項式$4x+3x^2-1$為例，幫助學生認識多項式的排列： ①升冪排列：將最低次項(常數項)-1、一次項$4x$、二次項$3x^2$依次由最低次項排到最高次項得到$-1+4x+3x^2$。 ②降冪排列：將最高次項(二次項)$3x^2$、一次項$4x$、常數項-1依次由最高次項排到最低次項得到$3x^2+4x-1$。			

題號	18		
內容領域	代數與函數	認知歷程向度	程序執行
學習內容	A-8-3 多項式的四則運算：直式、橫式的多項式加法與減法；直式的多項式乘法（乘積最高至三次）；被除式為二次之多項式的除法運算。		
試題內容	18. 已知 ax^2+bx+c 除以 $2x+3$ 的商式為 $3x-1$ 、餘式為 2 ，其中 a、b、c 均為整數。請問 $(ax^2+bx+c)+(2x^2+3x+4)$ 除以 $2x+3$ 的商式和餘式為下列何者？ ① 商式為 $4x+3$、餘式為 2 ② 商式為 $4x+3$、餘式為 6 ③ 商式為 $4x-1$、餘式為 2 ④ 商式為 $4x-1$、餘式為 6		
選答率 / 選項	答題反應比率（＊表正確答案）		
	整體	低分組	高分組
1	0.14	0.24	0.03
2	0.18	0.29	0.03
3	0.21	0.29	0.09
4*	0.45	0.17	0.84
未作答	0.01		
通過率	0.45	鑑別度	0.68

試題品質分析

(一) 評量目標說明

本題給定一個含有未知係數的被除式、除式、商式及餘式，要求學生計算另一個被除式除以原除式的商式及餘式，評量學生是否具備被除式為二次之多項式的除法運算能力。

(二) 選項及學生表現說明

1.本題鑑別度為 0.68，正確答案為選項 4，通過率為 45%，顯示超過四成的學生已具備被除式為二次之多項式的除法運算能力。

2.有 14%的學生選擇選項 1(低分組有 24%)，這些學生可能計算如下：

$$\begin{array}{r} x+4 \\ 2x+3\overline{)\,2x^2+3x+4} \\ \underline{2x^2+3x} \\ 4 \end{array}$$

得新商式為 $(3x-1)+(x+4)=4x+3$ ，

新餘式為原餘式 2

3.有 18%的學生選擇選項 2(低分組有 29%)，這些學生可能計算如下：

$$\begin{array}{r} x+4 \\ 2x+3\overline{)\,2x^2+3x+4} \\ \underline{2x^2+3x} \\ 4 \end{array}$$

得新商式為 $(3x-1)+(x+4)=4x+3$ ，

新餘式為原 $2+4=6$

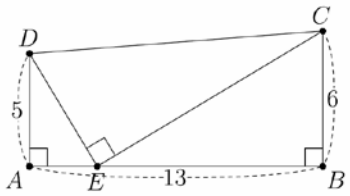
<table>
<tr><td></td><td>4.有 21%的學生選擇選項 3(低分組有 29%)，這些學生可能計算如下：
$\begin{array}{r} x \\ 2x+3\overline{)2x^2+3x+4} \\ \underline{2x^2+3x} \\ 4 \end{array}$ 得新商式為 $(3x-1)+x=4x-1$，新餘式為原餘式 2</td></tr>
<tr><td>教材地位分析</td><td>
<table>
<tr><td></td><td>先備的知識</td><td>本題所需的知識</td><td>延伸的知識</td></tr>
<tr><td>學習內容</td><td>無</td><td>A-8-3
多項式的四則運算：直式、橫式的多項式加法與減法；直式的多項式乘法（乘積最高至三次）；被除式為二次之多項式的除法運算。
備註
不涉及使用分離係數法。</td><td>無</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>補救教學建議</td><td>(一) 幫助學生複習多項式的乘法，例如：$5x(x+2)=5x^2+10x$
(二) 幫助學生複習單項式對單項式的除法，例如：$6x^2\div 2x=\frac{6\cdot x\cdot \cancel{x}}{2\cdot \cancel{x}}=3x$
(三) 幫助學生複習整數除法直式算則舊經驗，然後再將方法類比至多項式除法，比如：
$\begin{array}{r} 13 \\ 12\overline{)158} \\ \underline{12} \\ 38 \\ \underline{36} \\ 2 \end{array}$ → $\begin{array}{r} 1\times 10+3 \\ 1\times 10+2\overline{)1\times 10^2+5\times 10+8} \\ \underline{1\times 10^2+2\times 10} \\ 3\times 10+8 \\ \underline{3\times 10+6} \\ 2 \end{array}$ → $\begin{array}{r} 1\times x+3 \\ 1\times x+2\overline{)1\times x^2+5\times x+8} \\ \underline{1\times x^2+2\times x} \\ 3\times x+8 \\ \underline{3\times x+6} \\ 2 \end{array}$
(四) 說明「餘式」的限制：運算時先將被除式與除式依降冪排列，進行除法運算，直到餘式的次數比除式的次數低或餘式為 0。
(五) 下面以「$(4x^2+x-3)\div(x+2)$ 為例，說明如何幫助學生解題。
$\begin{array}{r} 4x-7 \\ x+2\overline{)4x^2+x-3} \\ \underline{4x^2+8x} \\ -7x-3 \\ \underline{-7x-14} \\ 11 \end{array}$
① $4x^2\div x=4x$
② $4x(x+2)=4x^2+8x$
③ $x-8x=-7x$
④ $-7x\div x=-7$
⑤每次降一項
⑥餘式的次數小於除式的次數
(六) 複習除法原理：被除式=除式×商式＋餘式</td></tr>
</table>

	(七) 底下以「已知多項式 A=ax^2+bx+c，多項式 B=$2x^2-x+1$。若多項式 A 除以 $(2x-1)$ 的商式為 $(3x+1)$，餘式為 3，請問多項式(A＋B)除以 $(2x-1)$ 的商式及餘式為何？」說明如何幫助學生解題： 多項式 B=$2x^2-x+1$除以 $(2x-1)$ 的商式為 x，餘式為 1。 依除法原理將 A、B 改寫為： A=$ax^2+bx+c=(2x-1)(3x+1)+3$……① B=$2x^2-x+1=(2x-1)\cdot x+1$ ……② ①＋②得到 A＋B= $(2x-1)\cdot x+1+(2x-1)(3x+1)+3$ $=(2x-1)(x+3x+1)+(1+3)$ $=(2x-1)(4x+1)+4$ 故得到商式為 $(4x+1)$，餘式為 4

<table>
<tr><td>題號</td><td colspan="3">19</td></tr>
<tr><td>內容領域</td><td>代數與函數</td><td>認知歷程向度</td><td>概念理解</td></tr>
<tr><td>學習內容</td><td colspan="3">A-8-6 一元二次方程式的意義：一元二次方程式及其解，具體情境中列出一元二次方程式。</td></tr>
<tr><td>試題內容</td><td colspan="3">19. 已知 $x=-3$ 是方程式 $(ax+1)(ax+2)=7x^2-x-10$ 的一個解，其中 a 為整數。則 $x=-3$ 也是下列哪個一元二次方程式的解？
① $(ax+1)(ax+2)=56$
② $(ax+1)(ax+2)=50$
③ $(ax+1)(ax+2)=-50$
④ $(ax+1)(ax+2)=-56$</td></tr>
<tr><td>選答率
選項</td><td colspan="3">答題反應比率（＊表正確答案）</td></tr>
<tr><td></td><td>整體</td><td>低分組</td><td>高分組</td></tr>
<tr><td>1*</td><td>0.48</td><td>0.20</td><td>0.87</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0.19</td><td>0.29</td><td>0.05</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0.18</td><td>0.28</td><td>0.05</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0.14</td><td>0.22</td><td>0.03</td></tr>
<tr><td>未作答</td><td>0.01</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>通過率</td><td>0.48</td><td>鑑別度</td><td>0.67</td></tr>
<tr><td>試題品質分析</td><td colspan="3">(一) 評量目標說明
本題給定一個含有未知數係數的一元二次方程式及其中一解，要求學生判斷該解亦為哪一個方程式的解，評量學生是否理解一元二次方程式及其解的意義。

(二) 選項及學生表現說明
1.本題鑑別度為 0.67，正確答案為選項 1，通過率為 48%，顯示四成五的學生已理解一元二次方程式及其解的意義。
2.有 19%的學生選擇選項 2(低分組有 29%)，這些學生可能等號右邊計算如下：
$7x^2-x-10$ 代入 $x=-3$ 得 $7\times9-3-10=50$，故選此答案。
3.有 18%的學生選擇選項 3(低分組有 28%)，這些學生可能等號右邊計算如下：
$7x^2-x-10$ 代入 $x=-3$ 得 $7\times(-9)+3+10=-50$，故選此答案。
4.有 14%的學生選擇選項 4(低分組有 22%)，這些學生可能等號右邊計算如下：
$7x^2-x-10$ 代入 $x=-3$ 得 $7\times(-9)-3+10=-56$，故選此答案。</td></tr>
<tr><td>教材地位分析</td><td colspan="3"><table>
<tr><td></td><td>先備的知識</td><td>本題所需的知識</td><td>延伸的知識</td></tr>
<tr><td>學習內容</td><td>無</td><td>A-8-6
一元二次方程式的意義：一元二次方程式及其解，具體情境</td><td>F-9-1
二次函數的意義：二次函數的意義；具體情境中列出兩量的</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

			中列出一元二次方程式。	二次函數關係。
補救教學建議	下面以「2、-5 是否為一元二次方程式 $x^2-7x+10=0$ 的解？」為例，說明如何幫助學生解題。 (一) 複習方程式解的意義。 將 $x=a$ 代入方程式之後，能讓等號成立，稱 a 為方程式的解。 一元一次方程式「$x-1=0$」， 將 $x=1$ 代入得到 $1-1=0$，會讓方程式成立， 所以「1」是方程式「$x-1=0$」的解； 將 $x=2$ 代入得到 $2-1\neq0$，方程式不成立， 所以「2」不是方程式「$x-1=0$」的解。 (二) 說明一元二次方程式的解。 一元二次方程式「$x^2-7x+10=0$」， 將 $x=2$ 代入得到 $2^2-7\times2+10=0$，會讓方程式成立， 所以「2」是一元二次方程式「$x^2-7x+10=0$」的解； 將 $x=-5$ 代入得到 $(-5)^2-7\times(-5)+10=70\neq0$，方程式不成立， 所以「-5」不是一元二次方程式「$x^2-7x+10=0$」的解。 (三) 說明「且」與「或」的意義。 2 的倍數：2、4、6、8、10；3 的倍數：3、6、9。 同時是 2 的倍數和 3 的倍數的數是 6，數學上稱 6 為 2 且 3 的倍數。 可以是 2 的倍數， 也可以是 3 的倍數的數有 2、3、4、6、8、9、10。數學上稱這些數為 2 或 3 的倍數。 (四) 進一步說明 $x^2-7x+10=0$ 的解。 若已知 $x^2-7x+10=(x-2)(x-5)$，則 $(x-2)(x-5)=0$，當 $x-2=0$，也就是 $x=2$ 代入方程式會讓等號成立，所以 2 是方程式的解；當 $x-5=0$，也就是 $x=5$ 代入方程式會讓等號成立，所以 5 也是方程式的解，所以 $(x-2)(x-5)=0$ 的解為「$x=2$ 或 $x=5$」。 (五) 再以「已知 $x=1$ 是方程式 $(ax-1)(x+2)=2x^2+3x+1$ 的一個解，請問另一解為何？」為例，說明如何幫助學生解題。 $(ax-1)(x+2)=2x^2+3x+1$ 代入 $x=1$，得 $(a-1)(1+2)=2+3+1$，$(a-1)\times3=6$，$a=3$ $(3x-1)(x+2)=2x^2+3x+1$，$3x^2+5x-2=2x^2+3x+1$，$x^2+2x-3=0$ $(x+3)(x-1)=0$，$x=-3$ 或 1，故另一根為 $x=-3$			

題號	20		
內容領域	代數與函數	認知歷程向度	解題思考
學習內容	A-8-7 一元二次方程式的解法與應用：利用因式分解、配方法、公式解一元二次方程式；應用問題；使用計算機計算一元二次方程式根的近似值。		
試題內容	20. 如下圖，$\overline{AB}=13$、$\overline{BC}=6$、$\overline{AD}=5$，且 $\angle A=\angle B=\angle DEC=90^\circ$。 求 $\overline{AE}$ 和 $\overline{EB}$ 的長度差為何？  ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9		
選答率 選項	答題反應比率（＊表正確答案）		
	整體	低分組	高分組
1	0.17	0.23	0.09
2*	0.45	0.28	0.69
3	0.19	0.25	0.11
4	0.19	0.24	0.11
未作答	0.01		
通過率	0.45	鑑別度	0.42
試題品質分析	**(一) 評量目標說明** 本題給定含有直角的梯形及直角三角形的幾何圖形，要求學生算出兩長度的差，評量學生應用畢氏定理列式、解一元二次方程式的能力。 **(二) 選項及學生表現說明** 1.本題鑑別度為 0.42，正確答案為選項 2，通過率為 45%，顯示超過四成的學生已具備應用畢氏定理列式、解一元二次方程式的能力。 2.有 17%的學生選擇選項 1(低分組有 23%)，這些學生可能在應用畢氏定理列式及解方程式上的能力仍有不足。 3.有 19%的學生選擇選項 3(低分組有 25%)，這些學生可能在應用畢氏定理列式及解方程式上的能力仍有不足。 4.有 19%的學生選擇選項 4(低分組有 24%)，這些學生可能在應用畢氏定理列式及解方程式上的能力仍有不足。		

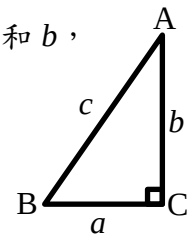
教材地位分析		先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
	學習內容	A-7-3 一元一次方程式的解法與應用：等量公理；移項法則；驗	A-8-7 一元二次方程式的解法與應用：利用因式分解、配方法、公	

		算；應用問題。	式解一元二次方程式；應用問題；使用計算機計算一元二次方程式根的近似值。	

補救教學建議

(一) 複習畢氏定理。該題重點在解一元二次方程式，因此畢氏定理基本複習即可。

在直角三角形中，假設斜邊長度為 c，兩股長度分別為 a 和 b，則 $c^2=a^2+b^2$。



(二) 複習利用因式分解解一元二次方程式。

1.因式分解解一元二次方程式概念。

若兩數 A 跟 B 的乘積為 0，則 A 等於 0 或 B 等於 0。因此一元二次方程式 $(ax+b)(cx+d)=0$ 的解有兩個，分別為一元一次方程式 $ax+b=0$ 的解或 $cx+d=0$ 的解，亦即解為 $x=-\frac{b}{a}$ 或 $x=-\frac{d}{c}$。

2.舉例說明。

利用因式分解求 $2x^2-3x-5=0$ 的解。

常數項可分解成 $-5=(-1)\times5=1\times(-5)$

$$\begin{array}{cc} x & -1 \\ 2x & 5 \\ \hline 5x & -2x=3x \end{array} \qquad \begin{array}{cc} x & 5 \\ 2x & -1 \\ \hline -x & +10x=9x \end{array} \qquad \begin{array}{cc} x & 1 \\ 2x & -5 \\ \hline -5x & +2x=-3x \end{array} \qquad \begin{array}{cc} x & 5 \\ 2x & -1 \\ \hline x & -10x=-9x \end{array}$$

解：$2x^2-3x-5$ 的因式分解為 $(x+1)(2x-5)$，

因此方程式 $2x^2-3x-5=0$

可寫成 $(x+1)(2x-5)=0$ 有兩個解，

分別為 $x+1=0$ 或 $2x-5=0$ 的解，亦即解為 $x=-1$ 或 $x=\frac{5}{2}$。

(三) 以本題目說明解題步驟

假設 $\overline{AE}=x$、$\overline{EB}=13-x$

直角三角形→畢氏定理

$\overline{DE}^2=5^2+x^2$，$\overline{CE}^2=6^2+(13-x)^2$，$\overline{DC}^2=13^2+(6-5)^2=\overline{DE}^2+\overline{CE}^2$

$13^2+(6-5)^2=5^2+x^2+6^2+(13-x)^2$

$x^2-13x+30=0$

$(x-3)(x-10)=0$

$x=3$ 或 $x=10$

∴相差 10-3=7

題號	21		
內容領域	代數與函數	認知歷程向度	程序執行
學習內容	A-8-5 因式分解的方法：提公因式法；利用乘法公式與十字交乘法因式分解。		
試題內容	21. 已知 $(3x-5)(3x-1)+(1-3x)(2x+a)=(x-2)(x-1)-(1-x)(2x-b)$，其中 a 、b 均為整數。求 $a+b=?$ ① 3 ② 5 ③ -3 ④ -5		
選答率 選項	答題反應比率（＊表正確答案）		
	整體	低分組	高分組
1	0.17	0.22	0.11
2	0.28	0.34	0.17
3	0.32	0.29	0.32
4*	0.23	0.15	0.39
未作答	0.01		
通過率	0.23	鑑別度	0.24
試題品質分析	**(一) 評量目標說明** 本題給定一個含有三個文字符號的等式，要求學生算出其中兩數值的和，評量學生是否掌握提公因式進行多項式因式分解的能力。 **(二) 選項及學生表現說明** 1.本題鑑別度為 0.24，正確答案為選項 4，通過率為 23%，顯示超過二成的學生已掌握提公因式進行多項式因式分解的能力。 2.有 17%的學生選擇選項 1(低分組有 22%)，這些學生可能在提公因式上的後續變號產生忽略的狀況，以至於計算錯誤。 $(3x-5)(3x-1)+(1-3x)(2x+a)=(3x-5)(3x-1)-(3x-1)(2x+a)$ $=(3x-1)(3x-5-2x+a)=(3x-1)(x-5+a)$ $(x-2)(x-1)-(1-x)(2x-b)=(x-2)(x-1)+(x-1)(2x-b)$ $=(x-1)(x-2+2x-b)$ $=(x-1)(3x-2-b)$ $\therefore -5+a=-1\Rightarrow a=4,-2-b=-1\Rightarrow b=-1 \quad \therefore a+b=3$ 3.有 28%的學生選擇選項 2(低分組有 34%)，這些學生可能在提公因式上的變號概念正確，但在兩式的對照上產生錯誤，以至於無法正確進行計算。		

$(3x-5)(3x-1)+(1-3x)(2x+a)=(3x-5)(3x-1)-(3x-1)(2x+a)$

$=(3x-1)(3x-5-2x-a)=(3x-1)(x-5-a)$

$(x-2)(x-1)-(1-x)(2x-b)=(x-2)(x-1)+(x-1)(2x-b)$

$=(x-1)(x-2+2x-b)$

$=(x-1)(3x-2-b)$

$\therefore 5-a=1\Rightarrow a=4, 2-b=1\Rightarrow b=1 \quad \therefore a+b=5$

4.有 32%的學生選擇選項 3(低分組有 29%)，這些學生可能在提公因式上的變號概念部分錯誤，再加上兩式的對照上亦產生錯誤，以至於無法正確進行計算。

$(3x-5)(3x-1)+(1-3x)(2x+a)=(3x-5)(3x-1)-(3x-1)(2x+a)$

$=(3x-1)(3x-5-2x+a)=(3x-1)(x-5+a)$

$(x-2)(x-1)-(1-x)(2x-b)=(x-2)(x-1)+(x-1)(2x-b)$

$=(x-1)(x-2+2x-b)$

$=(x-1)(3x-2-b)$

$\therefore 5+a=1\Rightarrow a=-4, 2-b=1\Rightarrow b=1 \quad \therefore a+b=-3$

教材地位分析

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容		A-8-5 因式分解的方法：提公因式法；利用乘法公式與十字交乘法因式分解。 備註 只處理整係數 ax^2+bx+c 的因式分解或與乘法公式直接相關者，不處理一般二元齊次或二元非齊次式但有一次介入者。	

補救教學建議

(一) 複習因、倍式關係。

$$\begin{array}{r} x+1 \\ x+3\,\overline{)\,x^2+4x+3} \\ \underline{x^2+3x} \\ x+3 \\ \underline{x+3} \\ 0 \end{array}$$

x^2+4x+3 被 $x+3$ 整除

所以 x^2+4x+3 與 $x+3$ 的關係是：

$x+3$ 是 x^2+4x+3 的因式

x^2+4x+3 是 $x+3$ 的倍式

同樣的，x^2+4x+3 能被 $x+1$ 整除

乘積展開

$x^2+4x+3=(x+3)(x+1)$

因式分解

$x+3$ 和 $x+1$ 都是 x^2+4x+3 的因式；

x^2+4x+3 是 $x+3$ 和 $x+1$ 的倍式。

(二) 複習提出公因式的方法分解二次多項式。

1.公因式

$x^2+4x+3=(x+3)(x+1)$ ， $x^2+3x+2=(x+2)(x+1)$

$x+1$ 是 x^2+4x+3 的因式，也是 x^2+3x+2 的因式，

則 $x+1$ 是 x^2+4x+3 和 x^2+3x+2 的公因式

2.提公因式法做因式分解

考慮 $(x+1)(2x-3)+(x-3)(2x-3)$，利用分配律 $ac+bc=(a+b)c$ 可得 $(x+1)(2x-3)+(x-3)(2x-3)=[(x+1)+(x-3)](2x-3)=(2x-2)(2x-3)$，此即為 $(x+1)(2x-3)+(x-3)(2x-3)$ 的一個因式分解。

3.利用變號提公因式法做因式分解

考慮 $(x+1)(2x-3)-(x-3)(3-2x)$

發現 $(2x-3)$ 與 $(3-2x)$ 似乎有特別的關係，$(2x-3)+(3-2x)=0$，也就是 $(2x-3)$ 與 $(3-2x)$ 互為相反數，說明了 $(2x-3)=-(3-2x)$

所以

$$\begin{aligned}&(x+1)(2x-3)-(x-3)(3-2x)\\&=(x+1)(2x-3)-(x-3)[-(2x-3)]\\&=(x+1)(2x-3)+(x-3)(2x-3)\\&=(2x-3)[(x+1)+(x-3)]\\&=(2x-3)(2x-2)\end{aligned}$$

(三) 以本題目說明解題步驟。

1.利用變號提公因式

左式

$(3x-5)(3x-1)+(1-3x)(2x+a)=(3x-5)(3x-1)-(3x-1)(2x+a)$

$=(3x-1)(3x-5-2x-a)=(3x-1)(x-5-a)$

右式

$(x-2)(x-1)-(1-x)(2x-b)=(x-2)(x-1)+(x-1)(2x-b)$

$=(x-1)(x-2+2x-b)=(x-1)(3x-2-b)$

2.左式=右式

$(3x-1)(x-5-a)=(x-1)(3x-2-b)$

3.因式分解後括號內的對應

$(3x-1)(x-5-a)=(x-1)(3x-2-b)$

$\therefore -5-a=-1\Rightarrow a=-4, -2-b=-1\Rightarrow b=-1$

$\therefore a+b=-5$

題號	22		
內容領域	代數與函數	認知歷程向度	程序執行
學習內容	F-8-1 一次函數：透過對應關係認識函數（不要出現 $f(x)$的抽象型式）、常數函數（$y=c$）、一次函數（$y=ax+b$）。		

試題內容

22. LET 辦理 T-shirt 特賣會，會場中顧客只需買一個環保購物袋裝 T-shirt，下表是方便顧客結帳用的「購買 T-shirt 件數」以及「環保購物袋和 T-shirt 的總費用」對照表，已知顧客買了 x 件 T-shirt 時，結帳需付 y 元，且 y 是 x 的一次函數。
假設阿明買了 6 件 T-shirt，請問阿明要付多少元？

購買 T-shirt 件數 (x)	1	2	3	⋯
環保購物袋和 T-shirt 總費用 (y)	199	348	497	⋯

① 894

② 944

③ 994

④ 1044

選答率 / 選項	答題反應比率（＊表正確答案）		
	整體	低分組	高分組
1	0.14	0.19	0.07
2*	0.55	0.33	0.82
3	0.19	0.28	0.07
4	0.13	0.19	0.04
未作答	0.01		
通過率	0.55	鑑別度	0.49

試題品質分析

(一) 評量目標說明

本題給定一個含有一次函數的情境題，要求學生算出購買一定量後所需付的價錢，評量學生是否掌握一次函數的解題。

(二) 選項及學生表現說明

1.本題鑑別度為 0.49，正確答案為選項 2，通過率為 55%，顯示超過五成的學生已具備掌握一次函數的解題。

2.有 14%的學生選擇選項 1(低分組有 19%)，這些學生掌握計算 1 件 T-shirt 的價格，但在最後的總價上可能未加上環保購物袋的價格。

3.有 19%的學生選擇選項 3(低分組有 28%)，這些學生掌握計算 1 件 T-shirt 的價格，但在最後的總價上可能多加了環保購物袋價格的數量。

4.有 13%的學生選擇選項 4(低分組有 19%)，這些學生這些學生掌握計算 1 件 T-shirt 的價格，但在最後的總價上可能多加了環保購物袋價格的數量。

<table>
<tr><td rowspan="2">教材地位分析</td><td></td><td>先備的知識</td><td>本題所需的知識</td><td>延伸的知識</td></tr>
<tr><td>學習內容</td><td>A-7-6
二元一次聯立方程式的幾何意義：ax+by=c 的圖形；y=c 的圖形（水平線）；x=c 的圖形（鉛垂線）；二元一次聯立方程式的解只處理相交且只有一個交點的情況。</td><td>F-8-1
一次函數：透過對應關係認識函數（不要出現 $f(x)$ 的抽象型式）、常數函數（$y=c$）、一次函數（$y=ax+b$）。</td><td>F-9-1
二次函數的意義：二次函數的意義；具體情境中列出兩量的二次函數關係。</td></tr>
<tr><td>補救教學建議</td><td colspan="4">(一) 複習一次函數關係式 $y=ax+b$。
可舉情境例，透過觀察對應關係的規律性，進而表徵為$y=ax+b$，認識一次函數。例如:下表是攝氏溫度與華氏溫度的對應表。
<table><tr><td>攝氏溫度(℃)</td><td>0</td><td>10</td><td>20</td><td>30</td><td>40</td><td>50</td></tr><tr><td>華氏溫度(℉)</td><td>32</td><td>50</td><td>68</td><td>86</td><td>104</td><td>122</td></tr></table>觀察出「攝氏每增加 10 度，華氏增加 18 度」，
也就是「攝氏每增加 1 度，華氏增加 1.8 度」，
而且當攝氏 0 度時，華氏 32 度。
因此以 x℃代表攝氏溫度、y℉代表華氏溫度，攝氏溫度與相對應的華氏溫度之關係$y= 1.8x + 32$，而關係如$y = 1.8x + 32$ 稱為一次函數。
(二) 複習解二元一次聯立方程式_情境為例子。
1.加減消去法
有兩家人去動物園玩，小明家買了 5 張全票和 2 張優待票，共花了 1300 元。小華家買了 3 張全票和 2 張優待票，共花了 900 元。
兩家一比較，小明家比小華家多 2 張全票，花費則多了 400 元，那麼 1 張全票就是 200 元了。
如果寫成關係式，可假設 1 張全票 x 元，1 張優待票 y 元，那麼小明家 $5x+2y=1300$，小華家 $3x+2y=900$
將上述兩個二元一次方程式列在一起，就成了二元一次聯立方程式
$\begin{cases}5x+2y=1300\\3x+2y=900\end{cases}$
「小明家比小華家多 2 張全票，花費則多了 400 元」就是兩式相減得比較結果
也就是 $2x=400$ $x=200$
2.代入消去法
小明一家人去動物園玩，買了 5 張全票和 2 張優待票，共花了 1300 元。忘了 1 張全票是多少元，但知道 1 張優待票比 1 張全票便宜 50 元。
也就是如果將 2 張優待票全換成全票，7 張全票總花費將會是 1300+100=1400 元。</td></tr>
</table>

如果寫成關係式，可假設 1 張全票 x 元，1 張優待票 y 元，那麼小明家 $5x+2y=1300$ ， $y=x-50$

將上述兩個二元一次方程式列在一起，就成了二元一次聯立方程式

$$\begin{cases}5x+2y=1300\\ y=x-50\end{cases}$$

優待票由「全票-50」取代

5 張全票+2 張(全票−50)=1300

⇨ $5x+2(x-50)=1300$

$5x+2x=1300+100$ ⇦當優待票改買成全票，總花費將多 100 元

$7x=1400$

$x=200$

(三) 以本題目說明解題步驟。

x(購買 T-shirt 件數)	1	2	3
y(環保購物袋和 T-shirt 總費用)	199	348	497

想法一：觀察出「每增加 1 件，費用增加 149」，因此 1 件 T-shirt 價格是 149 元，1 個環保購物袋的費用是 199−149=50 元。因此以 $y=149x+50$。

想法二：列出一次函數的通式，先使用二元一次聯立方程式，算出 1 件 T-shirt 及 1 個環保購物袋的價格，再完成符合該題的一次函數關係式。

$y=ax+b$　a 是 1 件 T-shirt 的價格，b 是 1 個環保購物袋的價格

$$\begin{cases}199=a+b\\ 348=2a+b\end{cases}$$

透過加減消去法　得　$a=149$　$b=50$　$\therefore y=149x+50$

題號	23		
內容領域	代數與函數	認知歷程向度	解題思考
學習內容	F-8-1 一次函數：透過對應關係認識函數（不要出現 $f(x)$的抽象型式）、常數函數（$y=c$）、一次函數（$y=ax+b$）。		
試題內容	23. 阿宏到觀光果園採草莓，不管有沒有採草莓，入園都要收門票 50 元。已知阿宏採了一些草莓，結帳（含門票）要付 600 元。阿宏想要再加買 0.5 公斤的草莓，老闆說需再多付 100 元。假設採草莓總費用（含門票）是 y 元、購買草莓的重量是 x 公斤，則 y 是 x 的一次函數。下列何者為此一次函數的關係式？ ① $y=200x+50$ ② $y=200x-50$ ③ $y=100x+50$ ④ $y=100x-50$		
選答率 / 選項	答題反應比率（＊表正確答案）		
	整體	低分組	高分組
1*	0.43	0.20	0.79
2	0.13	0.21	0.05
3	0.33	0.42	0.13
4	0.10	0.17	0.02
未作答	0.01		
通過率	0.43	鑑別度	0.59
試題品質分析	**(一) 評量目標說明** 本題給定一個含有一次函數的情境題，要求學生列出符合情境的函數關係式，評量學生是否理解題意並列出函數關係式。 **(二) 選項及學生表現說明** 1.本題鑑別度為 0.56，正確答案為選項 1，通過率為 41%，顯示超過四成的學生已理解題意並列出函數關係式。 2.有 13%的學生選擇選項 2(低分組有 21%)，這些學生雖然掌握了 1 公斤 100 元，但可能將 y 誤解為不含門票，因此在函數關係式的列式上產生錯誤。 3.有 34%的學生選擇選項 3(低分組有 41%)，這些學生雖具有列出函數關係式的能力，但在題意上可能未充分掌握，將 0.5 公斤所付 100 元，理解成 1 公斤 100 元。 4.有 11%的學生選擇選項 4(低分組有 17%)，這些學生可能在 1 公斤 100 元，y 有含門票上未能充分掌握，因此列錯函數關係式。		
教材地位分析			

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	A-7-6 二元一次聯立方程	F-8-1 一次函數：透過對應	F-9-1 二次函數的意義：二

<table>
<tr><td></td><td></td><td>式的幾何意義：ax+by=c 的圖形；y=c 的圖形（水平線）；x=c 的圖形（鉛垂線）；二元一次聯立方程式的解只處理相交且只有一個交點的情況。</td><td>關係認識函數（不要出現 $f(x)$ 的抽象型式）、常數函數（$y=c$）、一次函數（$y=ax+b$）。</td><td>次函數的意義；具體情境中列出兩量的二次函數關係。</td></tr>
<tr><td>補救教學建議</td><td colspan="4">(一) 複習一次函數關係式 y=ax+b。
可舉情境例，透過觀察對應關係的規律性，進而表徵為$y=ax+b$，認識一次函數。例如:下表是攝氏溫度與華氏溫度的對應表。
<table><tr><td>攝氏溫度(℃)</td><td>0</td><td>10</td><td>20</td><td>30</td><td>40</td><td>50</td></tr><tr><td>華氏溫度(℉)</td><td>32</td><td>50</td><td>68</td><td>86</td><td>104</td><td>122</td></tr></table>觀察出「攝氏每增加 10 度，華氏增加 18 度」，
也就是「攝氏每增加 1 度，華氏增加 1.8 度」，
而且當攝氏 0 時，華氏 32。
因此以 x℃代表攝氏溫度、y℉代表華氏溫度，攝氏溫度與相對應的華氏溫度之關係y= 1.8x + 32，進而介紹關係如y = 1.8x + 32 稱為一次函數。
(二) 以本題目說明解題步驟。
「0.5 公斤的草莓，需付 100 元」，也就是「每 1 公斤的草莓，需付 200 元」，門票為 50 元。而草莓重量是 x 公斤時、草莓的總費用(含門票)是 y 元，總費用與草莓重量之關係 y=100x+50</td></tr>
</table>

題號	24		
內容領域	代數與函數	認知歷程向度	程序執行
學習內容	F-8-2 一次函數的圖形：常數函數的圖形；一次函數的圖形。		
試題內容	24. 在直角坐標平面上，已知某函數 $y=ax+b$ 的圖形通過 $(-11,22)$ 、$(33,22)$ ，其中 a 、b 均為整數。 下列關於這個函數 $y=ax+b$ 的敘述何者正確？ ① 此函數的圖形與 x 軸有一個交點，與 y 軸也有一個交點 ② 此函數的圖形是平行 y 軸的直線 ③ 此函數的圖形會過 $(0,0)$ ④ 此函數的圖形會過 $(110,22)$		

選答率 選項	答題反應比率（＊表正確答案）		
	整體	低分組	高分組
1	0.18	0.28	0.05
2	0.21	0.30	0.07
3	0.17	0.24	0.06
4*	0.42	0.17	0.81
未作答	0.01		
通過率	0.42	鑑別度	0.65

試題品質分析

(一) 評量目標說明

本題給定兩點坐標，要求學生判斷選項的正確性，評量學生是否掌握一次函數在直角坐標平面上的圖形。

(二) 選項及學生表現說明

1.本題鑑別度為 0.65，正確答案為選項 4，通過率為 42%，顯示四成的學生已掌握一次函數在直角坐標平面上的圖形。

2.有 18%的學生選擇選項 1(低分組有 28%)，這些學生可能認為一次函數的圖形既然是一直線，一定會與兩軸皆有交點的迷失概念。

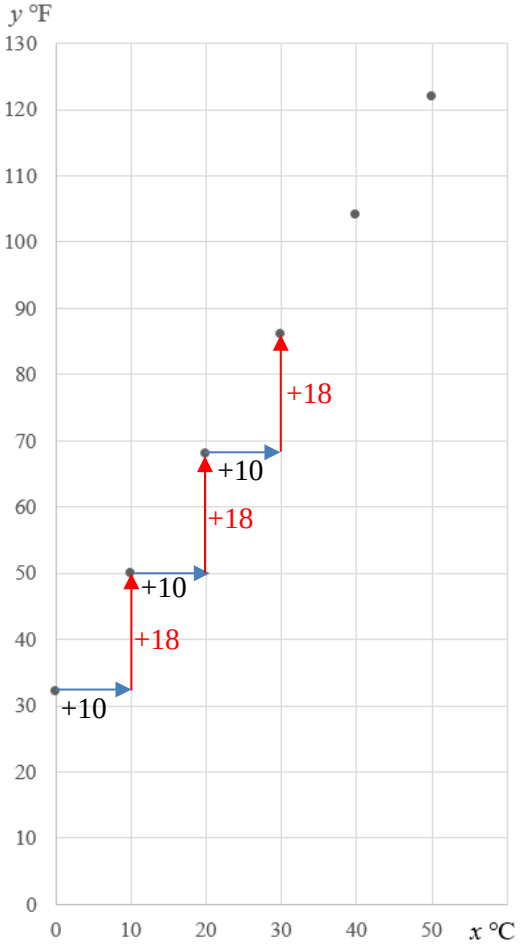
3.有 21%的學生選擇選項 2(低分組有 30%)，這些學生可能從兩點有相同的 y 坐標，而認為函數圖形會平行 y 軸的迷失概念。

4.有 17%的學生選擇選項 3(低分組有 24%)，這些學生可能在(33,22)點的位置誤認為(22,33)點的位置，因此判斷該一次函數通過原點。

教材地位分析

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容	A-7-6 二元一次聯立方程式的幾何意義：ax+by=c 的圖形；y=c 的圖形（水平線）；x=c 的圖形（鉛垂線）；二元一次聯立方程式的解只處理相交且只有	F-8-2 一次函數的圖形：常數函數的圖形；一次函數的圖形。	F-9-1 二次函數的意義：二次函數的意義；具體情境中列出兩量的二次函數關係。 F-9-2 二次函數的圖形與極值：二次函數的相

		一個交點的情況。 G-7-1 平面直角坐標系：以平面直角坐標系、方位距離標定位置；平面直角坐標系及其相關術語（縱軸、橫軸、象限）。		關名詞（對稱軸、頂點、最低點、最高點、開口向上、開口向下、最大值、最小值）；描繪 $y=ax^2$、$y=ax^2+k$、$y=a(x-h)^2$、$y=a(x-h)^2+k$ 的圖形；對稱軸就是通過頂點（最高點、最低點）的鉛垂線；$y=ax^2$ 的圖形與 $y=a(x-h)^2+k$ 的圖形的平移關係；已配方好之二次函數的最大值與最小值。
補救教學建議	(一) 複習一次函數表格化及代數式的表徵。 可舉情境例，透過觀察對應關係的規律性，進而表徵為$y=ax+b$，認識一次函數。例如:下表是攝氏溫度與華氏溫度的對應表。 1.表格表徵的觀察。 +10 +10 +10 +10 +10 攝氏溫度(℃) 0 10 20 30 40 50 … 華氏溫度(℉) 32 50 68 86 104 122 … +18 +18 +18 +18 +18 觀察出「攝氏每增加 10 度，華氏增加 18 度」， 也就是「攝氏每增加 1 度，華氏增加 1.8 度」， 而且當攝氏 0 時，華氏 32。 2.代數式表徵的呈現。 因此以 x℃代表攝氏溫度、y℉代表華氏溫度，攝氏溫度與相對應的華氏溫度之關係$y= 1.8x + 32$，關係如$y = 1.8x + 32$ 稱為一次函數。 (二) 複習一次函數的圖形表徵。 1.一次函數的圖形表徵 從下方圖表，可觀察到點到下一個點：在 x 軸每增加 10，在 y 軸上則增加 18，也就是 x 值固定的改變之下，y 值的變化是固定的。 因此，所有符合$y = 1.8x + 32$ 的點在圖形上形成一直線。 所以在平面直角坐標上的一次函數圖形會是一直線。			



2.各式一次函數的圖形特性

透過描繪各式一次函數的圖形，了解圖形的特性

y=常數　為一條水平線

y=ax　圖形必通過原點

y=ax+b　(b≠0)　為一條直線，但非水平線和鉛垂線

一次函數通在兩點，則可透過解聯立方程式完成。

(三) 以本題目說明解題步驟。

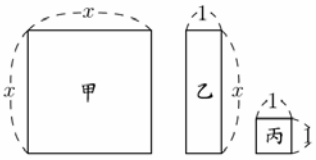
該一次函數通過(-11,22)、(33,22)，若在直角坐標平面上畫一直線觀察，必為一條水平線，也就是此函數為 y=22。

則其圖形①與 y 軸有一個交點，但與 x 軸沒有交點

②平行 x 軸的直線

③不會通過(0,0)

④必通過 y 坐標為 22 的任一點

題號	25		
內容領域	代數與函數	認知歷程向度	解題思考
學習內容	A-8-5 因式分解的方法：提公因式法；利用乘法公式與十字交乘法因式分解。		
試題內容	25. 如下圖，數學課堂時，南老師提供了甲、乙、丙三種紙片給同學拼成長方形，其中邊長 $x=\sqrt{10}$。  已知承洙使用 2 個甲種紙片、7 個乙種紙片、6 個丙種紙片拼成長方形。 請問承洙拼出長方形的周長最接近下列何者？ ① 14 ② 29 ③ 47 ④ 84		

選答率 / 選項	答題反應比率（＊表正確答案）		
	整體	低分組	高分組
1	0.15	0.21	0.09
2*	0.36	0.24	0.55
3	0.31	0.30	0.28
4	0.16	0.24	0.06
未作答	0.02		
通過率	0.36	鑑別度	0.31

試題品質分析

(一) 評量目標說明

本題給定含有文字符號紙片的情境題，要求學生求出長寬並估算周長，評量學生應用多項式因式分解及估算的能力。

(二) 選項及學生表現說明

1.本題鑑別度為 0.31，正確答案為選項 2，通過率為 36%，顯示超過三成五的學生已具備應用多項式因式分解及估算的能力。

2.有 15%的學生選擇選項 1(低分組有 21%)，這些學生些學生可能未清楚題意，直接計算長與寬和(2x+3+x+2)的概略值。

3.有 31%的學生選擇選項 3(低分組有 30%)，這些學生可能未清楚題意，直接計算面積($2x^2$+7x+6)的概略值。

4.有 16%的學生選擇選項 4(低分組有 24%)，這些學生可能未清楚題意，做了錯誤的選擇。

教材地位分析

	先備的知識	本題所需的知識	延伸的知識
學習內容		A-8-5 因式分解的方法：提	

				公因式法；利用乘法公式與十字交乘法因式分解。 備註 只處理整係數 ax^2+bx+c 的因式分解或與乘法公式直接相關者，不處理一般二元齊次或二元非齊次式但有一次介入者。	
補救教學建議	(一) 複習觀察係數以十字交乘法做二次多項式因式分解。 1.以二次項係數為 1、常數項為質數為例。 因式分解 x^2+3x+2　常數項的 $2=1\times2$ x　2 × x　1 $x+2x=3x$　由此可知 $x^2+3x+2=(x+2)(x+1)$ 2.以二次項係數為質數、常數項為質數為例。 因式分解 $2x^2+5x+3$　二次項係數的 $2=1\times2$，常數項的 $3=1\times3=3\times1$ 2x　1　　2x　3 ×　　× x　3　　x　1 $6x+x=7x$　　$2x+3x=5x$ 由此可知 $2x^2+5x+3=(2x+3)(x+1)$ 3.以二次項係數為合數、常數項為質數為例。 因式分解 $6x^2+11x+3$ 二次項係數的 $6=1\times6=2\times3$，常數項的 $3=1\times3=3\times1$ x　1　　x　3　　2x　1　　2x　3 ×　　×　　×　　× 6x　3　　6x　1　　3x　3　　3x　1 $3x+6x=9x$　　$x+9x=10x$　　$6x+3x=9x$　　$2x+9x=11x$ 由此可知 $6x^2+11x+3=(2x+3)(3x+1)$ 4.以二次項係數為合數、常數項為合數為例。 因式分解 $4x^2+4x-15$　二次項係數的 $4=1\times4=2\times2$， 常數項的 $-15=(-1)\times15=(-3)\times5=(-5)\times3=(-15)\times1$ $=1\times(-15)=3\times(-5)=5\times(-3)=15\times(-1)$ x　-1　　•••　　2x　-3 ×　　　　× 4x　15　　2x　5 $15x-4x=11x$　　$10x-6x=4x$ 由此可知 $4x^2+4x-15=(2x-3)(2x+5)$				

	(二) 複習利用十分逼近法求$\sqrt{a}$的近似值。 我們知道$\sqrt{10}\times\sqrt{10}=10$，而且$3\times3=9$、$4\times4=16$，所以$3<\sqrt{10}<4$。 接著在 3 與 4 之間分 10 等分，這樣就可以找到$\sqrt{10}$更精準的值。 而$3.1\times3.1=9.61$、$3.2\times3.2=10.24$，所以$3.1<\sqrt{10}<3.2$。 接著在 3.1 與 3.2 之間分 10 等分，...以此類推，越找越接近$\sqrt{10}$精準的值。 (三) 以本題目說明解題步驟。 因式分解$2x^2+7x+6$ 二次項係數的$2=1\times2$，常數項的$6=1\times6=6\times1=2\times3=3\times2$ x 1 / 2x 6 / 6x+2x=8x x 6 / 2x 1 / x+12x=13x x 2 / 2x 3 / 3x+4x=7x x 3 / 2x 2 / 2x+6x=8x 由此可知$2x^2+7x+6=(x+2)(2x+3)$ 周長$=2\times(x+2+2x+3)=6x+10=6\sqrt{10}+10$ $3.1<\sqrt{10}<3.2$ $\therefore 28.6<6\sqrt{10}+10<29.2$