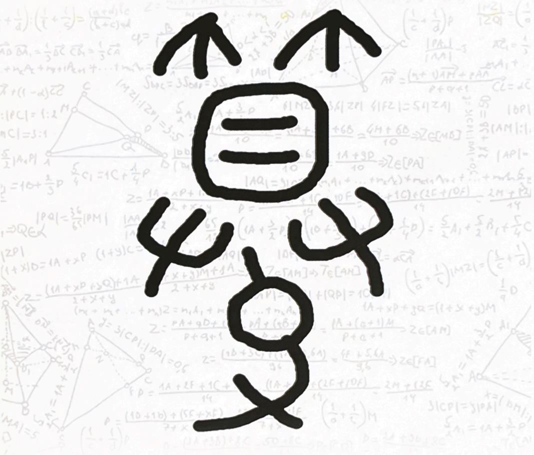
數學新世界

New Horizon of Mathematics

核心素養

國中階段課程內容



數學演算 根生新世界

施皓耀 撰

108 年 1 月 8 日

二、國民中學教育階段

國中階段特別說明

針對國中階段的學習內容條目，敘寫方式均以三大段落分析說明，如下所述。

第一段落：本段落說明該條目的先備知識、該年級相關題目、以及其後續概念發展的條目。其中涵蓋的細項說明如下:「先備」是指該條目之先前的相關學習內容條目，以前一年為主;「連結」則表達同年級相關的學習內容條目;「後續」為往後概念發展的條目，以後一年之學習內容為主。

第二段落：本段落陳述該條目的主題內容與限制、教師的教學策略與方法、學生的錯誤類型與迷思概念。其中涵蓋的細項說明如下:「基本說明」乃描述該條目的教學目標，包含數學概念，定義說明、定理、習慣性用法;「條目範圍」則敘述教學之合理範圍;「釋例」以陳述教師的教學為主，包括教學注意要點、多種解法、教學策略、重要釋例;「錯誤類型」為表達學生的迷思概念，包括出現頻率高的認知與錯誤類型。

第三段落：本段落提供評量注意要點、探索與奠基建議活動。其中涵蓋的細項說明如下:「評量」描寫評量的注意要點及限制;「探索」則會提供該條目課程延伸之學習活動，包括探索活動、奠基活動、以及操作性教學活動建議。

最後，倘若該條目主題的段落細項並無相關內容可供表達，則省略不寫。

國小的數的理解應該要具有下列的認知：

一、 數字是用來描述兩事物之間的倍數關係。基於數字對量詞（基準量）的作用而形成數量。所有看得到的數量都會有一個看得到的基準量。

二、 基於對自然數的理解，從分（減）與和（加）的整倍數需求延伸到非整倍數的需求而擴展到分數與小數，其中，分數的基本想法為：先分再數（ㄕㄨˇ）的先縮小再放大。為了計算結果的呈現，也出現了〝零〞這個數字。

三、 就自然數之間，也存在著誰是誰的幾倍這樣的概念，(我覺得，不該把〝1〞列為因數）也就是所謂的因倍數；此時，質數的特點，〝不可分解數〞,便形成所有自然數的構成基礎，因為數是倍的概念，自然而然的，數的解構（分解）是以乘除法的角度來思考。

四、 小數的引進是為了呼應十進位的記錄方式。

五、 在小學的計算問題基本上是以〝已知數的計算〞為範疇。因此，通常會將注意力放在計算的結果。

國中階段

一、 到了國中階段，有關事物與事物間所隱含〝互相抵消〞的性質，如〝向左、向右的移動〞,〝盈、虧的現象〞,在國小階段是分別給予適當的語詞。來到國中，我們引入〝正〞、〝負〞的數來描述事物之間可以相互抵消的關係，並且簡化了指稱事物的語詞，如：向左等於負的向右。此時，我們將整數、分數擴充到正、負整數與分數。就結構或計算的思維，無論是整數或分數，本質都是整數，只要適當的選取單位量，皆可看成是整數的運算。

二、 到國中階段的運算開始〝正式〞納入未知數，而形成較為一般型的方程式。國小，我們常會說〝未知數的××〞= 一些數字的計算，因為〝未知數的××〞常被視而不見或沒有被呈現而不被看成是個方程式。

在進入方程式及求解的過程中，我們既有的整數、分數已不敷使用，進而有各式各樣的〝非分數〞之數的出現，如，因多項式而生的根號數，因幾何物件（圓）而生的π，…。

三、 國小所學的分數（包括整數）直接被稱為 rational（ratio）number，國中的根號數或 pi（π）被稱為非分數，irrational number；但是，我們卻將之譯成有理數與無理數，國中所引入的無理數符號所代表的數字大小在認知上並不是那麼明確，因此，(如同比較分數的大小)，我們要透過不同的手段來理解那些無理數的大小，例如有理化分母等。當然，這些無理數所扮演的角色還是倍。

四、 當一件事物的整體由許多項目加以描述的時候，此事物的形態開始有了不同描述樣貌，如：

一個歷程—數列（等差、等比）

一個歷程的結果—級數（數列和）

透過比所呈現的概念，如：面積、速度、密度、形狀、口味，…（通常可表示為向量)；比所呈現的標的可以看成〝向量空間〞的雛形。比，可以說是數學最核心的知識之一。

五、 在描述一個數字的大小時，透過 10 進位的位數來呈現，進而，由指數律搭配數字的倍數，形成科學記號並延伸至指對數函數。

六、 方程式與函數

在國中階段符號數（非特定數)，或稱未知數被寫入算式並藉由聯繫其他算式而形成方程式，接著，透過一連串的等價運算而解開符號數的面紗。整個數學知識就是一個符應問題情境的運算思維，亦即，利用情境所賦予未知數的意義以數學運算的方式呈現，並透過運算的算則獲得必然的結論。

一開始，未知數的意義以算式的型態表現時，我們通常以自身的〝直覺〞或〝經驗〞加以猜測，這種猜測在簡單的算式情況下是可行的，但，在較為複雜的算式，或需要同時處理一些算式

時，〝猜測〞必需更有〝策略〞或系統化的思維（遞回的思維）。為了提供更直觀的訊息，我們常將問題以表列或繪圖的方式來呈現，來幫助我們對未知數的理解，整個解方程的活動可以用猜測、估算（製表、繪圖）以及精算（代數解方程）來概括。當問題的情境涵蓋了描述變化的需求時，方程式的思維轉變成函數的思維。方程式與函數的差異主要在於未知數之間是否有依存的關係，如果有依存的關係，這些未知數將因變化的需求而被命名為自變數與依變數了。（很可惜的是，現行的數學學習過度傾向代數方法的解方程，而弱化了猜測的直觀素養。）

七、 再談列方程

一個算式可以看成是一連串操作的結果。因此，在列方程式的時候，我們可以看成一連串操作的結果是什麼？（一個特定值、或依變值）或者〝這一連串的操作〞跟〝那一連串的操作〞結果是一樣的或有大小關係。這兩者的差別在於未知數會僅僅出現在等號的一邊或出現在等號的兩邊。

$$\boxed{\text{算式}} = k \text{ 或 } \boxed{\text{算式 I}} = \boxed{\text{算式 II}}$$

八、 解方程的數學思維（一元一次）

所謂的數學思維是利用運算的方式來達成我們的目的。

就方程式的求解過程中，通常被引述的方法為等量公理的運算思維，但是〝合併〞的方法是運算的基礎，例如：

$$\boxed{\text{算式}} = k \Rightarrow ax + b = k$$

$$\Rightarrow ax = k - b$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{a}(k - b)$$

$$\boxed{\text{算式 I}} = \boxed{\text{算式 II}}$$

$$\Rightarrow ax + b = cx + d \Rightarrow \ldots$$

$$\Rightarrow (a - c)x = d - b$$

$$\Rightarrow x = \frac{d-b}{a-c}$$

十一、 聯立方程式

當未知數用許多方程式來描述的時候，我們是想透過不同的觀點或限制來收斂、聚焦（交集），這些未知數必須〝同時〞符合這些方程式；因此，未知數在不同的方程式中是被〝共用〞的，或許用不同於 x，y 的形態，如 x_0 ,y_0、$\overline{x}, \overline{y}$的方式來表明更好。如果適當的使用問題的情境，這樣更容易理解。

在二元一次方程式的探索中，應該有充足的歷程來認識〝函數〞型態的形式，如：

$$3x + y = 5 \quad \Rightarrow \quad y = 5 - 3x$$

$$\text{或} \quad x = \frac{1}{3}(5 - y)$$

這樣的形式有助於我們用代入某數就可以求得另一數的想法，最後形成某數可以寫成另一數的算式，這個經驗將會在往後的計算發揮功能，亦即某數可以被某數取代（替代，substitute）。在解聯立方程式的時候，不論是代入消去法或加減消去法都是取代的想法，亦即，嘗試用取代來轉換或簡化算式，往後的所謂變數變換等想法都是取代的概念！

十二、 不等式

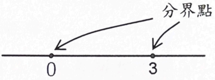
在不等式的解題過程中（一元一次），通常是在等量公理的想法之下操作不等式的化簡。可是在高中的二元（或三元）之不等式是先從等式下手，利用等式的解集合（一線或一面）對空間做分割，再透過代入檢驗的方式確認不等式的解集合。就學習的連貫性與難易度的考量，應該用等式的方式為之。因為，在解不等式的過程中經常會用到兩邊同乘一個負數的方法，此時，不等式的大小方向會跟著改變，這個改變對初學者是一個不小的負擔。

如：

$$
\begin{aligned}
& -3x+2 \geq x-10 \\
\Rightarrow \quad & -4x \geq -12 \\
\Rightarrow \quad & x \leq 3
\end{aligned}
$$

這種不等式的反向對學習者而言，難。

$-3x+2 \geq x-10$

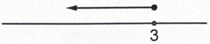


先考慮 $-3x+2 = x-10$

$\Rightarrow \quad x = 3$

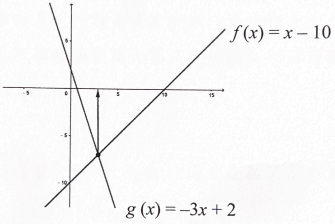
檢查　$x=0$，

$\Rightarrow 2 \geq x-10$ 沒錯（成立），所以



所以 $x \leq 3$。

當函數的概念引進了，不等式就可以看成兩個函數比大小了，如：$-3x+2 \geq x-10$，看成 $f(x)=x-10$ 與 $g(x)=-3x+2$。

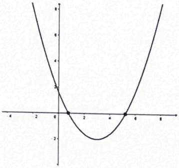


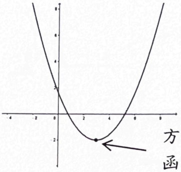
十三、　乘法公式

乘法公式是一種恆等方程式，它表明了不同算式的相同結果，它應用在算式的轉換，因此，從分配律到各式各樣的公式，應該讓學習者有一種〝想要把某個算式轉換成另一種型式的算式〞的感覺，而不只是停留在兩個算式〝是〞相等的感覺而已！

十四、 一元二次方程式

從一元二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 的探索過程（列表求解）過渡到 $y = ax^2 + bx + c$ 而將一維的思維提升到二維的思維，並透過方程式或函數圖形理解方程式解的位置（值）。





方程式稱<u>頂點</u>
函數稱<u>極值</u>

其中，因式分解是求解（或求根）的重要數學思維。此時，整個二次方程（或函數）的探索均圍繞在多項式的型態之下，然而，就國中階段而言，是否必須引入多項式的定義與概念，令人疑惑。

就二次方程的二維思維引入之後，應該以函數(多項式函數）的角度來思考，因為原始的問題為“二次算式的值為何”，亦即函數值為何的問題。再次強調，當我們不從變化的角度來看這個問題時，函數的定義或名詞可以不被提及，而用“在 x 的時候其值為…”來談就可以，亦即以對應或成對的方式來說明即可，但是整個操作還是在變動 x 來看其相對應的值。

在解方程的數學思維中，核心想法雖然是將方程式分解成因式相乘，由此簡化問題進而解出方程式的解。然而，就單項式等於一特定值而言，其解亦簡單明瞭，亦即方程式若能化成 $(x + a)\ m = k$，則 x 之值亦可隨之確立，此為配方法之想法。

十五、 函數

函數的核心概念在於可被用以探索〝變化〞，到底什麼樣的方程式可以用來看未知數之間的依存變化，可以有依存變化的方程式是否可明確表現其依存關係？這些問題引出了函數的定義以及顯函數與隱函數的分類。猶如方程式，函數的樣貌可以由數學式、表格以及圖形來詮釋。

函數的類別可以就函數本身的〝值〞來看，

例如：

$$f(x) = k\,g\,(x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ①$$

也可以從變化的類別來看

$$f(x) = g\,(x+a) + b$$

$$\Rightarrow f'(x) = g\,'(x+a) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ②$$

①表現在相同的 x 之下，其值的倍數關係，

②則表現在對應的位置〝附近〞$x \leftrightarrow x+a$，其形狀（變化）的一致性。

無論是①或②，變化的樣貌依然是函數的核心，因此，國中階段所謂的一次函數、二次函數，最好以變化是固定的以及變化是不固定來詮釋較能貼近函數的本質。

國中的幾何

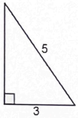
在國小，我們探索了一些基本的幾何圖形，圖形跟幾何圖形的差別在哪裡？

要講圖形，首先要表明我們是在〝那裡〞勾勒出圖形，在二維、三維或一維，在歐氏平面？在非歐面？（球面或雙曲面），當然國小的圖形僅侷限於歐氏平面，而任何繪製在平面上的作為，其結果皆可稱為圖形。在所有圖形中，我們關注的是用線條所做出來的圖形，進而討論由線條所包圍之面，以及由面所包圍的體等等。

圖形，我們可以依各種觀點來進行分類，並在各類別中分析其特性。一種以**距離**為觀點的分類方式稱為**幾何**圖形，因為我們對樣貌的直觀受距離的感知所影響。

在建構圖形的線條中，最簡單的線條為直線的一部份，直線段，圓的一部份圓弧。國小所談的幾何圖形都是由直線段與圓或圓弧所組成。國小的幾何知識主要在於〝明確〞的訊息下演算出想要的結果，例如：知道長度求面積等等。國中的幾何知識多了未知訊息的推導並進而演算（或論證）出想要的結果。

例如：



這個三角形的周長？面積？

這個三角形的面積，等等。

也因此，國小著重如何算，國中則著重性質的演繹。

一、三視圖

就圖形的理解而言，依 Gestal 學派的觀點，三視圖並非是理解一個幾何物件的初始路徑，在各個視角的經驗下，我們方有可能去理解由三視圖所建構的幾何物件。因此，我們要先確立學習三視圖的綱要目標，如果就立體物件的重建角度來看，要提供什麼樣的平面圖形對於立體物件的描述與重建最有幫助？或許爆炸的鳥瞰圖最接近我們的拆解與重建，以及立體物在視覺感官下的認知。

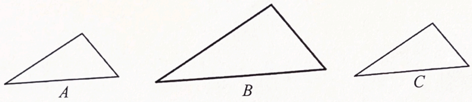
二、水平、垂直與平行

水平、垂直與平行是生活周遭物件間的相對關係，水平、垂直與平行一開始皆以水面的等高性質延伸出一條基準線或基準面，水平線是一條等高於基準線的線或水在線上會不會有流動現象的直覺（水由高處往低處流）；垂直線則是鉛垂線與水平線之間的關係，鉛重線有〝正〞的感覺，水平線有〝平〞的感覺。然後，甲垂直乙延伸到互相垂直，從移開水平線到以任何線為基準而延伸出平行與一般性的垂直。當一個角以某線為基準跟垂直線比較時，就形成差多少可以擺正之餘角，以及跟基準線相比，差多少可以擺平的補角概念。

三、幾何知識的〝用〞

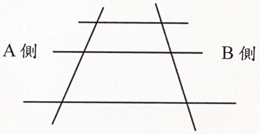
當然，第一個直覺是面對一個幾何物件時，我會想要知道什麼？〝大小〞，各式各樣的大小，如果只是透過直接測量就可以得到，那就少了數學味；如果是透過間接測量，由比較與計算的手法獲得那個我們想要知道的大小，那就是數學的精神所在。因此，一些幾何不變量的探索與認識是幾何學習的核心。例如：

1.



確立 *B*、*C* 兩圖與 *A* 相似、全等可以間接由 *A* 的測量獲得 *B* 和 *C* 的資訊（在設計圖或測量應用極廣）。

2. 利用平行線截等比例線段可以互通 A、B 兩側的訊息。



3. 勾股弦定理

確立直角三角形的兩邊長，可以算出第三邊；透過三邊長的關係可以確立三角形的銳、直、鈍的形態。因此，〝無中生有〞的意義在於生出可用的幾何性質來取得計算的可能，確立兩幾何物件的相似性在於聲東擊西，這兩者是幾何知識在應用上的核心。

統計

基於〝有意〞或〝無意〞所收集到的資料，進行分析與整理，整理出資料的特徵與結構，除了尋求最佳的呈現方式之外，並利用這些資料的特徵用於推論。因此，無論一開始是有意或無意，最後要形成〝呈現方式〞的時候一定要在〝刻意〞的前提下為之。