

教育部國教署

央團數學月刊

十月號

歡迎來到數學城堡

主廳:數學專業新知
糧倉:數學補給,讚!

磨坊:央團數學資訊
會議廳:跨領域對談
廣場:現場老師大聲說

主編:林柏寬 美編:黃宗賢

數



奠基工程前進韓國

系列報導之二

國中篇

中央輔導團數學組教師/ 劉建成



暑假，是老師們充電進修的好時機。多半是與家人出國旅行，以自然與人文拓展視野；要不就是在「講師」與「學員」兩個角色間不停轉換，參加增能研習，辦理數學好好玩營隊。今年，卻多了一個令人興奮的項目：跟隨林福來老師到韓國參與慶南數學研討會。

這次的活動，先從慶南研討會議開幕式揭開序幕。聆聽林老師在大田KT人才開發院發表「臺灣的數學教育工程：就是要學好數學(Just do math . JDM)」也是精彩的重頭戲，當然，我們還肩負二項重要的任務，也是此次活動的重點。首先，是在慶南數學文化館以數學奠基模組對學生實施一堂公開課程；其次，是在大田KT人才開發院對韓國中學老師們教授奠基模操作。

在對韓國學生奠基教學的公開課程活動中，我和柏寬老師一組，對象是八年級的學生，我們選擇的模組都是自己設計的「大家一起來數」及「骰子遇見疊疊樂」。為了要讓學生能在短時間就能感受到模組的魅力，也擔心語言上的限制，所以我們都將模組改成簡易版，學習單也有中韓對照。

上課前也得先教會翻譯人員(韓國大學中文系大三的學生)，然後再和一名中學老師共同備課，最後再到課堂教學。由於事前的準備工夫完備，上課時等於就有三位助教。



原本擔心的語言溝通問題，會影響奠基課程對學生引發的效果，但是兩個模組竟都在10分鐘內，融入活動並樂在其中，特別是在達成任務或贏得勝利時，不自覺流露出的興奮情緒，更讓我十分感動。



此外，旁邊觀課的老師，也因為氛圍的渲染，情不自禁地和學生玩了起來，瞬間助教人數「暴漲」，也算是教學活動的趣事之一。

在培訓中學老師的活動方面，我們挑選了「數列魔法」、「向左走向右走」及「軍艦棋」這三項來進行。其中，柏寬老師的魔術表演令學員們嘖嘖稱奇，下課前，幾乎每位老師都學會了魔術的奧妙，也能理解背後所蘊藏的數學力量。我負責的是「向左走向右走」這個模組，為了讓學員能清楚規則，直接用示範講解取代PPT，以便留取時間進行實際操作。過程中，我發現韓文翻譯人員，居然能直接教韓國的老師操作模組，令人驚艷。原本是害怕數學的中文系學生，卻能在備課時就理解模組，進而教數學老師操作。參與此次活動，不只讓他對數學課程的觀感有所改變，我想，在日後面對許多事情的想法，應該也會有所不同。這個模組的操作我以說明遊戲規則為輔，實際操作為主，學員在玩的過程中，大部分都能發現青蛙的顏色、向前向後分別代表了正負數及加減法的意義。當他們發現其中奧秘所顯現的喜悅之情，以及頻頻問著教具要到何處購買的興奮之感，都讓我有股替數學園地灑種育苗的感動。



不同面向的教學活動，給我的感動卻很一致：不論是學生還是老師，從課程開始到結束，始終都能保持高度的好奇心，並勇於發問。讓身為講師、助教的我們，因為他們的積極參與，忘卻了繁瑣忙碌，盡力使出渾身解數，彼此的熱情，在韓國的夏天盡情燃燒，燦爛而閃耀。



12年國教核心素養 與有感的數學學習




央團數學副召集人 臺北市立大學數學系
李源順 教授

12年國教強調核心素養以及有感的學習，希望學生能從情境脈絡中學得迎接未來挑戰所需的知識、能力和態度。數學領域中央輔導團召集人林福來老師提倡數學奠基活動，希望先引動學生的學習動機、興趣與態度，奠定學生學習數學的基礎，此舉正向地影響著老師的有感教學與學生的有感學習。

在接續的教與學，核心素養強調教師要將數學與生活情境結合，也就是在生活情境脈絡中學習數學或者運用所學數學解決生活情境中的問題。希望學生不再認為數學與生活無關，而能感受到數學與生活的相關性，進而提升學生正向的學習態度，了解數學的有用性。

為了讓學生更能有感的學習數學，本人提出一個起動機制、五個核心內涵的教與學策略。一個起動機制是教師要有意圖的「讓學生說」，例如碰到重要的概念一定要讓學生說，因為學生能說出來表示他能統整所學的知能，此時才是真理解。五個核心內涵是「舉例、簡化、畫圖、問為什麼、和回想(或者連結、課程統整、後設認知、... 一樣... 不一樣)」。假如學生對每個概念、運算、性質在心中都有例子，所有的數學知識就會有感，甚至了解數學概念推廣的特質。





假如學生對每個概念、運算、性質在心中都有例子，所有的數學知識就會有感，甚至了解數學概念推廣的特質。例如發現乘法的意義不再是一個量的累加，而是一個單位有多少量、共有多少個單位的意義。簡化和畫圖是學生了解數學概念、解答問題的重要策略，它讓學生把困難的概念或問題能回到基本的概念、較簡單的數字，或者把抽象的概念或問題變成具體、有心像。問為什麼是培養學生真正了解數學，發展邏輯推理論證能力的重要策略。回想(或者連結、課程統整、後設認知、...一樣...不一樣)則是讓學生的數學學習不是點的學習而是線、面的學習，讓學生除了見樹也能見林的重要策略。

一個起動機制、五個核心內涵，在數學的教與學非常具體、容易實行，而且在生活中非常有用；但是老師和學生要能從了解到會用，到能運用自如是需要扎根的，尤其是學習成就愈低的學生、數學基礎愈不紮實的學生愈需要更多的時間與機會。但是本人相信它是讓低學習成就學生有感的根本方法、扎根方法，因此它需要老師們持續的耕耘。





糧倉:數學補給，讚!



發現規律， 不只是歸納而已：規律的形

臺北市立大學數學系 鄭英豪 教授

十二年國教數學領綱明確揭示「數學是一種實用的規律科學」的理念，在說明中，領綱表示「數學，是一門善於處理規律的科學。」並舉出許多運用數學規律分析與預測自然現象或者大量資料的例子。事實上，在國中小的數學課中，學生也一直不斷在學習數、量、形的規律，無論採用什麼學習活動，數學規律的學習與運用一直都是國中小數學課的重要成份。

數學規律，通常是指在某一類數學物件中，或者在某些條件下，某個數、量、形之間有穩定不變的關係。例如在數的加法中，無論甲數和乙數各是多少， $甲數+乙數$ 和 $乙數+甲數$ 的結果是相同的；又如在三角形中，只要其中有兩個邊長度相等，這兩個邊對應的角的角度就一定會相等。在課堂上，這些規律的學習通常有兩種方式，第一種是老師直接告訴學生這個規律，然後舉例子說明這個規律的意思，讓學生相信並接受這個規律；第二種則是透過很多例子，從例子中抽取出穩定不變的數、量、形關係，然後將這個關係用數學方式表達出來。第一種教學方式通常省時，而且後面可以鋪陳很多規律的辨識和應用問題，讓學生獲得很多解題經驗，但是這種方式基本上就是灌食，與當前主動學習的教育精神相違背，因此已經不受推薦。當下比較流行的，也是教科書普遍採用的是第二種方式，在十二年國教領綱中還特強調的是透過參考教具的操作，讓學生主動發現規律。

第二種方式的學習意味著老師要讓學生生成或接觸許多例子，然後從例子中發現穩定不變的數、量、形關係，很多時候，我們稱這樣的過程為從例子中歸納出規律。這看似簡單易了解的教學主張，雖然也是目前很多老師普遍採用的教學方式，但學生的學習效果卻並不如預期般有效，因此，我們可以想像，在發現規律的教學中，有一些不是只用多例歸納就做得到的影響因數。

要想在一系列的具體物操作、圖像或Numerical value記錄中找出規律，首先得有規律可能是什麼樣子的意識(稱為規律的形)，然後透過例子去與可能的規律對比，排除掉與例子不符的可能規律，進一步用其他例子檢驗還有可能的規律是否適切。如果一開始時學生腦中根本沒有某個規律的形的意識，那麼面對操作的記憶、圖像與Numerical value，就不會有檢驗看看是不是這個規律的想法，於是，學生就不會發現這個我們希望他發現的規律。

兩個Numerical value相等、兩個量相等、兩個形看起來一樣是學生很早就有的規律的形，因此在學誰和誰相等這種規律時，在適度的提示或對應比較明確的記錄格式上，學生確實比較容易發現。但，當某種規律的形是第一次出現在課堂上時，學生就不可能想到要去檢驗這個規律，此時老師的提示就必須更接近甚至明示要學生檢驗的形。

我自己研究與教學觀察的經驗中，國小在某數乘以大於1的數會變大、乘以小於1的數會變小；三角形內角和是180度；三角形任意兩邊長度和大於第三邊等主題上，如果放著讓學生在操作的記憶、圖像與Numerical value上自由探索，那麼我們預期要學的規律是相當難主動發現的，因為學生根本不會想到變大變小、多數和固定、一定比較大是要找的規律，這種時候，老師通常就會直接指明要學生去觀察什麼、比較什麼，然後才有辦法讓學生關注在他原本腦中沒有的規律的形上。

下次要進行教學時，建議大家先想一想，我希望學生發現的規律的形學生腦中有沒有，如果沒有，要發現這個規律就不只是多例歸納而已了。



糧倉：數學補給，讚！



數學符號的故事



臺北市立大學數學系副教授 蘇意雯

「數學是一種人文素養，宜培養學生的文化美感」是十二年國教數學領域的理念之一，其中也提及「適時地在數學教學之中融入適當的數學史內容，可以提升數學教學品質與學生的學習成效。」(教育部，2018)。事實上，大家所熟悉的數學符號背後都有其來源脈絡，現在，就讓我們來說說這些數學符號的故事。

據說加號的發明是因為以前的酒商在賣酒時，只要盛了酒，就在酒桶上畫一條線「-」，紀錄酒取用了多少，等到補了酒加入酒桶，便把線條畫掉，就成了「+」，表示已經加了酒在桶子裡。「+」號、「-」號在西元1489年真正誕生於世界上，當時德國數學家威德曼埋首於計算中，忽然靈光一閃，想到可以在橫線上加一豎「+」，表示增加，並取名為加號。同樣的，從加號中拿掉一豎後成為「-」，就是減少，命名為減號。威德曼在他的著作中使用這種記法，從此，「+」號、「-」號就出現在數學書上。



隨著「+」、「-」符號的出現，在西元1631年，英國著名數學家奧特雷德認為，乘法是加法的一種特殊形式，於是他把「+」轉動45°角，乘號「×」也就因此誕生。除法具有平分之意含，至於「÷」號，像不像是一刀對切圓饅頭，兩個半圓饅頭展開在桌上呢？西元1659年瑞士數學家雷恩，當他思考著如何把一個數分成幾等分，當時並沒有符號可以表示這種分法，忽然雷恩靈機一動想到，可以用一條橫線把兩個圓點分開，表示分解的意思，也就是「÷」，除號「÷」也就因此出現了！

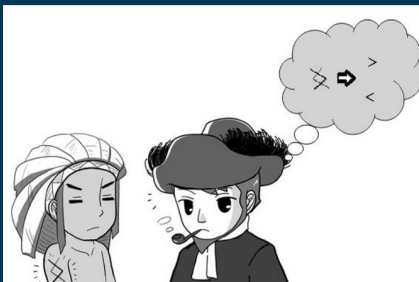




其實，在數學符號的演進上，乘、除號也還有其他的表示法。例如微積分的創造者之一德國數學家萊布尼茲，就認為「 \times 」與字母X很相似，改而使用圓點「 \cdot 」來表示乘號。至於「 \div 」，因為過去在歐洲會長期被用來表示減號，為了與減號區別，奧特雷德和萊布尼茲也都主張用「 $:$ 」作為除號。所以，「 \cdot 」和「 $:$ 」也都各具有「 \times 」、「 \div 」號的身分。

那麼「 $=$ 」號又是如何發明的呢？西元1557年，兼具醫生身分的英國數學家雷科德為了避免「是等於」這些冗長的字一直出現，在《礪智石》一書中用一對平行又等長的線段，取其有兩個東西是完全一樣的意思，來表示兩個數相等，那時所用的等號比現今我們使用的還要長很多。要記住誰創造了「 $=$ 」號很簡單，原因是「雷科德」(RECORDE)就是「紀錄」的意思，當你在做記錄的時候，其實就是製作原件的副本，新的副本和原來的版本基本上是相同的。因為「沒有比兩條平行又一樣長的線段更相等的物件！」，所以等號「 $=$ 」就出現了！

「 $>$ 」號和「 $<$ 」號的發明就更具戲劇性！一個晴朗的夜晚，天空中繁星閃爍，在北美洲的維吉尼亞探險的英國人哈雷歐特（THOMAS HARRIOT 1560~1621）正抽著煙斗仰望天空，思索如何用簡潔的符號來紀錄星星的遠近或是亮度。這時，想到周遭印地安朋友手臂上的刺青圖案，哈雷歐特忽然腦中靈光一閃，他認為「既然有人用兩條平行又一樣長的線段表示相等，何不把這個刺青圖案分成向左開口『 $>$ 』和向右開口『 $<$ 』的兩部分，讓較大的數那邊開口大一點，也就是用『 $>$ 』表示大於，用『 $<$ 』表示小於呢！」，從此，表示兩數大小關係的符號因而誕生。



哈雷歐特曾被譽為是牛頓之前傑出的英國數學科學家，我們現在使用的很多符號都可以在哈雷歐特的數學書中看到，這本書裡面還有很多深入的數學研究。令人遺憾的是，由於哈雷歐特在探索北美洲時染上抽煙的習慣，也因為抽煙所引發的疾病而過世。在哈雷歐特死後十年，也就是1631年，哈雷歐特所寫的書才由他的數學家朋友幫他出版，人們也才能得知大於、小於號的表示法。

在數學發展的長河中，很多概念發明的背後都有其動人精彩的典故，讓我們一起努力，讓這些大大小小的故事豐富學生的數學學習！

【註】本文內容及圖片來自科技部計畫MOST 104-2511-S-845-002-之部分研究成果，特此致謝。



廣場:現場老師大聲說



點燃學生的數學熱情， 播下學習的種子！

高雄市國中數學輔導團專輔

顏敏姿老師

為了落實108課綱，縣市教育局端其實做了很多努力，只有跑在前頭的執行者感受比較深刻。教學現場的第一線教師，面對的是學生的問題，較少心力去正視明年十二年國教即將帶來的改變。

108數學領綱與現行九年一貫課綱的差異點在何處？高雄市國中數學輔導團在推動數學領綱宣講時，第一線老師最常提出的質疑問題莫過於此。第一線老師更半開玩笑地說，新課綱真的明年就要實施了嗎？明年升國小一年級，國中一年級還有高中一年級的學生就要使用新教材了嗎？

我家女兒明年即將升上國小一年級，他是108課綱第一屆的學生。老實說，身為家長，衷心希望孩子擁有適應現今生活及未來挑戰的能力。在訊息爆炸的時代，如何應用學科知識，跨領域整合，培養正向的觀念與態度，更是重要。

回想自己從小學習數學的歷程中，大多偏重於計算與速解，優秀厲害的學生學的是理解還是背誦題型？世界在改變，未來十年內百分之七十的工作會消失，舊有的教學觀可以讓孩子面對未來多變的世界的挑戰嗎？數學應提供學生有感的學習機會，但數學與其他領域最大的差異在於結構層層累積，其發展既依賴直覺又需要推理。老師的教學如果無法讓學生有感，願意進行思考，就非常容易讓學生覺得「數學課好無聊？」「數學真的有用嗎？」的錯覺。



台師大的數學奠基活動模組、FB藝數摺學社群、「數學一點也不無聊」部落格，在在都是我找尋數學活動融入教學的重要資源寶庫。動機是學習過程中非常重要的因子，教師帶領的數學活動，必須讓孩子感到興趣。由於我本身也是桌遊、解謎愛好者，身為數學老師，我總覺得數學不應該只是課本上的計算問題。訓練邏輯思考的方法也可以從活動、實作當中呈現，讓學生也能透過這種形式，看到數學生動的一面，這是我這幾年教書最想做的事。

跟熱愛數學的教育夥伴共備八年級課程「根號」時，我們可以播放根號的影片故事。耳熟的畢達哥拉斯外，老師也應該要提提可憐的希帕索斯，因為他發現根號2這個無理數而壯烈犧牲。

我會從數學奠基模組「幾何釘板」出發，讓學生用橡皮筋圍出面積為1、4、9的正方形，接著要碰觸到無理數邊長時，因為害怕學生沒有希帕索斯的慧根，無法找到面積為2的正方形，於是我加了一個小活動。

請學生從一張正方形紙，摺出一個面積為其一半的正方形。沒想到想出這個答案的同學，竟是班上平常數學成績不佳的人，同學們紛紛對他投以讚賞的眼光。接著請他們用橡皮筋圍出根號2，藉由學習遷移，再問根號8時，也能利用放大圖形的概念解決。有了這樣的實作經驗，接下來要介紹根號這個無理數符號時，就能讓學生更有感。

因為我大學念的是政大教育系中學師資組，因緣際會登記數學科專長，讓我成為一名數學老師。我一直很慶幸我是數學老師，因為可以享受思考的歷程。我的學習背景從社會組跨界至自然組當數學老師，更能體會數學挫敗學生的想法，更希望在教學現場中幫助學習落後的學生。

教育不是灌輸，而是點燃火焰，我期待在學生心中播下種子，透過新課綱的引導，以熱情點燃學習的火炬，照亮學生的未來。





THANKYOU

What we know is very slight,
what we don't know is immense.

我們所知道的是微乎其微的，我們所不
知道的還是無窮無盡的。——拉普拉斯




央團數學資訊



十月份活動資訊

- 1、數學領綱宣講：10/5(五)嘉義市北興國中
- 2、南區大會師：10/6(六)嘉義市垂楊國小
- 3、數學奠基三期活動師培訓：10/7(日)嘉義場
- 4、數學奠基三期活動師培訓：10/13(六)金門場
- 5、北區座談會：10/19(五)新北市中正國小
- 6、數學奠基三期活動師培訓：10/20(六)台東場
- 7、數學奠基進教室工作坊(台北場、台中場、台南場)持續開展中！



歡迎來到魔數城堡，一個全國教師文字溝通的平台！
在這裡，你可以談教學甘苦談，可以談國家教育政策。
為了孩子好，孩子棒，老師們都是教育事業的偉大推手。
數學月刊無限期徵稿，投稿信箱：
ajohnajohn2001@gmail.com