

數學補救教學活動設計、實作與分享

彰化師大數學系 梁崇惠

壹、前言

貳、數學活動教學

- 一、數學活動與教育本質
- 二、為何需要數學活動教學
- 三、如何設計數學活動教學

參、數學活動教學實例與實作

- 一、平方根的意義
- 二、用義大利麵條學幾何
- 三、神奇賓果遊戲

肆、用多元的數學活動來啟動學生的思維

- 一、水落石出
- 二、數字遊戲
- 三、14根圓木棍

伍、結語

陸、參考書籍資料

- 一、中正大學永齡希望小學數學課本
- 二、女生來做數學（梁崇惠 譯 聯經出版社）
- 三、親子數學（文庭澍 譯 聯經出版社）
- 四、101個數學問題（梁崇惠 譯 聯經出版社）
- 五、數學教學方法（張靜馨 譯 九章出版社）
- 六、數學遊樂園系列叢書 10冊 牛頓出版社
- 七、魔術與大腦《科學人雜誌 2009年1月號》
- 八、用數學定理變魔術《科學月刊 2010年4月》
- 九、科學魔法數背後的秘密《科學月刊 2012年4月》

數學活動與教育本質

從數學心智的發展看數學學習的條件

彰化師大數學系 邱守榕教授

要倡導數學活動，我們必須識別它可負起的教育任務及其本質。
首先，讓我們大膽地說出我們所仰望與期待的是什麼樣的教育理想與使命：

- 教育任務須由受教者與施教者一起完成。在教育任務中，學習者（或學生）是受教者，教育工作人員（或教師）是施教者。
- 為學習者爭取學習條件，是教育工作人員的天職；攫取新知識，在運用中彙整新知與舊知，且緣著知識發展心智，超越自己，則是學習者的天職。
- 在本質上，教育必須能同時提昇施教者與受教者的人品，鼓勵其不斷探索，並促使其在探索中脫胎換骨。

早在上一世紀六十年代即致力於中、小學數學課程的開發與教學實務，而成爲數學教育大師的荷蘭數學家 Freudenthal，曾將他初期致力於數學教育的修爲以一本書《數學是教育的任務》(Mathematics as an Educational Task)來概括，隨後他又以《除草與播種》(Weeding and Sowing)來伸張他對數學教育任務的主張。荷蘭的學者們，在他已建立的基礎上，發展現實主義的數學教育，且協助美國威斯康辛大學的數學教育同仁開發以「數學活動」爲緯的數學課程，合力編成教科書《在來龍去脈中學數學》(Mathematics in Context)(Romberg et al. , 1998)，後者已成爲國際公認的數學活動楷模，被國內“建構派”取爲譯介的對象或作爲改編教材的藍本。

要進一步深入探詢數學活動之教育本質，我們認爲數學教育工作者應當勇而無懼地面對在社會中普遍流傳的疑慮「學數學是否有用？」，試著破解它，指出它與反智文化的關係，且超越籠統而狹義的功利主義觀點，如：生活中的日用價值，或作爲攀附社會階梯的考試之用，轉而面對「怎樣充實數學活動內容？」「怎樣提高數學活動的教學效率？」這一類作爲教育工作者在倡導數學活動時所應面對的教學課題，不但在技術層面梳理數學學習的條件，也在理念層面架設數學文化的搖籃。

接著我們應該把社會中流傳的疑慮轉化爲對教育措施的監控立場：
如何不扼殺孩子在數學—邏輯方面的智力？

或將上一立場改以正面的問題提出：
如何提高孩子在數學—邏輯方面的智力？

爲了識別這個疑慮背後的問題所含的特定內容，我們還須正視它是怎樣地夾纏在以下兩類一般性的問題之中：

第一類的一般性問題是：

如何提高孩子的智力？

正面地說，就是：如何把孩子教的更聰明？如何讓孩子越學越聰明？

反面說來，就是：如何不把孩子教笨？如何讓孩子不至於越學越笨？

第二類的一般性問題是：

什麼是數學—邏輯能力？ 什麼是數學？

在第一類的一般性問題之前，我們都知道，揠苗助長，適得其反，該追問的反倒是：

如何啟發孩子的心智？ 什麼叫做聰明？ 怎樣叫做變笨？

我們強調的是，父母或教師既不能放棄「教」孩子的責任，又必須在「教」的時候問自己：如何讓孩子得法地學習？如果說“放牛吃草”也是一種教學策略，那麼總要先有一片青蔥的草原，清淨的溪水，讓孩子曬得到太陽，可以在草皮上打滾，躺在地上仰望頭頂上的青天白雲，……。事實上，在這個時代，二十一世紀，在台灣這塊土地上，要把孩子鍛鍊成能逐水草而居，過游牧的日子，若不是不可能，便是太浪漫了。如果浪漫地看教育問題不算奢侈，那麼為孩子佈置友善的學習環境，籌措有效的教學策略便是很起碼的事了。

如果說聰明就是耳聰目明，孩子們的聽力與視力就要受到良好的保護與開導。古語說「非禮勿聽，非禮勿視」是有道理的。在當前物質充斥、資訊氾濫、聲色嘈雜的社會中，要禁止孩子看電視、打電玩，的確很困難，要禁止不如開導，不如陪孩子看好節目，與孩子深入或廣泛地討論節目內容，帶領孩子參加戶外體能活動，……。無怪乎，年輕的父母們多急迫地到處打聽：哪兒有好的才藝班、科學營、漫畫班、書法班、……？而游泳班、跆拳道、攀岩、…或各式各樣的夏令營都成為孩子在課外參加的活動。

至於為了提高孩子在數學—邏輯方面的智力，心算班、珠算班等等，也常成為父母送孩子去作“頭腦體操”練習，學習“腦筋急轉彎”的地方。父母對子女教育之關心，在此只指到其中一斑。我們的疑慮應轉移到第二類問題的核心：

什麼合稱得上 數學思考？ 什麼叫做 邏輯推理？

在心算班、珠算班或各類的才藝班中，孩子可曾進行數學思考？孩子可曾進行邏輯推理？ 孩子做的數學習作有什麼數學內容？孩子在做數學習作時，可獲得什麼數學解題能力？ 父母們如何驗收孩子們的學習成就？父母們如何幫助孩子克服學習的困難？誰不怕孩子被數學難倒？誰不怕孩子被數學教笨？

什麼叫 學習困難？ 什麼叫 學習成就？

這就回到第一類問題的核心：如何理解孩子的心智？

如何識別 學習困難？如何評量 學習成就？

兩類核心問題相遇之處就是：如何理解孩子的「數學心智」？

若要提高孩子在數學—邏輯方面的能力，就要從啟發孩子的數學心智上面著

手。對心理學家來說，數學心智雖非撲朔迷離，卻仍是一個奧秘無窮有待探索的領域，也就是說我們對這個領域所知甚少。然而，我們其實已經有不少可以在數學課堂中運用的學習理論與實踐原則。例如，美國哈佛大學心理學教授 H. Gardner 已在《超越教化的心靈》一書（陳瓊森等譯，民 84）中根據多項實證研究計畫做了彙整與解說：欲發展兒童心智必須追求理解力的教育，識別學習的條件。不幸的是，「學校造成的學習困難」卻是難以逆轉的事實。長於數學史的美國哥倫比亞大學數學教授 M. Kline 在《教授為何教不好》（方祖同，民 73）一書中，對於各級學校（包括大、中、小學）的數學課，多半令人生厭，所做的評議，更讓我們洞悉：數學教學措施的失當致使數學學習條件無法張羅時，學童數學心智的發展受到阻滯或扭曲便不足為怪。轉而在社會中散佈數學無用論，徒使數學無法在文化中扮演正面的角色。

倘若，我們可以讓

數學活動 成為 數學學習環境的支柱、或扶梯、或鷹架、……
數學活動 成為 數學教學策略的身架、或佈局、……
數學活動 成為 數學解題的現場、數學思考的舞台、……

那麼

數學活動就可喚醒 數學學習的靈魂，是在為下一代爭取數學的學習條件時少不得也不可缺的……，對學生如此，對教師亦如此，

把活動教學法作為主要的教學策略加以提倡的偉大的教育家不可計數，要把歷代的名人列出來，可有一大串…，如杜威、羅素、蒙特梭利、裴斯塔洛齊、福祿貝爾，…。近半世紀以來數理教育圈所樂於稱道的皮亞傑與維高斯基，也處處強調，親身體驗與實作在教育過程中的必要性，雖然他們在認知發展與建構主義兩方面的看法有同有異。

倡導數學活動，可緣師、生與數學所組成的三位一體，考察且識別學習鷹架的設計要素、結構、「教」「學」條件與使用成效，即，緣數學活動搭建的鷹架攀升概念的平台，探詢：學生的自發性概念如何提昇為有系統的科學性概念？學生的心智如何在最近潛能發展區(ZPD)內得到最大的發展？教師作為開導者，如何開發學生的潛能？如何展示或提供有系統的知識與技能？教師對特定數學題材所擁有的教學知能有何成分？如何發展？

在以下各章、節中，我們將試從原理與實踐兩方面闡釋倡導數學活動的意圖：

- 倡導數學活動，即在探詢「學習即生活，生活即學習」的意義。
- 倡導數學活動，即在開拓多元智慧。
- 開放式問題的教學必須在數學活動中進行。
- 高層次的思考教學必須在數學活動中發展。
- …… ……

本文節錄自邱守榕教授等人主編的《數學活動推廣手冊》