開發數學建模的教材

梁崇惠[1*]、邱姵萍[2]、施皓耀[3]
[1]國立彰化師範大學科學教育研究所
[2,3]國立彰化師範大學數學系
[*] machlian@cc.ncue.edu.tw

摘 要

我國中小學生在近年幾次公布的國際數理成就測驗的表現上，成績都是名列前茅，但是有一項警訊就是低興趣與低自信，此現象是數理教育學者及教師們不可忽視且責無旁貸地要從研究與教學尋求改善之道。本文想先藉由分析數學建模的內涵與九年一貫數學課程的「連結」主題之各項能力，據此從真實生活情境中取材，設計一則數學建模教學示例，配合使用教具期能引起中小學生學習興趣，提升數學學習自信與數學論證能力。另外也希望提供有心以數學建模教學來改善上述現象的老師們一個參考，使學生原本的學習過程：「老師講授--學生模仿—練習與測驗」，改變為：「直覺--試誤--思索--猜想--證明」，這種轉變不僅切合教育部九年一貫課程綱要中所提列的教學活動型態，也是真正提升中小學生數學建模與解題能力並啟發學習數學興趣的關鍵。

關鍵字：數學建模、數學論證

壹、 動機與目的

教育改革的許多措施皆立意良善，但其結果卻始終有許多無法令人釋懷的地方，如中小學生對數學的恐懼症未見有所改善，反有越來越嚴重的趨勢。2005 年公佈 Third International Mathematics and Science Study - REPEAT [TIMSS-R] 研究調查結果即是一例，在問卷的趨勢問題中，相較於1999年的填答，不同意「我喜歡學數學」的國二學生百分比則增加16%；另外，學習數學自信指標，僅26%學生達高自信指標，遠低於國際平均百分比。因此透過創新教學來提昇學生的學習興趣與自信仍是數學教育上的一個重要的課題。去年公布之 TIMSS 2007 結果報告，一如往常，我國四年級和八年級學生的數學成績分獲第三名和第一名的佳績，但學生對數學的學習態度方面，四年級學生在36 個列入排序的國家中敬陪末座，八年級學生則是在49 個國家中排名第39，兩項均顯著低於國際平均。國內多數中小學生的數學學習過程往往是「課堂老師講授--學生模仿解題--練習與測驗」般地循環著，與生活嚴重脫節，除了考試外學生們實在感受不到數學的用途。前述國際評比高成績的背後隱藏著低興趣的隱憂，即測驗成績雖然高，卻未必對數理學習有興趣，更別說將數理研究視為個人的未來志業。由此顯示成績高的學生也亟需增進數學學習的視野。有些數學教育學者 (Romberg, 1994; Harel & Trgalova, 1996) 建議可採取數學建模教學當作引起學生學習興趣的手段，同時鼓勵全班討論與小組學習的教室環境，配合使用電腦科技，以激勵學生學習，引導學生進行數學思考。

美國數學教師協會自 1989 年起陸續出版的一系列關於學校數學課程、教學、評量等各項的標準，期望學生應該重視數學，對自己的數學能力有信心，能解決數學問題，並且能用數學方法來溝通與推理。標準中強調數學觀念應該是以一種「探究導向」的態度，由學生發掘問題，而不是老師提出問題再來教導；朝向非例行問題的解題和推理；增加包括開放性的問題、發現數學理念、由經驗推理、將數學與外面世界連接等方面的教學內容 (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 1989, 1991, 1995, 2000)。而國內九年一貫課程綱要目標強調的是能力的開拓，要為國民的終身學習奠下基礎，以因應社會的變遷，這有別於僅是知識的傳授。不但沒減低數學的重要性，反而能使數學課程顧及技術層面外，更重視與其他領域的連結，更強調解決問題，以及與他人溝通講理等各種能力的培養，這些能力就是幫學生發展如何學與樂於學的基礎 (教育部，2003)。

綜合以上，本文想先藉由分析數學建模的內涵與九年一貫數學課程的「連結」主題之各項能力，據此從真實生活情境中取材，設計一則數學建模教學示例進行教學，希望能提供有心進行數學建模教學的老師參考。

貳、 數學建模的內涵

一、 數學模型與建模

本質上，自然世界中的任何現實情形，只要它可以用定量的術語來描述，就能夠通過建立模型使它符合解析的規律。數學模型 (Mathematical Model) 就是用數學語言去描述與模仿實際問題中的數量關係或空間形式。Blum、Galbraith 和 Niss (2007) 提出好的數學模型應具備下列特點：

(一) 對於待解決的問題有較全面的考慮

在一個實際問題中，往往有很多因素同時對所要研究的對象發生作用。進行數學描述之前，應全面地考慮這些因素。可以分三步進行：1.列舉出各種可能影響的因素。2.選取主要因素納入模型。3.考慮其他因素的影響，對模型進行修正。

(二) 創造性地改造已有模型或自創新的模型

待解決的實際問題，往往沒有現成的理論或模型可以套用。因此，評估一個數學模型的優劣往往要看其創造性，即是否能結合實際提出自己的獨到見解。若沒有辦法自創新的數學方法來解決問題，有時尋找既有的模型作出創造性的改進也是一途。

(三) 能在簡單與複雜、精確與普遍等特徵之間取得平衡

數學模型應能反映出實際問題的本質，如果考慮得太過簡單，易淪為未抓住問題的本質；若將所有因素均納入模型，則可能因過於複雜無法求解反而掩蓋了問題的本質。

(四) 注重結果分析，考慮在實際中的合理性

數學模型是一個從實際到數學，再從數學到實際的過程，從模型得到的結果是否符合實際便是模型好壞的重要標誌。

(五) 善於對模型進行檢驗

根據各種真實情況檢驗模型是判斷其合理性的重要依據。好的模型所做的預測應有穩定性，並可透過實際數據模擬，其實際可行性與有效性。

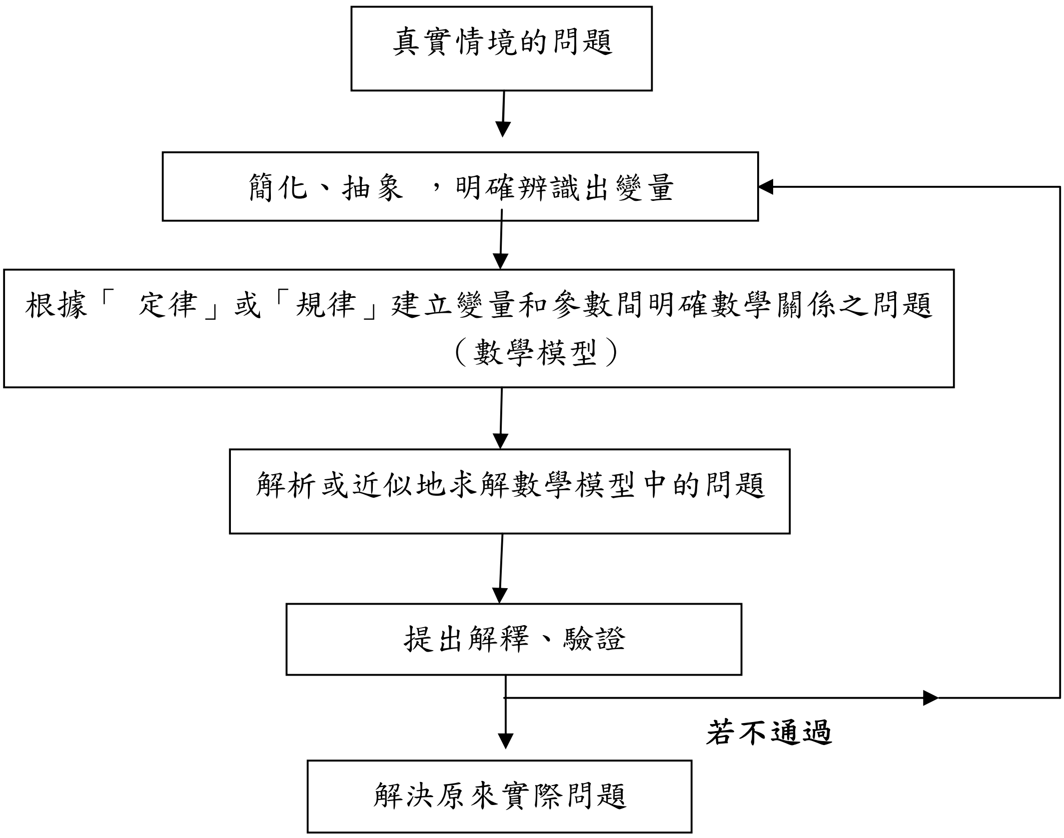
建模需透過了解、分析、探索現象來達成，建模的歷程除了要找出問題的答案，更重要的是過程中體驗概念化的了解、嚐試表徵化的資訊處理、詮釋模式與現象間的意義，累積這些經驗漸漸形成建模過程所需的能力。依照模式發展的程序來看，完善的建模過程必須包含模式啟動(model-eliciting)、模式探究 (model-exploring) 和模式調整 (model-adapting) 的活動。模式啟動主要在引起學生各式各樣的想法，模式探究偏重數學結構的導入，模式調整則是聚焦於統整和應用 (引自楊凱琳、林福來，2006)。

二、數學建模的過程

數學建模 (Mathematical Modeling) 是把現實世界中的實際問題加以整理，寫成數學模型，求出模型的解，再驗證模型是否合理；並用該數學模型所提供的

解答來解釋現實問題，做為解決現實問題的參考，我們把數學知識的這個應用過程稱為數學建模 (Andrews & McLone, 1976；葉其孝，1998) 。在建立數學模型時，不可能、也沒有必要把原來實際問題中全部訊息毫無遺漏地加以考慮，只能考慮其中最主要的因素，甚至要捨棄部分的次要因素。而數學模型建立之後，實際問題轉化成了數學問題，便可用數學工具、數學方法去解答這個實際問題。但數學模型是否真正反映出實際問題中的關係與規律，尚待將解答接受實際的檢驗，看它合理與否來決定接受或再加以修訂。

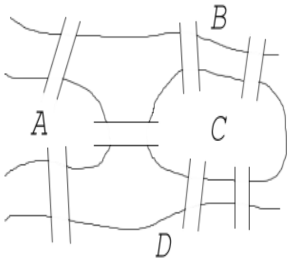
數學建模應是一項具有挑戰性的學習活動，雖然數學建模存在許多不同的意義，但其必包含介於待建模的真實情境問題與模式的數學表徵之間的轉變，如圖一 (Murthy, Page, & Rodin, 1990)。



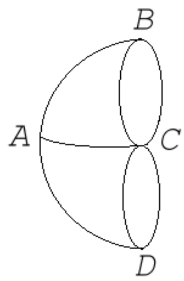
圖一

三、數學建模實例：七橋問題

柯尼斯堡 (Konigsberg) 位於普雷蓋爾 (Pregel) 河口附近，河上有 A、C 兩座島，共有七座橋使這兩座島與河的兩岸陸地 B、D 相通，現在想要找出一條路徑能走遍這七座橋，且每一座橋只能走過一次（圖二）。



圖二



圖三

尤拉 (Euler，1707-1783) 將該問題的圖形轉化成上圖三，每座橋用一條線表示，陸地則以線與線的交點表示，並且利用起點、終點的連線數特徵。在 1736 年提出「一筆畫模型」解決原問題的要求是不可能做到的。此一筆畫問題從原始問題的型態過渡到數學中的組合學模型，再藉由精確掌握特徵而順利以數學模型解決此類問題，充分反映了前述所列好的數學模型的五項特點。

叁、數學建模與數學教學

數學建模活動教學基本上是關於解決問題 (Problem Solving) 的教學，了解數學解題大師 Polya 的理論觀點是有必要的。

Polya (1957) 的名言：「在數學教學中必須有猜想的地位，教學必須為發明作準備，或至少給一點發明的嘗試。」，他特別強調解題教學中，解非例行性 (non-routine)問題與猜想的重要，並堅持數學的學習過程應當讓猜想、合情推理佔有適當的位置，此思想深深地影響 NCTM 所制定的各項標準 (NCTM, 1989, 1991, 1995, 2000)。他提出了數學教學的三大原則：

一、**主動學習原則**：

為了有效學習，學生應當在給定的條件下，盡可能地自己去發現要學習的材料。讓學生主動地為問題的明確表述貢獻一份力量。

二、**最佳動機原則**：

為了有效學習，學生應當對所學習的材料感到興趣並且在學習活動中找到樂趣。

三、**階段序進原則**：

為了有效學習，應當先有一個探索階段；經過引入術語、定義、證明等的形式化階段，上升到一個較為概念化的階段；最後所學的材料經過消化吸收到學生的知識體系中。

另一位提出「學數學就是要學習用數學」的荷蘭數學大師 Freudenthal (1973) 在其名著 *Mathematics as an educational task* 中，**提出了四個數學教學的基本原則：**

一、「**蘇格拉底方法**」**原則**

蘇格拉底所做的就是在教學過程中讓學生再創造或再發現所教的東西，學生感覺一切都是當面發生的，而不是以教條形式灌輸的。

二、「**再創造**(re-invent)」**原則**

學一個活動的最好方法是做。學生應當透過**再創造**來學習數學，…這樣獲得的知識與能力才會有更好地理解，且能保持較長久的記憶。

三、「**數學化**」**原則**

學生應當學習在最低層次，對非數學事物進行數學化 (使之合乎數學精確性要求) 以保證數學的應用，接著進到下一層次，能對數學事物進行局部組織。

四、「**嚴謹性**」**原則**

數學可加上一個有力的演繹結構，從而不僅可以確定結果是否正確，還可以確定是否已經正確地建立起來，這就是數學的嚴謹性，教數學也必須遵循這個標準。嚴謹性是相對的，有不同的層次，每個題材都有相應的嚴謹性層次，學生必須通過不同層次的學習來理解並獲得自己的嚴謹性。

綜合上述，我們可以看出數學建模教學活動不但符合 Polya 與 Freudenthal 兩位數學大師所一致推崇的教學方式與原則，且自 70 年代起便漸受到世界各國數學教育學者的重視，紛紛努力往中學階段推展，企望能往下扎根提昇競爭力。

肆、九年一貫數學課程的「連結」主題之各項能力

NCTM (2000) 的數學課程標準認為連結的意義在於使學生：認識和使用數學觀念之間的連結；了解數學觀念彼此連結和互相建立以產生連貫的整體；在數學外的脈絡中認識與應用數學。

九年一貫數學領域課程中，有別於以往傳統的課程標準，特別在數與量、幾何、代數、統計與機率之外，加入第五個主題：連結。在這主題中，相當重視學生應該要能針對數學內部相關概念之間的連結，也要對數學與我們生活週遭的環境作連結。

數學要能與生活連結、要能與其他領域連結，才能落實，才有助於終身學習。連結的內涵如下 (教育部，2003)：

一、察覺：察覺生活以及其他領域的某些情境中有數學的要素，可藉助數學觀點的切入，使情境的情景變得清晰。

二、轉換：把察覺到的數學要素，以數學的語言表出，把情境待釐清的問題轉化成數學問題。

三、解題：解答轉化後的數學問題。它必須植基於數學本身的技能，有時候更要把數學的內容主題 (數與量、圖形與空間、統計與機率、代數) 融會

貫通，這屬於數學內部的連結。

四、溝通：與自己以及與他人溝通解答的過程與合理性。因為解答的是經過轉化的問題，我們必須了解數學語言的真意，它與一般語言的異同，我們要一般語言與數學語言說明解題的過程與答案的屬性、合理性，使得數學式的解答有助於情境的了解。

五、評析：評析情境的轉化及其後的解題，兩者的得失，闡釋原來的情境問題，提出新觀點，或必要的調整，同時能將問題解法一般化。

經過察覺、轉換、解題、溝通及評析後，連結完成了一周的歷程，不但有助於情境的了解，而且也能掌握數學的方法。一方面可增加數學素養，廣泛應用數學，提高生活品質，另一方面也能加強數學式的思維，有助於生涯中求進一步的發展。

伍、數學建模教學示例的設計理念、原則、目標與反思

設計理念

一、Freudenthal 的再創造 (re-invention)

荷蘭數學教育大師 Freudenthal (1973) 認為，學習數學的唯一正確方法是實行「再創造」，也就是由學生本人把要學的東西自己去發現或創造出來；教師的任務是引導和幫助學生去進行這種再創造的工作，而不是把現成的知識灌輸給學生。這是一種最自然的、最有效的學習方法。

「再創造」應使學生體驗到：只有透過自己的再創造而得的知識才能被掌握與活化應用；更為重要的是，數學是人的一種活動，我們也必須在做數學中學習數學，也就是在創造數學中學習數學。

二、促進大腦成長的重要因素

洪蘭 (2004) 年指出，在大腦的研究中，我們看到學習最重要的是「主動」，如果是被動的做一件事並不會增加兩個神經元之間的連接，而神經元之間連接的密度是我們對智慧的新定義。如何促進孩子大腦神經元之間連接的密度，才是我們應該要重視關心的事。因此，在課程與教學設計上要注重：(一)充滿挑戰性的學習環境；(二)可得到相互回饋的學習方式。

我們的大腦非常有效率，且具有調適能力，我們生存就是建立在適應能力和善於尋找其他的解決方法。一般的教室教學經常窄化了學生的思考策略和解決問題的方式，堅持只用一種方法和堅持唯一「正確答案」的教育工作者應深思人類得以存活幾千年，靠的是嘗試新事物，而不是只是找出「正確」的舊有答案。

原則

高品質的教學應該鼓勵學生具備另類的思考、多元的答案和有創意的洞察力。因此，數學教學應該要能促進師生及學生之間的對話，而好的問題或任務(Task) 則是成功與否的重要因素，本文提出的數學建模教學活動示例之任務是與學生生活情境有關、能引發學生間的對話及創意思考，並能促使學生運用數學知識建立模型來解決問題。

下列四點為我們考慮如何引發中小學生主動學習數學的設計原則：

一、活動或任務須是源自真實情境的問題。

二、要探究此活動或任務的問題必須要簡化問題，並建構一個適當的模型，許多不同的數學概念均可被用來建立模型。

三、求解過程可以使用各種不同的數學程序，例如考慮特定數值、描繪特定點、模擬等等。

四、此問題或任務可以引出一般化或其他有趣的問題及其解決方法。

目標

在附錄的數學建模教學活動示例中，我們一方面以模式引出、模式探究、模式調整的架構來設計，另一方面以九年一貫數學課程中的連結主題所列出的五項數學能力來檢視該教學方案是否具備促進中學生數學建模能力的內涵。教學目標為：

一、協助學生體驗生活情境與數學的連結過程，培養學生從數學的觀點考察周遭事物的習慣，提高數學建模的能力。

二、讓學生體驗並注重形與數量的聯繫，在實測與直觀中，獲得數、量、形的概念，並逐步適度地抽象化，進而體會數學的模式 (pattern)。

反思

本教學示例設計是要讓中小學生體驗利用數學建模轉化問題的探索活動，藉此培養學生探索與解題的能力。當學生完成指定任務時，更督促他們進一步藉由改變原來的問題與條件，嚐試提出新的問題與解決的方法。學生從嘗試錯誤到試驗成功、片面到全面、部份到全局的過程中，改進原問題與求解方法，運用新的想法和方法來設計新的問題，學生進行創新設計與數學建模的能力儼然已生。

陸、結語

科學美國人資深作家 Martin Gardner 曾說：「喚醒學生最好的辦法是向他們提供有吸引力的遊戲、智力問題、魔術等或那些呆板老師認為無意義而避開的東西，數學必須是能使學生獲得愉悅與滿足的經驗。」

若以 NCTM 的標準來看，好的教學活動實例實在不易開發。我們可清楚看到本文附錄的示例設計與進行過程，確實符合上述提到關於數學建模與探究的精

神。在教育部九年一貫數學課程綱要中幾乎未見到連結主題教學具體的實例，這可能會使中小學老師們陷入各自解讀的情況。期盼有更多有心的第一線教師團隊，一起努力來開發學生樂於學，學習如何學的數學活動。

參考文獻

中文部分

洪蘭 (2004)。**歡樂學習理所當然**。台北：天下文化出版公司。

教育部 (2003)。**國民中小學九年一貫課程綱要**。台北：教育部。

Polya, G. (1957/2006). *How To Solve It (A New Aspect of Mathematical Method).* 蔡坤憲(譯)。**怎樣解題**。台北：天下文化出版公司。

葉其孝 (1998)。**中學數學建模**。中國：湖南教育出版社。

楊凱琳、林福來 (2006)。探討高中數學教學融入建模活動的支撐策略及促進參與教師反思的潛在機制。**科學教育學刊**，14(5)，517-543。

英文部分

Andrews, J. G.., & McLone, R. R. (1976). *Mathematical modeling*. London/Boston: Butterworths.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel.

Harel, G. & Trgalova, J. (1996). Higher Mathematics Education. In A. J. Bishop et al. (eds.), *International handbook of Mathematics Education* (pp.675-700). Boston: Kluwer.

Murthy, D. N. P., Page, N. W. & Rodin, E. Y. (1990). *Mathematical modeling: A tool for problem solving in engineering, physical, biological and social sciences*. U.K.: Pergamon Press plc.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (1991). *Professional Standards for Teaching Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (1995). *Assessment Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Niss, M., Blum, W. &Galbraith, P. (2007). Introduction. In Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H.-W., & Niss, M. (eds), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study* (pp.3-44).NY: Springer.

Romberg, T. A. (1994). Classroom Instruction That Fosters Mathematical Thinking and Problem solving: Connections Between Theory and Practice. In A. H. Scheonfeld (ed.), *Mathematical Thinking and Problem Solving*. NJ:LEA.

附錄：數學建模教學活動示例（河馬吃水蓋好玩）

一、簡介

本教學示例設計構想來自市面上一種叫做「河馬吃水」的益智玩具。益智玩具或遊戲背後往往有許多值得探討的奧秘，你可以用玩玩具的心情，認真地來「解」與「剖」析設計此玩具的數學原理，實地進行一趟數學探索之旅。

圖示與任務如下：

六隻可愛的河馬，每隻有兩條不同長短的腳，要把牠們全部插進水塘內，好讓牠們的嘴都能接觸到水面，喝水解渴。

二、教學目標

藉由合作探討如何完成河馬吃水玩具的任務，體驗問題的已知與待答、轉化問題求解、判定解的存在性與唯一性等，從而理解玩具的設計原理並親身經歷數學建模的精神與過程。最後再深入思考進一步延伸原設計的可能性。

三、器材

河馬吃水玩具、紙筆。

四、設計流程（括號內的代碼為九年一貫數學課程的連結的代碼）

老師講解任務，讓學生自由探索：隨機拼湊、嘗試錯誤，辨識問題的關鍵因素，從操弄中思索如何完成任務。

↓ **分析** （C-R-01）

學生實際操作後，寫出已知條件，得悉待解問題：將河馬全部排入洞中的組合方式。**有待澄清**：是否有解？只有一種解嗎？

↓ **轉化**（C-T-04）

測量六隻河馬的腳長、12 個洞的深度，並將數據轉成代號，轉化原問題為可看到整體全貌且較簡單的狀態，並畫出原問題的數學模型。

↓ **求解**（C-S-04）

解析數字配對組合的可能性，確定**解的存在性**。

↓ **證明**（C-C-06）

利用演繹推理，論證**解的唯一性**。

↓ **延伸**（C-E-02）

在原問題的條件下，更動一個條件，設計出最多解的情況並證明其正確性。

五、教學過程

（一）老師拿出河馬吃水的教具，講解完河馬吃水的任務後，發下教具給學生，

兩人一套為原則。學生們自行決定要如何完成任務。多數學生以不斷地嘗試錯誤的方式解題，嚐試錯誤有時雖然是解決問題的一種辦法，但是往往無法見效。

（二）當學生們嘗試許久卻不得其解之後，漸漸有該如何辨識出問題中的關鍵因素的感覺。這時提醒他們關於 Polya 的解題思維與步驟：1.找出問題的已知條件與待解問題是什麼？2.把已知條件的訊息寫下來。3.執行擬訂的方法。4.回顧問題與延伸問題。

（三）根據小組討論的結果，已知條件是：6 隻腳長不一樣的河馬，12 個不知道深度的洞；待解的問題是：如何安排這 6 隻河馬的位置，讓牠們都能完全貼合插入面板上的 12 個洞。

（四）進行測量：將面板上 12 個洞的深度與河馬的腳長分別量出來。

六隻河馬的腳長

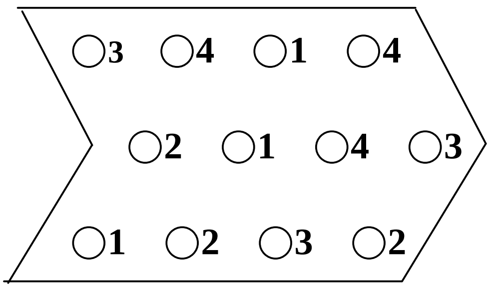
	1^{st}	2^{nd}	3^{rd}	4^{th}	5^{th}	6^{th}
前腳長度（cm）	2.75	1.75	2.75	1.25	1.75	1.75
後腳長度（cm）	1.25	2.75	2.25	2.25	2.25	1.25

面板上十二個洞的深度

（五）原來的任務轉化為上圖的表徵，就可清楚看到問題的整體全貌。

（六）簡化數據：避免小數點數字過於繁雜，我們將腳長最短的(1.25 ㎝)到最長的(2.75 ㎝)依序訂為 1、2、3、4。每個洞的深度也分別由最淺的到最深的對應地訂為 1、2、3、4。

（七）轉化問題：數據簡化後，可以輕易看出原來的問題其實是數字配對問題。參照之下便很有效率地將 6 隻河馬都完全放入對應的位置了。



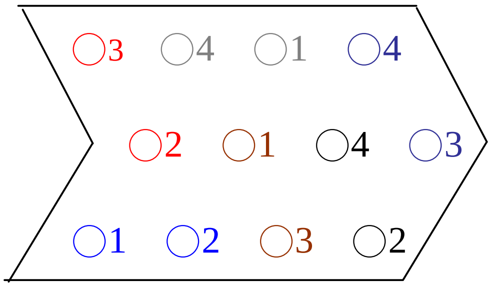
	1^{st}	2^{nd}	3^{rd}	4^{th}	5^{th}	6^{th}
前腳長度(代號)	4	2	4	1	2	2
後腳長度(代號)	1	4	3	3	3	1

（八）教師提問：解的存在性與解的唯一性在數學中的地位是很重要的，解的存在性隨著實際排出的結果已經得到驗證。但是，是否只存在一種解呢？

（九）經過各組同學排出的結果比對後發現都是同一種解法，學生們猜測應該是只有一種解。教師提問：請提出證據說明完成任務的方法是唯一的。

（十）老師提供 6 張骨牌教具，分別是（4,3）（4,2）（4,1）（3,2）（3,1）（2,1），及一張空白面板，學生透過動手操作骨牌來回答以下的提問。此時河馬吃水玩具完全退場，改以骨牌來蓋對應的數字的方式，簡稱「蓋好玩」。

（十一）解的唯一性之證明：（此法是一位小學三年級的學生在課堂上推出來的）



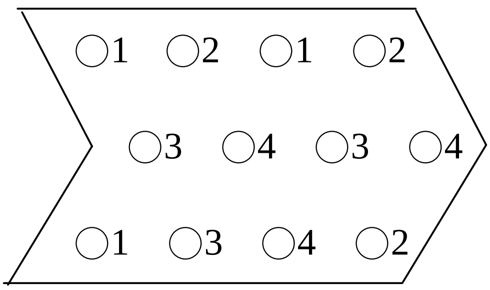
	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
前腳長度(代號)	4	2	4	1	2	2
後腳長度(代號)	1	4	3	3	3	1

1. 觀察上圖的面板中，12 個洞分布的位置不一，但是其中只有一組(3,1)，故我們可以確定 4 號河馬一定是放在（3,1）的位置；
2. 4 號河馬確定後，可以明顯發現，6 號河馬也跟著確定位置，一定要放在左下角的（1,2）；接著，5 號河馬只能放在左上的（3,2）的位置；
3. 然後 1 號河馬確定在（4,1）的位置；3 號河馬確定在（4,3）的位置；最後 2 號河馬確定在（4,2）的位置。

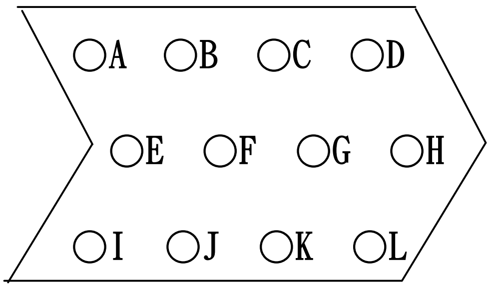
（十二）結論：

1. 由以上的推理，得證河馬吃水玩具的設計只有唯一解，難怪一開始嚐試錯誤成功的機會不大，總是會遭遇到第 6 隻河馬擺不進去的情形。
2. 我們學到原先是以嘗試錯誤的方法找解，當我們辨識出已知條件與待求問題後，將原問題轉化為數學數字組合問題，提出一個數學模型並加以求解，推理出該模型有唯一解，並回到原問題排出河馬吃水的解答。

（十三）老師提問：當我們試著改變這些洞的位置時，應該會形成新的問題。例如，這個面板會是有解的嗎？



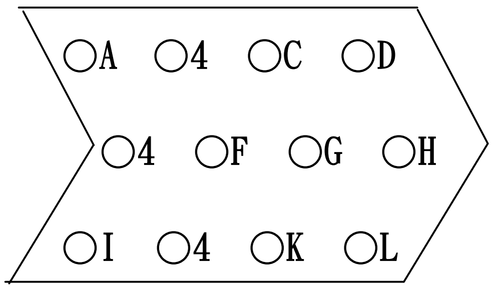
（十四）老師提問：如何設計出有最多解的面板呢？（此法是 2 位國一學生課後合作完成的）為便於說明，先將面板上的 12 個洞分別編碼為 A、B、C…I、J、L。



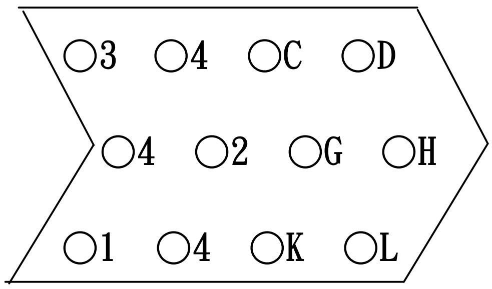
	1^{st}	2^{nd}	3^{rd}	4^{th}	5^{th}	6^{th}
前腳長度（代號）	4	2	4	1	2	2
後腳長度（代號）	1	4	3	3	3	1

（1） 因為 A、I 的位置在角落上，所以（B,E）（E,J）這兩個地方不可能放河馬，否則 A、I 便會被孤立，以致無法完成任務。

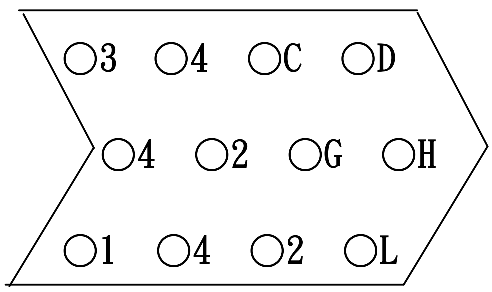
（2） 既然（B,E）（E,J）不能放河馬，而河馬腳的長度也沒有前後腳相等長的情形，所以較好的策略是在 B、E、J 三處放入相同的數字，例如 4。



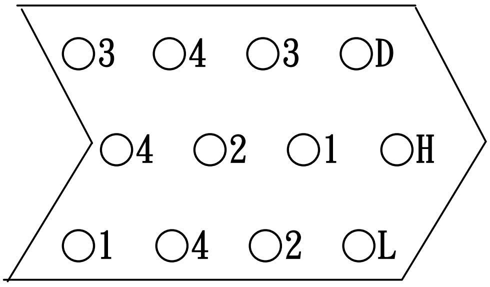
（3） 接著決定出 A、F、I 的數字為 3、2、1。



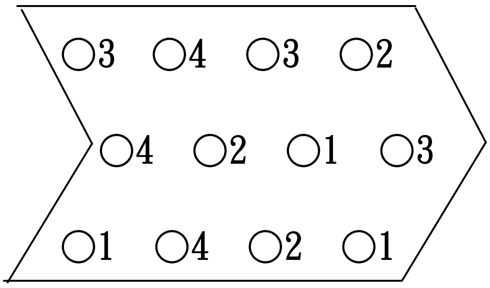
（4） 剩下的六個空位 C、D、G、H、K、L，則分別放入剩下的（3,2）(3,1)（2,1)，不讓相同數字相鄰，以利製造出更多解的可能性。我們決定先把 2 放在 K 的位置，如此可以讓（4,2）多一個可能放的位置。



（5） 因為在 F 的數字為 2，環繞 F 的位置已有三個 4 及一個 2，故 C、G 位置要放入 1、3。



（6） D 的位置放 2，H 的位置放 3，L 的位置放 1，完成如下的設計圖。



（十五）根據我們在推理解的唯一性時所使用的方法，列出改變面板數字位置所造出有最多解（　　組解）的情形。