

# 戲 說 數 學

許 志 農

國立台灣師範大學數學系

January 20, 2012



## 戲說數學序

在智慧型手機與平板電腦逐漸普及的今日，開發老少咸宜，雅俗共賞的益智遊戲成為賺錢的大商機，憤怒鳥遊戲（Angry Birds）就是一款非常成功的範例：



拋物線是憤怒鳥遊戲的精髓，也是這道遊戲唯一所需要掌握的數學，掌握得好就可以過關斬將，進入更高階的關卡。

在 1974 年，匈牙利的建築學和雕塑學教授魯比克發明了第一個魔術方塊（Rubik's Cube），從此魔術方塊熱快速的傳播到全世界，據說魔術方塊的權利金讓魯比克一度成為匈牙利的首富：



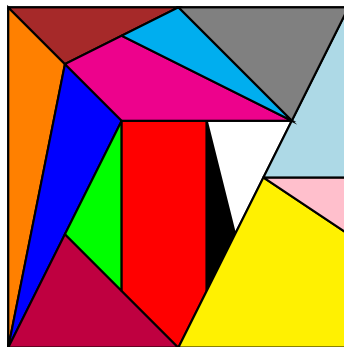
空間中的旋轉與變化是魔術方塊的數學基礎，這些都是透過中心的轉軸來完成。在更早之前，西方的 14-15 滑板遊戲與中國的華容道遊戲也是跟魔術方塊類似的遊戲，差別在於它們是平面的轉換，不是立體的變換。人們所處的環境是三維的世界，立體的魔術方塊會更吸引我們。本質上，這些遊戲都跟代數學的群論有很大的關連，只是外行的玩出熱鬧來，而內行的探究其數學道理。

前蘇聯科學家阿列克謝在 1984 年利用空閒時間所編寫的俄羅斯方塊遊戲（Tetris），是風靡全世界的電腦遊戲，也是落下型益智遊戲的始祖：



在第一次波斯灣戰爭期間，俄羅斯方塊遊戲是前線美軍最常拿來消磨時間的遊戲之一。遊戲中所落下的四方連塊都是由四塊正方形相連所構成的，排除旋轉與鏡射外，一共只有五種四方連塊。由於俄羅斯方塊具有數學性、動態性與知名度，也經常被用來作為遊戲程式設計的練習題材。

遠在兩千兩百多年前，希臘科學家阿基米德也發明過有趣的拼圖遊戲，稱它為胃痛拼圖，其目的是要把十四塊多邊形拼成一整塊正方形：



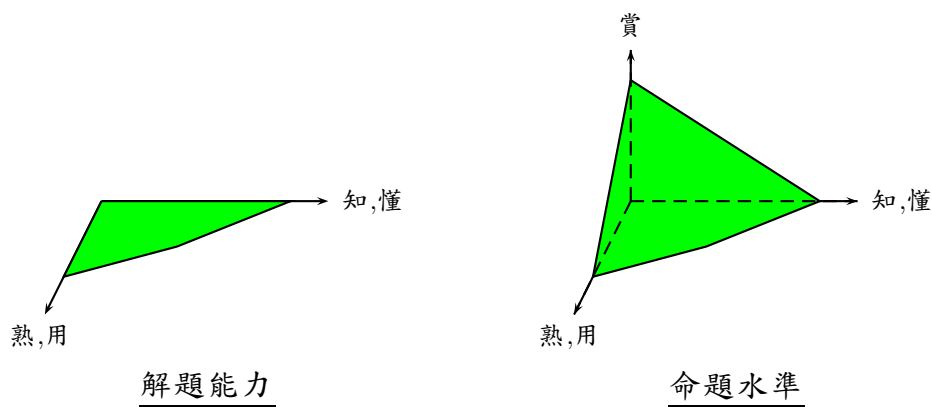
胃痛拼圖的奧妙之處在於它多達 17152 種拼法，除了對阿基米德的巧思切割感到吃驚外，更要感謝平面幾何帶來的美學。

以上所簡介的四道膾炙人口的遊戲，都是以某種數學基礎架構而成，而且又具有很棒的美學效果，究竟這些有趣的數學遊戲是如何誕生的呢？讓我們作更進一步的探索。

匈牙利數學家喬治·波利亞寫過一本名著《如何解題》，教導人們透過各種數學概念，思維與工具來進行解題；但是，波利亞似乎沒有寫過《如何命題》這方面的書籍，無論是奮怒鳥遊戲，魔術方塊，俄羅斯方塊，胃痛拼圖或者教科書裡的數學題目，他們都是屬於“如何命一道有意思的數學題目”的範

疇。解題牽涉到的僅是數學知識的策略應用與組合方法，而命題卻含有相當主觀的成分，甚至命題與數學素養極為相關。到底該如何界定數學素養呢？我們可以用「知、懂、熟、用、賞」這五個字來概括，「知、懂」的程度在要求知道或讀懂數學知識；「熟、用」的深度是指熟練跟會使用數學知識進行解題；而「賞」的境界則較為深奧，意指在生活中遇到與數學相關的事物都能辨識，連結與欣賞。

如果用  $x$  軸度「知、懂」的程度， $y$  軸量「熟、用」的深度，那麼學過或讀懂的數學書籍越多， $x$  軸就越長；能使用的數學技巧或熟悉的數學工具越多， $y$  軸就越深。如此，將  $x$  代表學過的數學知識， $y$  表示使用此知識的能力，就可以在  $xy$  平面上畫出一塊對應的區域，這塊區域就呈現出解題的策略與組合的情形，面積越大代表解題能力越強。當我們進一步在這塊解題區域的每一個點畫上「辨識，連結與欣賞數學事物」的高度（即用  $z$  來度量「賞」的素養）時，就形成一座高山，這座高山就是數學素養，體積越大代表著命題水準越高。



就以憤怒鳥遊戲為例，它是以拋物線為數學背景所設計出來的遊戲，設計者在拋物線這個點的鑑賞能力很高，才能想到與設計出這道遊戲。同樣地，魔術方塊，俄羅斯方塊與胃痛拼圖，他們分別以立體幾何的變換，四方連塊的變化與多邊形的貼合為數學背景，所設計出來很吸睛的遊戲。

這裡所要表達的是「解題能力可以用  $xy$  平面上的一塊區域的面積來計算，而命題水準是素養的問題，必須用立體空間上的體積來衡量；解題跟「知、懂、熟、用」的能力有關，命題

還要考慮「賞」的素養。」最後以乾隆皇帝收藏的一件藝術精品「雕象牙透花人物套球」作結尾：



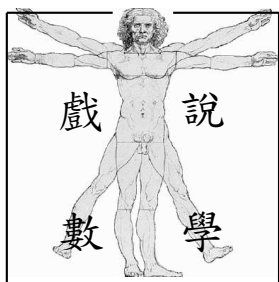
這玲瓏精緻的象牙套球目前收藏在台北故宮博物館，它是由十七層可以靈活轉動的球體所構造完成，從最外層的球體往內挖，必須連挖十六層，而且每層球體的表面必須精雕藝術作品。顯然地，完成這件作品的能工巧匠必須具備某種程度的立體幾何知識，才能幫乾隆完成這件手上玩物。仔細觀察套球，可以發現它有十四個孔，這關鍵的十四孔是如何分佈，才能往下穿鑿十六層呢？當我們把最外層的球體擺在一個正立方體內，讓立方體的六個面都與球體相切，再從球體的中心畫出與正立方體頂點相連的連線，這八條連線與球體表面剛好交八個點。這相切的六點加上相交的八個點，一共十四點，就是套球上十四個孔的中心位置。在數代能工巧匠的實驗嘗試後，終於發現這關鍵的十四孔扮演著相當重要的角色。乾隆皇帝手上把玩的這象牙套球就是以立體幾何上的這十四孔為背景，所構造完成的藝術精品，把它算成數學藝術也不為過。

## 目錄

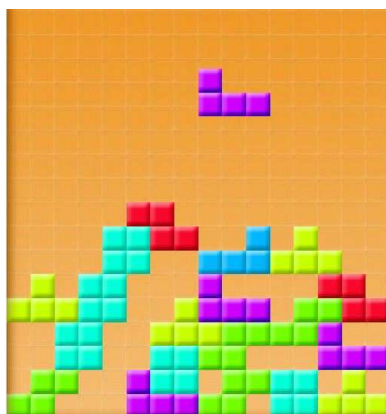
1	四連方塊拼圖	6
2	六角拼圖	8
3	四方連塊拼正方形遊戲…讓俄羅斯方塊縈繞我心	9
4	砌磚遊戲…橫與豎的對抗	11
5	井字上翻烏龜…相煎何太急	13
6	達文西的棋盤…聆聽上帝的美學	16
7	在正五邊形上跳舞…搶 20 的遊戲	19
8	阿基米德的“胃痛”遊戲…西方的七巧板	21



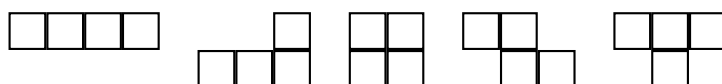
# 1 四連方塊拼圖



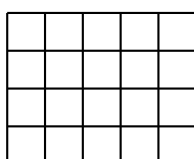
在 1954 年南加州大學數學教授葛布 (Solomon W. Golomb) 用五塊大小相同的正方形，於平面上任意相互連接，在扣除旋轉、鏡射、翻轉之情況下，組合出 12 種不同形，稱為「等積形五連方塊」，這是「連方塊」的起源。後來，俄羅斯數學家利用四連方塊設計出落下型益智遊戲，風靡全世界，稱為俄羅斯方塊遊戲。



所謂四連方塊是指將四塊方形拼湊在一起的可能情形，在要求必須相連的情形下，只會有如下的 5 種情形（翻轉後相同者視為同一種）：



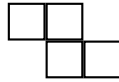
📎 1 是否可以使用五種四連方塊各一塊將  $5 \times 4$  的長方形鋪滿（四連方塊可旋轉與翻面）：



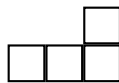
---

試了幾次之後，發現不容易成功。問題是：如何用圖形或數學的概念解釋無法鋪成呢？

讓我們來挑戰一則更難的拼圖：在使用 15 塊 Z 型拼圖



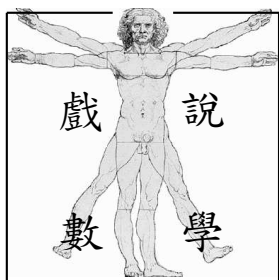
與 1 塊 L 型拼圖



的情形下，可否將  $8 \times 8$  的正方形鋪滿。

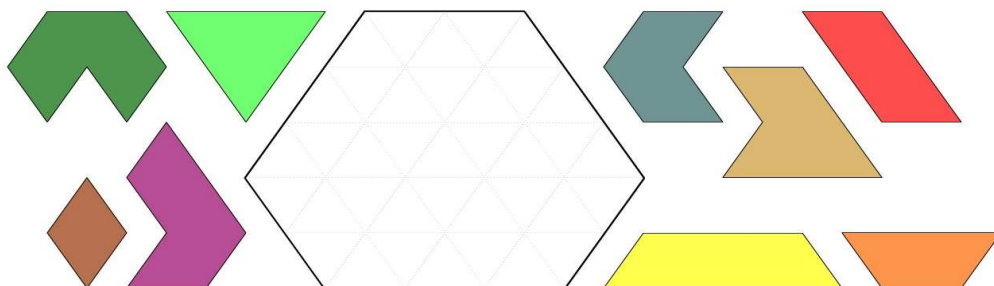


## 2 六角拼圖



到過國立台灣師範大學數學系館的人，都會在玄關處停下腳步，欣賞門字形展覽櫃的數學教具與益智遊戲模型，有胃痛拼圖，魔術方塊，幻方，紙作的立體幾何，鸚鵡螺剖面圖等各類數學模具。

六角拼圖就是展覽櫃內的一道拼圖的數位版，它是由六邊形拼盤與九塊形狀互異的多邊形組合而成，如下圖所示：



這六邊形拼盤是邊長 2 與 3 交錯而成的平行六邊形，盤內總共可以分割成 37 個小的正三角形，而九塊多邊形也多是由小正三角形拼湊而成。

---

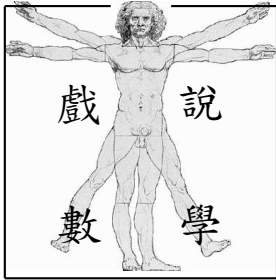
📎 2 在移動，旋轉及翻面的操作下，將九塊多邊形放入六邊形拼盤（不許重疊）。

---

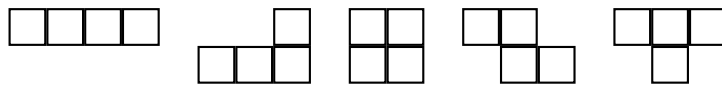
大陸數學家華羅庚題提過「數缺形時，少直覺，形少數時，難入微」，大意是說，算數與幾何是相輔相成的兩個主題，學習時不可偏廢，而是應該像人體的 DNA 一樣，讓兩條長鏈螺旋互相纏繞，方能堅固，富有創意。六邊形拼盤可以當作幾何直覺能力的訓練範本，至少它比胃痛拼圖的難度低很多，只要有耐心，一定可以完成。

關於六邊形拼圖，研究所有可能的拼法是一道不錯的問題。


### 3 四方連塊拼正方形遊戲…讓俄羅斯方塊縈繞我心



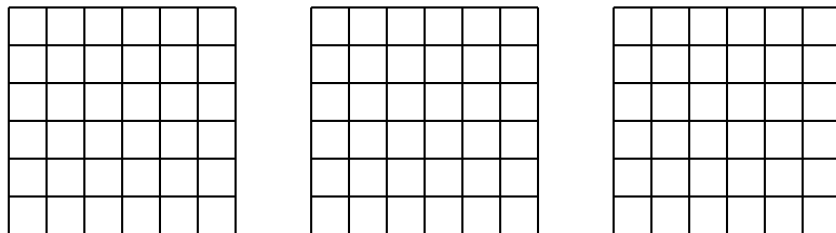
「四方連塊」是指四個單位正方形以邊與邊相連接而成，並扣除圖形旋轉、鏡射，所形成之不同形狀的幾何平面圖形。四方連塊有五種圖形，如下圖所示，分別為 *I* 型、*L* 型、*O* 型、*Z* 型、*T* 型：



使用四方連塊作拼圖是最常見的益智遊戲，但是要拼出正方形卻有點困難。

 3 請完成下列三款四方連塊拼圖：

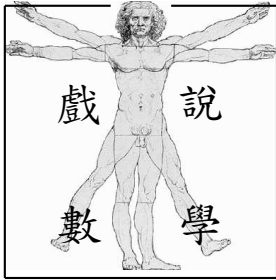
- (1) (平均型) 在使用 *I* 型、*O* 型、*Z* 型、*T* 型各兩塊及 *L* 型一塊 (共計九塊) 的情形下，將  $6 \times 6$  的正方格拼滿。
- (2) (懸殊型) 在使用 *I* 型、*O* 型、*L* 型各一塊，*T* 型兩塊及 *Z* 型四塊 (共計九塊) 的情形下，將  $6 \times 6$  的正方格拼滿。
- (3) (組合型) 在使用 *I* 型、*O* 型各一塊，*T* 型兩塊，*Z* 型兩塊及 *L* 型三塊 (共計九塊) 的情形下，將  $6 \times 6$  的正方格拼滿。



算出兩款拼圖的拼法是一道不錯的排列組合問題，避免不了使

用樹狀圖來歸類。事實上，研究哪九塊四方連塊可以拼出邊長為 6 的正方形是一道極具挑戰性的問題。

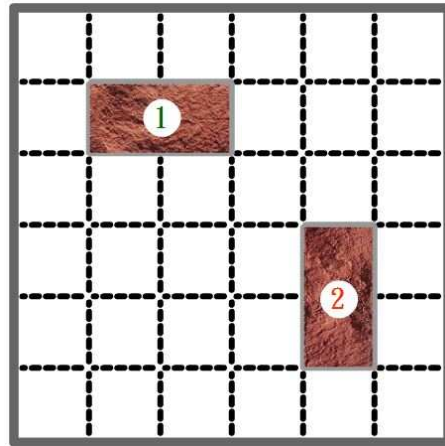
#### 4 砌磚遊戲…橫與豎的對抗



經典廣告詞「鑽石恆久遠，一顆永流傳」是戴比爾斯（DE BEERS）的商品表徵，這家世界鑽石市場龍頭公司甚至在國內申請此句話的商標註冊，而且獲准。事實上，鑽石要恆久遠，必須是顆好的鑽石，同樣地，好的遊戲讓人百玩不膩，可以一直流傳下去，也會有「遊戲恆

久遠，一道永流傳」的效果。你認為哪道數學遊戲有這種永恆的功效呢？

這裡要介紹一道有趣的遊戲，把它叫做「砌磚遊戲」。眾所周知，磚塊是長方形的建材，在這遊戲中，每塊磚頭都是  $1 \times 2$  或者  $2 \times 1$  的大小，在  $6 \times 6$  的正方形牆壁上，甲、乙兩人輪流砌磚塊，每次每人必須砌一塊磚頭，擺放的方向可以是水平的，也可以是鉛直的，但不能夠重疊。下圖是甲砌編號 1 號磚塊，而乙砌編號 2 號磚塊的情形：

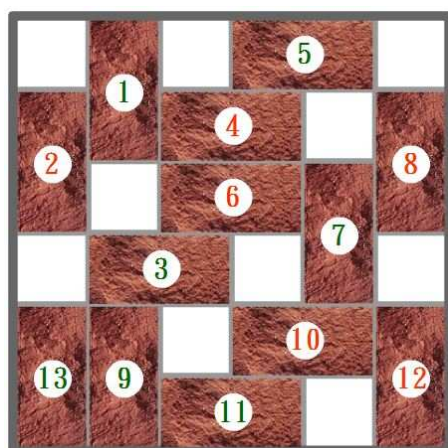


---

📎 4 在無法繼續砌磚塊者算輸的條件下，誰有必勝的策略，又其策略為何？

---

這道遊戲的難處在「磚頭可以橫著放，也可以豎著擺，而且可以有間隔」，如下圖所示：

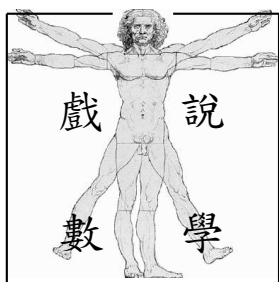


在上圖的砌磚過程中，因為先玩的甲砌了編號 13 號磚塊後，乙無法利用剩下的空格繼續砌磚塊，所以後玩的乙輸。

關於這遊戲，我們可以把它延伸到其它大小的牆壁，例如大小為  $6 \times 5$  或者  $5 \times 5$  的牆壁。當你砌過大小不同牆壁之後，或許會發現「所要採取的砌磚策略大不相同」，但究竟什麼概念左右砌磚遊戲的輸贏呢？

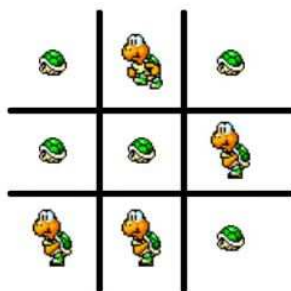
砌磚遊戲是本人與台中女中賴信志老師討論科展問題時，發現的一道遊戲，並不知道以前是否有人或有文獻討論過這個遊戲。直覺上，有一邊為偶數時較容易觀察，兩邊都是奇數時好像比較困難。

## 5 井字上翻烏龜…相煎何太急

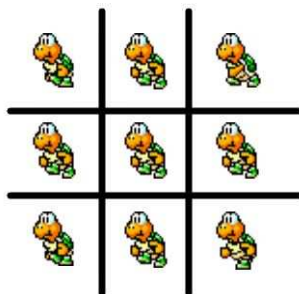


旺宏教育基金會從 2002 年開始，每年舉辦「旺宏科學獎」，該基金會認為科學教育的扎根，在高中階段最顯重要，創新獨立的思考如能從高中階段開始培養，學生的創造力及潛力將超乎想像。旺宏科學獎的獎項有金牌獎、銀牌獎與優等獎，優於金牌獎的作品可得旺宏獎（此獎項可從缺）。這裡所要介紹的這道遊戲來自第三屆旺宏科學獎的旺宏獎作品。

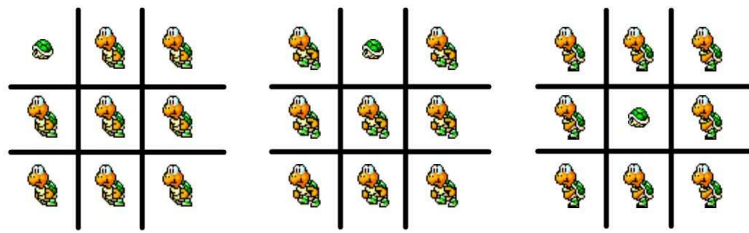
在井字形的九宮格內隨意放置行走或縮頭狀態的九隻烏龜，如下圖所示：



5 每次只能點選其中的一隻烏龜，被點選的烏龜及與其相鄰的烏龜會改變狀態，即行走狀態的烏龜會變成縮頭狀態的烏龜，而縮頭狀態的烏龜會變成行走狀態的烏龜。遊戲的目的就是要將九隻烏龜都變成行走狀態，如下圖所示：

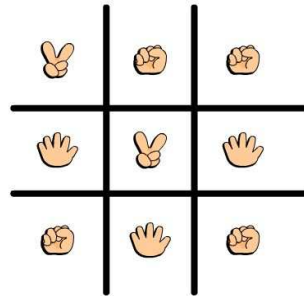


可以從比較簡單的形式操作起，例如下列三種基本的形式：



三種基本形式都可以操作完成後，再來考慮隨意的形式。

如果把這道遊戲延伸成三種狀態，例如剪刀、石頭與布循環出現，每按一格，此格及與此格相鄰的格子內的剪刀、石頭與布狀態會調整為下一個狀態，那麼是否隨意放置的狀態都可以調整為全是“布”的狀態呢？



關於井字上翻烏龜遊戲的啟發與延伸：

- (1) 在翻烏龜的情形，與燈的開關遊戲雷同，只是作者引入矩陣與行列式得到好的結論，這結論也適用於比井字大的棋盤。
- (2) 在剪刀、石頭與布的情形，可以考慮複數平面上滿足  $z^3 = 1$  的三個根

$$1, \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}, \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}.$$

這三個根在複數平面上剛好構成正三角形。

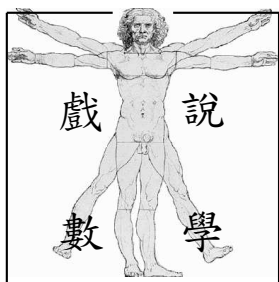
- (3) 將遊戲延伸到多種情況或大棋盤上，就必須使用較困難的行列式求值問題。



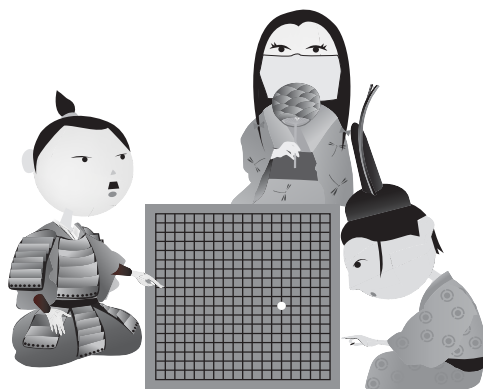
## 參考文獻

- [1] 旺宏教育基金會第三屆作品觀摩網址：  
<http://www.mxeduc.org.tw/ScienceAward/3rd/index.htm>。

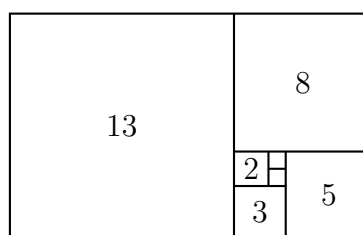
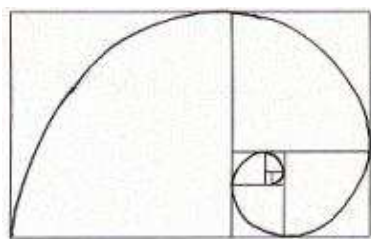
## 6 達文西的棋盤…聆聽上帝的美學



一幅對弈的畫，一場延續了五百年的棋局，…，唯有看穿永恆之美的人，才能獲得答案。這幅畫的場景是「國王和他忠誠的騎士對奕，一位神秘的黑衣女子在背後觀棋…。」而畫裡的棋局，不僅讓達文西喜愛不已，就連後來東方的鐵路工人也著迷。究竟棋局所留下的數學謎團是什麼呢？且讓我們來介紹。



達文西在他的畫作中充分使用了黃金比例，在今日許許多多的事物也都遵循著這個比例在運作。例如傳統照片規格  $3 \times 5$ ，廣角照片規格  $4 \times 7$  及大小為  $15:9$  的寬螢幕電腦等都是在談論不同長、寬比例的矩形，這種比例接近 1.618 的矩形稱為黃金矩形。

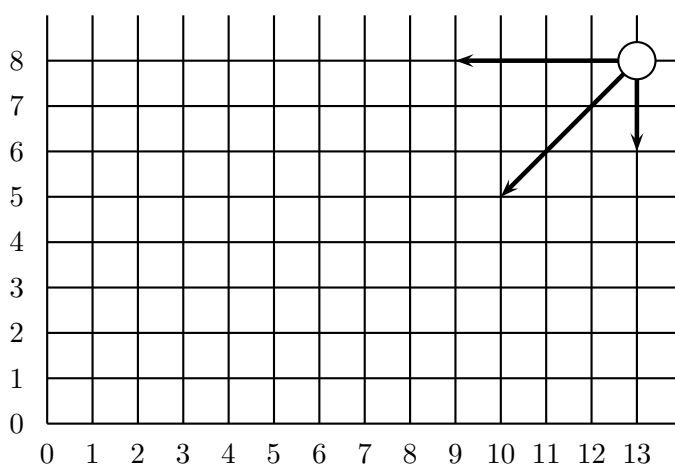


▲螺線與黃金比例

不知是人類 DNA 的遺傳或者是上帝的傑作，人類對這種大小尺寸的黃金矩形，特別情有獨鍾。當你拿出許許多多不同大小的矩形供小孩子挑選時，他們總是會挑到黃金矩形，就像真正的

小法王總是可以選對圓寂法王所留下的法器一樣不可思議。人類這種與生俱來的審美天賦，可以運用在遊戲上擊敗對手嗎？讓我們以一道在圍棋棋盤上玩的遊戲作說明，這遊戲跟圍棋最大的差別是：只需一粒棋子就可以玩這道遊戲。

📎 6 在圍棋棋盤上放置一粒棋子，接著甲、乙兩人輪流移動這粒棋子，棋盤與移動規則如下：



- (1) 甲、乙輪流移動棋子。
- (2) 移動棋子的原則：每次只能將棋子往正下方、正左方或左斜下方移動，即每次只能從三個方向中選擇一種，但移動格子數需至少一格。
- (3) 將棋子移到原點者贏。

事實上，“一子棋遊戲”只是“拈”的另一種呈現方式，換湯不換藥，究竟什麼是“拈”呢？稍微介紹一下：「拈」這個遊戲本是中國民間的遊戲，英文叫做 Nim，大概這遊戲在當年大批華工到美國去做工，在工作之餘，撿石頭消遣或賭博時，被美國佬學了去。（當年的華工大部分是廣東人，而 Nim 是由廣東話「拈」（取物之意）轉音而來）。遊戲的規定是這樣的，石頭只有兩堆，每堆的個數隨玩者任意規定，兩人輪流取石頭，取的時候，需要任一堆中取一個或多個石頭，或者同時

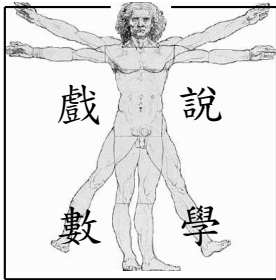
在兩堆取同樣個數的石頭，直到最後將石頭取光的人贏。“一子棋遊戲”的條件就是“拈”條件的不同呈現方式，我只是將它改頭換面，讓這道拿取石頭的“拈”可以在坐標平面上操作，讓它較為數學化而已。

一子棋這道遊戲是我在恆春當兵時發明的，當我駐守關山崖下的山海里時，在落山風相伴的晚上，與阿兵哥玩一子棋是無聊軍中生活裡的一大樂趣。

### 參考文獻

- [1] 張鎮華，拈及其各種變形遊戲，數學傳播第三卷第二期。
- [2] 李宗元、黃敏晃，一個名為「拈」的遊戲，科學月刊第七十期。
- [3] 許志農，古老的池塘，青蛙跳入，撲通！…一子棋的誘惑，《與奇人相遇的故事》。
- [4] 雷維特（陳慧瑛譯），法蘭德斯棋盤，漫遊者出版。

## 7 在正五邊形上跳舞…搶 20 的遊戲



將船艙改裝成書店，航行在世界各地，販售各國書籍，是一種新鮮的經營模式。記得民國七十六年我在高雄實習時，從報紙上得知有一艘這樣的海上書展船會停泊在高雄港，於是利用假日登船尋寶一番。對於這趟挖寶之旅，只記得一件事情，那也是一則數學遊戲在台灣深根的開端。經過二十年的進化，那道有關累加數字遊戲，早已

從舶來品成長為在正五邊形上操作的移動硬幣遊戲。對於這樣的在地貨，不介紹給大家認識，是有點可惜。

假設遊戲者為甲、乙兩人且甲先玩，並遵守下列規則：遊戲者必須輪流從

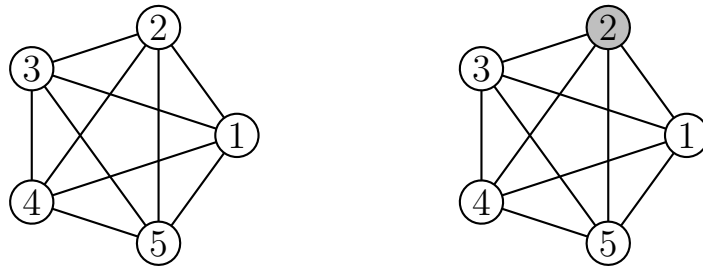
1 2 3 4 5

中選擇一數，但不可重複對方剛選的數。如此下去，將兩人所選的數字累加起來，當累加至正整數 20 者算贏（動彈不得或故意讓累加的數字超過 20 者算輸）。問：甲或乙有必勝的策略？這是那道舶來品的原來敘述，後來我把它修改成「將一枚硬幣放置在上述五個數字內，甲、乙兩人輪流移動硬幣並累加的遊戲」。最後，又將此遊戲與正五邊形相連結。

古希臘歐幾里德在他的《幾何原本》中描述了一個用直尺和圓規做出正五邊形的過程，也因為這個緣故，正五邊形成為歐氏學派重要的圖騰。我將那道移動銅板的數字遊戲與正五邊形結合成如下的遊戲：

---

📎 7 如下圖的左圖所示，在正五邊形的五個頂點各畫一個圓，並依序寫上 1, 2, 3, 4, 5 等五個數字。甲、乙兩人在這幾何圖形上玩累加數字遊戲，規則如下：



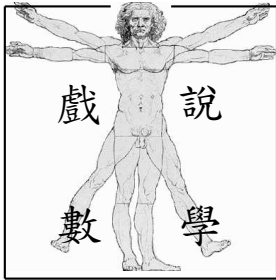
- (1) 先玩的甲拿出一枚拾圓硬幣，放置在五個頂點中的一個（上圖中的右圖代表甲將硬幣置於編號 2 號的頂點）。
- (2) 後玩的乙必須將硬幣依著邊線或對角線，移動至其它編號的頂點。
- (3) 接著甲同樣將硬幣依著邊線或對角線，移動至其它編號的頂點，即硬幣不可以不移動的意思。
- (4) 依此規則，輪流移動硬幣。
- (5) 將移動到的頂點編號累加，當移動完硬幣後，頂點編號累加剛好為 20 者贏，放棄或超過 20 者輸。

關於這道遊戲，先玩或後玩者有必勝的策略呢？

---

如果我們將累加數 20 改成其餘數字  $N$ ，那麼探討「何者有必勝的策略」是一道不錯的研究問題。顯然，當  $N = 1, 2, 3, 4, 5$  時，先玩的甲肯定有必勝的策略（只需將硬幣直接置於該數字的頂點上即可）。而當  $N = 6$  時，誰有必勝的策略呢？不經思索的情況下，很多人會誤認為乙有必勝的策略，但事實並不是這樣。

## 8 阿基米德的“胃痛”遊戲…西方的七巧板



幾年前報紙上刊登過一則有趣的詐騙新聞，兜售太陽眼鏡的生意人向路人宣稱，戴上這高科技眼鏡，可以看穿衣服，讓內在無所遁形，路人甲一時心動買了一副，回去一「視」再「視」，都沒有看到他想看到的，一怒之下，告進法庭。法官傳生意人訊問，生意人說：「沒有

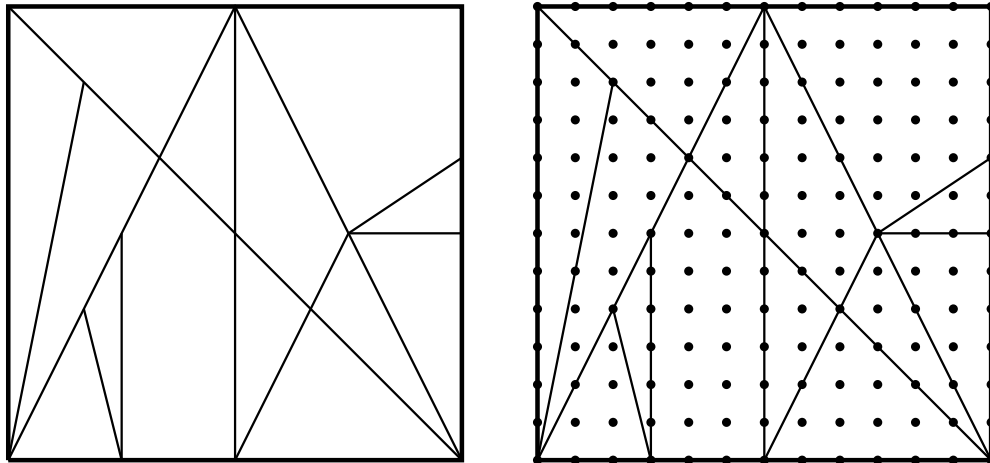
可以看透衣服的眼鏡，這是基本常識，只有色迷心竅的人才會受騙，法官應該問路人甲有否色迷心竅，如果沒有，那代表路人甲早就知道這只是一副普通的眼鏡，無所謂受騙。」路人甲只好啞巴吃黃蓮，有苦說不出的撤回告訴。

這種用高科技騙人的伎倆時有所聞，事實上，高科技經常被用來擷取、儲存資料與還原原始資料。例如，以前的帳目都是記錄在紙本上，沒多久就累積一大疊資料，當政府人員前來查帳時，往往來不及銷毀，留下證據。現在都用電腦記帳，小小的硬碟就可以記錄許多資料，遇到查帳時，只要手指一按就可以銷毀不想被知道的資料。但是，銷毀的硬碟資料是可以被還原的，科技人員可以一層一層的叫回被殺掉的資料。

這裡我們將介紹一道差一點就消失，而且是世界上最古老的拼圖遊戲。在加州史丹福大學同步輻射實驗室，古文物復原專家運用紫外光與數位圖像電腦處理技術，讓阿基米德發明的一道遊戲重現天日。在 1998 年 10 月 30 日，《紐約時報》頭版登了一則報導：紐約佳士得拍賣會上，有一本其貌不揚的古書，以美金 200 萬的高價成交。從外表看，這本書就像是中世紀某位修士的祈禱書，磨損不堪，布滿燒焦、水漬、發霉的痕跡。然而在祈禱文的下方，隱約可看見幾乎被擦拭掉的、傳抄自古代科學家阿基米德的抄本。這祈禱書是教士約翰·麥隆納斯於公元 1229 年 4 月 14 日抄寫，想在耶穌復活周年日，當作禮物獻給教會。羊皮紙從古代中世紀開始使用，由於價值極為貴重，通常經過皮面刮削後，重新書寫，被稱為再生羊皮紙，麥隆納斯將祈禱文書寫在再生羊皮紙上。透過高科技的掃描，祈

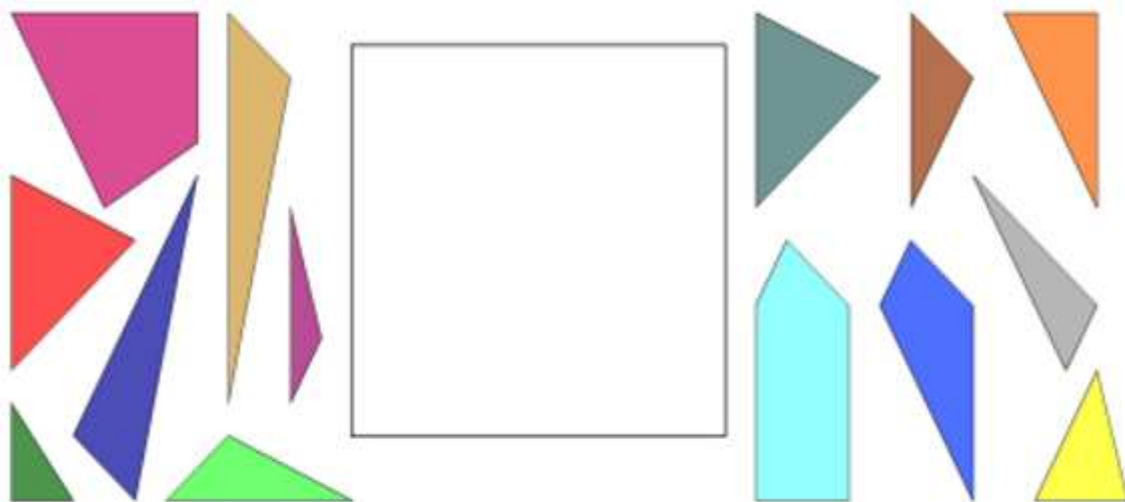


禱書最後一頁原本是阿基米德稱為《胃痛》的一篇文章。該文章並非談身體的疼痛，而是在論述一道組合學的問題，而且附了一個正方形的插圖：



阿基米德的《胃痛》拼圖

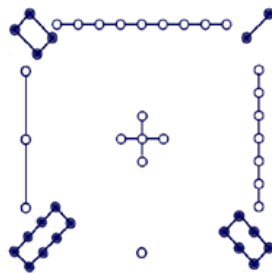
8 將阿基米德胃痛拼圖的正方形切割成 14 塊之後（如下圖所示），再重新拼湊成為正方形的組合方法有多少種？



在這再生羊皮書上，阿基米德所給的答案是 17152 種！這答案經過電腦科學家比爾·卡特勒驗證無誤，卡特勒也指出：將旋

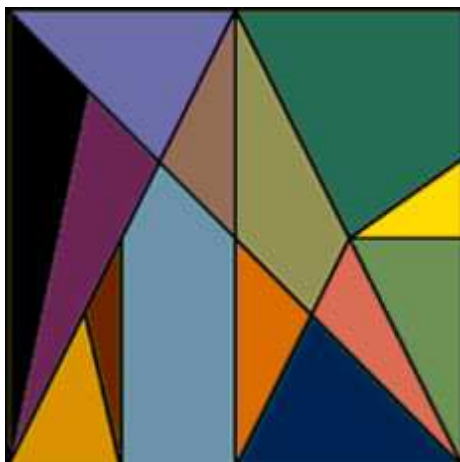
轉或者鏡射視為同一種的話，仍然有 536 種不同的拼法。事實上，幾位鼎鼎有名的數學家，如隆·格拉罕及金芙蓉夫婦檔，都只靠紙與筆就算出這個數字。

相傳在西元前 23 世紀大禹治水的時候，在黃河支流洛水中，浮現出一個大烏龜，甲上背有 9 種花點的圖案，人們將圖案中的花點數了一下，競驚奇地發現 9 種花點數正巧是 1-9 這 9 個數，各數位置的排列也相當奇妙，後來人們就稱這個圖案為洛書。



洛書給出的 9 個數所排成的方陣具有絕妙的性質，橫的 3 行、縱的 3 列以及兩對角線上各自的數字之和都是 15。人們因它的性質之獨特而大感興趣，對其進行了多方面的研究。中國把這“縱橫圖”或西方稱為“幻方”的精巧結構當作組合數學的濫觴。再生羊皮書的出現，西方似乎也把組合數學的濫觴往前推算到阿基米德的《胃痛》遊戲。

現在讓我們動手做一道練習吧！拿剪刀或美工刀將阿基米德的胃痛拼圖沿著黑線剪開，讓它變成 14 塊。然後將這 14 塊填滿底下阿基米德的正方形圖片，並要求轉動後的縫隙不得與原來的圖形一樣：

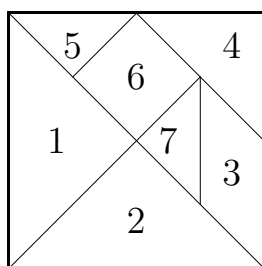


拼成正方形的方法有 17152 種，如果一位老師每天到學校的第一件事情就是拼出新的正方形，那麼在他退休時，也無法完成所有的拼法。這是否意味著隨便拼都會成功呢？試試看吧！

美國 1977 年發射的尋求外星文明的太空船旅行者 1 號、2 號上，除了有向宇宙人致意的問候訊號外，還帶有一些圖片，這些圖片中就有一張是四階幻方圖。這個四階幻方的構圖，同我國的洛書一樣，也是用不同數量的圖點佈局成的，而且它又是一個具有多種奇妙性質的四階幻方，向宇宙人告示了我們地球人的智慧。

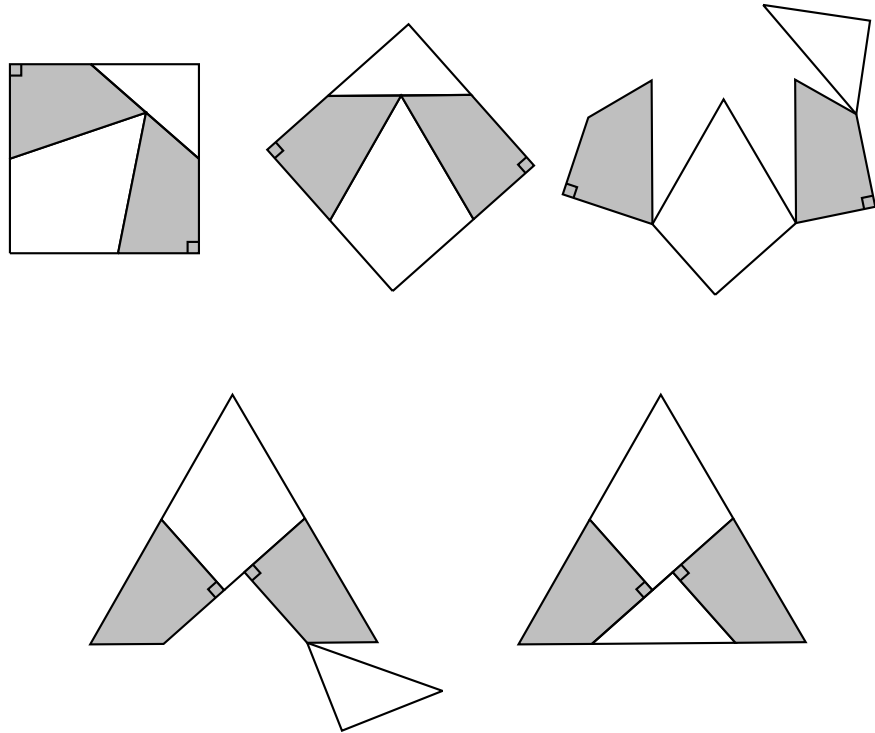
洛書、幻方都是組合學古老的例子，如今加入了《胃痛》遊戲這道啟蒙例子，讓組合學的內涵更多采多姿。從這些例子不難發現，組合學就是在處理離散的情形；而今日的電腦也是以處理離散情形為核心。計算機的使用讓組合學研究一日千里，同樣的，組合學的訓練也使計算機軟體產業得到好的基礎。

阿基米德的羊皮紙手稿，由丹麥學者海伯格於 1906 年在今之伊斯坦堡發現，1920 年再度失蹤，1998 年出現在紐約佳士得拍賣會上。該次拍賣，希臘代表競標至美金 190 萬才退出，而最後的得標者，是一位不願意透露姓名的美國收藏家，這位收藏家說，將來學者可以借閱該手稿。阿基米德的 14 塊拼圖，除了拼成正方形的遊戲之外，也可以玩類似中國七巧板的遊戲，拼各種動物。

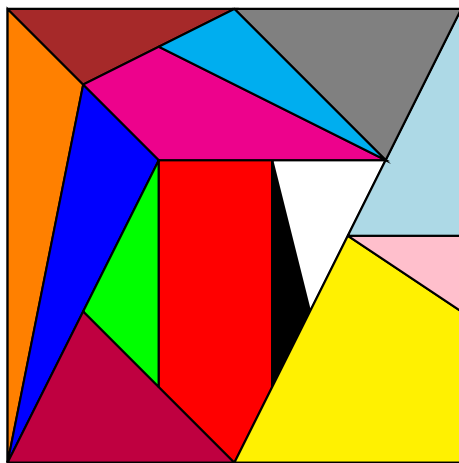


七巧版

《胃痛》拼圖最早出現在中世紀的阿拉伯文譯本上，大家都把它視為類似中國七巧板的遊戲，定位為益智遊戲的一種。事實上，數學家也研究過正方形與正三角形的拼圖，下圖是將正方形分割成四塊，然後逐步拼成正三角形的過程：



直到再生羊皮書的出現，才瞭解阿基米德是在研究拼成正方形的組合方法數，並不是拼圖遊戲或是七巧板之類的益智遊戲。也因為這樣，阿基米德也成為西方組合學的老祖先。這裡附上胃痛拼圖眾多解答中的一種，也是個人覺得很漂亮的拼法：



胃痛拼圖的啟發與延伸：

- (1) 透過格子點的巧妙切割，阿基米德找到了一道有萬餘種拼法的拼圖遊戲，不僅讓我們開了眼界，也替拼圖遊戲增添了豐富的遺產。

- (2) 多邊形的拼圖遊戲，在接觸頂點處牽涉到角度和的問題，由於每塊拼圖的邊長至多是開根號的長度，瞭解這個限制所能形成的角度和問題是值得深思的一道數學問題。
- (3) 尋找面積稍小，拼圖個數也較少（例如八、九或十塊的拼圖），但拼法有數千種的新拼圖遊戲。這樣的拼圖遊戲是否存在？如果可以找到，肯定是一道更膾炙人口的拼圖遊戲。有興趣的讀者可以動手試試看。

### 參考文獻

- [1] 曹亮吉譯（內茲，諾爾著），《阿基米德寶典—失落的羊皮書》，天下文化出版。

拔數遊戲.gam