

胃痛拼圖

台南市鹽水國小何鳳珠

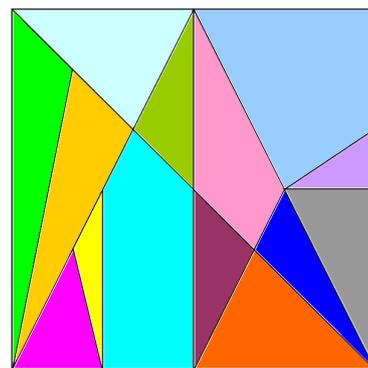
一、前言

三年前(2008年)曾在某數學系中櫥窗中看到一組拼圖，一個正方形被切分成好幾個區塊，每塊色彩皆不同，因此將它拍照下來存放在我的電腦檔案夾中，也未曾再去研究它。這次參加了「國中數學創意教學活動設計」工作坊，聽了許志農老師的胃痛拼圖，才想起來三年前的這張照片，原來那時看到它，它才「問世」剛好 10 年，之前看到這組拼圖，直覺與七巧板差不多，只是切得比較多塊罷了，自己當下也想：哈，要製作拼圖，我隨便將一個正方形切一切可以形成一組拼圖呀！但在許老師的介紹下，再加上自己去摸索它，發現它是如此的不可思議，切割的方法其線段比例不是 1:1 就是 1:2，且竟有 17152 種不同的拼法，實在太不可思議了，因為任何一種巧板拼圖都不可能會有如此多種的拼法，除了拼組的考驗外，這倒是讓我連想到，可以運用在國小幾何教學中，學習的概念是等底等高的三角形面積相等，再連結比例概念，將可以讓這組胃痛拼圖發揮其神奇妙用，在設計此課程時，仔細思量其 17152 種拼法究竟是如何推算出來的，要一一拼組是不可能的，在摸索中竟然感受的組合概念應用的神奇，也終於明瞭在胃痛拼圖浮出台面時，讓許多數學家為之瘋狂，因此，用心設計了這個活動，希望讓學童可以體驗不一樣的數學，感受它的美與不可思議。

二、教學流程

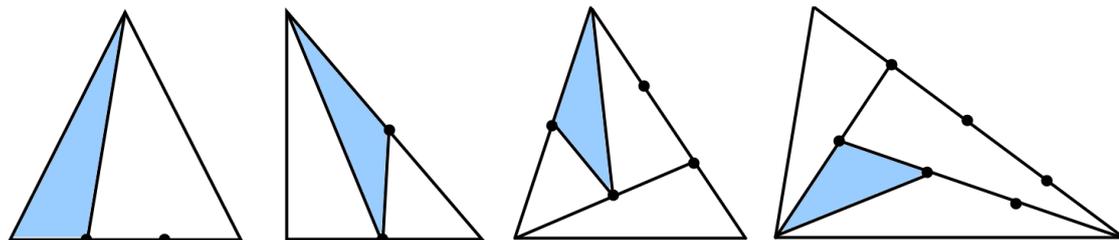
(一) 認識【胃痛拼圖】

1. 閱讀相關的胃痛拼圖文獻（如附件一）
2. 以小組為主，將其文章中所提到的訊息用心智繪圖法記錄下重要訊息的關鍵字（如附件二）。
3. 由教師提問進行搶答，考驗其利用心智繪圖法是否對文章內容之記憶廣度有幫助，同時也讓學童對胃痛拼圖有粗淺的認識及印象。提問參考如下：
 - a. 這組拼圖是誰發明的？有哪些說法？
 - b. 祈禱書的內文中為何會發現阿基米德的抄本？
 - c. 胃痛拼圖是由幾塊小元件所組成的？
 - d. 胃痛拼圖裡包含了哪些形狀？
 - e. 胃痛拼圖除了是一種益智遊戲外，更是一種什麼學問的探討？



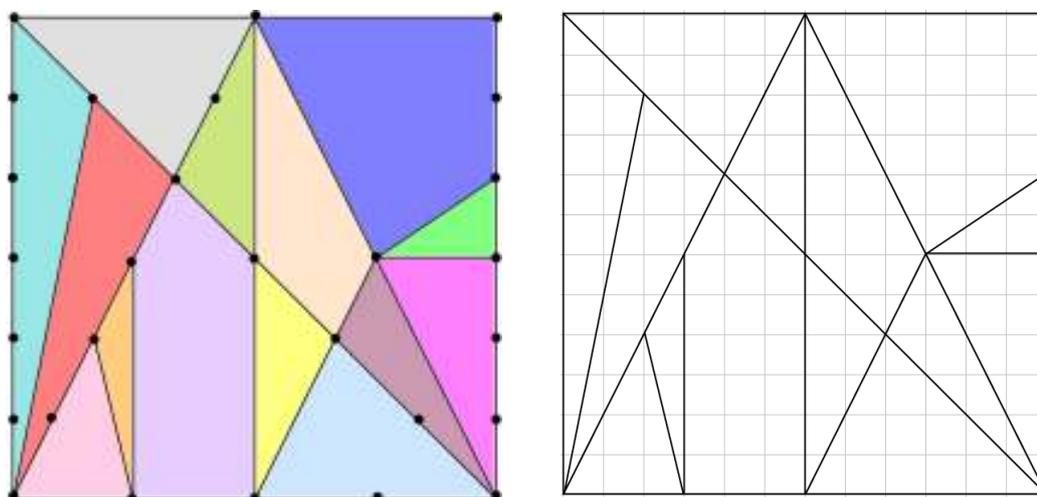
(二) 探究各區塊間的比例關係

1. 說說看，甲、乙、丙、丁四圖中藍色區塊占原圖的多少？你是怎麼知道的？



2. 從胃痛拼圖中找出最小區塊，並設定此區塊為 1，說說看，其它區塊各是多少？你是怎麼知道的？（如附件三）

註：若學童解答有困難，則可以給予有方格底的胃痛拼圖（如下圖右）。



3. 將胃痛拼圖的 14 個元件分別編號，各組抽出一個號碼並領取一張胃痛拼圖（如附件四），並以那個號碼所代表的區塊為基準單位 1，找出其它區塊各是多少？說說看，你是怎麼知道的？

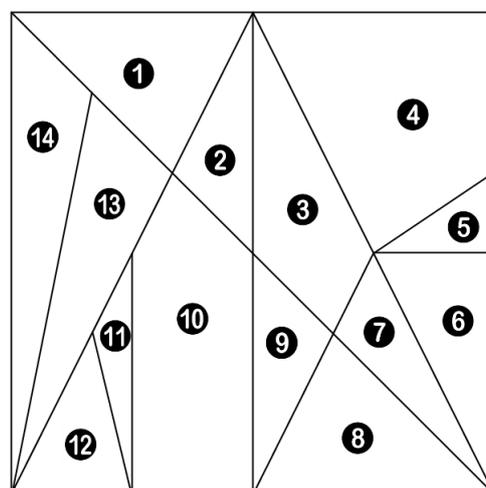
(三) 面積推理接力賽

1. 由教師給定一個區塊的面積，全班分組接力解開其它區塊的面積，過程中需敘述是怎麼導出區塊面積的。

如：區塊 1 的面積為 10cm^2

推理 1：區塊 2 是區塊 1 的 $\frac{1}{2}$ ，所以面積是

$$10 \times \frac{1}{2} = 5\text{cm}^2$$



推理 2：區塊 14 和 13 之和為是區塊 1 的的 2 倍，所以面積合是 $10 \times 2 = 20$ ，又因區塊 13 和區塊 14 兩三角形等底等高，因此面積一樣是 $20 \div 2 = 10 \text{cm}^2$

推理 3：區塊 2 和區塊 10 之和為區塊 (1 + 2 + 3) 和的 $\frac{3}{4}$ ，即 $30 \times \frac{3}{4} = \frac{90}{4} \text{cm}^2$ ，

又區塊 2 是 5cm^2 ，因此區塊 10 為 $\frac{90}{4} - 5 = 17\frac{1}{2}$ 。

以此類推讓學童進行接力推理，以完成所有的區塊面積推算。

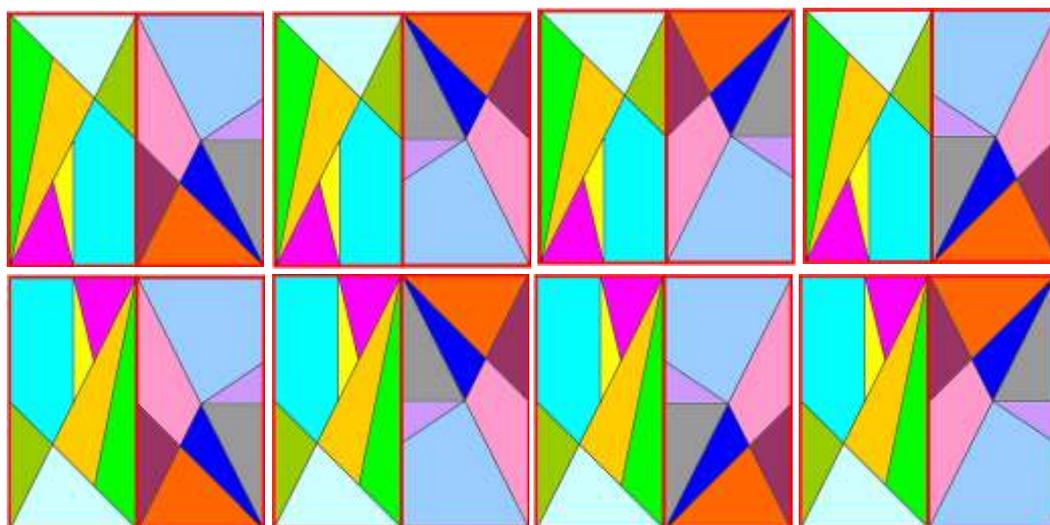
2. 學童自行完成活動單（如附件五），過程中可以簡易符號做推理。

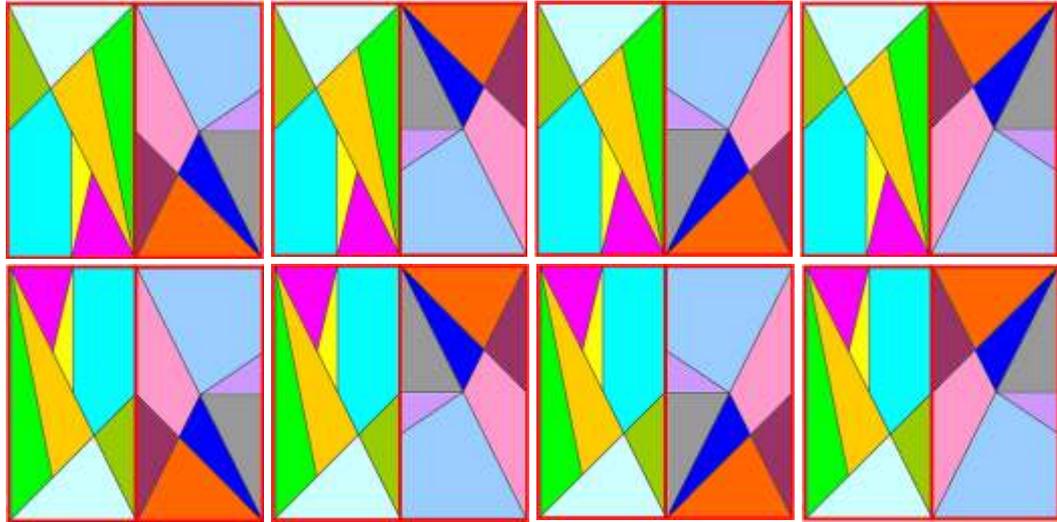
例 1：已知①為 10，而② \times 2 = ① \rightarrow ② = 5

例 2：①為 10，又①與③為全等圖形，所以③ = 10

(四) 拼組大變身

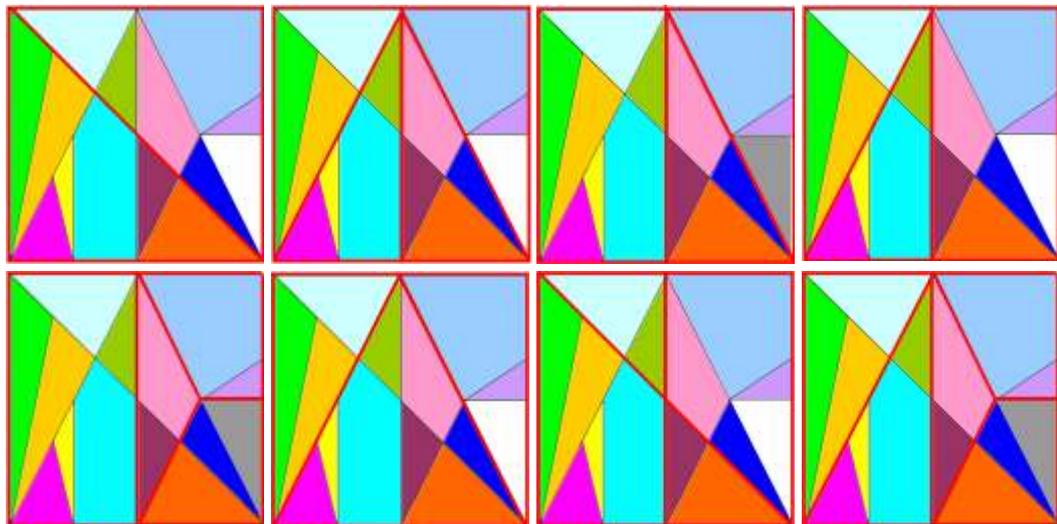
1. 每組給予一套 14 個元件的胃痛拼圖，限時在 1 分鐘內拼出正方形的另一種組合。
2. 分享其拼組的困難度。
3. 思考如何有效率地拼出不同的組合，請學童分享看法。
4. 教師給予一張學習單（如附件六），在左上角的方格中進行胃痛拼圖基模組元件的切割，過程中引導學童思考：第一刀要先怎麼切？一分為二後，接下來要拿哪一片來切，怎麼切？從哪裡切？一步一步引導切割。此為重要關鍵，引導學童能發現以下幾點：
 - a. 全等且對稱圖形可以互相交換，即可形成新的一組拼法。
 - b. 利用鏡射翻轉或旋轉，產出另一種新的拼法。
 - c. 察覺交換、翻轉及旋轉交互作用，可以產出加乘的效果，即瞬間產出更多種拼法
例：以一分為二，成為長方形為例，左右兩邊各可以變化出 4 種模式（原型、旋轉、原型左右翻轉、原型上下翻轉），再經左右兩塊的加乘，就可以變出 4×4 的 16 種變化





d.引導學童思考圖形可以做怎樣的區塊切割，再進行鏡射、旋轉、交換等加乘變化。

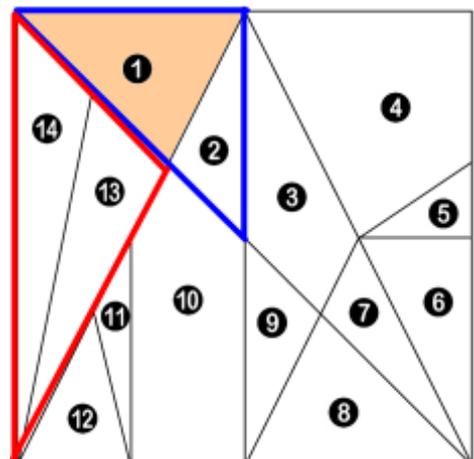
例：



5.學童自由進行實作，並將切割圖畫在附件六上。

三、教學省思

1. 原本以為學童會很容易抓到等底等高面積相同的關鍵點，然後找出各區塊所占的比例，但實際上對小六的學生還是有一些困難點，就單一簡單的圖形，如教學流程(2)-1，學生大多能解，但一旦碰上胃痛拼圖時，當下無法馬上由小區塊找到相關的區塊來做推論，例如：知道元件 1，但一時無法在其它 1 3 個元件中找到與之相關的元件



2，看到藍色三角形而知道元件 1 與元件 2 是等高的三個三角形，其面積比為底邊的比 2：1，所以推得元件 2。或由已知的元 1 看到紅色區塊（元件 1 3 + 元件 1 4）與它是等高的三角形，面積比為底邊的比 1：2，需經老師引導後，才能較熟悉，因此建議在(2)-1 的引導中，多一點例題，甚至可以讓各組自己設計題目來交換挑戰，以熟練之。

2. 活動(三)結束後，我佈了五題國中的相關題型讓學童來解題（包含 2 題國中基測題），起先看到題目，都覺得很難，但一旦用心去看去想，發現其實很簡單，也都能解題成功，且有”頓悟”的感覺，看來，一個概念的基礎打穩，那麼任題型再怎麼變化，轉換也都容易了。

AD=2BC，只知梯形的面積是66，若E為CD的中點，則ADE面積是少？

下圖BC邊等分成三小段，AC等分成二小段已知藍色區塊面積為5平方公分，求三角形ABC的面積是多少？

右圖中，三角形ABC被分成四個面積相同的三角形，求BC線段的長？

99學年度第二次基測題

16. 圖(七)為三角形紙片ABC， \overline{AB} 上有一點P，已知將A、B、C往內摺至P時，出現摺線SR、TQ、QR，其中Q、R、S、T四點會分別在BC、AC、AP、BP上，如圖(八)所示，若 $\triangle ABC$ 、四邊形PTQR的面積分別為16、5，則 $\triangle PRS$ 面積為何？

(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4

96學年度第一次基測題

2. 圖(一)為一梯形ABCD，其中 $\angle C = \angle D = 90^\circ$ ，且 $\overline{AD} = 6$ ， $\overline{BC} = 18$ ， $\overline{CD} = 12$ 。若將 \overline{AD} 疊合在 \overline{BC} 上，出現摺線MN，如圖(二)所示，則MN的長度為何？

(A) 9
(B) 12
(C) 15
(D) 21

四、參考文件

數學美拾趣 <http://math.ntnu.edu.tw/~maco/math-beauty.htm>

五、附件資料



認識胃痛拼圖

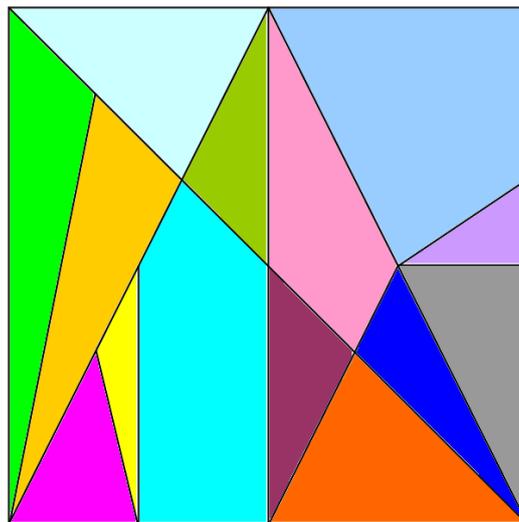


班級：_____ 姓名：_____ 家長簽名：_____ 設計者：何鳳珠

單元目標：探究胃痛拼圖中的幾何原理，並推算其區塊面積大小。

阿基米德的胃痛拼圖(stomachache puzzle)

在加州史丹福大學同步輻射實驗室，古文物復原專家運用紫外光與數位圖像電腦處理技術，讓阿基米德發明的一道遊戲重現天日。1998年10月30日，《紐約時報》頭版登了一則報導：紐約佳士得拍賣會上，有一本其貌不揚的古書，以美金200萬的高價成交。從外表看，這本書就像是中世紀某位修士的祈禱書，磨損不堪，布滿燒焦、水漬、發霉的痕跡。然而在祈禱文的下方，隱約可看見幾乎被擦拭掉的、傳抄古代科學家阿基米德的抄本。這祈禱書是教士約翰·麥隆納斯於公元1229年4月14日抄寫，想在耶穌復活周年日，當作禮物獻給教會。羊皮紙從古代中世紀開始使用，由於價值極為貴重，通常經過皮面刮削後，重新書寫，被稱為再生羊皮紙，麥隆納斯將祈禱文書寫在再生羊皮紙上。



透過高科技的掃描，祈禱書最後一頁原本是阿基米德稱為《胃痛》的一篇文章。該文章並非談身體的疼痛，而是在論述一道組合學的問題，而且附了一個正方形的插圖。

這拼圖一說是阿基米德發明的，也有人認為更早之前就被發明，阿基米德只是研究過它而已。現在只有兩條線索知道這拼圖，其一是從阿拉伯文中發現這個拼圖，在這個方向上，大都把它看成類似中國的七巧版，當成一種益智遊戲，隨意的拼出各種造型的東西；另一條線索是從一本再生羊皮書所讀出的阿基米德手稿，在這手稿中，可以確定的是：阿基米德把胃痛拼圖當成一道組合問題研究。

有幾組不同的組合學家都確認出，一共有17152種。阿基米德的胃痛拼圖會有這樣多的不同拼法，應該不是運氣好發現的，而是精心設計得到的，唯有將幾何與代數融合在一起，才能發明如此巧妙而多變的拼圖。

【附件二】



胃痛拼圖知多少



班級：_____ 姓名：_____ 家長簽名：_____ 設計者：何鳳珠

單元目標：探究胃痛拼圖中的幾何原理，並推算其區塊面積大小。

姓名 ○ ○ ○

數學心智圖

原圖設計：曾水鳳小姐何鳳珠

圖象遊戲

主題

胃痛拼圖

hjudy設計

【附件三】



比例關係

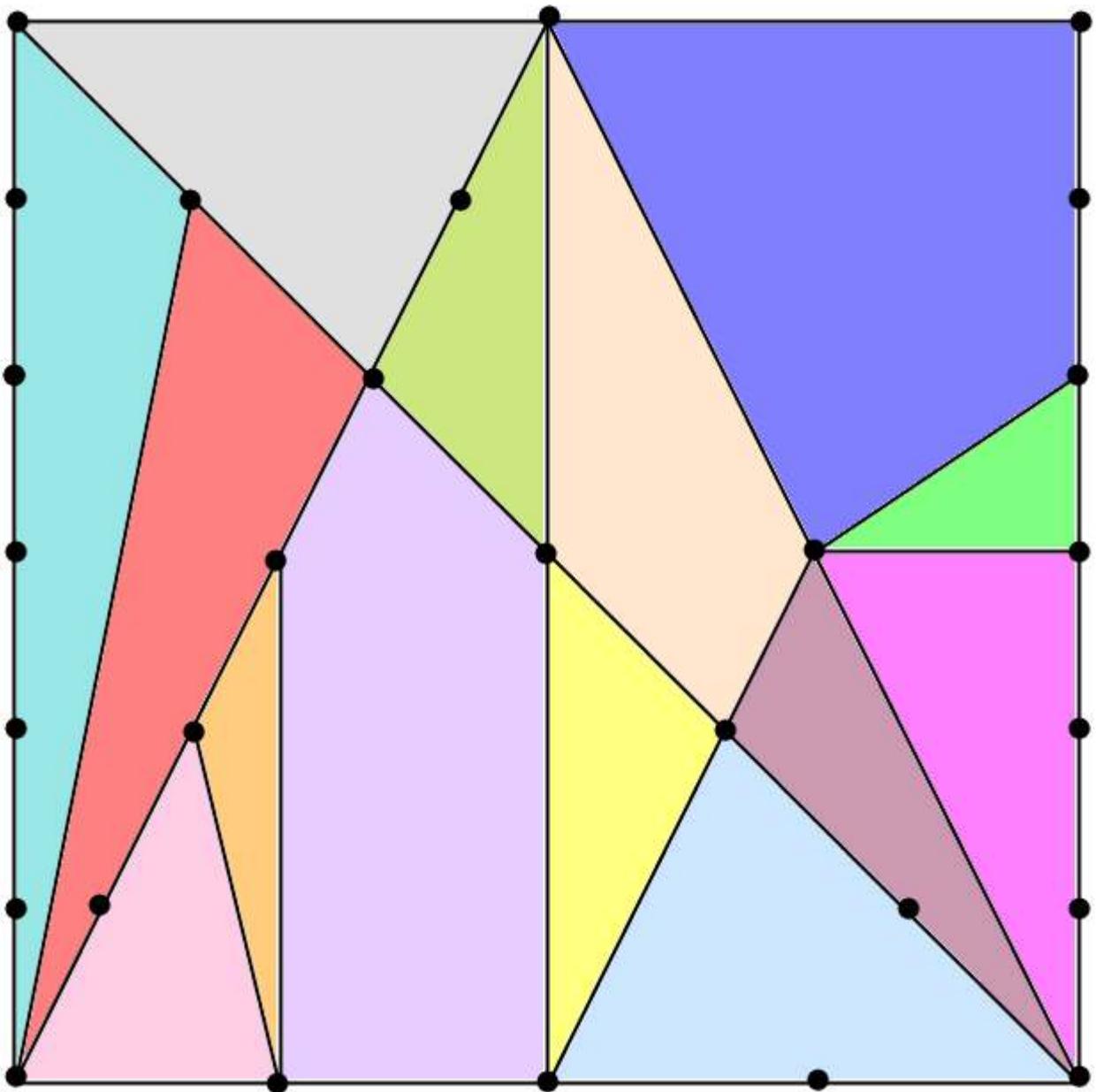


班級：_____ 姓名：_____ 家長簽名：_____ 設計者：何鳳珠

單元目標：探究胃痛拼圖中的幾何原理，並推算其區塊面積大小。



胃痛拼圖各區塊間的比例關係



【附件五】



面積推理



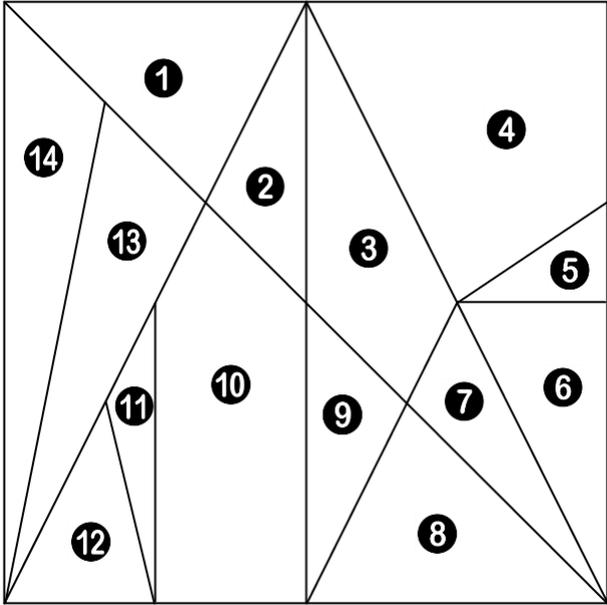
班級：_____ 姓名：_____ 家長簽名：_____ 設計者：何鳳珠

單元目標：探究胃痛拼圖中的幾何原理，並推算其區塊面積大小。



胃痛拼圖之區塊面積

說明：元件 1 為 10cm^2 ，請推算算出每個區塊的面積

		5		
		6		
		7		
		8		
		9		
		10		
	1		11	
	2		12	
	3		13	
	4		14	

【附件六】



拼組大變身



班級：_____ 姓名：_____ 家長簽名：_____ 設計者：何鳳珠

單元目標：探究胃痛拼圖中的幾何原理，包含旋轉、鏡射、交換等替換組合。



拼組大變身

說明：你可以拼出幾種不同的正方形？並在下方的格子中切割出你的拼圖組。

