十二年國教數學素養導向課程設計與教學案例

單維彰　鄭章華　主編

十二年國民基本教育數學素養教材研發編輯小組

十二年國教數學素養導向課程設計與教學案例

單維彰　鄭章華　主編

作者簡介

（依各章與姓氏筆畫順序排列）

主編與序

單維彰

現職：國立中央大學師資培育中心與數學系副教授

主編與第一章

鄭章華

現職：國家教育研究院課程及教學研究中心助理研究員

第二章

古欣怡、林美曲

現職：苗栗縣信德國民小學教師

第三章

曾明德

現職：臺北市立南門國民中學教師

鄧家駿

現職：臺北市立景興國民中學教師

第四章

吳姈蓉

現職：新北市立忠孝國民中學教師

蔡佩旻

現職：新北市立重慶國民中學教師

第五章

王統新、林信安、曾俊雄

現職：臺北市立建國高級中學教師

第六章

吳汀菱、洪瑞英

現職：臺北市立中山女子高級中學教師

第七章

高健維、馬雅筠、陳吳煜

現職：臺北市立大安高級工業職業學校教師

序

國家教育研究院爲支援十二年國民基本教育課程之實施，從民國 103 年起，由副院長領銜主持一系列的教材模組實驗計畫，旨在探究呼應十二年國教之「素養」理念的教材特徵，並製作單元實例。本書集結數學領域在國小、國中、技高和普高四個學習階段，於民國 103、104 兩年之間完成的 10 份教材模組，就教於教師同仁、社會賢達與學者專家。

本書集結的教材模組全都經過共同發想討論、分組研發設計、第一次外審與修訂、公開試教、自我改善、第二次外審、美編製作與校對等階段，過程審愼而精緻。最後的成果是彩色書籍品質的數位文件（pdf 格式），每個模組至少針對學生與教師需求分成兩冊，由國教院提供給社會各界自由取用。我們期盼這批最初的嘗試，能爲十二年國教的數學教材提供初步的參考，發揮拋磚引玉的效果。

各教材模組的題材選擇，是在共同發想的階段，從尚在研擬（但可望達成共識）的數學領域課程綱要（草案）之中，挑選呼應主要變化的單元出來。例如國中階段的「指對數」是傳統課題，但是將要搭配計算機 (calculator) 進行教學與探索；國小的「比與比值」和「正方體與長方體」看似舊課題，但它們除了示範動手做以外，也重新釐清了這兩個課題作爲七年級進階內容的奠基責任；「等差數列」是國中的固有課題，但我們在生活經驗中鋪陳了豐富的數列範例之後，才引進數學的數列性質；「直角三角比」是國中的新課題，特別需要實作與探索的教材與教學示例，此模組連結生活經驗、數學概念與計算工具，深獲好評。

技術型高中的兩份模組，都從機、電、工程群科學生的需求與其熟悉的專業情境出發，從具體的現象或操作入手，然後導出數學性質，受到專業科目同儕高度的評價。普通型高中的「相關係數」與「排列組合」都嘗試從歷

史脈絡中導引數學觀念的發展，同時兼顧實用功能與數學趣味，而後者並嘗試「減量」排列組合教材的可能性。「平面上的線性變換」試驗了課綱建議以線性組合爲主要思考方法的教法，獲得試教學生的熱烈響應。

本計畫在研發與實驗的過程中，同時試探了同領域跨學習階段之教師社群運作方式，實驗由社群開發自編教材的模式，並以演繹和歸納兩種論證方式，凝聚素養導向教材之編寫原則。這些珍貴的「副產品」或許比特定的成果（單元教材模組）具有更長遠的效用，例如素養導向之數學教材「編寫原則」已經寫進了課綱說明手冊，請參閱鄭章華博士在第壹章的撰寫內容。我們也建議讀者在檢視本書的教學模組時，後設地檢視它們符合哪些編寫原則？

就一名行動參與者來說，這個計畫團隊是每個人夢寐以求的夥伴。跨階段的教師社群迸發令人驚訝的火花，彼此的貢獻超乎想像；團隊裡的每個人都是學校裡熱情而好學的老師，以前總是感覺體內「眞氣亂竄」，直到我們聚集起來，才得以舒發。謹以此序，感謝所有的夥伴，也感謝讓我們有緣聚在一起的國家教育研究院。

民國 106 年 5 月 1 日

目　錄

第一章　「知、行、識」
～探究數學素養導向教學模組設計與發展

第一章　「知、行、識」
～探究數學素養導向教學模組設計與發展

壹、研修動機與背景

十二年國民基本教育（簡稱十二年國教）課程綱要總綱即將實施，揭櫫「適性揚才，成就每一位孩子」的理念，強調核心素養的培養，著重自一至十二年級領域課程安排的連貫性以及領域之間的橫向連繫與統整。這是我國自國中小九年一貫課程與高中 99 課綱以來的最大教育改革，影響的層面既廣且深。

尤其是對於下一代核心素養的培養，著重全人教育，學習不應該侷限於學科知識及技能，而是關注與生活的結合，透過實踐力行而成就學習者的身心發展（教育部，2014）。「核心素養」是在九年一貫課程的能力發展基礎上，深化與整合「知識」、「技能」和「態度」，從而使個人可以適應日常生活與面對未來挑戰，進行終身學習（教育部，2014）。核心素養是後天習得，即使有些成分是先天潛能的開展，這些發展也一定是後天教學可以達成（洪裕宏，2008）。

十二年國教的理念與目標呼應許多先進國家，例如歐盟與經濟合作與發展組織，對於「核心素養」(key competency) 培養的重視 (European Commission, 2007; The Organization for Economic Co-Operation and Development, [OECD], 2005)。核心素養的三面九項皆有相關文獻或實徵研究做基礎（蔡清田、陳延興，2013）。各領域可因其學科特色與學習階段考量，選取其中幾項的核心素養轉化發展成為領域的核心素養。

雖然核心素養培養的理念符合世界許多國家教育改革的趨勢，然而，對於許多教師而言，核心素養是相當陌生的名詞，遑論在課室中進行素養導向

的教學。課程理念的溝通與傳播對於教育改革至為關鍵（國家教育研究院，2014）。由於中小學教師相當依賴教科書進行教學，當課程的理念與目標若能藉由教科書設計而具體達成時，教科書即成為課程改革的有力推手。反之，若教科書傳遞的教育內涵和課程理念與目標背道而馳時，教科書極可能成為課程理念轉化的重大阻礙 (張芬芬、陳麗華、楊國揚，2010)。

有鑒於此，國家教育研究院邀集專家學者和一群中小學數學專家教師組成研修團隊，研發數學素養導向教學模組，以具體案例協助第一線教師與教科書出版商了解十二年國教核心素養培養的理念與可能做法。本計畫案為「十二年國民基本教育數學領域教學模組研發模式與示例之研究」[1]，在十二年國教數學領綱小組副召集人單維彰教授的帶領下，根據十二年國教數學領綱（草案）（國家教育研究院，2016），以「設計研究法」(design-based research)(翁穎哲、譚克平，2008) 研修數學素養導向教材，研修成果陸續放置在國家教育研究院《協力同行》網站上（網址：http://12cur.naer.edu.tw/category/Instructional_Materials_and_Modules），提供社會各界下載。數學素養導向教學模組的版權開放，只要使用者註明出處即可，希望對於十二年國教數學領綱理念的傳播與實踐能有所貢獻。

研究者藉由訪談教學模組撰寫教師與分析教學模組內容識別出六項數學素養導向教學模組的設計原則：

一、透過現實情境、寓言故事或數學史引入教材，營造數學學習需求；
二、以任務鋪陳數學學習脈絡，引導學生進行探索與發展概念；
三、讓學生運用相關數學知識與能力解決問題，提出合理的觀點與他人溝通；
四、教材安排從具體到抽象，提供學生有感的學習機會；
五、教材設計具備多重表徵；
六、學習任務具備形成性評量的功能，以評估與促進數學學習。

以下各節分述教學模組研修所參考的文獻、採取的研究方法與研修原則說明等，除了提供教師自編教材與教科書出版商參考之外，也希望促進教育社群對於此一議題的討論與認識。

---

1. 研修團隊感謝教育部學前與國民教育署對於本計畫案的經費支持。

貳、核心素養內涵

國內外對於核心素養的探討已累積不少文獻。以歐盟為例，其委員會所發表的《支持終身學習的核心素養：歐洲參考架構》(Key competences for lifelong learning: European reference work) (European Commission, 2007)，提出支持終身學習的八大核心素養，涵蓋母語溝通、外語溝通、數學能力以及基本科學與科技能力、數位能力、學習如何學習、社交與公民能力、創業家精神以及文化覺察與表達。其核心素養的制訂過程慎重而嚴謹。制訂者包括歐盟會員國的決策者、專家學者與實務工作者等不同領域專業人士。某些核心素養彼此內在連結與相互支持，前四項素養是學習的基礎，「學習如何去學習」支持所有學習活動之進行。此外，批判思考、創造力、主動積極、問題解決、風險評估、作決定、建設性的情感管理貫穿於八大核心素養之內，於其中扮演著舉足輕重的角色。

經濟合作與發展組織則是自 1990 年代中期，開始關注於素養的界定與調查研究，委託瑞士聯邦統計局負責規劃與執行「素養的定義與選擇」研究案 (Definition and Selection of Competencies, [DeSeCo])(OECD, 2005)。界定出「能使用工具溝通與互動」、「能在異質社群中進行互動」與「能自主行動」三項核心素養範疇，做為教育政策制定與評量工具發展之依據。反身性 (reflectiveness) 處於三項核心素養的中心地位，它不僅包括個人有能力例行地運用規則或方法來面對情境，更涵蓋有能力去處理變化，從經驗中學習，以及採取批判的立場思考與行動。每項範疇皆涵蓋三項子素養指標與內涵，彼此間有緊密的連繫，構成一個嚴謹而整體的素養架構體系，以確保成功人生的實現與社會能夠運作良好，並且提供素養評量 (例如：The Programme for International Student Assessment [PISA]) 與相關問卷調查發展的架構。

在國內，洪裕宏團隊於 2008 年完成「界定與選擇國民核心素養研究案」，提出臺灣國民核心素養的四維架構：「能使用工具溝通與互動」、「能在社會異質團體運作」、「能自主行動」以及「展現人類的整體價值並建構文明的能力」，每一維皆包括數個基本素養（洪裕宏，2008）。此外，教育

部把「提昇國民素養」列為十二年國教實施配套方案之一，成立專案辦公室，以學校教育為核心，討論受過十二年國教之 18 歲學生所應具備的素養。提出五大素養向度：「語文素養」、「數學素養」、「科學素養」、「社會素養」與「教養 / 美感素養」，並界定其內涵（教育部，2013），做為學生受教成果評量與調查之設計與實施依據。

國家教育研究院參考國內外核心素養相關研究，擬定十二年國教核心素養的架構與內涵，提出三面九項的核心素養，做為接受十二年國教的學生所應具備的基本且共同的素養（國家教育研究院，2014），標誌各級各類型學校的學生所應培養的共同最低要求，做為課程連貫與橫向統整的依據。十二年國教核心素養的三個面向為「自主行動」、「溝通互動」與「社會參與」，每個面向皆包含三個子素養，再者，因應不同教育階段學生的身心發展條件，在各教育階段分化出更細微的具體內涵。

十二年國教核心素養的建構與九年一貫課程的十大能力指標的發展有很大的不同，九年一貫課程常被人批評的一點是能力指標缺乏實徵研究的基礎（張芬芬等人，2010），而核心素養的三面九項皆有相關文獻與實徵研究做基礎（蔡清田、陳延興，2013）。各領域可因其學科特色與學習階段需要，選取其中幾項的核心素養進一步發展成為領域的核心素養；不像九年一貫課程，各領域需要去對應所有的基本能力。領域的核心素養用以作為領域或科目課程發展垂直連貫與水平統整的主要組織核心，並具體落實為領域的「學習表現」與「學習內容」。

參、數學素養內涵與相關研究

PISA 定義的數學素養 (mathematical literacy) 為個人有能力 (capacity) 在多樣的情境中去形成、應用與詮譯數學，這包括了數學化推理與使用數學概念、程序、事實與工具來描述、解釋與預測現象。數學素養幫助個人認知到數學在世界中扮演的角色，促成建設性、積極參與以及能反思的公民所需之有憑有據的判斷與決策 (OECD, 2013, p.17)。值得注意的是，PISA 用的是「literacy」一字，以往是用在讀、寫、算的能力上。雖然 PISA 已把該字外

拓到應用於日常生活的知識與能力範疇上，不過核心素養的概念仍遠寬於「literacy」的概念（洪裕宏，2008）。

Kilpatrick、Swafford 和 Findell（2001）則是從分析學校數學、閱讀認知心理學與數學教育文獻、以及對於現代社會所需的數學知識與技能的判斷，界定出所有學生在數學學習上所需的素養。具備數學素養的學生有能力處理日常生活中的數學挑戰，以及有能力在高中或大學階段學好數學。他們以交織在一起的五股線繩做為比喻，說明構成數學素養的五項主要能力，包括：

一、概念的理解 (conceptual understanding)：對於數學概念、運算和關係的了解。

二、程序的流暢 (procedural fluency)：能夠有彈性地、準確地、有效率地、合適地執行程序的技能。

三、策略的能力 (strategic competence)：有能力去形成、表徵與解決數學問題。

四、合宜的推論 (adaptive reasoning)：能夠進行邏輯思考、反思、解釋與驗證。

五、建設性傾向 (productive disposition)：將數學視為有意義的、有用的、有價值的，相信努力學習數學會獲致成功，並且對於自己學好數學具有信心。

這五項能力對於學生的數學學習是彼此關聯，不可能只發展其中的一、兩項就能培養下一代的數學素養。值得注意的是，除了認知與內容之外，Kilpatrick 等人所提出的數學素養考慮到情意與態度面向，成為五項能力中的一項。2012 年 PISA 調查結果指出，臺灣學生在毅力方面（是否願意堅持）與自我概念方面（對於自己能力的信念）低於 OECD 國家平均（臺灣 PISA 國家研究中心，2014），第五項能力的發展對於臺灣學生的數學學習有其重要性。

李國偉、黃文璋、楊德清與劉柏宏（2013）綜合國內外文獻，定義數學素養的內涵如下：

個人的數學能力與態度，使其在學習、生活、與職業生涯的情境脈絡中

> 面臨問題時，能辨識問題與數學的關聯，從而根據數學知識、運用數學技能、並藉由適當工具與資訊，去描述、模擬、解釋與預測各種現象，發揮數學思維方式的特長，做出理性反思與判斷，並在解決問題的歷程中，能有效地與他人溝通觀點 (p. 21)。

該定義呼應十二年國教總綱核心素養「自主行動」面向中的「身心素質與自我精進」、「系統思考與解決問題」、「規劃執行與創新應變」三項。其次，該定義除了強調活用基本數學知識來解決問題之外，也提出使用工具與資訊的重要性，這呼應「溝通互動」面向中的「符號運用與溝通表達」、「科技資訊與媒體素養」項目。李國偉等人建議融入數學文化的相關素材，不僅讓學童認知到數學對於人類歷史的貢獻，也能欣賞數學的美與和諧性，這呼應了「溝通互動」面向中「藝術涵養與美感素養」項目。該定義強調培養能理性反思、做出合理判斷，並能有效與他人或群體溝通觀點公民的重要性，具體呼應「社會參與」面向之核心素養。

十二年國教數學領綱（草案）從「結果」與「過程」兩個向度來建構其核心素養。在「結果」面向上，選取總綱中「系統思考與解決問題」、「符號運用與溝通表達」、「科技資訊與媒體素養」、「藝術涵養與美感素養」、「多元文化與國際理解」五項核心素養，考量國小、國中、高中教育階段學習者的身心發展，分別建構出 15 項數學核心素養，做為各階段結束時，所應達成的目標（國家教育研究院，2016）。每項數學核心素養皆有呼應的學習重點，以國中階段為例，「系統思考與解決問題」在數學領域的核心素養為：「具備有理數、根式、坐標系之運作能力，並能以符號代表數或幾何物件，執行運算與推論，在生活情境或可理解的想像情境中，分析本質以解決問題。」對應的學習重點為：「代數符號：代數符號與運算；以代數符號表徵交換律、分配律、結合律；以符號紀錄生活中的情境問題。」

在「過程面向」上，選取「身心素質與自我精進」、「規劃執行與創新應變」、「道德實踐與公民意識」、「人際關係與團隊合作」四項轉化成為

數學核心素養，採跨教育階段的方式實施。以「身心素質與自我精進」為例，轉化至數學領域的核心素養為：「能堅持不懈地探索與解決數學問題，具備數學思考能力以及精確與理性溝通時所必需的數學語言，並擁有學習力以成就優質的生涯規劃與發展。」呼應了 Kilpatrick 等人所提之「建設性傾向」，展現出數學情意與態度。這四項核心素養沒有對應的學習重點，而是落實在領綱的「實施要點」中。以前項的核心素養為例，在「教學實施」即提到：「教師教學應以學生為主體，以其數學能力發展為考量，鼓勵學生提出多元解法並和他人溝通解題想法。」要求教師在教學現場讓學生探索數學問題的多種解法，在學生得出解答之後，鼓勵學生和同儕討論解答或是為自己的想法做澄清與辯護。

簡而言之，十二年國教總綱九項的核心素養，因應數學學科的教育理念和課程目標，其中有五項轉化為數學領域的核心素養，做為不同的教育階段所應達成的目標；另外四項的核心素養，則是橫跨各教育階段，具體實踐在教學過程中。《十二年國民基本教育課程發展建議書》（國家教育研究院，2014）指出素養的培養需適當結合「情境學習」、「專題導向」及「生活實踐」等教學，整合相關教材；李國偉等人（2013）進一步建議數學教學內容可以做模組化設計，讓教師與學生可根據教學或學習的需求，自行增添或選擇數學內容。

肆、數學教材設計一般性原則

十二年國教數學領綱（草案）開宗明義論及：

「數學是一種語言、一種實用的規律科學、也是一種人文素養出發，課程設計和這些特質密切搭配」（國家教育研究院，2016，p. 1）。

數學連結文字及符號語言，以簡潔與精確的方式理解人類的生活世界，舉凡：日常生活的需求、自然奧秘的探究、社會現象的解讀、財經問題的剖析與科技發展的達成，皆與數學緊密關連。隨著時間的推移，於世界各地陸續發展多元的數學思維文化，亦豐富數學知識的人文價值及內涵。

美國數學教師協會 (National Council of Teachers of Mathematics, [NCTM])

所提出之《學校數學原則與標準》*(Priciples and Standards for School Mathematics)*(NCTM, 2000) 為高品質的數學教育提出了六項原則。這六項原則分別為「公平原則」、「課程原則」、「教學原則」、「學習原則」、「評量原則」與「科技原則」，現分述如下 (NCTM, 2000)：

一、公平原則：要求對於所有學生有著高期待，所有的學生應有同等的學習機會與受到強而有力的學習支持。

二、課程原則：課程的安排必須一致而連貫，圍繞在重要的數學概念上。

三、教學原則：教師必須了解學生已經知道的以及需要學的內容，從而給予學生挑戰與支持。好的任務用來導入重要的數學想法，其安排應連結學生的真實生活經驗或起源於數學情境。

四、學習原則：數學學習須透過理解來達成，從先備經驗或原有知識建立新知，要求學生論述以及和他人溝通想法，或是評價他人的想法。

五、評量原則：評量應支持數學學習並提供教師與學生有用的資訊。

六、科技原則：科技對於數學的教與學有其重要性，影響數學教學與促進學生的學習。

此外，廣為數學教育界所推崇的「現實數學教育」(realistic mathematics education, RME)(Karp, 2013) 反映了學習必須情境結合的觀點，指出應注重「活動」(Activity)、「真實」(Reality)、「層級」(Level)、「纏繞」(Inter-twinement)、「互動」(Interaction) 和「引導」Guidance」六項原則 (Van den Heuvel-Panhuizen, 2000)。分述如下：

一、活動原則：讓學生從做中學 (learning by doing)，積極建構相關的數學工具與發展數學洞察，成為一個主動的參與者。

二、真實原則：真實的數學問題是數學學習的資源，具有重要意義與價值。

三、層次原則：學習數學會經歷不同層次的理解，從處理非形式化、脈絡的問題，逐步發展出解題捷徑與基模，最後獲得對所學內容的關聯與洞察。

四、纏繞原則：應考量數學內部連結與外部連結，做為解決應用的基礎。

五、互動原則：藉由與同儕分享解題策略，聆聽同儕的想法，透過互動促進自我反思學習，提昇理解的層次。

六、引導原則：教師扮演引導和催化者的角色，營造展現數學知識建構過程的環境，讓學生「重新」發明數學。

核心素養的培養同樣著重情境化、脈絡化的學習（國家教育研究院，2015）。數學的學習不是孤立地發生，而是鑲嵌與架構在情境脈絡之中，課程設計應以情境脈絡貫串於整個學習單元（張英傑、張素宜，2008）。從情境學習的理論來看，學習為從「合法周邊參與」逐漸進到「充分參與」，學習與社會實踐密不可分，知識不是去脈絡化，而是在一定的脈絡下才能發生；因此，學校應提供真實活動或任務來引發學習，讓學生經由涵化(enculturation)、行動與工具的使用，從與他人的互動中，建構穩固而有彈性的知識，以及培育進行創造與活動的智能（黃永和，2009）。因此，素養教材的發展應把以下四點納進考量（國家教育研究院，2016）：

一、循序漸進呈現數學內容，具備多重表徵，適時發展差異化教學。適當結合性別平等、人權、環境與海洋教育等相關議題。

二、題材選擇上應反映出數學概念之間的內在連結，考量學生的認知發展，在數學直觀與嚴謹之間取得平衡，此外也應考量到與其他數學主題、日常生活或其他領域的外在連結。

三、提供充足的學習任務與習題，學習任務應具有意義並反映數學思考，習題和隨堂練習應具有形成性評量的效用。

四、可適時引入數學史、民族數學或數學家小傳，引發學生的興趣、培養欣賞數學發展的素養。

綜合以上所述，本研究從情境學習的觀點出發並轉化前述一般性的數學教育原則，帶領教師根據領綱核心素養研修教材，經由教材分析與訪談編寫教師，從實踐中識別數學素養導向教材的設計原則。

伍、研究方法

一、素養導向教學模組研修

本研究的目的在於開發數學素養導向教材並識別出教材設計原則。研究者邀請中小學數學輔導團教師與高中數學學科中心教師參與，組成教師專業學習社群，分為國小、國中、高中、高職四個小組，每組兩人，在本書主編單維彰教授指導下依據國家教育研究院所公布之《十二年國教數學領綱草案》（國家教育研究院，2016）的內容研修素養導向的教材。這群教師大都具有教材研發、教科書審查或素養試題撰寫的相關經驗，教學年資最高為 28 年，最低為 12 年，平均年資為 21 年。跨階段組成教師專業學習社群的理由在於：十二年國教數學課程以核心素養來達成 1 至 12 年級課程的連貫性，讓不同階段的教師聚在一起討論教材內容與設計，應有助於團隊成員從十二年國教核心素養發展的整體架構，思考學習內容安排與教材教法銜接。

研修團隊運用「設計研究法」(design-based research)（翁穎哲、譚克平，2008）四個階段開發素養導向教材，這四個階段為「準備」、「執行」、「評鑑」與「推廣」，現分述如下：

（一）**準備階段**：研究者參考林福來、單維彰、李源順、鄭章華（2013，p.31）所提出之「知」、「行」、「識」數學素養培養架構，進行教材研修，如圖 1 所示。

圖 1　十二年國教數學素養架構圖

在此架構中，「知」是指「學什麼」或者「是什麼」，為數學的內容；「行」是「怎麼做」或者「怎麼用」，指的是學生所展現出來的數學能力，包括程序執行、解題、溝通、論證等等現今數學教育主要的能力面向；「識」則是「為什麼」、「你認為」、「是什麼」，指的是對數學的內在認知與情意涵養，包括概念理解、連結、後設認知、以及欣賞數學的美。林福來等人（2013）指出數學素養的培養應兼具「知」、「行」、「識」三個面向，在不同教育階段應有不同的比例安排。在小學階段「識」跟「行」可能佔的比例較高，到了高中階段「知」的成分比較多。

研修團隊每個月固定召開一至二次的討論會議，彼此溝通與對話數學素養培養的理念，以及討論如何轉化 NCTM 與 RME 的一般性原則於教材設計，確認撰寫進度與教材內容是否恰當，以及解決撰寫過程遭遇到的問題與困難。教材的份量為一個小單元，可以在五堂課或一星期之內完成學習。素養導向教材包括「學生手冊」與「教師手冊」。學生手冊之編排類似數學教科書，提供給學生在課堂上使用。教師手冊做為教師備課與教學使用，內容涵蓋了單元目標、設計理念、課堂安排、教材架構、教學注意事項、補充說明與素養評量題目。

當教材完成之後，研究者請外部專家學者與數學教師審查教材內容與活動安排的適當性，並舉行諮詢會議面對面討論素養教材的設計，討論過程予以錄音並做成會議記錄，會後根據審查意見進行修正。

（二）**執行階段：**由撰寫教師在自己的任課班級進行教學，並邀請學校同事們進來觀課和給予回饋，每堂試教課至少有三位數學教師觀課。試教前先進行說課，由授課教師說明教材設計的想法與學習活動安排，提醒觀課的重點與注意事項。觀課時，同儕教師觀察學生的學習狀況，紀錄於觀課紀錄表。

（三）**評鑑階段：**試教結束後，在研究者的主持之下，進行議課，請參與觀

課的老師針對觀課紀錄表的發現給予教材設計回饋和修改建議，例如：學習任務指導語是否清楚、學生的學習表現為何、任務間的安排連貫性是否合理等等。會後依據議課的結論修改教材，然後再請外部專家學者與數學教師進行第二次的教材審查，修正後定稿。

（四）**推廣階段**：研修團隊把定稿的素養導向教材放到網路上，無償提供給教科書出版商、中小學數學輔導團、高中數學學科中心與十二年國教前導研究學校參考；同時舉行素養導向教學工作坊，幫助更多教師認識十二年國教數學素養培養的理念與做法。

二、資料蒐集與分析

（一）資料蒐集

本研究蒐集的文件為素養導向教材定稿的學生手冊與教師手冊。此外，研究者在計畫執行二年之後，針對一開始即加入計畫的六位教師進行訪談[2]，探詢他們的研修經驗、對於素養教學的看法、自身的專業成長等，每位教師接受訪談的時間約為一小時，訪談內容皆轉錄成逐字稿。六位教師的個人資料如表 1 所示：

表 1　接受訪談教師基本資料

代號	任教階段	經歷	撰寫單元	受訪日期
A	普通型高中(簡稱高中)	1. 高中數學學科中心種子教師 2. 教科書審查委員 3. 課綱審查委員 4. 師鐸獎得主	1. 相關係數與最佳直線 2. 排列組合	20160309
B	技術型高中(簡稱技高)	1. 高中數學學科中心種子教師 2. 參與教育部補救教學計畫 3. 十二年國教技術型高中數學領綱委員	1. 交流電中的數學 2. 力矩 (向量)	20160216
C	國中	1. 國中數學輔導團教師 2. 教科書審查委員 3. 參與教育部補救教學計畫	1. 指數律 2. 直角三角比	20160217
D	國中	1. 國中數學輔導團教師 2. 參與類 PISA 試題設計 3.PISA 試卷批閱委員	1. 指數律 2. 直角三角比	20160216

2. 本團隊共有八位教師，有兩位教師因個人因素於第一年離開，六位教師全程參與兩年的教材研修

E	國小	1. 小學數學輔導團教師 2. 教學設計比賽獲獎	1. 比與比值 2. 正方體與長方體	20160224
F	國小	1. 小學數學輔導團教師 2. 參與九年一貫數學與生活統整課程研發 3. 特殊優良教師	1. 比與比值 2. 正方體與長方體	20160224

（二）資料分析

為探究數學素養導向教材的特色並歸結出設計原則，研究者運用 cK ¢ 概念模式 (Balacheff & Gaudin, 2010; Mesa, 2004) 分析學生手冊。cK ¢ 概念模式已應用於數學內容與數學教學的建模設計，並為數學教育與教育科技領域之間架橋，提供一種認識論上的聯繫 (Balacheff, 2013)。

手冊內的學習任務或問題按 (P, R, L, ∑) 函數進行分析：P 為學習任務或問題；R 是為了完成任務或解決問題，學生必須要做的動作；L 為學生用以完成任務或解題所使用的文字、圖表與符號等表徵；∑ 是學生如何得知其答案是正確的。舉「你手上有 5 顆小石頭，我給你 4 顆，你手上現在有多少顆？」問題 (P) 為例，R 是小學生把手指數跟石頭數進行配對以及手指數與數字進行配對，進行計數；L 為身體語言，像是以手指點算或口語計數；而 ∑ 為不可重複計數，須對所有小石頭計數，以及按順序唱數 (Balacheff, 2013)。表 2 以「指數律」單元為例，呈現學習任務的分析做法。

表 2　cK ¢ 概念模式分析舉例

P:Problem	R:Operations	L:Representations	∑ :Control	研究者註解
如上圖，你認為在一般大賣場可見的每 3 公斤一袋的米，夠不夠應付智者的要求呢？	粗估 3 公斤的米約有幾粒米，或是反過來先估計 100 或 1000 粒米有多重。	文字、表格	利用驗算或估算的方式，像是 2 的 10 次方近似於 1000，再用除法來推算答案的合理性。	本題改編自印度的傳說，做為指數律題材的引入情境。由於原故事是第一天放入一粒米為 2 的零次方，對於剛開始學習指數律的學生而言不易理解。故改為第一天放入兩粒米。 （續下頁）

P:Problem	R:Operations	L:Representations	∑ :Control	研究者註解
請分別依甲、乙、丙大臣建議的方式，完成以下的表格。	按照甲、乙、丙大臣的建議方式填寫表格。	表格、文字	只要檢驗紀錄的格式是否符合三位大臣的建議即可。	指數是一種記錄的方式。這一題的設計在於讓學生經由操作了解到以指數做記錄的方便性與優越性，為「行」的部分。
請分別依甲、乙、丙大臣建議的方式，記錄第 20 天時所需要的米粒數，請寫出不同記錄方式的優缺點。	按照甲、乙、丙大臣的建議方式寫出第 20 天的答案。	文字	同上。另外，學生需寫下不同記錄方式的優缺點。	學生要比較並指出三位大臣記錄方式的優缺點。
如果你是國王，你會喜歡哪一種記錄方式呢？請寫出算式或是理由來支持你。	比較三個大臣的記錄方式。	文字、表格	在比較不同記錄方式的優缺點之後，應基於精簡與實用的理由選擇丙大臣的記錄方式。	在比較三位大臣記錄方式的優缺點之後，學生應該會發現指數記錄形式的益處與實用性，產生學習指數的需求。「識」的部分就出來了。

研究者接著依據十二年國教數學領綱（草案），以教材的小主題為分析單元，識別所呼應的數學核心素養；分析時，參照教師手冊對於素養導向教材的設計理念、課堂安排與教材架構的說明，進行三角校正。訪談逐字稿先按教師代號與受訪日期初步編號。研究者接著以歸納分析的方式 (Bogdan & Biklen, 2007)，閱讀訪談逐字稿，逐步歸結出逐字稿內的主題 (theme) 與編碼；然後按照編碼再次分析訪談逐字稿，並比對分析的結果與參照其他資料，進行三角校正，以確保資料分析的可信度 (credibility) (Shenton, 2004)。

陸、數學素養教學模組設計原則

本研究提出數學素養教學模組之六項設計原則：一、透過現實情境、寓言故事或數學史引入教材，營造數學學習需求；二、以任務鋪陳數學學習脈

絡，引導學生進行探索與發展概念；三、讓學生運用相關數學知識與能力解決問題，提出合理的觀點與他人溝通；四、教材安排從具體到抽象，提供學生有感的學習機會；五、教材設計具備多重表徵；六、學習任務具備形成性評量的功能，以評估與促進數學學習。現分別說明如下：

一、透過現實情境、寓言故事或數學史引入教材，營造數學學習需求

各學習階段以日常生活應用、傳說中的故事、數學知識發生的歷史或者是專業科目做為新單元的學習情境，導入重要的數學概念 (big idea)，呼應 NCTM(2000) 的「教學原則」。表 3 彙整各單元教材的引入情境與呼應的數學核心素養。

表 3 教材引入情境與呼應的數學核心素養

學習階段	單元名稱	引入情境	呼應的數學素養（結果向度）
高中	相關係數與最佳直線	相關係數與迴歸的歷史以及報章雜誌上的統計報導	數 S-U-A2、數 S-U-B1、數 S-U-C3
	排列組合	中國、印度與歐洲排列組合歷史以及日常生活的應用	數 S-U-A2、數 S-U-C3
技高	交流電中的數學	電機電子群專業科目的電流概念	數 V-U-A2、數 V-U-B2
	力矩	阿基米德的機械研究	數 V-U-A2、數 V-U-B1
國中	指數律	國王的棋盤傳說	數 -J-A2 數 -J-B1、數 -J-B2
	直角三角比	一公里 75%的險升坡	數 -J-A2 數 -J-B1、數 -J-B2
國小	比與比值	果凍製作	數 -E-A2、數 -E-B1
	正方體與長方體	創意包裝盒設計大賽	數 -E-A2、數 -E-B1

註：數學素養指標，請參見國家教育研究院（2016）

以國中階段為例，指數律單元一開始以印度古老的故事做為情境引進指數概念，讓學生從觀察與操作中感受到指數記號的便利性，以及引進指數記號的必要性，呼應數學素養培養架構中的「識」。該故是為國王為獎勵某位智者發明遊戲，讓他選擇獎勵的方式。原始的故事為智者要求在棋盤的第一個方格擺上 1 粒米，第二個方格擺上 2 粒米，第 3 個方格擺上 4 粒米，依此類推。考量 1 粒米為 2 的零次方不適合指數概念的初學者，故略做更動為第一個方格擺上 2 粒米。撰寫教師在訪談中說明其教材設計的想法：

我第一個考量就是這個單元跟生活有沒有甚麼關聯性，然後這個關聯性能不能用的很自然，但是他 (學生) 又有需要！然後甚至他用了數學之後能不能讓他對於這個生活的問題能夠更容易解決一點。…第二就要想那怎麼樣找一個好的點來切入引起動機。

(D 教師 20160216)

受訪教師提到以生活情境做為引入題材，希望引起學生的學習興趣，讓他們認知到數學在生活中的用處，這跟吳如皓與董增萊 (2013) 運用生活情境題進行素養導向教學的做法類似，也是 RME「真實原則」的展現。除了生活情境之外，有的教師運用數學史讓學生了解數學知識發生的脈絡，導入所要教授的概念。

要引進相關係數的時候，我們也不是去記所謂的定義相關係數，我們現在要造成一個困擾，爲什麼要有相關係數？對，要讓學生去想說爲什麼要？因爲其實我們以前在學數學會這樣，爲什麼要這樣定？爲什麼有這樣的需要？…學生是參與整個數學脈絡的發展，一起來去把這些所謂的知識的體系結構出來，而不是說我們去灌輸他，我們去定義他，那你就來學。

(A 教師 20160309)

數學史的引入可讓學生了解數學是人類的活動、文化的資產以及特定知識產生的脈絡與需求（楊淑芬，1992）。數學史的引入呼應了「數 S-U-C3 具備欣賞數學觀念或工具跨文化傳承的歷史與地理背景的視野，並了解其促

成技術發展或文化差異的範例」。在相關係數與最佳直線單元中，教材開頭介紹高爾頓 (Galton) 發展相關係數概念的歷史，提到他需要一個方法來描述某一個世代的智力，與前一個世代的智力是相關的，這時說明兩組數據相關性的需求就出現了；接著從散布圖與直線相關性出發，設計任務讓學生發現光靠散布圖無法客觀判定直線相關性，引入發展衡量直線相關性的統計量需求。在學習的過程中，學生可以接觸到數學的人文與歷史層面，感受到特定的數學知識為何被創造出來以解決問題或是滿足人類探索的好奇心，培養數學的建設性傾向（林福來等人，2013；國家教育研究院，2016；Kilparick 等人，2001）。

雖然各教育階段皆營造情境引入數學概念的學習，不過在題材選擇上有著學習階段的差異。小學階段所導入的果凍製作與包裝盒設計直接與日常生活的應用有關；國中階段則取材自寓言故事以及網路上的一則關於 75% 陡坡的報導，帶領學生探討指數記號（指數律單元）與現實生活中是否有可能出現 75% 的斜坡（直角三角比單元）；高中階段在一開始介紹相關係數與排列組合的歷史，並以新聞報導連結前述概念和日常生活；技高階段的引入情境結合電機電子群和建築群等專業科目，讓學生了解到所學的數學可連結到專業科目的學習，彰顯數學做為工具學科的本質（國家教育研究院，2016），呼應 RME 的「纏繞原則」。簡而言之，教材的引入情境因著學習階段的提昇，不再局限於日常生活的題材，而是逐步開展到數學史與專業科目。

二、以任務鋪陳數學學習脈絡，引導學生進行探索與發展概念

國內的數學教科書雖然按單元目標設計例題，然而例題之間互不相干；雖然使用情境，情境之間也是互不相干 (張英傑、張素宜，2008)。素養教材則是以任務鋪陳數學學習脈絡，特別在國中小與技高階段，學習任務圍繞著一個特定脈絡展開。以國中指數律單元為例，在導入國王的棋盤的故事之後，任務 1-1、1-2、1-3 讓學生從操作與探索中認識到丙大臣做法 (即指數記錄) 的方便性與優越性 (見圖 2)，為接下來指數記號的正式引進鋪路。撰寫教師在《教師手冊》即提到：

與以往教材設計不同之處，在於以國王的棋盤故事脈絡貫串整個課程，第一節與最後一節都是在討論米粒數的計算 (以 2 為底數)。

國王為了方便負責的士兵知道每天要拿多少粒米，因此請大臣們一起商量如何記錄。

甲大臣說：「先幫負責的士兵算好米粒數。第 1 天，2 粒米；第 2 天，4 粒米；第 3 天，8 粒米；第 4 天，16 粒米，依此記錄下去即可。」

乙大臣說：「只要列出算式，負責的士兵們就可以算出來。第 1 天，2 粒米；第 2 天，2×2 粒米；第 3 天，2×2×2 粒米；第 4 天，2×2×2×2 粒米，依此記錄下去即可。」

丙大臣說：「我這邊想到一種記錄方式，只要負責的士兵能了解這個方法。第 1 天，記為 2^1 粒米；第 2 天，2×2 記為 2^2 粒米；第 3 天，2×2×2 記為 2^3 粒米；第 4 天，2×2×2×2 記為 2^4 粒米，依此記錄下去即可。」

任務 1

請分別依甲、乙、丙三位大臣建議的方式，完成以下的問題與討論。

1. 完成以下表格：

	第 5 天	第 6 天	第 7 天	第 8 天	第 9 天	第 10 天	第 11 天
甲大臣							
乙大臣							
丙大臣							

2. 依甲、乙、丙三位大臣建議的方式，記錄第 20 天時所需要的米粒數。請寫出不同記錄方式的優缺點。

甲大臣：

乙大臣：

丙大臣：

3. 如果你是國王，你會喜歡哪一種記錄方式呢？請寫出算式或是理由來支持你。

圖 2 讓學生進行探索與討論的任務安排

教材在任務 1 之後正式介紹指數記號與底數、乘方相關名詞。接著任務 2 要求學生在棋盤上記錄不同天所需放置的米粒數，檢驗學生能否正確使用指數記號。任務 3-1 請學生在已知第四天需要二的四次方米粒的前提下，以二為底數表示隔天需要幾粒米；任務 3-2 讓學生從觀察棋盤進行推理或是藉由計算得出第 9 天所需的米粒數是第 6 天的幾倍，完成一個小單元的學習。從任務 1-1 開始到任務 3-2 結束皆在國王的棋盤脈絡中引導學生從操作與觀察來建構指數概念，展現 RME 的「活動原則」，同時呼應核心素養「數 -J-A2 具備有理數、根式、坐標系之運作能力，並能以符號代表數或幾何物件，執行運算與推論，在生活情境或可理解的想像情境中，分析本質以解決問題。」

高中階段的學習活動安排則是圍繞在特定的數學概念，不一定在一個特定脈絡中展開，而是運用數個活動讓學生藉由同儕討論與師生對話來建構數學知識。以相關係數單元為例，活動一請學生觀察數學與物理成績的表格與散布圖，活動二給出葡萄酒消耗量與心臟病死亡率的表格與散布圖，請學生觀察與討論「數學成績高的學生，物理成績通常也不會很低嗎？」以及「適量的飲用葡萄酒可以預防心臟病嗎？」接著在活動三呈現同一組數學、物理成績數據所構成的兩個散布圖，只是兩個圖形的坐標的尺度不同，學生只能用肉眼觀察這兩個散布圖長的不一樣，很容易得出這兩個散布圖有著不同直線相關性之錯誤結論，這時候定義一個統計量（相關係數）來衡量兩個變數之直線相關強度的需求就出現了。撰寫教師在《教師手冊》指出：

> 教材在相關係數的定義方式，有別於一般教科書的內容，編者以如何衡量直線相關性爲出發點，設計例題讓學生討論如何選擇直線來代表數據的直線關係，討論的核心是各種誤差形式的優缺點。一般課程總是直接寫出最小平方法的誤差形式，課堂上再由老師解釋原因，不過編者希望誤差形式是透過學生的討論產生的，這樣更能夠深化最小平方法的概念。

學習任務呼應「數 S-U-A2 具備數學模型的基本工具，以數學模型解決典型的現實問題，了解數學在觀察歸納之後還須演繹證明的思維特徵及其價

值。」前述的進路在於促使學生在課堂中經驗到數學知識如何「再創造」(陳昌平、唐瑞芬，1995)，展現 RME 的「引導原則」。換句話說，教師會設想一條數學知識創造的路徑，它不一定與數學知識發展的歷史進路相符；不過，這一條路徑要帶領學生在有限的時間內，在課堂中自然地進到脈絡中學習數學，發現或創造某個知識。

由此可知，情境脈絡在素養教材中具備兩種功能：首先是讓學生應用學到的知識或技能，這是一般數學教科書常見的做法。另外一個為運用情境脈絡的安排與鋪陳來發展學生相關的數學概念，而這是許多數學教科書或講義比較忽略的部分。教科書通常在講解定義、方法以及讓學生熟練相關的解題技巧之後，會出幾題應用問題讓學生練習與精熟所學到的東西，呈現的方式往往是例題、隨堂練習緊接著下一個例題與隨堂練習，例題與例題之間往往沒有一個貫串的脈絡。素養教材除了安排情境脈絡讓學生運用所學之外，也會根據所要發展的數學重要概念，鋪陳合適的情境脈絡貫串學習任務來發展學生相關的數學概念。這呼應 Schoenfeld(2014) 對於高效能數學課室的看法以及 NCTM(2000) 的「課程原則」，數學內容的安排應連貫與聚焦，讓學生有機會去學習重要數學內容與發展數學思維。

三、讓學生運用相關數學知識與能力解決問題，提出合理的觀點與他人溝通

素養教材的設計除了引導學生探索概念、建構知識與發展相關技能之外，也設計讓學生須應用所學到之知識或技能來解決的問題。這些問題不一定是日常生活中的問題，也可以是數學本身的問題，如同林碧珍、鄭章華與陳姿靜（2016）所舉出的國小素養案例。這是數學素養培養架構「知」、「行」、「識」當中，「行」的展現。參與教師在訪談中提到此一素養導向教學觀點：

> 要讓學生思考一下，他在甚麼時候會用到這些數學？其實有兩種用版(法)，一種是生活中的用、一種是數學上再深入點的（應用），對！那這兩個面向都是可以代表數學是有用的這件事情
>
> (D 教師 20160216)

再者，任務要求學生在解決問題之後，為自己的答案提出理由做說明，和同儕與老師溝通想法，彰顯數學的社會建構 (Ernest,1988) 本質，展現 RME 的「互動原則」與 NCTM(2000) 的「學習原則」；人們的語言、規則和約定在數學知識建構中扮演了關鍵性的角色。以國中的指數律教材為例，圖二的學習任務在要求學生寫下三位大臣的記錄方式與比較其優缺點之後，接著詢問學生：「如果你是國王，你會喜歡哪一種記錄方式呢？請寫出算式或理由來。」要求學生提出理由為自己的選擇做辯護，呼應「數 -C1 具備立基於證據的態度，建構可行的論述，並發展和他人理性溝通的素養，成為理性反思與道德實踐的公民」。教師手冊即提到：「鼓勵學生嘗試舉例或用算式說明，以培養學生的數學說理能力。」其他教師在訪談中也表達了類似的觀點：

> 上課時，我會看重培養小朋友的思考能力，也就是你 (小朋友) 在這個解決問題的過程裡面，你是怎麼思考這個問題？那你有沒有辦法把你的思考表達出來讓大家知道，…然後在跟別人溝通的時候，你有沒有辦法針對別人的步驟，提出你的質疑或是提出你的補充看法？
>
> (F 教師 20160224)

學生在解決問題之後，須針對答案提出個人詮釋並和他人溝通想法，經由和老師同儕的互動，討論、質疑與辯證中建構數學知識，反映相關文獻對於素養培養的觀點（李國偉等人，2013；OECD, 2013）。鼓勵學生為自己的觀點提出支持的理由，開啟課室師生之間或學生同儕之間的對話。教師可藉由鼓勵不同觀點的提出，提供學生參與學習的機會，幫助學生經由課室的討論來澄清與反思自己的想法，形塑類似數學家的實踐社群，促進學習者的合法周邊參與 (Legitimate peripheral participation)(Lave & Wenger, 1991)。

四、教材安排從具體到抽象，提供學生有感的學習機會

數學的定義、規則或是抽象符號不會在素養教材一開始就出現，而是讓學生在任務中進行操作、探索，再逐步進到抽象概念的學習，這與 RME 的「層次原則」一致。素養教材提供學生機會去感受數學是人類的活動

(Hersh, 1997)，而不只是一堆冷冰冰的公式、符號或是反覆的解題練習，呼應 NCTM(2000) 的「公平原則」。當學生在情境脈絡中進行數學活動，像是識別規律、建立模式與進行論證，和同儕共同合作解決問題或是挑戰彼此的想法等等，他們就有機會經驗到類似數學家在數學社群中的活動，感受到數學的人文成分。

以小學的「比與比值」單元教材為例，一開始以學校園遊會製作果凍販賣的情境鋪陳。 接著呈現四個不同成品的果凍圖片，詢問學生這四個果凍成品有何不同（任務 1）以及為何不同（任務 2）。任務 3 則是以表格提供水與果凍粉四種不同的重量組合，要求學生思考這四種組合和前面四個不同的果凍成品的可能對應，學生須考慮水、果凍粉的量與果凍口感的關係。任務 4 詢問學生要如何大量製作相同口感的果凍，此時必須應用到水與果凍粉的比例不變關係，這時候比的概念自然地出現。接著請學生用一個算式紀錄水和果凍粉的關係，並和同學討論與比較彼此的記法，呼應「數 -C2 具備和他人合作解決問題的素養，並能尊重多元的問題解法，建立良好的互動關係」。在學生應用比的概念解題之後，教材才介紹比的符號以及逐步引進前項、後項和比值的概念。撰寫教師在教師手冊即指出：

> 數學上的「比」探討的是兩數量間的對等關係，爲了讓學生了解比與比值的意義並產生使用的需求，本活動以循序引導的方式取代（定義）宣告。

再者，如前所述，素養教材引進數學史，引導學生經歷特定數學知識發生的背景或脈絡，進行再創造；讓學生認識到特定的數學知識是如何發展出來，它是如何從一開始不完全、不精確的想法，經過數學家好幾年、甚至好幾個世代的努力，才精鍊出現在所看到定義、符號或是方法。現行數學教科書看到的定義或符號，不是憑空得出，而是許多數學家努力所累積的成果，而這些成果必須回到社群做檢驗，並與其他數學知識體系有良好的相容性。其中一位教師在訪談中表達了以下的想法：

> 所以我們在題目的設計上面就要想怎麼樣去…引起學生去思考爲什麼，

為什麼有這個東西？學生是參與整個數學脈絡的發展，一起來去把這些所謂的知識的體系結構出來，…老師透過這樣的活動，讓他有所感…希望透過活動式的方式，讓他活動裡面去自己思考，然後呢從特例然後到一般，然後老師呢可以引導他們來做結論，而不是說我們去灌輸他，我們去定義他，那你就來學，學完以後你就我就再丟一個例題，你再把他學會他怎麼算就好。

(A 教師 20160309)

換句話說，素養教材的設計著重讓學生對於數學「有感」，也就是「知」、「行」、「識」架構中「識」的培養（林福來等人，2013），以期扭轉學生對於數學的負面態度，促進其建設性傾向。

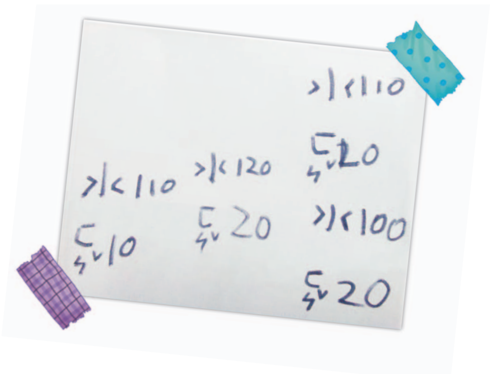
五、教材設計具備多重表徵

素養教材運用表格、圖形、文字與數字等多種表徵構成學習任務，中學階段並引進計算機工具與動態幾何環境 (Geogebra) 資訊工具，打造豐富的學習環境，呼應 NCTM(2000) 的「科技原則」。動態幾何環境可協助學生的思考從不精確、非形式的表述進到對幾何物件的數學解釋，為演繹思考發展打造堅實的基礎 (Jones, 2000)。以技高教材「交流電中的數學」為例，任務 2-2 請學生以 Geogebra，描繪三角函數：(1)y ＝ sinx 的圖形；(2)y ＝－ sinx 的圖形；(3)y ＝ 2sinx 的圖形；(4)y ＝－ 2sinx 的圖形；並將這些圖形，以不同顏色的曲線，在同一個坐標平面上輸出列印。接著請學生在表格中填上這四個函數圖形的最大值、最小值與週期。下一個任務更為抽象，要求學生以 Geogebra 描繪三角函數 y=asinx 的圖形並拉動軟體的數值滑桿觀察 a 在不同數值時，y ＝ asinx 的圖形變化，並拋出兩個問題請學生思考：(1) 正弦函數 y ＝ asinx 的圖形與 y ＝－ asinx 的圖形有何關聯性？ (2) 正弦函數 y ＝ asinx 關係式中的 "a " 究竟影響了什麼？如何影響？學生可以從觀察、歸納前一個任務的結果推論出答案，也可以藉由操作與歸納數值滑桿的發現確認自己的答案是否正確；最後得出 a 值的大小連結到電流之峰值（最大值）與谷值（最小值）。前述任務呼應了「數 V-U-B2 能夠運用計算機與資訊科技軟體的工具，有效

解決日常實際問題，與專業領域內的實務問題。」

多重表徵對於學生的數學概念與關係的理解以及現實生活的應用相當重要，它可以幫助學生有效組織其想法和教師、同儕進行溝通 (NCTM , 2000)。以前述「比與比值單元」的任務 3 為例，請學生把不同水與果凍粉組合對應到不同的作品 A、B、C、D（見圖 3）。這個任務包括了右上角的插圖，題目敘述文字、數字符號、表格之多重表徵。學生可以採取多樣化的解題策略。像是忽略果凍粉，先參照表格中的水重量那一欄來判斷，遇水量相同時再比較果凍粉重量；或是先找出水最少、果凍粉最多的為成品 B，而後挑出果凍粉最少的為成品 A，剩下兩個再依水量判斷；或是把水的重量除以果凍粉的重量，算出水是果凍粉的倍數，其值就是果凍的軟度，數值越大越軟等等。以多重表徵進行教學有助於學生認知思考層次的提昇與靈活思考，發展邏輯的解題策略（陳霈頡、楊德清，2005），促進有意義的學習，以及連結不同的表徵應用於解題中（左台益、蔡志仁，2001）。

製作果凍時，向悅隨手記下水與果凍粉的分量，但她忘了各是哪一次的紀錄，請你幫她想一想，這些紀錄分別屬於哪個成品？並說說看，你是怎麼知道的？



	果凍成品	水（公克）	果凍粉（公克）
1	（　　　）	100	20
2	（　　　）	110	10
3	（　　　）	110	20
4	（　　　）	120	20

圖 3 具備多重表徵的任務設計

六、學習任務具備形成性評量的功能，以評估與促進數學學習

數學課堂中的教學與評量應整合在一起，而不是在教學結束後進行，才能對所有學生提供高品質的教學與促進深入理解的學習 (NCTM,1995;U.S. Department of Education, 2008)。十二年國教數學領綱 (草案) 在「實施要點」的「學習評量」項下提到形成性評量的重要性，要求教師在課堂教學中運用形成性評量探查學生的學習情況，並即時給予學生回饋或調整教學，以促進其學習。

形成性評量為促進學習的評量 (assessment for learning)(Black, Harrison, Lee, Marshall & William,2003)，教師運用多元的方式，例如：提問、學習任務、歷程檔案、小考等，從學生的回答蒐集學習的證據，識別學習進展與學習目標之間的落差、學習困難以及迷思概念等，了解目前的教學活動是否有需要改進或調整的地方，以及如何協助學生達成學習目標 (Black & Wiliam, 2009;NCTM,2000;Vanderhye & Demers,2007)。也就是說，當教師把評量的結果回饋到學生的學習或教學改進，而不僅止於給出分數或等級，他 / 她就是在進行形成性評量。

在前述的數學教育理念與課綱要求下，數學素養教材大部分的學習任務是以問題形式呈現（參見圖 2、圖 3），有助於教師在課堂進行形成性評量。不像現行的教科書給出許多例題，教師示範例題的解法給學生看，然後要求學生在例題後面的隨堂練習熟練特定問題的解法，教師不容易整合教學與評量。素養教材包括許多開放性的問題，要求學生提出想法、說明解法或是形成論述。比起封閉性問題，開放性問題更能蒐集學生思考的資訊與證據 (Qualifications and Curriculum Authority, 2003)，以前一頁的技高任務為例：「正弦函數 y ＝ asinx 關係式中的 "a " 究竟影響了什麼？如何影響？」比起請學生回答：「y ＝ asinx 的最大值為何 ? 最小值為何 ?」教師所能獲得學生思考的資訊相對豐富許多。當學生進行學習任務時，教師可以從學生的作答了解其學習狀況，發生了哪些困難或是迷思概念，以及確認學生的學習現況與學習目標之間的落差。換句話說，學習任務具備形成性評量的功能，當

教師應用素養教材進行教學時，必須整合教學與評量，評量是教學重要的一環。

形成性評量的實施有兩個重要階段：(1) 證據蒐集：教師運用學習任務或提問等方式，蒐集學生學習現況的證據；(2) 知後行動 (informed action)：師生按蒐集到的學習證據採取行動以促進學習，教師可以針對學生的學習需求調整教學活動或給予學生回饋，而學生可以根據教師的回饋修正其學習方法 (Andrade, 2010; Black & Wiliam, 1998; Popham, 2008)。Schoenfeld(2014) 也指出高效能的數學課室應進行形成性評量，讓教師能評估學生的數學思維與想法的價值，並以此為基礎規劃後續的教學以促進數學的學習。素養教材除了在學生手冊呈現學習任務或問題，讓教師易於檢視學生的學習狀況，同時在教師手冊呈現學生在試教時的解題策略，並給予教師如何針對學生的想法給予回饋或調整教學的建議，幫助教師進行形成性評量，具體實踐 NCTM(2000) 的「評量原則」。

柒、結論

本計畫案根據情境學習理論與數學素養「知」、「行」、「識」培養架構，轉化 NCTM 與 RME 數學教育的一般性原則研修數學素養導向教學模組。研究者從分析完成的教學模組以及訪談參與教師，歸結出數學素養導向教學模組設計的特殊性原則。教學模組設計的核心想法概括而言在於**「來龍去脈」**的建構。數學素養導向教學模組營造現實生活、數學史、寓言故事或是數學的情境，讓學生認識到數學知識發生的脈絡或與日常生活的關係；學習任務安排有著明確的主軸，帶領學生建構數學概念與發展技能，進行探索、問題解決、找出模式並與他人溝通；且讓學生知道所學內容在日常生活中、往後的數學學習或是專業科目的連結；並提供學生對於數學有感的學習機會，認識到數學除了實用性之外，也有其人文、歷史或美學的層面，具體展現數學素養教學「知」、「行」、「識」架構中，「識」的範疇。

上述原則為研究執行與參與教師兩年多來實踐經驗的總結。其中有些原則可能由於教育階段，而略有實踐上的差異；不過，整體而言，這些原則具

體展現在各教育階段之教學模組設計。我們相信前述原則可做為教師自編素養導向教材、教科書編寫與後續研究之參考，為十二年國教數學素養培養理念的實踐與傳播做出實質貢獻。再者，在某一個領域的發現有可能應用、遷移到其他的領域 (Scheonfeld, 2014)，建議其他領域可參考本研究的做法與發現，根據自身的領域特色或學科屬性進行轉化、發展其素養導向教材。研究發現應能促進與深化學術社群對於核心素養培養議題的探究與對話。

參考文獻

左台益、蔡志仁 (2001)。高中生建構多重表徵之認知特性。科學教育學刊，9(3)，281-297。

李國偉、黃文璋、楊德清、劉柏宏 (2013)。教育部提昇國民素養實施方案—數學素養研究計畫結案報告。臺北市：教育部。

林福來、單維彰、李源順、鄭章華 (2013)。十二年國民基本教育數學領域綱要內容之前導研究報告。新北市：國家教育研究院。

林碧珍、蔡文煥 (2006)。TIMSS 2003 國小四年級學生的數學成就及其相關因素之探討。張秋男主編：TIMSS 2003 國際數學與科學教育成就趨勢調查國家報告 (pp. 123-161)。國立臺灣師範大學科學教育研究中心。

林碧珍、鄭章華、陳姿靜 (2016)。數學素養導向的任務設計與教學實踐—以發展學童的數學論證為例。教科書研究，9(1)，109-134。

洪裕宏 (2008)。界定與選擇國民核心素養 : 概念參考架構與理論基礎研究。行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告 (NSC 95-2511-S-010-001)。臺北市 : 國立陽明大學。

吳如皓、董增萊 (2013)。從教學面看數學素養。臺灣數學教師電子期刊，34，13-21。取自：http://w4.nhps.tp.edu.tw/blog/62/blog/files/%E5%BE%9E%E6%95%99%E5%AD%B8%E9%9D%A2%E7%9C%8B%E6%95%B8%E5%AD%B8%E7%B4%A0%E9%A4%8A.pdf

張英傑、張素宜 (2008)。小寶貝，我把數學變簡單了 !-- 從情境學習理論談數學課程設計。科學教育月刊，313，9-17。

張芬芬、陳麗華、楊國楊 (2010)。臺灣九年一貫課程轉化之議題與因應。教科書研究，3(1)，1-40。

楊淑芬 (1992)。數學史在數學教育中的重要性。數學傳播，16(3)，1-8。

徐偉民 (2013)。國小教師數學教科書使用之初探。科學教育學刊，21(1)，25-48。

黃永和 (2009)。情境學習與教學研究。台北市：國立編譯館。

陳昌平、唐瑞芬 (1995)(Freudenthal 原著)。作為教育任務的數學。上海：上海教育出版社。

陳霈頡、楊德清 (2005)。數學表徵在教學上的探究。科學教育研究與發展季刊，40，48-61。

翁穎哲、譚克平 (2008) 。設計研究法簡介及其在教育研究的應用範例。科學教育月刊，307，15-30。

蔡清田、陳延興 (2013)。國民核心素養之課程轉化。課程與教學季刊，16(3)，59-78。

教育部 (2013)。教育部提升國民素養專案計畫報告書。臺北市：作者。

教育部 (2014)。十二年國民基本教育課程綱要總綱。臺北市：作者。

臺灣 PISA 國家研究中心 (2014)。臺灣 PISA 2012 精簡報告，取自 http://pisa.nutn.edu.tw/download/data/TaiwanPISA2012ShortReport.PDF

國家教育研究院 (2014)。十二年國民基本教育課程發展建議書。新北市：作者。

國家教育研究院 (2016)。十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校數學領域 (草案)。取自 http://www.naer.edu.tw/ezfiles/0/1000/attach/37/pta_10147_1655251_02807.pdf。臺北市：作者。

Andrade, H. L. (2010). Summing up and moving forward. In H. L. Andrade, & G. J. Cizek (Eds.), Handbook of formative assessment (pp. 344-351). New York, NY: Routledge.

Balacheff, N. (2013). cK￠ , a model to reason on learners' conceptions. In M. Martinez & A. Castro Superfine (Eds.), Proceedings of the 35th annual meeting of the PME-NA (pp. 2-15). Chicago, IL: University of Illinois at Chicago.

Balacheff N., & Gaudin, N. (2010) Modeling students' conceptions: The case of function. Research in Collegiate Mathematics Education, 16, 183-211

Black, P., & Wiliam, D. (1998). Assessment and classroom learning. Assessment in Education, 5(1), 7-74.

Black, P., & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. Educational Assessment, Evaluation and Accountability, 21(1), 5-31.

Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (2003). Qualitative research for education: An introduction to theory and methods (5th ed.). Boston: Allyn and Bacon.

Ernest, P. (1998). Social constructivism as a philosophy of mathematics. NY: State University of New York.

European Commission. (2007). Key competences for lifelong learning: European reference work. Belgium: Author. 取自 http://www.alfa-trall.eu/wp-content/uploads/2012/01/EU2007-keyCompetencesL3-brochure.pdf

Hersh, R. (1997). What is mathematics, really? England: Oxford University Press.

Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: Students' interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. Educational Studies in Mathematics, 44, 55-85.

Karp, A. (2013). From the local to the international in mathematics education. M. A. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, F. K. S. Leung (eds) Third international handbook of mathematics education (pp 797-826). Springer, New York.

Lave, J., & Wenger, E. (1991). Situated learning: Legitimate peripheral participation. Cambridge: Cambridge University Press.

Mesa, V. (2004). Characterizing practices associated with functions in middle school textbooks: An empirical approach. Educational Studies in Mathematics, 56(2/3), 255-286.

National Council of Teachers of Mathematics. (1995). Assessment standards for school mathematics. Reston, VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston: Author.

Kilparick, J., Swaflord, J. and Findell, B. (Eds.) (2001). Adding it up: Helping chidren learn mathematics, Washington, D.C.: National Academy press.

Popham, W. J. (2008). Transformative assessment. Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development.

Qualifications and Curriculum Authority. (2003). Assessment for learning: Using assessment to raise achievement in mathematics. Retrieved from: http://www.qcda.gov.uk/4457.aspx.

Schoenfeld, A. H. (2014). What Makes for Powerful Classrooms, and How Can We Support Teachers in Creating Them? A Story of Research and Practice, Productively Intertwined Educational Researcher, 43(8), 404-412. doi: 10.3102/0013189X14554450

Shenton, A. (2004). Strategies for ensuring trustworthiness in qualitative research projects. Education for Information, 22, 63-75.

The Organization for Economic Co-Operation and Development. (2005). The definition and selection of key competencies. Paris: Author.

The Organization for Economic Co-Operation and Development. (2013). PISA 2012 assessment and analytical framework: Mathematics, reading, science, problem solving and financial literacy. Paris, France: Author.

U.S. Department of Education. (2008). Foundations for success: The final report of the national mathematics advisory panel. Washington, DC: Author.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2000). Mathematics education in the Netherlands: A guided tour. Freudenthal Institute Cd-rom for ICME9. Utrecht: Utrecht University.

Vanderhye, C. M., & Demers, C. M. Z. (2007). Assessing students' understanding through conversations. Teaching Children Mathematics, 14(5), 260-264.

第二章　國民小學篇

經驗分享

比與比值、正方體與長方體

第二章　國民小學篇

數學素養教材設計發展之經驗分享
比與比值、正方體與長方體

壹、研究背景

十二年國民基本教育課程綱要總綱已於 103 年公布，預計從 107 年起開始逐年實施，並以發展學習者的素養為導向。教育部提升國民素養專案辦公室提出數學素養的定義與內涵為：個人的數學能力與態度，使其在學習、生活、與職業生涯的情境脈絡中面臨問題時，能辨識問題與數學的關聯，從而根據數學知識、運用數學技能，並藉由適當工具與資訊，去描述、模擬、解釋與預測各種現象，發揮數學思維方式的特長，做出理性反思與判斷，並在解決問題的歷程中，能有效地與他人溝通觀點。以此為據，我們該從哪個角度切入？採用什麼樣的教學策略？如何提問？才能在建立數學概念的同時，提升孩子的數學素養呢？思慮再三，反覆修正後，我們設定了幾個方向作為模組設計的主軸：首先，數學與生活息息相關，從生活中找素材，並安排適當的教學脈絡，以「學習需求」作為模組設計的出發點；而後鋪陳相關「經驗活動」，厚實概念學習，以擴展後續的討論內容；同時安排開放性較高的素材與提問，培養孩子觀察、歸納統整與應用數學的能力；數學的應用在各領域中皆有，連結相關領域，延伸學習範圍也是我們努力的目標。

貳、研究目的

有了初步想法，我們開始蒐集相關資料，諮詢專家學者，努力將心中的藍圖實踐在教學模組的設計中：

一、提供學習需求

數學學習旨在解決生活中的問題，因此各模組嘗試連結生活情境，以學習需求為主軸，設計布題與活動，逐步引導孩子在探討與修正過程中，察覺、

認識進而理解相關數學概念。 以「比與比值」模組為例，為使孩子了解比與比值的意義，活動由觀察四個果凍成品的差異揭開序幕，引導孩子思考水、果凍粉的量與果凍口感的關係，引出使用「比」記錄兩數量間對等關係的需求。接著加入比較與再製的情境引出使用比值與相等的比的需求，拉起比、比值、相等的比三者間的連結。在「正方體與長方體」模組中，則以設計包裝盒為主題，產生認識正方體與長方體的需求，而後探討展開圖、示意圖在生活中的實用性。

二、鋪陳「經驗活動」厚實概念學習

生活經驗的連結，以及孩子相關先備知識的喚起，有助於單元內容的學習。因此，在「比與比值」模組中，鋪陳果凍製作成果的比對，讓孩子觀察果凍成品的差異，思考其成因，引出果凍成分（水與果凍粉）的比例會影響果凍的成品，促使孩子發現當影響因素不只一個時，無法只使用舊經驗（差量）解決問題。而後透過開放提問，讓孩子進行解題策略的交流，為接下來「比」的認識做墊步。「長方體與正方體」模組則以實作進行，在一張張圖卡的黏貼組合過程中，孩子需考量面的大小、面的形狀、不同大小的面所需的個數……等。在這過程中，許多孩子透過嘗試錯誤的方式累積學習經驗，這成為後續討論的養分與素材。

三、培養觀察、歸納統整與應用數學的能力

我們試圖在教學過程中，培養孩子「根據數學知識描述、模擬、解釋與預測各種數學現象，發揮數學思維特長，作出理性反思與判斷以達與他人的有效溝通」的能力。因此，在「比與比值」的設計中，我們加入數據、表格的觀察、比較與歸納；一開始的果凍成品與成分關係比對，到後來的竿長與影長的測量結果分析，學生都得進行相互比較、預測及討論歸納預測結果的歷程。在設計「正方體與長方體」教學模組時，著重於讓孩子知其然，更知其所以然。故，進行構成要素之探討時，教學活動採取預測、實作觀察、修正預測的模式進行；進行面與面的關係教學時，利用梯形柱做比對，察覺正方體與長方體的特性，進而統整相關概念；進行展開圖與視圖討論時，透過

功能與便利性連結數學與實際生活；為檢驗孩子能否利用數學基本概念來解決真實生活中的問題，模組中設計了「根據物品大小量身製作正方體或長方體包裝盒」的活動。

四、跨領域學習

各領域間關係密切，透過相互的連結，可以擴充學生的學習的經驗。孩子在自然領域學到：一天當中，竿影的長度會隨時間而改變，從早晨開始，越接近中午竿影越短，而後，竿影會慢慢變長，且影子的位置與早上不同。據此，我們擴充「比的應用」，探討「同一時間竿長與影長間有固定的倍數關係」以及「竿長與影長的倍數關係會因時間的不同而改變」。連結數學與自然領域，除了探討竿長與影長的關係，應用比與比值的概念，推測出旗竿等不易實測的物品高度，也反思數學歷史故事中泰利斯使用的策略，提出新的建議。「正方體與長方體」模組則連結藝術與人文領域，發揮創意巧思進行包裝盒的創作。正在進行中的「角度」模組則與資訊領域結合，進行程式編碼的應用。

參、教學設計

要將教學想法落實於教學中並非一蹴可幾，過程中面臨許多抉擇與考驗。以下以「比與比值」及「正方體與長方體」為例，說明教學設計歷程中所遇到的困難。

一、「正方體與長方體」模組的教學設計

我們遇到的第一個問題就是教學目標的設定。

（一）教學目標該如何取捨

該模組對應的教學目標為「S-5-6 空間中面與面的關係：以操作活動為主。生活中面與面平行或垂直的現象。正方體（長方體）中面與面的平行或垂直關係。用正方體（長方體）檢查面與面的平行與垂直。」進行教材分析時，我們認為構成要素展開圖與示意圖（也稱為視圖）在正方體與長方體的學習中也有重要地位，但其構成要素與展開圖的相關學習在「S-3-4 立體形體與展開圖：以操作活動為主。初步體驗展開圖 如何黏合成立體形體。知道

不同之展開圖可能黏合成同一形狀之立體形體」，以及「S-5-7 球、柱體與錐體：以操作活動為主。認識球、（直）圓柱、（直）角柱、（直）角錐、（直）圓錐。認識柱體和錐體之構成要素與展開圖。檢查柱體兩底面平行；檢察柱體側面和底面垂直，錐體側面和底面不垂直。」指標中，而示意圖則未有對應的指標。這該怎麼辦？同時在一個模組中處理多條指標嗎？不，這些指標牽涉之概念很廣，若要在一個教學單元中完成實在不容易。那麼，哪些該保留？哪些該暫時放下？

仔細考量孩子的先備經驗及後續學習、指標間的關係，以及教學時數後，決定抽取各指標中關於正方形與長方體的學習內容，以探討長方體與正方體的構成要素展開圖，以及面與面的平行與垂直關係為主。利用正方體與長方體檢驗生活中的面與面的垂直平行關係，以及「其他柱體、錐體」的學習則不列入此模組中。

除此之外，「示意圖」的教學雖不在此階段學習內容中，但在多場研發會議裡，各階段老師及教授互相核對發現，國小課程大量使用「示意圖」呈現立體形體，卻少有對此進行相關說明，造成部分學生對「立體形體」及其「平面化後的樣貌」無法連結。曾經，為了向孩子介紹立體形體平面化後的樣貌，我們嘗試採用拍照的方式進行。但是，不管從哪個角度拍攝，都拍不出課本呈現的樣子，經過研究討論才發現，數學上的示意圖與美術課的透視圖看似相近，實則不同。數學上的示意圖 (也稱為視圖) 保留對邊的平行等長關係，但美術課繪製長方體時，因為消失點的呈現，邊與邊並不會呈現平行關係，這個現象在拍照的時候就看得出來（如下圖 2)。

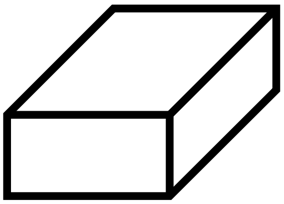


圖 1　長方體示意圖

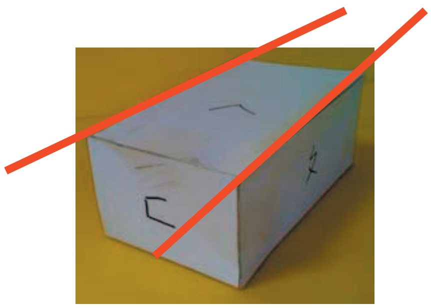


圖 2　長方體紙盒照片

此外，探討長方體、正方體面與面、邊與邊的關係時，我們指出長方體與正方體的鄰面（邊）會互相垂直，但在示意圖上卻沒有辦法呈現每個面（邊）與面（邊）的垂直關係，關於這點孩子知道嗎？還有，示意圖與原形體大小的關係是什麼？標示哪些數據就可以代表這個形體的大小？林林總總的問題在對話過程中一一浮現無法漠視，儘管教學時數受限，我們仍決定保留示意圖教學於模組中。

確認教學目標後，新的問題又來了！此指標明確指出以操作活動為主，操作活動該如何實踐於課程中？

（二）操作活動該怎麼設計

怎麼樣的操作活動才能引發學習需求，促使後續相關概念的學習？在未進入教室前，我們也深感憂慮。但，不試試怎麼知道呢？於是，我們設計競賽情境，以完成作品參賽為由，大膽安排四大操作活動：製作紙盒、繪製展開圖、根據實際物品量身製作包裝盒、繪製示意圖與標示作品規格。整個教學以實作為主，討論與歸納統整為輔，在帶領孩子完成作品的同時，學習相關數學概念（如圖 3）。

圖 3 正方體與長方體模組教材頁面

製作紙盒的主要用意在於探討長方體與正方體的構成要素，以及面與面、邊與邊的垂直平行關係。為了促發更多的討論與發現，我們選取一張張的圖卡供學生黏貼組合。組合過程中，學生需考量面的大小、面的形狀、不同大小的面所需的個數……等。嘗試錯誤的過程，將提供學生後

續討論的養分與素材。有了製作體驗後，接著讓學生觀察比較形體的異同，並歸納正方體與長方體的特徵。為了更加凸顯正方體與長方體面與面、邊與邊的垂直平行關係，教材引入梯形柱與正方體、長方體做比較。

展開圖的教學重心包含辨識展開圖，以及展開圖的多樣性。除了實際操作外，還有其他策略可以協助孩子辨識嗎？展開圖的多樣性與後續數學學習的連結為何？仔細思考後，我們發現「形體特性」有助於展開圖的辨識，而展開圖多樣性與後續數學學習較無直接聯繫。於是，我們設定「利用形體特性辨識展開圖」為此活動的教學重點。同時，為使學習與生活連結，加入「繪製展開圖」的教學。展開圖的教學活動從製作紙盒的便利性切入，讓學生回顧先前製作紙盒的過程，引出使用展開圖的需求 --- 一體成形，方便組合。待學生認識展開圖後，再逐步引導學生利用習得的形體知識進行判斷，如：由三組全等的面組成的長方體，其全等的面互為對面、六個全等的長方形無法組成長方體、組合時相鄰兩個面的邊必須等長……等。當學生能成功利用圖卡拼排展開圖後，我們請學生根據提供的物品量身製作包裝盒，此時，學生需對實物進行測量，並決定每一個面的大小以及它在展開圖中的位置，完成展開圖的繪製，並將展開圖剪下黏貼，完成包裝盒雛形，檢驗包裝盒與實際物品的適切性，並加入創意為成品加分。

最後，一個包裝盒設計完成了，如何告訴別人這個盒子的大小、形狀呢？透過不同角度的描繪，說明數學對示意圖的詮釋，並藉溝通需求，引出標註長、寬、高等相關數據，完成包裝盒示意圖的繪製。

教學活動設定後，「教學時數及活動中的變數」又是一大挑戰。

（三）教學時數不足、操作活動的變數太多怎麼辦

操作活動通常需要很長的時間，這樣的投資是否值得？學生特質不一，操作過程中的變數也很多，真的能在課堂中順利執行嗎？在教學實驗階段，我們進行了八節課才將相關數學活動完成，而後再用兩節美勞課做包裝盒的創意及美化，前後共十節。在這過程中，我們盡力收集學生的相關反應，根據學生回饋做模組的修正，而後，透過議課時的意見交流，針對教學中遇到的問題提出因應策略及相關提問。除了在教師手冊中呈現教學現場學生實

際狀況，教師可能的因應策略外，針對教材中某些部分的取捨也提出相關建議，供老師視教學時數進行選擇。例如，根據指標 S-5-6 來看，孩子能透過觀察比較及視覺直觀認識形體的構成要素以及面與面的垂直平行關係，就已達到國小階段學生學習目標。為了更進一步探索孩子對於相關概念的想法，我們額外設計相關提問供老師做進一步的探討：請孩子說明如何知道相對的面 (邊) 會互相平行，相鄰的面 (邊) 會互相垂直。在實際進行教學時，此部分的討論將近兩節，主要目的是收集更多孩子的想法，提供老師們未來教學時的參考。在這額外設計的活動中，孩子們為了說服他人相信自己的論點，使出渾身解數，利用長方形與正方形的特徵、水平面的概念，以及各種工具的使用試圖說明與解釋，想法雖不盡完整，但透過再次的討論澄清，邊、面的垂直平行關係更加清晰了。未來老師們若使用此份教材，則可視教學現場進行取捨。

來到完稿階段，我們又面臨素材呈現方式的掙扎。

（四）實測物品該如何選擇？如何呈現？

活動中，我們設計「為衛志登公司的新產品量身設計包裝盒」的活動，在此活動中，學生需測量實際物品，然後繪製適當的展開圖，並將展開圖剪下拼貼，完成包裝盒。問題來了，該選什麼物品讓學生實測？方的？圓的？現場教學者是否容易取得？還是我們得在教材中附上測量物品的教具？那數量要取多少？款式要有幾種？周旋許久，我們終於達成共識。首先，捨棄正方體或長方體的物品，而改採形狀不規則的物品當作衛志登公司的新產品。這麼做的理由是，「實測」主要的目的是，透過實際測量與製作，讓學生經驗物體大小與包裝盒的關係，進而連結後續「為什麼示意圖上通常都需要標示長、寬、高」的教學（如圖 4）。

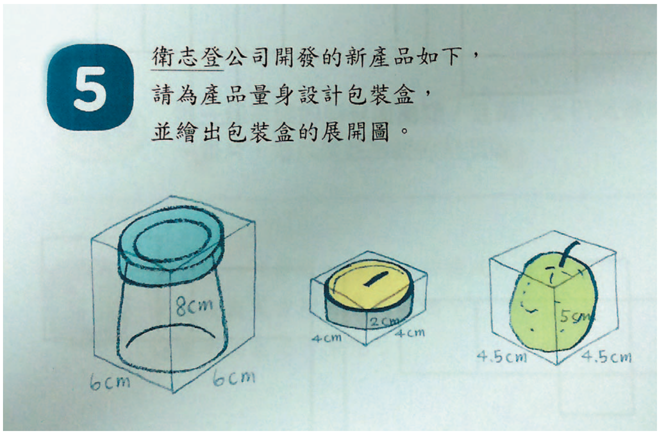


圖 4　正方體與長方體模組頁面

以玻璃瓶為例，學生若只測量高度，而忽略寬度與長度，包裝盒可能過大或過小；測量較窄的位置，瓶子將無法順利放進包裝盒中，因此，測量時就有很多值得討論的內容。若提供的物品為正方體或長方體，學生很可能直接將形體透過翻轉，直接將面描在紙上完成展開圖，沒有實測的需求。

那麼，多大的物品才適合呢？考量學生操作方便，我們建議物品不宜過大，以方便學生在一張紙 (A4、B4、A3⋯) 上能繪製其展開圖為原則，如小瓶的膠水，一枝彩色筆⋯⋯。由於活動過程中，學生操作的速度以及方式不一，教學者可準備多樣不同物品各若干，一方面讓速度快的小朋友進行第二項、第三項物品的設計；另一方面，可根據學生使用相同物品，但設計出來的紙盒大小不一樣的結果，進行後續討論與修正。

若教學時沒有實際物品讓學生測量該怎麼辦？考量情境脈絡的合理性，以及讓現場老師有更多的選擇，我們決定在教材中呈現「實測物品」。物體平面化後，將無法實測，接下來的活動該如何進行？是否要標示物體的長、寬、高於教材中呢？

經過多次會議的協商討論，我們還是決定在教材中標示相關數據。這個部分的呈現，主要是因應課堂中時數不足或準備物品不易，無法進行實測的狀況下使用。標示相關數據後，教學者可請學生觀察數據討論物體的實際大小，以及繪製展開圖時需留意的地方：包裝盒是否需要大於物體本身？要大多少才方便拿取，又不至於過大造成物體晃動？如何根據示意圖繪製展開圖，將作品完成？⋯⋯。

儘管呈現了「實測物品」(衛志登公司的新產品)，我們還是希望教學者選取生活中的物品供學生進行實測與檢驗。而教材中的畫面，可以延伸後續討論，或者檢驗學習成果使用。

二、「比與比值」模組的教學設計

進行該模組設計時，我們遇到的第一個問題是情境的選擇：到底是要用多元情境，還是使用單一情境貫穿比、比值與相等的比三者間的關係？

（一）教學情境脈絡該如何安排？

「單一情境」與「多元情境」的拉鋸戰從設計之初延燒到外審階段。我們擔心：使用單一情境雖然可以串連比、比值與相等的比，但學生是否能將此部分的學習遷移至其他情境？我們煩惱：使用多元情境後，比、比值與相等的比的概念將散落在不同的情境中，難以貫穿討論。這該如何是好？

在比較各版本教材後發現，大部分的教科書都設計多元情境。單一情境是否可行？帶著實驗精神，我們試著走不一樣的路。當然，學完比與比值的概念後，還是需要處理學習遷移的部分，於是，我們設計不同情境的學習單作為補充，也在完成概念學習後，設立應用單元，將學習情境從果凍製作遷移至竿影的變化。

確認情境之後，我們對於比、比值的定義也產生了疑問，各專家學者的看法均有些微差異，該取何者？

（二）比的定義

根據 64 年版部編本來說，比是兩量倍數關係的另一種記法；在 82 年版部編本中，比是兩量的對等 (配對) 關係；97 課綱指出比的關係與除的關係相同；國外學者 Hart 認為比表示兩數量間比較的關係；國外學者 Lamon 則提出了「比感」的問題。

經過多次與團隊夥伴的討論，以及參酌國內外學者的想法後，我們採用「比是兩量固定的倍數關係」。主要原因是，在我們設計的果凍製作教學脈絡中，學生可能自然地用倍的語言來描述兩個量的關係，如：水的量是果凍粉的 5 倍。

（三）這個模組適合進行實作活動嗎？

解決兩個問題後，我們又面臨實作無法達到教學目標的困境。

在初版的設計中，我們希望能實際帶領學生製作果凍，而後從每個人的成品差異討論其原因。但實際操作發現，溫度、靜置的時間等因素都會影響果凍的成品，最後可能無法只聚焦在成份的差異上。此外，成分些微的改變在成品上不易呈現，若要成品有明顯的不同，其數據可能會失去探討兩量倍數關係的需求。考量許久，我們決定以虛擬情境開始，提供調整後的數據，

讓學生以討論的方式往後進行（如圖 5）。

圖 5　比與比值模組頁面

孩子在五年級自然課即與竿影測量活動接觸，原希望能延續自然科的實驗，帶領孩子進行竿影實測，而後再根據實測結果擴充探討「同一時間竿長與影長間有固定的倍數關係」，以及「竿長與影長的倍數關係會因時間的不同而改變」。但在教學前的嘗試中我們發現，實測需克服許多誤差 (如時間、工具操作等)，在出現誤差的狀況下，孩子將得不到可發現關係的數據，這樣一來，實測就失去意義。經過多次測量工具的調整都無法克服的狀況下，我們不得不取消實作，改以觀察我們經過微調後的數據變化，察覺竿影的關係。這樣的結果確實讓我們感到沮喪，但也不得不接受（如圖 6）。

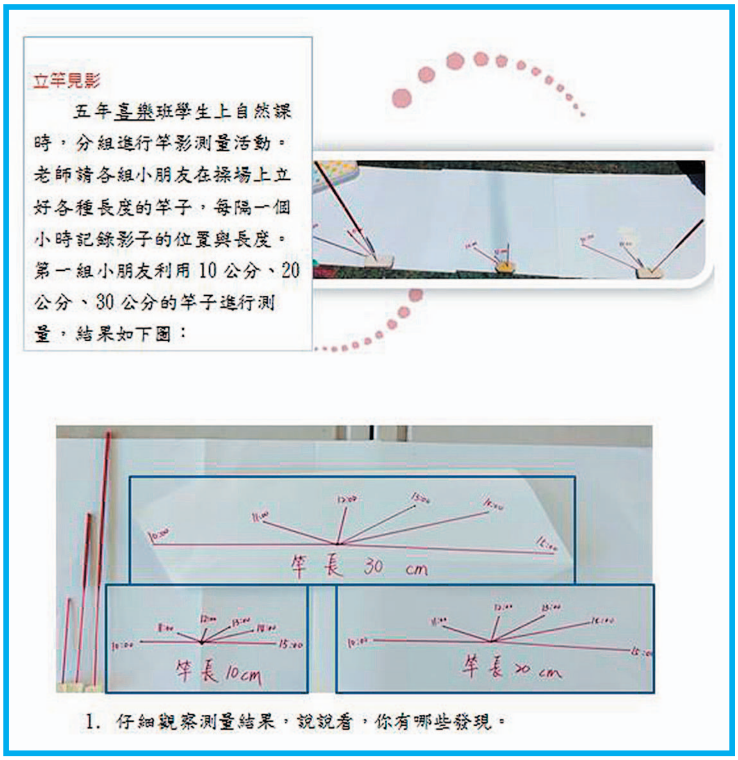


圖 6　比與比值模組頁面

儘管過程並不平順，看著模組經過不斷修正，漸趨成熟，心裡充滿欣喜。

肆、結論

各模組經過長期的編修、審查、試教、討論與修正的歷程畫下句點。回頭整理教學相關資料，我們發現：

一、任務導向，孩子更清楚學習的路

「正方體與長方體」模組以「任務」的模式進行教學設計。此活動以參加包裝設計大賽為題，事先說明需完成的學習內容，讓孩子對接下來的活動有初步概念，而後的討論歸納反而容易聚焦，實作過程中發生了問題，也能根據目標做修正與再次嘗試。

二、「實作」讓描述、解釋的內容更具體

挑選圖卡黏貼紙盒、用圖卡拼貼展開圖、繪製展開圖、繪製視圖、根據物品量身製作包裝盒，「正方體與長方體」模組中大量的操作活動，提供嘗試錯誤與累積經驗的機會，後續進行相關討論時，孩子能提出操作過程中成敗的經驗與修正建議，讓學習更具體且多元。以紙盒製作活動為例，以往操作的物件是半成品，組合過程不需思考，此次提供圖卡供孩子選擇，邊長與面的關係就在操作中被看見了。

「紙盒拼組」的實作經驗，除了為構成要素及面與面的關係討論提供豐厚的內容外，也遷移至展開圖的探討活動中。「要如何才能將圖卡正確拼排成長方體展開圖？除了嘗試錯誤外，還有別的策略嗎？」針對此問題，孩子的回答是：

（一）如果是「有兩個正方形」的長方體，要先找出四張全等的長方形圖卡，再找符合邊長大小的兩片全等正方形圖卡。黏貼時，一樣長的邊貼在一起，先將四張全等的長方形圖卡貼成一個大長方形，然後再分別將正方形圖卡接上去。因為這兩個正方形是對面不是鄰面，所以不會接在一起，另外，與長方形接合的邊要一樣長。

（二）如果是由「三組長方形」構成的長方體，要先分別找出兩兩全等的長方形圖卡三組，這三組長方形圖卡的邊要彼此吻合，不能太長也不能太短。然後，全等的面不能貼在一起，因為全等的面是對面不是鄰面。

仔細比對孩子的操作歷程與說明發現，具體經驗讓孩子在陳述策略時有「步驟性」，他們較能明確地說出先如何，再怎樣，這與過去教學相比有明顯的不同。

充足的體驗活動，也增進孩子觀察的敏銳度，面對排山倒海而來的想法，除了進一步的澄清與確認外，也需帶領孩子進行歸納與統整，整理訊息的工具在此時顯得格外重要，The Double Bubble Map 是很好的選擇，先抽取長方體與正方體的共同特徵，再分別探討相異之處。討論相異處時，透過交叉比對，逐一檢視是否有遺漏，如：在正方體的特徵中，孩子提到正方體的 12 條邊都一樣長，「長方體的邊長呢？ 12 條邊都不一樣長嗎？」我們追問。在長方體的特徵中，孩子發現長方體上相鄰的面會互相垂直，於是我們再問「正方體也有一樣的現象嗎？」……等。透過一系列的追問、討論，補足原先未被察覺的特徵。活動中，「一張紙條寫一個發現」這種收集訊息的方式發揮具體效用：觀察與記錄時，孩子可根據自己的觀察速度記錄 1-5 個不等的發現，不會出現等待或者彼此干擾的狀況；討論時，這些發現可以被移動、修正、整合，讓思考的過程看得見。經過一節課的討論，師生歸納正方體與長方體的特徵如下圖 7：

明亮清晰的思路需要具體經驗的支撐，過程中，孩子不斷使用「因為…所以…」的句型解釋想法；用「先…接著…再…」的句型溝通操作的步驟。而教學者及觀課夥伴也不得閒，在收集孩子學習資訊的同時，思考著如何統整歸納，這是一趟互學之旅，師生共創別開生面的學習之路。

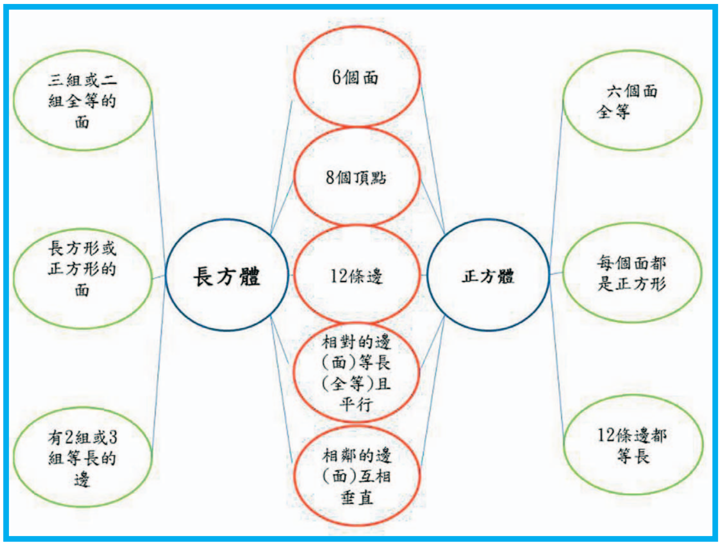


圖 7　用 Double Bubble Map 彙整長方體與正方體的異同

三、從「需求」出發，學習更有需求

在「比與比值」單元之前，孩子接觸到的比較問題都只需要考慮一個量的差異即可，為了讓孩子了解「比與比值」的意義並產生使用需求，我們安排情境脈絡、設計引導布題，經過一連串的探討與修正完成教學。當我們問孩子：「水與果凍粉的比值與果凍成品有關係嗎？」孩子說：比值就是果凍的「軟硬度」。水與果凍粉的比值越大做出來的果凍越軟；水與果凍粉的比值越小做出來的果凍越硬。反過來說，果凍粉與水的的比值越大做出來的果凍越硬，果凍粉與水的的比值越小做出來的果凍越軟。

那麼，「認識比與比值、相等的比，能解決什麼樣的問題呢？」，孩子告訴我們：

（一）知道比值或者算出相等的比，我們就可以複製出很多相同口感的果凍。

（二）知道比值或者算出相等的比，我們就可以比較不同配方的成品。

為了讓「展開圖」的使用有需求，教學時從製作紙盒的便利性切入。透過問話：「包裝產品時，一片一片黏貼的方式既費時又不方便，針對這個問題，你有更好的策略嗎？請說說看。」引導學生進入思考。先前的實作經驗發揮具體效用，孩子提出「將圖卡攤平盡量將六個面貼好，再立起來黏貼其他的邊」的想法，為了方便後續溝通，我們於此時介紹「展開圖」的名稱。

引出使用展開圖的需求 --- 一體成形，方便組合，且孩子能成功利用圖卡拼排展開圖後，我們請孩子根據提供的物品量身製作包裝盒，此時，孩子需對實物進行測量，並決定每一個面的大小以及它在展開圖中的位置。而後，孩子根據節省材料、產品是否方便拿取，產品在盒子中是否會因為空隙過大晃動造成損壞等原則進行審核與修正。

能根據物品大小繪製展開圖並完成紙盒設計後，如何將成品平面化，方便他人評閱呢？拍照、繪製視圖就成了下一個討論主軸。

「為什麼作業簿上畫幾條線就能代表一個長方體？」、「為什麼標上幾個數字就能代表該形體的大小？……」孩子若不清楚，後續計算形體體積

與表面積時問題就一一浮現。因此，踩在「溝通的需求」上，我們設計了示意圖教學。一開始，孩子最直接的反應就是畫一個和形體一樣大的示意圖，而後才陸陸續續提出將形體的樣貌畫下來，用標示長度的方式處理，唯有如此，才有辦法呈現大型物體的示意圖。那麼，「到底要標示哪些邊呢？每條邊都標示嗎？」透過追問，孩子回扣先前長方體與正方體邊的特性，歸納出長方體需標示三條邊 (長、寬、高)，而正方體的部分出現分歧的意見，有孩子認為，只要註明正方體，標示一邊即可 (因為正方體的 12 條邊都一樣長)；也有孩子認為標示三條邊不但能確認紙盒有多寬，有多深，有多高 (長、寬、高)，還能省下標註中文的過程。

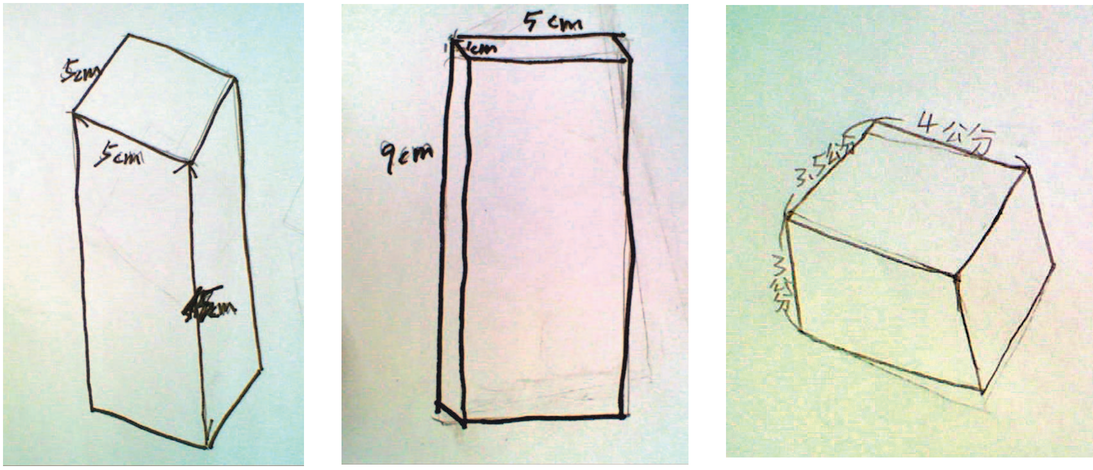


圖 8　學生實作分享一：長方體紙盒示意圖

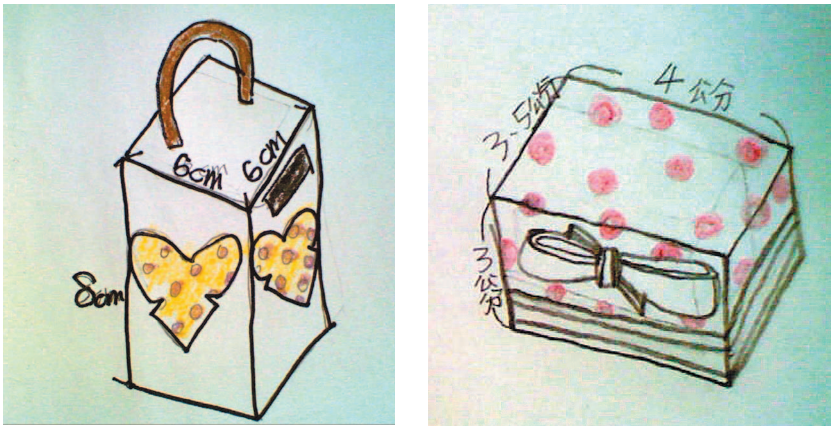


圖 9　學生實作分享二：增加創意作為後的紙盒示意圖

「為什麼示意圖上要標示邊的長度？邊的長度跟盒子的大小有關嗎？示意圖上需要標示哪些長度我們才能知道盒子的大小？而知道了某些長度，我們可以再推測出哪些邊的長度呢？⋯ ⋯。」透過一連串的實作與討論，孩子更清楚立體形體與其平面化後的關係。圖 8 與圖 9 即為孩子為自己的成品所繪製的示意圖。

四、因為學習深刻，所以學習成果令人印象深刻

在探索討論的活動中，孩子能連結新、舊經驗解決問題，並出現多元解題策略。

果凍製作的情境中，孩子能依情境或數據的關係靈活運用「相等的比」與「比值」進行比較與複製活動；在觀察光影測量的數據時，孩子能察覺竿影的連續性，了解比值 1 所代表的意義：竿長與影長相等，並推論一天中何時竿長與影長的比值可能是 1；而在泰利斯測量金字塔的故事中，孩子提出具體策略進行竿長的推測：只要知道當下身高與影長的比值，並測量出金字塔的影長即可計算出金字塔的高度，無須等到竿長與影長相同時再進行測量。

在製作紙盒活動中，孩子也有出色的表現。一開始，我們有諸多疑慮：「孩子能繪製展開圖與視圖後，是不是該教他們在哪些位置加黏貼需要的面？」、「孩子會不會混淆原本的六個面及後來增加的黏貼面？」、「要不要教孩子『最少』須設計幾個黏貼面才能將紙盒貼牢？」……。問題鋪天蓋地而來，我們該如何引導孩子逐步完成作品呢？經過觀課與議課，我們相信，有了先前深入的操作與討論，孩子一定有

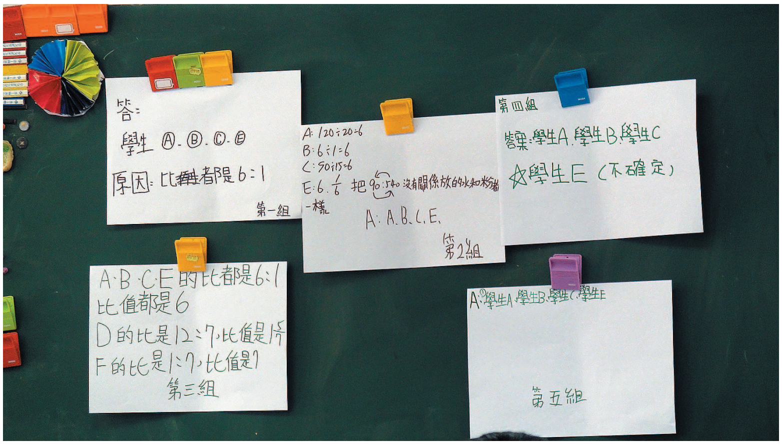


圖 10　學生課堂實作

辦法（詳見圖 10）。於是，簡單的任務分派後，創作活動就開鑼了！

「想一想，如何修正會更好？還可以做什麼樣的改變展現創意？」指令下達，孩子開始尋找工具測量禮品各向度的大小，仔細討論每個面的位置以及美化方式，一張張紙開始變身為各式各樣有趣且實用的禮物盒來。

有的孩子用緞帶固定側面，並增加一個面貼上魔鬼氈，完成開闔容易的作品；有的孩子採鏤空設計，讓包裝盒兼具燈罩功能；也有孩子用緞帶取代黏貼面的功能，將禮物盒包裝完整，為了方便顧客取物，還用魔鬼氈做活動裝置；甚至有孩子製作造型狗禮物盒，十分有意思。

成品琳瑯滿目（如圖 11）令人目不暇給。看著提供的各項物品適恰地擺放在孩子們設計的包裝盒中，我知道在這次課程中，他們不但認識了正方體與長方體，也學會針對各項物品設計專屬包裝盒的技能，將所學應用於日常生活中。

五、適當的難度引發孩子學習與挑戰的欲望

為了引出使用「比」的需求，設計模組時，我們採用較多的樣本數據（如下圖 12、表 1）提供孩子觀察比對。教學前，我們十分擔心資料量太多會造成學習困擾，實際進行教學發現：在判斷過程中，孩子來回做比較，甚至因策略使用失敗而不斷修改、更正，過程中不但產出多元解題策略，也促使後續討論的內容更為紮實。

圖 11　學生作品圖

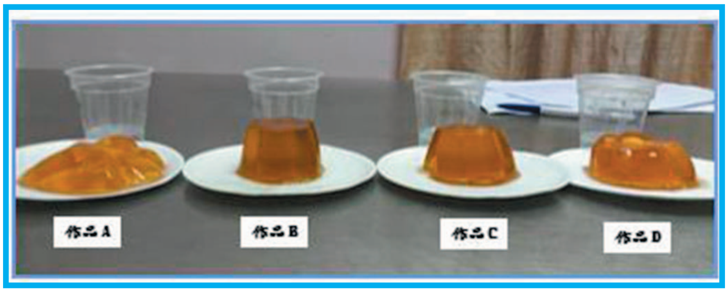


圖 12　樣本圖

表 1　各次製作果凍時水與果凍粉的重量紀錄

	作 品	水 (公克)	果凍粉 (公克)
1	(　B　)	100	20
2	(　A　)	110	10
3	(　C　)	110	20
4	(　D　)	120	20

製作果凍時，向悅隨手記下水與果凍粉的份量，但她忘了各是哪一次的紀錄，請你幫她想一想，這些紀錄分別屬於哪個作品？並說說看你是怎麼知道的？

相同的情形也出現在紙盒製作時，測量實物並量身訂製紙盒需考量的因素非常多，有的孩子採取嘗試錯誤方式一步步修正，直到作品完成；也有的孩子不斷精進，不但能精準繪製展開圖與示意圖，甚至在創意作為上卯足全力。

六、下段旅程會更好

改變教學策略對一個老師來說是很大的挑戰，在嘗試將緊握的雙手鬆開之際，我們有許多的質疑與掙扎，但是，陪著孩子一起前進，從不斷的嘗試中尋找新的出路，儘管彼此間意見不盡相同，也能想方設法說服彼此。當知識與技能習得時，孩子眼角的欣喜與止不住的笑，是給予教學者最珍貴的饋贈。這段過程當然曲折，為了讓教學順暢，我們擷取多方建議，屢次修正教具的使用與教學脈絡的安排，精心設計的活動仍在教學中遇到許多挑戰，於是我們一修再修。在模組一一完成之際，我們仍然相信：這只是教學的其中一種方式，一定還有更多值得嘗試的方向與方法。

完成教學後，我們不斷被問：以後的課本就長這樣嗎？以後的教學一定要實作嗎？時間怎麼夠？在這個過程中，我們努力給孩子更充裕的學習內容與時間，試圖轉化素養內涵於教學中，但對素養的定義、素養教案的樣貌我們仍在探索與修正，這裡頭一定還有許多有待精進之處，我們想呈現的不是典範，只是盡力為孩子未來的學習畫一個藍圖。最希望的，就是發揮拋磚引玉之效，讓更多教育先進加入，這樣一來，孩子未來的學習就更令人期待了。

第二章　國民小學篇

教學單元

（一）比與比值

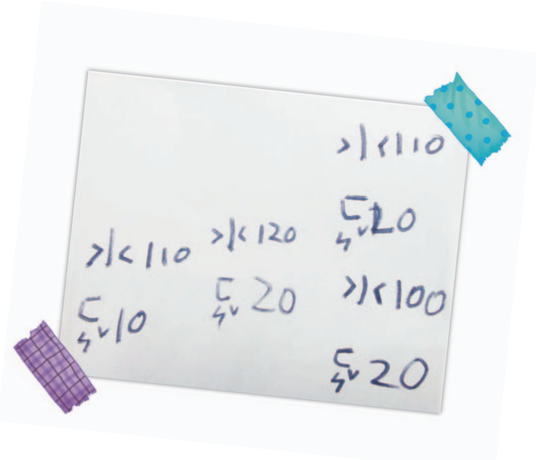
果凍製作

快樂國小將舉行校慶園遊會，向悅決定製作果凍義賣。為了製作口感絕佳的果凍，她買了一大包果凍粉回家做實驗。向悅嘗試了好幾次，分別調合水與果凍粉成果凍液，而後將果凍液倒入布丁杯中，放進冰箱冷藏 2 小時，最後扣出盛於盤中如下圖：

① 說說看，這4個果凍成品各有什麼不同？

② 想一想，什麼原因造成各成品的不同？

③ 製作果凍時，向悅隨手記下水與果凍粉的分量，但她忘了各是哪一次的紀錄，請你幫她想一想，這些紀錄分別屬於哪個成品？並說說看，你是怎麼知道的？



	果凍成品	水（公克）	果凍粉（公克）
1	(　　　　)	100	20
2	(　　　　)	110	10
3	(　　　　)	110	20
4	(　　　　)	120	20

經過試吃，大家一致認為成品B的口感最佳，向悅決定以這個果凍作為義賣商品的範本。

④ 如果要製作出和成品B一樣口感的果凍要怎麼做？

⑤ 若要製作相同口感的果凍2個、3個、……，分別需要多少水？多少果凍粉？

果凍個數	1	2	3	4	5	10	20	30
水（公克）								
果凍粉（公克）								
你如何表示水和果凍粉的關係？請用一個算式記下來：								

⑥ 和同學分享記法，說說看你們的記法有何異同？都對嗎？為什麼？

⑦ 完成以上討論後，請試做附件一。

像這樣，水和果凍粉有固定的對應關係，我們可以用「水：果凍粉＝100：20」來表示，其中「:」是比的符號，「100：20」讀作「一百比二十」。在「100：20」中，我們稱100是這個比的前項，20是這個比的後項。

⑧ 小美用「果凍粉：水＝20：100」來表示，一樣可以製作出和成品B相同口感的果凍嗎？為什麼？

在數學中，我們常用「比」來表示兩個數量間有固定的對應關係。以成品B來說，水和果凍粉的比是100：20，果凍粉和水的比是20：100。那麼成品A呢？成品C呢？

⑨ 小華家的果凍粉不足20公克，他是否有辦法做出相同口感的果凍？請說說你想到的策略。

要製作相同口感的果凍，水與果凍粉必須有固定的比例。以成品B來說，水：果凍粉＝100：20，將這個比的「前項」除以「後項」，所得到的結果5，就是「100：20」的比值。比值「5」所代表的意義是「水的分量必須是果凍粉的5倍」，或者說，「每一公克的果凍粉需配上5公克的水」。進行下列活動前，請先想一想，什麼時候我們會需要使用比值呢？

⑩ 以下是向悅進行果凍製作實驗紀錄表，請你根據數據寫出各成品中，水與果凍粉的比與比值。

	成品 A	成品 B	成品 C	成品 D
水（公克）	110	100	110	120
果凍粉（公克）	10	20	20	20
水與果凍粉的比				
水與果凍粉的比值				

⑪ 觀察各成品水與果凍粉的比值，說說看，比值和果凍的口感有什麼關係？說說你的發現。

⑫ 想一想：老師用616公克的水、112公克的果凍粉，做出來的果凍口感會和哪個成品一樣？為什麼？

「616：112」的比值是5.5，「110：20」的比值也是5.5，「616：112」與「110：20」的比值相等，我們稱它們為「相等的比」，記作616：112＝110：20，由於這兩個比的比值相等，因此利用這兩個比做出來的果凍口感會一樣。

⑬ 下列是6位小朋友製作果凍時，水與果凍粉的關係，找找看，哪些小朋友製作的果凍口感一樣？說說看，你怎麼知道的？

水：果凍粉＝120：20

水：果凍粉＝6：1

水：果凍粉＝90：15

水：果凍粉＝240：140

果凍粉：水＝90：540

果凍粉：水＝72：504

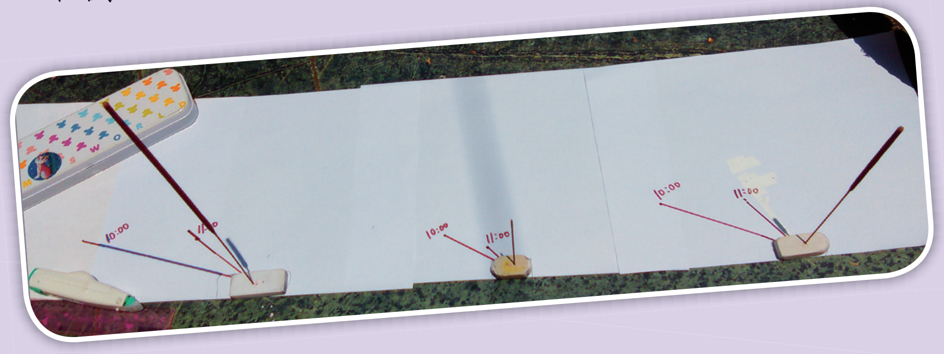
⑭ 說說看，算出比值或相等的比有什麼好處？

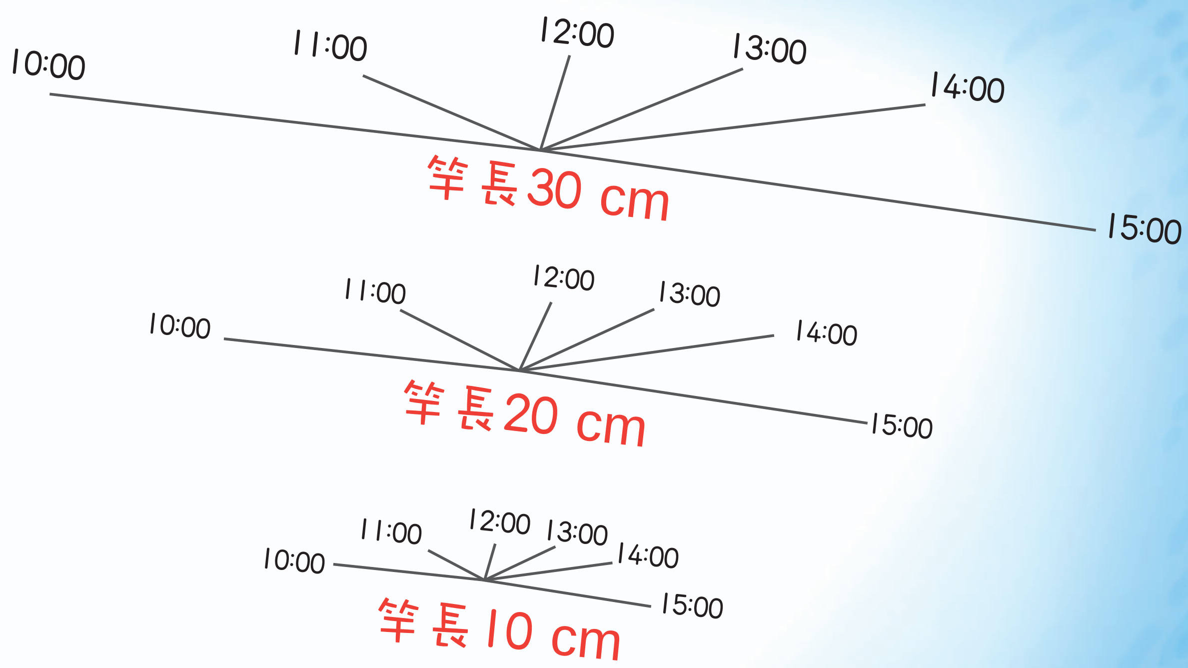
⑮ 想一想，生活中還有哪些情形也可以應用比與比值來進行比較和計算呢？

⑯ 恭喜你完成比與比值的學習，請完成附件二的挑戰。

立竿見影

五年喜樂班學生上自然課時，分組進行竿影測量活動。老師請各組小朋友在操場上立好各種長度的竿子，每隔一個小時記錄影子的位置與長度。第一組小朋友利用 10 公分、20 公分、30 公分的竿子進行測量，結果如下圖：





① 仔細觀察測量結果，說說看，你有哪些發現？

測量活動結束後，老師蒐集早上 10 點，各組測量的數據，並整理於下表：

竿長（公分）	20	30	50	100
影長（公分）	14	21	35	70

② 根據測量數據想一想，早上 10 點時，竿長和影長的關係可以用比表示嗎？為什麼？

③ 進行竿影測量那一天早上 10 點，第二組小朋友在操場上立了一根 2 公尺長的竿子，說說看它的竿影有多長？為什麼？請提出你的想法。

④ 同一天早上 10 點，第二組小朋友幫文文測量她的影長是 0.98 公尺，你知道文文的身高是多少嗎？說說你的想法。

⑤ 下表是當天早上 11 點各組測量的數據。想一想，早上 11 點時，竿長和影長的關係也可以用比表示嗎？為什麼？

竿長（公分）	20	30	50	100
影長（公分）	6	9	15	30

⑥ 操場邊有一棵大王椰子樹，在測量當天早上 11 點時，樹影長度為 4 公尺，那它實際的高度是多少？請做做看。

⑦ 檢視早上 10 點與 11 點的紀錄，竿長和影長的比值一樣嗎？說說看，你有什麼發現？

	竿長 20 公分	竿長 30 公分	竿長 50 公分	竿長 100 公分
早上 10 點影長（公分）	14	21	35	70
早上 11 點影長（公分）	6	9	15	30

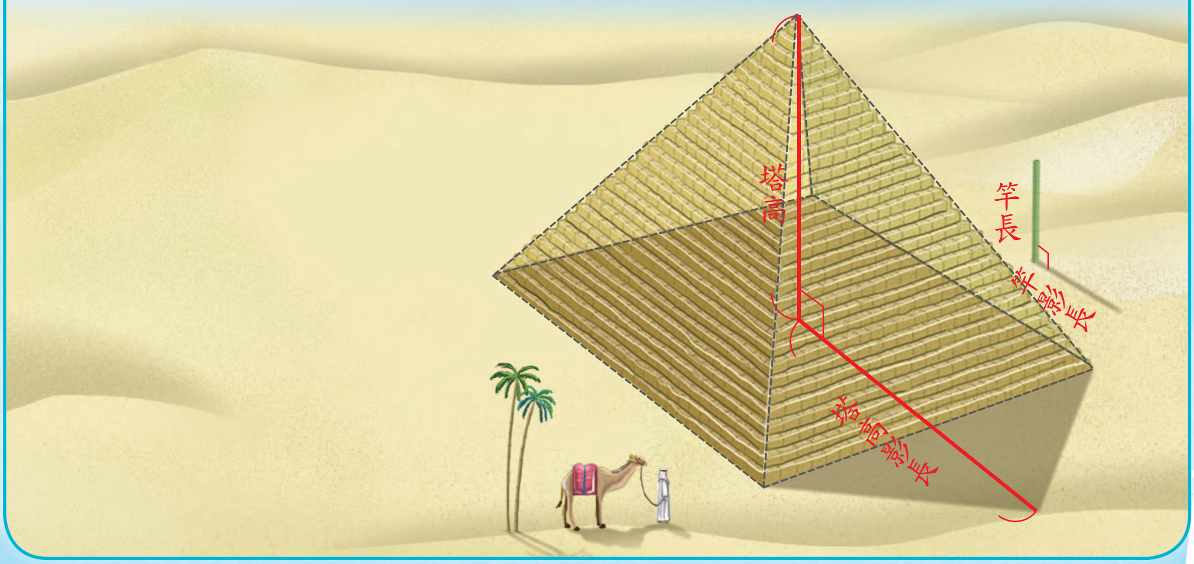
⑧ 承上題，當天中午 12 點竿長和影長的比值可能會是多少？為什麼？

測量金字塔的高度

在兩千六百多年前，法老王阿美西斯很想知道怎麼樣才能測得金字塔確實的高度。於是國王命令祭司們去丈量，聰明的祭司們想盡辦法都不能量出塔高。因此，金字塔的高度變成了一個謎。法老王為了解決這個問題，提出鉅額懸賞，徵求天下聰明之士來揭開這個謎題。

就在這個時候，希臘數學家泰利斯（Thales，西元前六、七世紀）在埃及看到了法老王的告示，燃起了挑戰的決心，滿懷希望地揭下告示。但事與願違，泰利斯試了幾次都沒有成功；然而，失敗並沒有使他灰心，泰利斯離開了王宮，沿途思考，他就這麼走下去，當他注意到自己的影子一直跟著自己時，泰利斯無助地想著：「萬能的太陽啊！您能不能給我一些啟示呢？」

泰利斯就這樣走著走著，突然靈機一動、欣喜欲狂，他看著自己的影子，喃喃自語：「在一天中，一定有一個時間，人的身高和影子的長度會相等，這時候，金字塔的高度也必然會和它的影子的長度相等。」泰利斯急急忙忙地回到王宮，將自己的想法告訴法老王及祭司們，法老王知道了這個方法，如獲至寶，高興得不得了，泰利斯終於幫他解決了這個難題。



看完故事後讓我們想一想：

⑨ 泰利斯發現，一天中某個時間會出現物品高度和影子長度相等的情形。請問當竿長與影長相等時，竿長與影長的比值是多少？

⑩ 若以五年喜樂班上自然課測量竿影那一天的資料來看，你認為大約什麼時候竿長和影長會相等？說說看你的想法。

	8點	9點	10點	11點	12點	13點	14點	15點	16點
竿長 10公分	16 公分	12 公分	7 公分	3 公分	1.5 公分	3.5 公分	6 公分	8.4 公分	13 公分

⑪ 我們知道泰利斯等到影長和竿長相等時，才測量金字塔的高度。一定要等到影長與竿長相等時，才能測量金字塔的高度嗎？關於這個問題，你有什麼想法？

附件一：

實力大挑戰 1

號　姓名：

小朋友，底下有兩個問題，你能獨力解決嗎？試試吧！

① 向悅用100公克的水與20公克的果凍粉製作出風味絕佳的果凍，若要製作相同口感的果凍，分別需要多少水？多少果凍粉？請試著算算看。

水（公克）	100	200	600				4500	
果凍粉（公克）	20			160	240	300		1000

計　算　區

② 偉杰用2匙蜂蜜配上500毫升的水調製蜂蜜水；佩璇用3匙蜂蜜配上600毫升的水調製蜂蜜水；京婷用4匙蜂蜜、700毫升的水調製蜂蜜水。請問，誰調製的蜂蜜水最甜？

實力大挑戰 2

號　姓名：

① 云云冷飲店用 2 匙的檸檬原汁加上 5 杯的水，調出一壺好喝的檸檬汁。請問，要怎麼樣才能製作出相同酸度的檸檬汁呢？

② 承上題，若要製作相同酸度的檸檬汁 2 壺、3 壺、5 壺、10 壺，分別需要多少水？多少檸檬原汁？

	2 壺	3 壺	5 壺	10 壺
檸檬原汁（匙）				
水（杯）				

③ 圖書館舉辦換書活動，每本書都用相同數量的點券兌換，凱翔用 80 張點券換了 12 本書，想想看，如果用 20 張點券可以換幾本書？

④ 1 塊重 395 公克的鐵塊，它的體積是 50 立方公分，請用比來表示這種鐵塊的重量和體積的關係。

⑤ 承上題，若相同的鐵塊重 711 公克，它的體積有多大呢？

⑥ 佑翔用 3 匙檸檬原汁配上 600 毫升的水調製成檸檬汁；凱翔用 4 匙檸檬原汁配上 700 毫升的水調製成檸檬汁；子珊用 5 匙檸檬原汁配上 800 毫升的水調製成檸檬汁。請問，誰調製的檸檬汁比較酸？為什麼？

實力大挑戰 3

號　姓名：

Bakery烘焙坊最暢銷的產品是「胚芽吐司」與「雜糧吐司」，兩種吐司的配方、作法及製作注意事項如下：

胚芽吐司配方

麵粉	1200g
酵母	6g
糖	24g
鹽	2g
鮮奶	712g
胚芽粉	200g

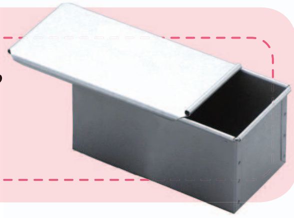
烘焙時間：40分鐘
烤爐溫度：200度
此配方為2條胚芽吐司的量

雜糧吐司配方

麵粉	1500g
酵母	6g
糖	48g
鹽	6g
鮮奶	900g
雜糧粉	600g

烘焙時間：40分鐘
烤爐溫度：200度
此配方為3條雜糧吐司的量

注意事項：為使吐司形狀完整，每個烤模均需放滿，製作完整的一條。（無法製作半條、0.2條……等）



① 若要製作胚芽吐司7條，需要的材料有哪些？分別要多少？

② 若要製作雜糧吐司7條，需要的材料有哪些？分別要多少？

③ 王奶奶想購買糖份比例較低的吐司，你會建議她選購哪一款？為什麼？

④ 王師傅清點庫存，發現剩下的材料如下，若兩種口味的吐司都要做，請問最多可以各做幾條？

庫存材料：

麵粉 3000g	酵母 15g
雜糧粉 600g	胚芽粉 300g
糖 70g	鮮奶 2kg
鹽 1kg	

筆記欄

memo

第二章　國民小學篇

教學單元

（二）正方體與長方體

衛志登公司最近開發了新產品，為了替新產品找尋適當的包裝盒，該公司舉辦了「創意包裝盒設計大賽」。包裝盒的設計需為長方體或正方體，同時具創意及實用性。

衛志登公司開發的新產品為兩款香氛蠟燭及星光許願瓶(如下圖)，為了讓大家知道你所製作的紙盒大小及樣式，需繳交作品「展開圖」及「示意圖」各一張，並在示意圖上標示相關數據。

動手創作前讓我們先想一想……

1

櫥窗內的包裝盒琳瑯滿目，
仔細觀察你會發現，這些包裝盒以「長方體」居多，
想一想，可能的原因是什麼呢？

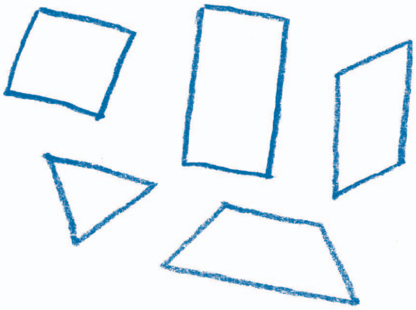
2

坤豪想參加這個設計比賽，
若要完成這項挑戰，
他需要「知道什麼」、「會做什麼」？

以下活動將帶領各位逐步完成包裝盒相關設計。準備好大顯身手了嗎？讓我們一起為新產品製作實用且有創意的包裝盒吧！

活動一 紙盒製作

1 想一想，製作一個正方體
需要什麼形狀的圖卡？
需要幾張呢？



2 將附件四-1、四-2及四-3圖卡剪下來，
試試看，這些圖卡可以組出哪些不同的正方體？

3 凱凱說：「正方體由6個正方形組合而成。」
你同意他的說法嗎？怎麼說會更完整？

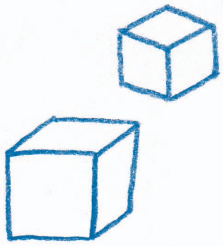
4 想一想，製作一個長方體需要什麼形狀的圖卡？需要幾張呢？

5 利用附件四-1、四-2及四-3圖卡試試看，這些圖卡可以組出哪些不同的長方體？

6 翔翔說：「長方體由6個長方形組合而成。」你同意他的說法嗎？怎麼說會更完整？

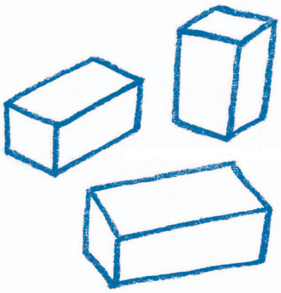
7

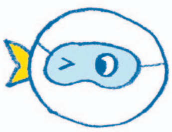
觀察製作完成的正方體，
這些正方體有什麼共同的特徵？
請找出至少三個並寫下來。



8

觀察製作完成的長方體，
這些長方體有什麼共同的特徵？
請找出至少三個並寫下來。





為了方便溝通，
我們稱相對的面為「對面」、相鄰的面為「鄰面」；
我們稱相對的邊為「對邊」、相鄰的邊為「鄰邊」。

9

比較正方體與長方體，
它們有哪些共同特徵？
有哪些不一樣的特徵？請寫下來

	就「邊」來說	就「頂點」來說	就「面」來說	其他
共同特徵				
不同特徵				

根據以上的觀察與記錄，我們可以發現：

☆ **正方體與長方體都有6個面，8個頂點，12條邊。**
在長方體與正方體中，對邊會互相平行，鄰邊會互相垂直；
對面會互相平行，鄰面會互相垂直。

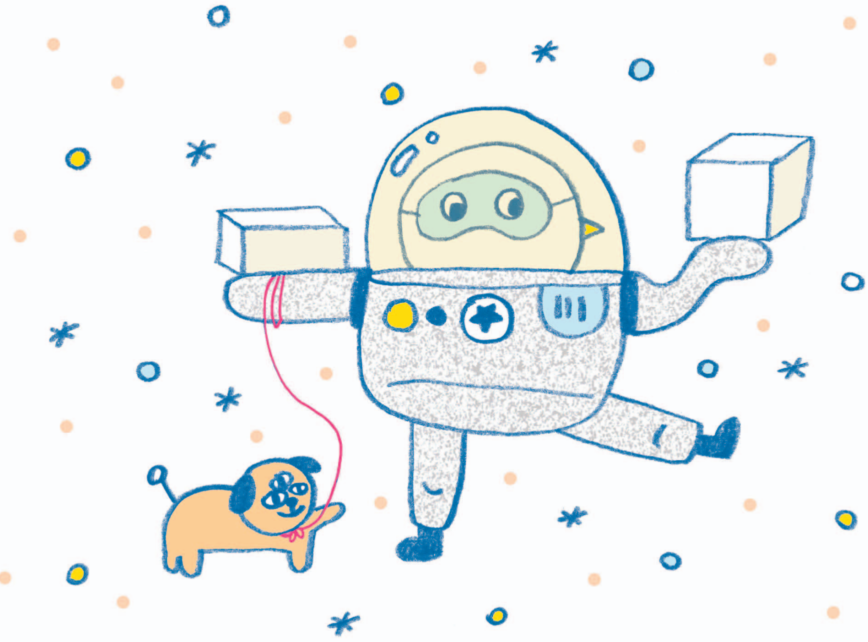
☆ **正方體由六個全等的面組成，每個面都是正方形；**
長方體由三組（或二組）全等的面組成，
每個面都是長方形或正方形。

☆ **正方體的12條邊都等長；**
長方體則有三組或二組一樣長的邊。

10 想一想，形體D可以稱為正方體或長方體嗎？
為什麼？請寫出理由，至少三個。

形體D

NOTE



活動二 長方體與正方體的展開圖

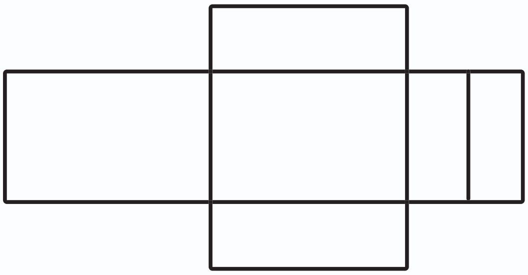
恭喜各位小朋友，已學會製作長方體與正方體的包裝盒。但，包裝產品時，一片一片黏貼的方式既費時又不方便，針對這個問題，你有更好的策略嗎？請說說看。

將一個形體的所有面攤開，且攤平後仍然連成一整片，這就是該形體的展開圖。

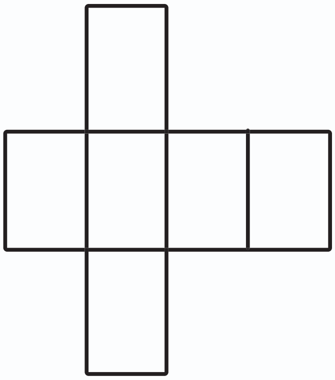
1 想一想，只要將六張圖卡拼接成一整片，
就能做出長方體的展開圖嗎？
還需要注意些什麼呢？

2

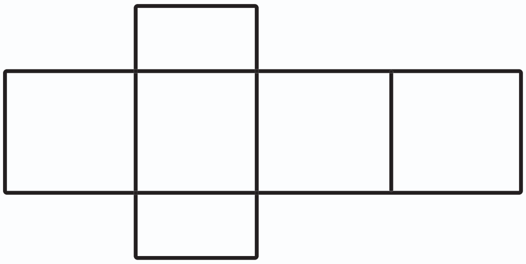
以下幾個是凱凱用圖卡組合的圖，
這些圖是長方體的展開圖嗎？
說說看，你是怎麼知道的？



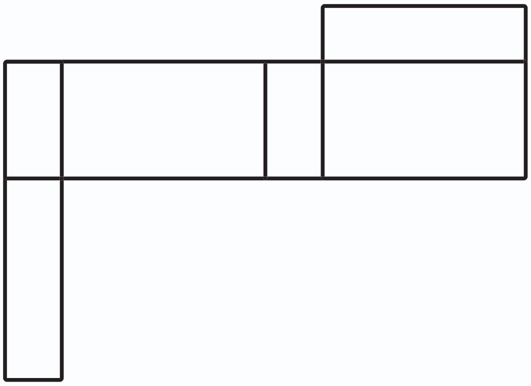
a



b



c

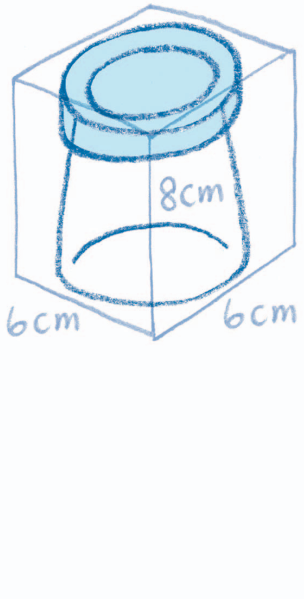


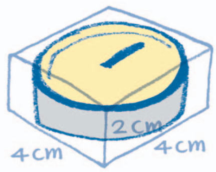
d

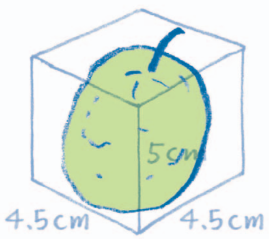
3 請挑選適當的圖卡拼排長方體的展開圖。

4 與同學分享你的成果，
並檢驗你的作品是不是長方體的展開圖。

5 衛志登公司開發的新產品如下，
請為產品量身設計包裝盒，
並繪出包裝盒的展開圖。







6 完成展開圖的設計後請與同學分享作品，並說說看，如果你是衛志登公司的老闆，你會選擇哪一個設計？為什麼？

7 想一想，如何修正會更實用？

8 還可以做什麼樣的改變展現創意？

9 請完成作品設計圖一(附件一)：包裝盒展開圖的設計。

活動三

長方體與正方體的示意圖

小朋友，我們已完成展開圖的設計，
接下來，我們將學習如何繪製包裝盒成品的示意圖。

1 以下幾張都是同一個長方體的照片，
說說看，這些照片有什麼異同？

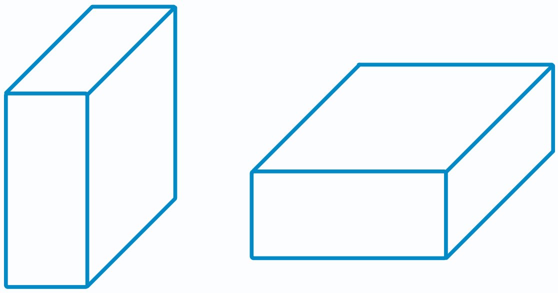
2

想一想，怎麼拍別人才知道這是一個長方體？

3

請試著畫下你製作的長方體紙盒。
想一想，怎麼畫別人才能清楚知道這是個長方體？

為了讓大家清楚知道我們畫的是長方體，在繪製時，我們會儘量畫出可看見的三個面，並強調邊的等長與平行，像這樣的圖，我們稱為長方體的示意圖。



4 想一想，如何讓別人知道這個長方體紙盒的大小？

5 請在下方空格中練習繪製一個邊長5公分的正方體示意圖，並標示相關數據。

6 請完成作品設計圖二(附件二)：包裝盒的示意圖及作品規格標示。

7 檢視作品設計圖一「包裝盒的展開圖」，想一想，如何在展開圖上標示作品規格呢？

附件一 作品設計圖1

作品展開圖

作品名稱 ______________________

參賽人員 ______________________

主辦單位：衛志登公司行銷部

附件二 作品設計圖 2

作品示意圖與規格標示

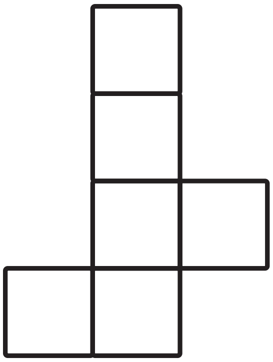
作品名稱 ______________________

參賽人員 ______________________

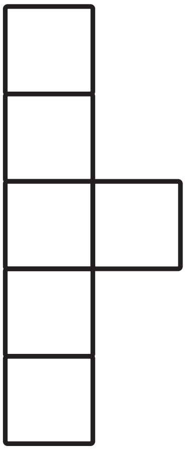
主辦單位：衛志登公司行銷部

附件三　實力大挑戰

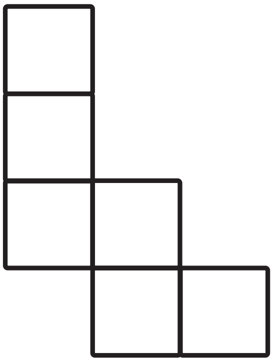
1 想一想，下列哪些圖是正方體的展開圖？請圈起來。並說說看，你是怎麼知道的？



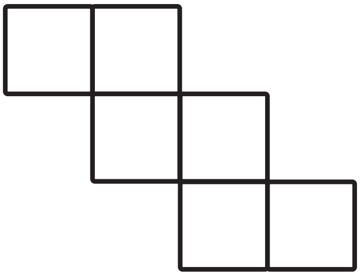
a



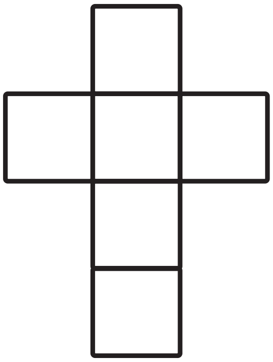
b



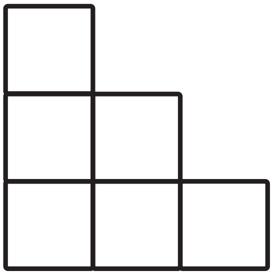
c



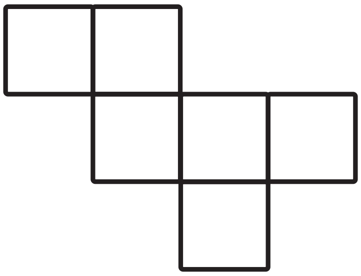
d



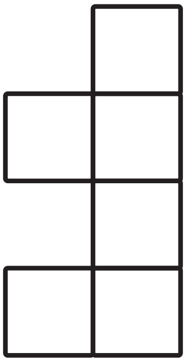
e



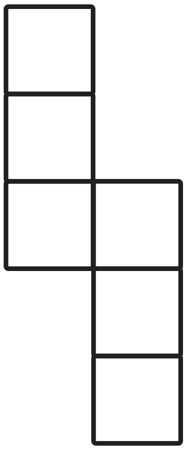
f



g



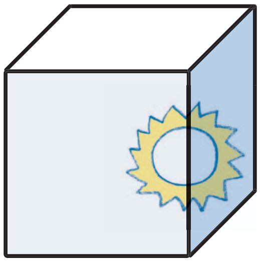
h



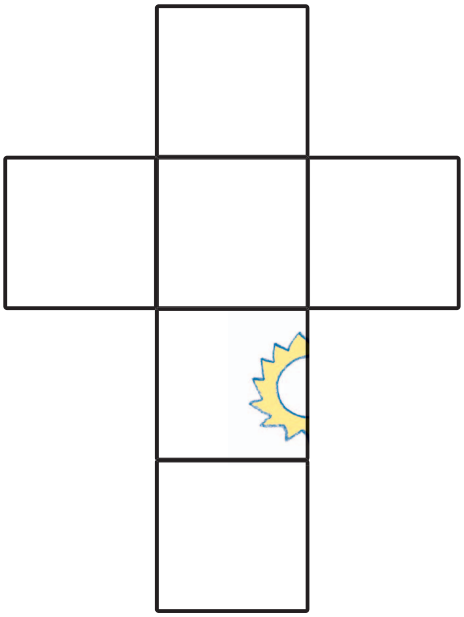
i

2

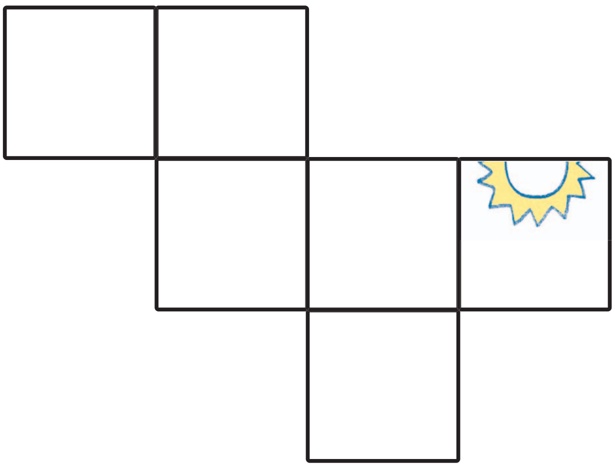
凱凱做了一個正方體紙盒，並在正方體兩面的邊上畫了一個圖案(如右圖A)，若將此正方體剪成展開圖一及展開圖二，請問，太陽圖案分別會在哪些面上？請你畫畫看。



A

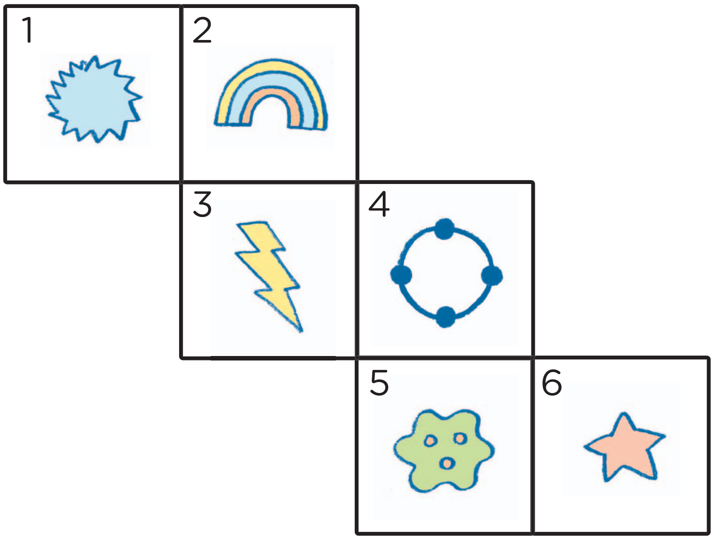


展開圖一

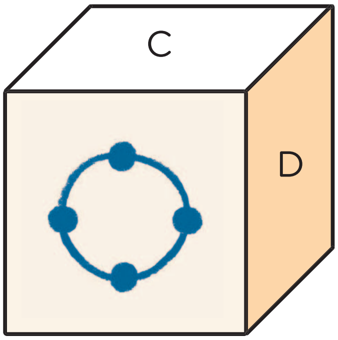


展開圖二

3 翔翔在正方體展開圖的面上畫圖案(如下圖A)，若將此展開圖組成盒子(如下圖B)，請問組合好後，C面與D面的圖案分別是什麼？



A



B

C面(　　　)、D面(　　　)

附件四-1　操作圖卡

ㄅ	
ㄆ	
ㄇ	ㄈ
ㄉ	ㄊ

附件四-2 操作圖卡

ㄋ ㄌ

ㄍ

ㄎ

附件四-3 操作圖卡

ㄏ	ㄐ
ㄑ	
ㄒ	

第三章　國民中學篇（I）

經驗分享

指數律、直角三角比

第三章　國民中學篇 (I)

數學素養教材設計發展之經驗分享
指數律、直角三角比

壹、開端

國家教育研究院（2013）提出十二年國民基本教育課程，本於「自發」、「互動」及「共好」之理念，以「核心素養」做為課程發展之主軸。「核心素養」是融合認知、技能和情意，經內化後的綜合表現，它能幫助學生積極回應個人的及社會的生活需求，迎接現在與未來的挑戰。「核心素養」較「基本能力」與「學科知識」涵蓋更寬廣的教育內涵，強調學習不宜以學科知識為限，而應關注學習與生活的結合，透過實踐力行而彰顯學習者的全人發展。

十二年國民基本教育課綱以素養為導向，教育部提升國民素養專案辦公室提出國民素養之內容，其中數學素養的定義與內涵為：個人的數學能力與態度，使其在學習、生活、與職業生涯的情境脈絡中面臨問題時，能辨識問題與數學的關聯，從而根據數學知識、運用數學技能、並藉由適當工具與資訊，去描述、模擬、解釋與預測各種現象，發揮數學思維方式的特長，做出理性反思與判斷，並在解決問題的歷程中，能有效地與他人溝通觀點。

因此數學素養前導研究提出四項提升數學素養的目標：

一、學習並發揮數學思維的特長：抽象、邏輯與深刻的創新。

二、充實並活用基本的數學知識：關係與變化、空間與形狀、數量、數據處理與不確定性。

三、建立健康對待數學的態度：數學是人格發展的基礎一環。

四、擅於利用計算工具與數位科技：協助數值計算、整理和分析資料，並做數學概念的視覺化。

因此我們參與研修數學素養導向教學模組，試圖將核心素養的理念結合及轉化於數學課程之中。

貳、教材發展經驗分享

因為有了前述的目標，因此有了研修小組的組成。當時數學領域國中組的參與教師為鄧家駿、曾明德兩位教師，指導教授為單維彰教授、鄭章華研究員，另外還有朱安強博士諮詢協助。期間透過模組編寫、討論修改、專家審查、試教、同儕教師間的觀課、議課、再做模組的修改以迄完成，期望之後能提供十二年國民基本教育數學領域教科書研發或教師自編教材參考。

在此段落，我們會分成兩個教學模組的經驗分享，並依實施的順序前後呈現，分別為指數律、直角三角比。

一、指數律（國王的棋盤）

（一）設計理念

在初始的發展中，如何決定我們心中的素養教材呢？一開始，我們試著從前面四項提升數學素養的目標來思考，

1. 學習並發揮數學思維的特長

國中七年級的指數律單元，是將相同底數的連乘簡記成次方，並進而發展出指數的運算，符合數學抽象化的思維並發展一種新的運算規律。

2. 充實並活用基本的數學知識

指數律屬於數量的單元，在學生熟悉國小數量的加、減、乘、除運算後，在國中發展對指數的運算、並進而連結高中職的指數函數與對數函數。

3. 建立健康對待數學的態度

指數的學習除了是數學學科中發展新的運算關係，裡面亦可以延伸出一些對事情的看法與討論，例如筆者在學生國中畢業紀念冊上的留言「$0.9^2=0.81$，$0.9^3=0.729$，…，$0.9^\infty=0$、每次多鬆懈一分，未來只有失敗、$1^2=1$，$1^3=1$，…，$1^\infty=1$，永遠一成不變，腳步停滯不前、$1.1^2=1.21$，$1.1^3=1.331$，…，$1.1^\infty=\infty$，每次多努力一點，前方無限可能。」

在這個例子中，我們發現指數裡蘊藏有趣的隱喻，其中些微的差異，造

成結果極大的不同，成為做事努力與鬆懈的對比。

4. 擅於利用計算工具與數位科技

這也是筆者兒時經驗的回饋，小時候在按家中計算機的時候，發現 $0.9^2=0.81$，$0.9^3=0.729$， …，$1^2=1$，$1^3=1$， …，$1.1^2=1.21$，$1.1^3=1.331$， …，那對小時候的我是非常驚奇的，透過紙筆去檢視自己的計算，再透過計算機檢查各種數字經過連乘後的結果，裡面充滿著豐富的趣味，而且最後的結果往往是以 1、0、或是一個大到計算機出現 error 字樣的情況。因此在設計初始，就在思考能否將計算機的使用放在學生發展指數運算概念，乃至運算科學記號時的協助工具。

（二）蒐集整理相關素材

有了前面的這些想法，因此就將相關指數律主題的內容開始蒐集與整理，例如：

1. 跟指數律相關的故事

「國王的棋盤」是有關米粒放置在西洋棋盤上的故事（圖 1），智者跟國王提出的要求是，第一格放 1 粒米、在下一格放前一天兩倍的米粒，這裡面有著米粒的增加、指數記錄簡單、實際數字龐大的關連性，因此選擇此篇故事做為我們的開始。

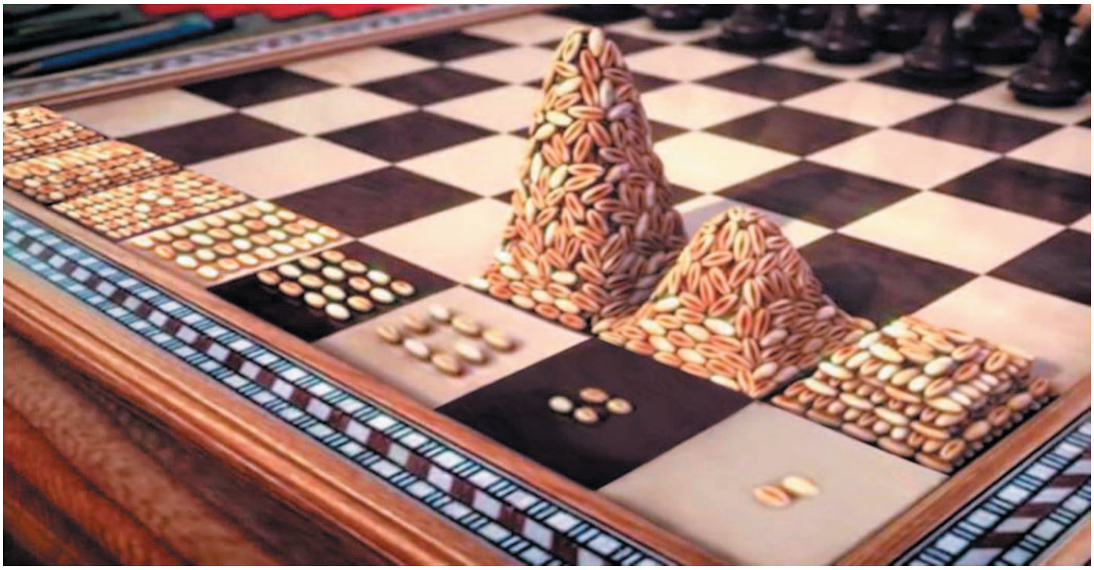


圖 1　指數律素養教材封面（國王的棋盤）

2. 臆測工作單

先前筆者在林福來老師的指導下，設計過相關問題如下：

小量試著做以下計算，發現 $2^2=4$、$2^3=8$、$2^4=16$、$2^5=32$、小量說：「當底數 a 固定時，如果指數 n 愈大，則 a^n 的值愈大。」你認為小量的說法是正確的嗎？是否有錯誤的例子？

同學透過自己嘗試不同的數字，藉由紙筆計算或是計算機發現不同的結果，並對小量的說法作修正。

3. 網路相關影片

網路上可以找到有關大尺度與小尺度的影片，從宇宙到細微的病毒，讓學生從尺度的變化來感受科學記號的大小差異，並且可以作為延伸的教材，請學生分組去討論與紀錄。

4. 國外教材

我們也參考了國外的教材，來了解國外在進行指數律的教學的發展，以「Power of Ten」MIC 為例，先以一位同學他的身高、住家、所屬的城市、洲、國、地球、太陽系等來講到不同的尺寸，讓學生透過觀察器的設計以及從熱氣球上觀測（此邊與前面所提的影片有類似的目的與作法），並透過 10 的連乘結果，來探討指數與數大小的關係，以及發展 10 的運算機器等活動，最後連結回太陽系中各種星球的尺寸（太陽系公園），其中呈現情境中的數學，讓相關的學習內容都在一致的脈絡下。

（三）正式編寫

1. 學習表現：

n-IV-3 理解非負整數次方的指數和指數律，應用於質因數分解與科學記號，並能運用到日常生活的情境解決問題。

2. 學習內容：

N-7-6 指數的意義：指數為非負整數的次方；$a \neq 0$ 時 $a^0=1$；同底數的大小比較；指數的運算。

N-7-7 指數律：以數字例表示「同底數的乘法指數律」($a^m \times a^n = a^{m+n}$

$(a^m)^n = a^{mn}$、$(a \times b)^n = a^n \times b^n$，其中$m, n$為非負整數）；以數字例表示「同底數的除法指數律」（$a^m \div a^n = a^{m-n}$，其中$m \geq n$且m, n為非負整數）。

N-7-8 科學記號：以科學記號表達正數，此數可以是很大的數（次方為正整數），也可以是很小的數（次方為負整數）。遇到複雜的數字時可使用計算機輔助計算。

3.「國王的棋盤」改寫，貫穿整個單元的內容

在會議中的討論，我們決定要在脈絡下討論，別讓引起動機的故事到最後都沒有出現，會有虎頭蛇尾的感覺。

智者沉默了很久，「好的，陛下」智者終於說了：「我僅有一個要求，就是明天時，請國王您在棋盤的第 1 個方格上，賜給我 2 粒米；隔天，在第 2 個方格上，賜給我 4 粒米；第 3 天，在第 3 個方格上，賜給我 8 粒米；第 4 天，在第 4 個方格上，賜給我 16 粒米；……。就這樣每 1 個方格上，都賜給我前一天 2 倍的米粒，直到棋盤所有格子上都放了米為止。」

這樣的修改從第一格 2 粒米，避開以後用指數記錄時，1 粒米需用 2^0 記錄的困擾，也讓大臣們討論如何方便負責的士兵知道每天要拿多少粒米，如何記錄。因此產生了對不同記錄方式的討論與辯護，而讓指數符號的紀錄出現。

藉由「第 4 天，需要 2^4 粒米，隔天，需要多少粒米？」的問題，引起後面對指數乘法運算規律的發現。

原故事國王在乎的是全部有多少粒米？但我們不需要將米加起來，那是等比級數的問題，因此國王的疑問是「最後一天的米會有 1 公斤重嗎？」

完整的單元以國王的棋盤開始，最後以解決國王的問題為結束，並透過計算最後一天有幾粒米的估算以及有多重，從而引入科學記號的紀錄與計算。

4. 清朝《 數理精蘊 》的引入討論

以 10 為底數的指數運算為經驗，應為必要與可行，所以思考如何讓學生做計算與討論，並進而發展出指數運算規律。

在國王的棋盤脈絡下是以 2 為底數的指數運算、另提供清朝《 數理精蘊 》記載的文句，「萬萬為億、萬億為兆、萬兆為京、萬京為垓」來引起動機。並觀察由名詞、實際數字、乘法算式（以 10 連乘的運算）、以 10 為底數的乘方記錄表格，進而發展指數的運算。

的確這邊稍有偏離故事情境脈絡，但是引入了我們習慣的四位一撇、以萬進位的規則，因此建立在習以為常的脈絡下討論指數的乘法律與除法律，讓學生的發現與現實生活作連結。

另外也透過外部情境的延伸，美國數學家愛德華 ‧ 卡斯納（Edward Kasner）在 1940 年創造 Googol 這個名詞，代表 10^{100}。來引發如何製造出一個大數與比較，如我們設計的問題「小華聲稱他創造一個很大的數叫做 100^{10}，請比較 10^{100} 與 100^{10} 的大小？」這邊可以將所學的指數運算規律再做一個應用，了解數學知識的應用。

5. 計算機的使用與引入科學記號

搭配以下問題的引導，引入計算機。「第 40 天，國王要放多少粒米在棋盤上嗎？你可以試著用手邊的計算機，算算看，並嘗試回答下面的問題。」

「怎麼使用計算機計算指數律的結果呢？」計算機在現今社會是垂手可得的用具，如果學生都有手機，傳統手機有簡單的計算機功能，而風行的智慧型手機還有同時具備基本與進階功能的計算機 APP，因此我們透過大家使用計算機來計算以 10 為底數的連乘運算，進而計算以 2 為底數的連乘運算。

科學記號的出現與指數是息息相關的，透過計算機的計算，除了讓我們在指數運算的實際值可以輕鬆些，也是科學記號出現的好時機。當計算機螢幕上出現「1.099512e12」，正是我們可以討論他代表意思的好時機。

6. 發展估算策略

「第 20 天國王要提供多少米粒數？能利用計算機以外的方法來估算第 20 天的米量嗎？約 1 萬粒？約 10 萬粒？約 100 萬粒？還是約 1000 萬粒呢？」

我們希望透過提示：$2^{10}=1024$ 來引起學生估算的需求，但是學生仍想著是要算出實際的值，所以我們在這題修改了許多的問法，最後的目的即在利

用 $2^{10}=1024>1000=10^3$，不需要用 1024 來做計算，而用 10^3 來估算以 2 為底數次方值的大小，雖然不精準（其實以大數來說，誤差非常小），但是計算速度快，而且也可以得到一個令人驚訝的大數了。

這種估算方法簡單好用，但是以往教材沒有介紹，而且他也需要用到對指數律的理解與應用，所以在此次設計中放入，希望帶給學生不同的視野來觀察這個現實的世界。

各位讀者如果想試試看，可以嘗試挑戰我們放在教師手冊的素養評量示例。例如：

根據聯合國公布的資料顯示，全世界人口總數在2012年已經超過 70 億。古老歐洲有吸血鬼的傳說，如果吸血鬼吸了一個人的血，那個被吸血的人，也會變成吸血鬼。我們來試著挑戰一下「世界上有沒有吸血鬼」的證明。

假設一個吸血鬼，一個月只吸一個人的血，從 2012 年的 1 月開始，只有 1 位吸血鬼；2012 年的 2 月，就會有 2 位吸血鬼；2012 年的 3 月，就會有 4 位吸血鬼。請將 70 億用科學記號表示？請估算一下，幾個月後，全世界的人都變成吸血鬼？

7. 本教材與以往教材相異處

設計不同處，在於我們希望整個課程是以國王的棋盤故事貫連，因此第一節與最後一節都是在討論米粒數的計算（以 2 為底數）；課程中的活動目標透過學生熟悉的內容，以 10 為底的正整數、生活的用語、計算過程與結果的對照，發現指數律的記錄與方便性，而非抽象地呈現代數符號的計算或記錄。以往部分教材會將指數律與科學記號分在不同的兩個單元，但是由於我們限制指數 n 為自然數，有利於呈現很大的數以科學記號表示的優點，且能讓學生藉由以 2、10 為底數間不同的轉換來做大小的估算與比較，所以我們將兩個單元作了簡單的整併。

根據設計理念及討論結果，我們將這個單元的教學目標，逐漸調整成包含能理解指數為非負整數的次方，並能運用到算式中；能理解同底數的相乘或相除的指數律；能用科學記號表示法表達很大的數。

（四）教學現場

針對指數律的試教，在新北市立五峰國中由鄧家駿老師（於 104 學年度介聘至台北市景興國中）公開授課，當時參與議課的有國家教育研究院的鄭章華研究員、新北市五峰國中的丁祥洲老師、羅玟文老師、陳世斌老師、黃勝俞老師等。

雖然有了課程的設計脈絡，適當的故事情境引入，及反覆琢磨的任務與問題句法，但是沒有經過現場的試教，而僅憑自以為是的教學經驗是不足的。在一週的教學過程中，透過教學現場的觀課、接續的議課，我們從教學現場得到不少對教材編排、問題設計、學生學習的回饋，在此將結果整理如下：

1. 情境脈絡下的數學問題

在考量到任務、問題的情境，以及後續需求的計算，我們的教材作了些微的調整：

我們沒有安排（a×b）^{m} ＝ a^{m}×b^{m} 的教學，雖然這在後續標準分解式或平方根的運算有其用處，但目前沒有迫切解決的必要性，列為以後延伸教材。

在討論指數為 0 或負整數的次方時，本擬設計為指數除法律教學完後的進階挑戰題，以試教來說，我們發現在沒有太多的提示下，讓學生自然發現與討論是不容易的，而在本脈絡下也非必要出現的概念，因此也放在延伸教材。

僅討論很大的數的科學記號表示法，畢竟在此不論是以 10 為底數的討論或是國王棋盤上的米粒數均是很大的數，在不離開脈絡下，我們並不需要介紹很小的數的科學記號表示法，而我們也沒處理指數為負整數次方的情形，因此可以另外安排。

所以我們在思考教材的安排時，我們在乎的是情境真實嗎？問題與任務有其意義嗎？這種計算在目前需要嗎？也因此有了跟現場目前使用教材差異的地方。

2. 問題、任務的解決

自別於過去課本的編寫體例，幾乎成為問題集的形式。在這次課程中將

問題改為任務，標準答案改成看法，與你如何說明和解釋？我們看看以下幾個任務的目標與問題的問法。

(1)「如果你是國王，你會喜歡哪一種記錄方式呢？請寫出算式或是理由來支持你。」

(2)「請將下列各題的文字描述與運算，以 10 為底數的乘方記錄下來，並將「兆」、「京」、「垓」以 10 為底數的乘方表示並說明。」

(3) 我們認識 1Googol ＝ 10^{100}，小華聲稱他創造一個很大的數叫做 100^{10}，請比較 10^{100} 與 100^{10} 的大小？並寫出算式或理由來說明。」

(4)「歸零後，先按 10，再按 ×，接著按＝ 25 次，你的計算機上顯示多少呢？能說說看這是怎麼算出來的？」

(5)「蘋果公司股價在 2014 年 7 月 28 日上漲 1.38% 至 99.02 美元，市值達到 5929.18 億美元，約新台幣 17.78 兆元。「富比世」雜誌今天公布臺灣 50 大富豪名單，旺旺集團主席蔡衍明今年以新台幣 2784 億元資產，連續第 3 年名列臺灣首富。請比較 17.78 兆與 2784 億誰比較大？」

(6)「有一個小兵跟國王報告：「50 粒米約 1 公克重。」最後一天的米量有多重？在 2012 年統計，全世界的稻作產量高達 7 億公噸。請問足夠最後一天的米量嗎？」

我們在教學中讓學生透過任務去討論幫忙解決問題，在處理問題時會遇上發現的現象或規律，再讓他們跟全班發表自己的發現或說明。由於並非單純的計算題，所以學生解題的方法也會較多元，可以彼此分享討論自己的答案。

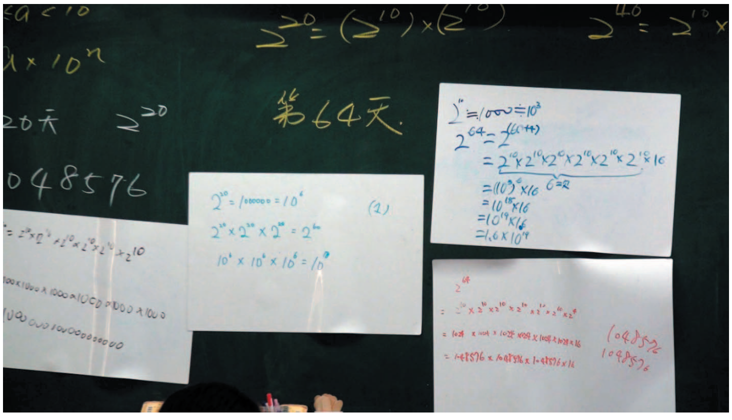


圖 2　學生估算 2^{64} 有多大

而一直在國王的棋盤這個脈絡下，學生從解決記錄方法到估算第 20 天需要多少米，2^{20} 大

概多大，最後一天的米有多重等？學生樂於幫忙計算或展現估算，並上台發表自己的想法（如圖 2）。

3. 計算機的重要性

我們並不是要說明計算機有多重要，而是在這個單元裡面他有了畫龍點睛的效果，指數乘法律有助於運算，但實際的值要算出來，若沒有計算機卻是困難的，因此在此計算機是有其需求性。

當全班在螢幕中的計算機與自己使用的計算機得到的答案有 $1.099511627776\times10^{12}$、1099511627776、1.099512e12，尤其是慢慢乘以 2 得到的答案，他們更會去想 e12 的意義。所以再引入科學記號的表示法有了重要的角色。

另外讓學生在感受基礎型計算機的使用不便處，而引入進階型計算算機的使用，學生對次方的按鍵也更有感受。而且使用的是手機中均附有的 app 程式，除了協助數值計算的功能，也將科學記號的表示法找到現實的呈現。

不過在這裡我們也發現使用計算機時的一些問題，使用不同品牌乃至不同型號的計算機，時常有使用方法的不同，機器的限制而造成呈現方式的不同，不過教師可以透過一些簡單的計算（以 10 為底數的運算），來協助學生了解自己的計算機，進而使討論聚焦。

二、直角三角形的三角比

（一）設計理念

由於該單元是本小組第二次發展的素養教材，順應著十二年國教領域綱要草案的產生，直角三角比預備放入國中九年級的學習內容，考量這個數學概念在九年一貫時就移出國中教學內容，對於目前在國中任教的數學教師們，應該是比較陌生的單元，所以我們就決定從該單元著手。

直角三角比回到國中階段是本次領綱的改變，原先在 83 年課程標準、74 年課程標準與 61 年課程標準均有放入銳角三角函數，自九年一貫實施後，三角函數這個單元已經沒有再出現於國中的課程綱要與教科書中，雖然高中數學課程仍對此單元做了鋪陳，然而整體成效已不如早期課程安排分屬於

國中、高中二階段的學習方式。因此十二年國民基本教育數學領域課程綱要 (104.12 草案) 參考以往的數學課程標準與其他國家的做法，以及考量三角函數的學習銜接與成效，將直角三角比放入國中階段九年級教授。

許多人會將直角三角比與三角函數混淆，學完相似三角形的性質後，由於直角三角形只有一個變量，兩個直角三角形只要知道其中一組銳角對應相等，這兩個直角三角形便相似，所以直角三角形任何兩個邊長的比與其相似的直角三角形的邊長比相等，進而可以將直角三角形的任意兩個邊長比分別定為六個三角函數。

本次課程綱要在國中階段的調整僅強調直角三角比，即直角三角形的其中三種邊長比 tan A、sin A、cos A，並利用這三種邊長比來解決生活中許多與相似相關的問題。至於高中階段才去討論三角函數，以及三角函數的關係，並在進行探究之後，才運用正弦定理和餘弦定理描述三角形邊和角的關係，並利用它來了解多邊形的邊和角的精確關係。

所以如何呈現直角三角形的三角比的教材，就成為我們第二次設計的挑戰。發展教材的初始，同樣我們一樣先從提升數學素養的目標來思考，

1. 學習並發揮數學思維的特長

探究完三角形的相似關係，進而發現只要其中一個銳角相同，兩直角三角形的邊長比均相等，而此銳角改變，對應的六種邊長比也會改變，可以進而發展到函數關係來描述三角形的邊角關係，這是由基礎幾何知識推理發展函數間的關係推導，甚至於測量、工程、科學的廣泛應用，是個從而發展數學思維的合適單元。

2. 充實並活用基本的數學知識

直角三角比屬於幾何的單元，從相似三角形的概念發展，進而在國三認識 tan A、sin A、cos A 三種邊長比，並利用各種情境解決問題，進而連結高中職的三角函數與其應用。

3. 建立健康對待數學的態度

直角三角比是學習三角函數的先備知識，其實對三角比的關係清楚與理

解，後續的學習會比較順利，有利於高中職的數學學習。而直角三角比的應用測量，在生活情境有許多可以解決的問題，例如坡度、斜度的測量、高度、距離的計算等，能讓學生有更多的活用數學的經驗。

4. 擅於利用計算工具與數位科技

進階型的計算機會有三角比的按鍵，可以讓學生在測量出∠ A 角度後，計算出 tan A、sin A、cos A 三種邊長比的值，並用來計算高度、距離。以往筆者在年少時的學習經驗，是查表後再計算，如此計算較繁複且容易出錯，但是在現實世界的計算式可以倚賴計算機，知道如何應用直角三角比，才是重要的教學目標。因此在設計初始就將計算機的三角比按鍵納入，也在相關延伸教材介紹目前 app 軟體用來測量角度或是長度等直角三角比的應用。

（二）蒐集整理相關素材

有了前面的這些想法，因此就將相關直角三角比主題的內容開始蒐集與整理，例如：

1. 參考 83 年課程標準所出版的數學教科書

當時三角函數是放到第六冊的選修數學，其標題為「銳角三角函數及其簡易運用」，其中分為基礎篇與應用篇，在基礎篇中，課本一開始營造問題情境，界定鄰邊、對邊與複習相似形的概念，並教授兩個特殊直角三角形 (30° -60° -90°與 45° -45° -90°) 的邊長比之後，再介紹正弦、餘弦與正切函數的概念，考量時間與篇幅關係略去不教餘切、正割與餘割函數的概念，並明確說明商數關係、平方關係與餘角關係；另外在應用篇中，課本同樣介紹作圖法、查表法與運用電算器求三角函數值，之後進行三角函數的簡單運用。

2. 高中教材

我們也參考高中課本有關三角函數的處理，但是大部分課本介紹銳角三角比的定義，接著就討論推理銳角三角比的關係，然後介紹廣義角的三角比。因此也可以發現高中由於太快導入函數的概念，反而少了銳角三角比的應用。

3. 泰利斯的故事

跟三角比相關的故事，泰利斯到埃及經商，並且為了測量金字塔的高度的故事，泰利斯絞盡了腦汁，徘徊在金字塔旁，直到夕陽逐漸西下。看著金字塔投射在地面上的影子，他終於想到測量金字塔高度的方法。考量前一次的教材利用「國王的棋盤」來引起動機，貫穿整個單元，當時有考慮選擇此篇故事做為我們的開始。以下描述我們的探討過程以及最後決定的歷程。

4. 直角三角比的生活需求性

我們當時也為了三角比的需求性花了功夫去思考，如何引入？在 2015 的五月，與單教授有了以下的討論和想法，關於國中的「三角」教材，與其費心創造「似真的」情境，不如連結真實與數學。如果可以測量某個 A 點到旗桿底部的距離，又能測量 A 點看旗桿頂端的仰角（真實的測量都會有誤差，正好可以討論數據的分佈情形，更可以討論，刪除離群值之後再取平均），然後回到紙上談兵的方式，運用先前所學的數學知識相似三角形，知道測量的直角三角形，和紙上所畫的任一個同仰角的直角三角形相似。要求同學們在方格紙上，用量角器畫一個符合的三角形出來（實際大小不重要），用相似形觀念可得到邊長比並進而估計旗桿的高度。

或著可以用旗桿拉一條足夠長繩子上去，利用此繩做成直角三角形的斜邊（在地面上拉直），測量繩長與夾角。再用紙上談兵的方式來估計旗桿的高度。

前面兩個活動，由數學推論，只有確定了夾角，在紙上就能得到固定的兩邊比值，稱之為三角比，共有六種。我們僅介紹其中一種。如果把各種不同夾角的三角比都先紀錄好，將來做任何測量，都不必再臨時畫三角形做比例式的計算，是否方便許多？至此，我們發現了需要三角比的動機，也有了初步製作正弦表的方法（在方格紙上畫角度然後量長度然後算比值，長度可以根據終邊經過的方格來算）。

5. 從三角測量發展的思考

依著前面的脈絡，從實際測量出發，我們嘗試讓兩位同學在測量旗杆高度時對話開始，嘗試古人的方法，當身高與影子長一樣時，去量旗杆的影長；

藉由錯過影子與身高等長的時刻，而發展相似三角形的應用；此時再引入 30˚-60˚-90˚三角形的邊長比方便好算；再來跟學生談如何測量仰角，除了量角器，我們手邊智慧型手機的APP就有一樣甚至更好的功能；因此有了角度，有了可測量的長度，可以在紙上繪製一個相似的直角三角形來利用邊長比計算；最後製作一個可以參考角度對照的三邊長比反而是最方便的，也就產生了正弦表，並有了查表的需要；最後再引入計算機來協助計算。

6. 國外教材

我們也參考了國外的教材，來了解國外在進行指數律的教學的發展，以「Angle」為例 (MIC)，從視線的盲區出發，討論視線與光線、盲點與陰影的關係，並讓孩子觀察陰影長度隨時間變化的關係，來學會判定陽光角度，然後透過梯子倚靠牆上及滑翔翼與地面的角度等多元的情境來判斷陡度，因此結合兩種方法測得物體與地面的角度或此角的 tan A。最後再用定義與推導出 sin A、cos A。讓學生可以接觸到不同的三角比的應用。

7. 從坡度發展的思考

在發展教材的時間點，課程綱要小組也正討論到直角三角比，因此我們剛開始拿到的學習內容如下：

s-9-4: 對直角三角形的一個銳角定義「坡度」、「垂直投影」、「水平投影」並引入符號 tanA、sinA、cosA。

因此我們也蒐集了坡度的相關資料（如圖 3），例如：坡度百分比 S(％) 的定義，以坡面上兩點之垂直高差除以其水平面距離乘以其百分率表示之，視為百分比坡度。甚至生活中有關坡度的情境，例如在英國及香港，正切坡度則常見以比率來取代百分比標示，如「1:12」取代「8.3%」；在鐵路運輸系統中，普通列車不可能爬上很陡的斜坡，會用比百分比更小的千分比（符號為 ?）來表示坡度。由於分母是 1000，更能直觀的表示出每前進 1 千米爬高了多少米。騎車爬山遇而會看到路旁有標示坡度，標示上都是以百分率坡度表示，單位為％；甚至蒐集道路、綠地的最大坡度限制以及樓梯坡度的規範。朱安強博士也特別錄製一段影片有關角度與坡度的量感影片，其

中包含機場周圍建築物高度限制，無障礙坡道陡度為何？溜滑梯有多陡？最陡的登山列車在哪裡等？

<table>
<tr><td rowspan="7">
</td><td>角度</td><td colspan="2">坡度</td></tr>
<tr><td>0°</td><td>0%</td><td>(1:11)</td></tr>
<tr><td>5°</td><td>9%</td><td>(1:5.7)</td></tr>
<tr><td>10°</td><td>18%</td><td>(1:1.7)</td></tr>
<tr><td>30°</td><td>58%</td><td>(1:1)</td></tr>
<tr><td>45°</td><td>100%</td><td>(1:0.58)</td></tr>
<tr><td>60°</td><td colspan="2">173%</td></tr>
<tr><td>斜坡坡度警告標牌</td><td colspan="3">不同角度與坡度的換算</td></tr>
</table>

圖 3　坡度相關資料圖

8. 坡度與投影的爭議

在 2015 年六月的會議中，我們針對國中課綱小組用「坡度」、「垂直投影」、「水平投影」這三個名詞取代「正切」、「正弦」、「餘弦」來引入符號 tan A、sin A、cos A，也做了討論，認為學生很容易會混淆水平投影與垂直投影，到底哪個方向投影過來算「水平投影」？哪個方向是「垂直投影」？另外讓人困惑的是「坡度」是比值，給人的心像是二維 (垂直除以水平)，但「投影」是長度，給人的心像是一維，如此反而容易讓孩子學習上混淆。

（三）正式編寫

由於在撰寫教材時，思考教材的佈局與數學內容的本身意義，檢視課程綱要草案來設計如何可以適當詮釋，反而能夠對課綱來回修正，因此最後具爭議的名詞「坡度」、「垂直投影」、「水平投影」都沒有在課綱的學習表現與學習內容中出現，僅是以直角三角形的一個銳角定義「斜邊」、「鄰邊」、「對邊」，並引入符號 tan A、sin A、cos A 來處理，但也留給我們設計的空間。

而原先打算以測量旗杆高度這樣的方式引入，在課綱當時希望談到「坡度」這個名詞的前提下，我們也整個改變引入的生活情境而捨棄。

1. 學習表現

S-IV-12 理解直角三角形中某一銳角的角度決定邊長的比值，認識這些比值的符號，並能運用到日常生活的情境解決問題。

2. 學習內容

S-9-4 相似直角三角形邊長比值的不變性：直角三角形中某一銳角的角度決定邊長比值，該比值為不變量，不因相似直角三角形的大小而改變。

S-9-5 直角三角形的三角比：對直角三角形的一個銳角定義「斜邊」、「鄰邊」、「對邊」，並引入符號 tan A、sin A、cos A；直角三角形內，給定一邊的長和一個銳角的角度，決定另一邊的邊長。(學生無使用計算機時，角度限於 30 度、45 度、60 度)。

3.「坡度」的引入

由一個「一公里 75%險升坡」的話題開始（如圖 4），讓學生表述他們的想法，並將他們的想法與直角三角形作銜接，並導入「坡度」正確的定義。因此我們在這個單元會時常用「坡度」來做為生活脈絡的連結，例如：

小堅：「75% 的坡度，角度約 37 度，大概要坦克車才能開上去了，即使一般轎車爬坡也可能會有問題。」

「有個山坡地，被標示坡度為 100%，請計算或測量一下這個山坡地坡度所對應的∠ A 為幾度。」

根據內政部營建署公布的市區道路及附屬工程設計標準中，其中提到「人行天橋及人行地下道之出入口為斜坡式坡道者，其坡度不得大於百分之十二。」、「無障礙通行空間設置坡道者，坡道斜率不得大於一比十二。」等與坡度有關的規範。

學校外面規劃人行天橋的設置，天橋高度三公尺，若依內政部法規，需要預備多長的水平距離來建置斜坡式坡道（坡道坡度 12%）。

藉由這些生活例子的結合，嘗試讓學生使用數學解決問題。

4. 方格紙繪圖的操作

圖 4　75%險升坡，課本第一頁的引入

本教材設計許多活動，讓學生透過方格紙繪圖來討論，譬如請學生依據75%、7.5%、75 度等不同的坡度描述來繪製不同的直角三角形，並比較有多陡。另提供任務讓學生練習畫直角三角形去估算坡度，以及繪製固定坡度的直角三角形來測量斜邊上升的角度，透過繪製、測量與簡單的計算，讓學生從中察覺角度與坡度的對應，增加學生實作及測量的能力。

5. 使用相似形引入

透過觀察兩個大小不同，但是某一銳角相同 (75 度) 的直角三角形，來發現其間的關係，讓學生利用三角形相似性質來指出兩股間的比值不變，並使用 tanA 來表示此比值 (也就是坡度)。另外也讓學生繪製坡度 75% 的兩個大小不同的直角三角形，測量其銳角度數。我們希望透過這兩個活動讓學生可以討論兩個直角三角形，當銳角的角度相等時，其兩股的比值也會相等。同樣地，兩個直角三角形，當它們兩股的比值相等時，銳角角度也會相等。

6.sin A、cos A 的導出

透過銳角∠ A，介紹「斜邊」、「對邊」、「鄰邊」等名詞來導出 sin A、cos A 的定義與名詞。原先也想以不同的情境脈絡，如梯子斜放的陰影來引出 sin A、cos A，但是在「投影」這個名詞會產生一維、二維心像困擾的疑慮下，我們只好選擇保守的名詞介紹，在後面的任務利用勾股定理練習計算不同的三角比，以熟悉相關名詞，並了解這三個三角比間的關係。

7. 計算機三角比鍵的使用

傳統基礎的計算機是沒有三角比的按鍵，而工程用計算機在早幾年的時候售價昂貴，但是若限縮功能除基本計算外，多增加指數運算、對數運算、三角比等功能，在國家教育研究院的訪價與規劃已經可以壓低到可以負擔的

價格，風行的智慧型手機通常具備基本與進階功能可轉換的計算機 APP，因此三角比的計算功能也是方便使用的。因此只要注意輸入的是角度值，部分計算機需切換功能，等於輸入∠ A 的度數即可得到 tan A、sin A、cos A 等邊長比的值，再利用已知的邊長即可求出另一邊的長度。

8. 測量高度 APP 的討論

現在市面上有非常多可用來測量坡度、傾斜角度的 APP 軟體，甚至可以測量高度。因此我們在素養評量示例中提供相關軟體的介紹，並讓學生討論，在輸入觀察者的身高後，透過手機的移動測量角度的變化、及內建的三角函數表，即可以估算出所需測量物體的高度。未來社會是需要使用到各類垂手可得的資訊工具來探索、認識這個世界，因此懂得如何搜尋 APP、使用 APP、並了解其中的設計想法，都是之後在面對個人的及社會的生活需求時，需要的素養與能力。

9. 本教材與以往教材相異處

本教材與以往教材不同之處，在於我們從生活實例引入坡度的討論，試圖讓學生理解數學知識與生活描述的關聯性，讓 tan A 不僅是一個符號，而是有其生活中的意義。透過方格紙 (以 1 公分為單位) 的繪圖來討論不同坡度或角度描述時的直角三角形來做比較，讓學生探討其關聯性與對應，提供學生實作的經驗，以發展其測量與計算的能力。由於科技的日新月異，因此我們在課程中介紹計算機的三角比按鍵，培養孩子使用計算機做運算，以具有解決生活應用的能力。

仍須再次提醒的是課綱在國中部分僅有理解相似直角三角形邊長比值的不變性，及對直角三角形的一個銳角定義「斜邊」、「鄰邊」、「對邊」，並引入符號 tan A、sin A、cos A。因此本單元僅處理直角三角比，給定一邊的長和一個銳角的角度，決定另一邊長的計算；至於三角函數的對應與變化等關係，留待高中的課程再做處理。

（四）教學現場

針對直角三角比的試教，在台北市立南門國中由曾明德老師公開授課，

當時參與議課的有國家教育研究院的鄭章華研究員、台北市南門國中的曾文龍校長、楊啟明主任，童玉娟組長，陳美均老師，朱峻賢老師，陳怡君老師等。

透過了討論、學習表現的調整，課程內容程序的大幅修改，即使有了順暢的設計脈絡，有趣的故事情境，仍須現場的試教，並依學生的反應來討論與修改，在一週的教學過程中，透過教學現場的觀課、接續的議課，我們從教學現場得到不少對教材編排、問題設計、學生學習的回饋，整理如下：

1. 以坡度情境引入的學生反應

請學生上台畫出關於「一公里 75%險升坡」描述的圖形。學生所畫的圖形大致可分成兩類，一部份具有生活情境；另一類則抽象成數學情境，使用直角三角形來呈現。而「100」所標示的位置則又有所不同，一個標在水平距離，另一個標在實際路面（即直角三角形的斜邊上）。當然學生的圖形還要與「75% 等於是指每前進 100 公尺會上升 75 公尺。」這個話語互相檢視，可以透過教師的提醒或是自行閱讀，配合圖形得到每前進 100 公尺解釋成水平距離，而不是斜邊 (實際路面)。

2. 方格紙的使用

附件提供是每格單位 1 公分的方格紙，讓學生在上面繪製直角三角形，並測量角度與長度的重要工具，在本單元中有許多任務作業都是用方格紙，例如：

「任務二、請在附件一的方格紙 (單位長 1 公分) 中，分別畫出坡度為 75%、7.5% 的兩個直角三角形，並試著用量角器測量所繪製的兩個直角三角形的角度，並且將角度標上去。」

「任務三、請在附件一的方格紙 (單位長 1 公分) 繪製一個∠ A ＝ 75 度的直角三角形。請問你可以利用哪些數據來說明哪一個直角三角形的坡度比較大？」

「任務四、從以下三個角度中挑選其中一個，當做∠ A 的度數，在附件二的方格紙 (單位長 1 公分) 上畫出直角三角形，並計算這個直角三角形的坡度是多少？ (1)、60 度　(2)、45 度　(3)、55 度」

「任務五、請在附件三的方格紙 (單位長 1 公分) 中，分別畫出 $\frac{h}{d}$ 值是 $\frac{4}{3}$，但是大小不同的直角三角形。並試著用量角器測量該兩個三角形的∠ A。說說看，你發現甚麼？」

在做圖的過程中學生有的會反應紙張不夠大，他們想的是要用 100 格當水平、75 格當垂直，這裡頭包含著如何找到等值分數來繪製邊長比等值的方法，是很好的複習。學生有反應說條件只給一個 75 度，沒有任何邊長，該怎麼畫？也就是學生僅畫出 75 度角，但沒有想說水平與垂直在坡度裡的意義，但這也正是我們在處理坡度與斜坡角度時須注意學生的學習困難。

老師也可以在製圖前先跟學生約定製圖時的水平方向與斜邊繪製的位置，以確認學生知道測量角度或繪製角度是指水平方向與斜邊的夾角。

3. 教材任務在課堂中完成或當成回家作業

明德老師在進行試教時，有幾個任務，尤其是在方格紙上作圖，最後都變成作業讓學生回家完成，再到學校分享。這裡是由教師自己視情況調整，例如作業與前面的活動有類似性，或結束前正好可以留下當作業在下堂課時讓同學分享。尤其實作課程花的時間較久，國中老師在進行這方面的活動會覺得拖慢課堂節奏或影響後續進度，因此事前的備課，以了解何處可以調整或是平時多給學生實作的經驗，也許都是未來可以注意的方向。

4. 差異化教學與平行任務

這次的任務設計中有考量班級學生的程度差異，因此作業的要求是讓學生可以選擇，難度不同、目標意義相同、可以互相比較討論的問題。例如下面兩個任務。

「任務四、從以下三個角度中挑選其中一個，當做∠ A 的度數，在附件二的方格紙 (單位長 1 公分) 上畫出直角三角形，並計算這個直角三角形的坡度是多少？ (1)、60 度　(2)、45 度　(3)、55 度」學生可以挑選自己好畫或熟悉的角度當∠ A，還繪製三角形，讓學生可以發現角度不同，得到的坡度也會不同。

「任務五、請在附件三的方格紙 (單位長 1 公分) 中，分別畫出 $\frac{h}{d}$ 值是 $\frac{4}{3}$

，但是大小不同的直角三角形。並試著用量角器測量該兩個三角形的∠ A。說說看，你發現甚麼？」　學生可以挑選自己決定三角形邊長的長度，只要符合 $\frac{h}{d}$ 值 $\frac{4}{3}$ 是即可，再測量∠ A，讓學生發現坡度相同時，得到的∠ A 度數也相同。

5. 直角三角形與勾股定理

在本單元的直角三角形，我們都挑選具整數比或特殊角等特性，這樣學生在計算長度與熟悉直角三角比 tan A、sin A、cos A 的定義或轉化時，不會受到計算複雜而影響，當熟悉符號意義後，我們會在後面的任務指導學生使用計算機，也就不用擔心運算困難的問題。

6. 從查表轉變到計算機的使用

我們最後捨棄了查表，直接進入計算機的教學，其中是考量時間的分配。查表有其歷史背景，尤其是在不能使用計算機時而表中的數值搭配實物操作，也可以觀察鋭角角度變化時，直角三角比 tan A、sin A、cos A 三個數值的變化，有其學習的趣味及探索的目的。不過本次只談三角比，避開三角函數對應與變化的關係，這方面教師可以另外設計實作讓孩子體驗。

而有了計算機的使用，會出現的困擾是不同的計算機使用方式可能不同，因此統一規範是一種方式，若想要利用學生自己的 APP 或計算機，那可以先提問請學生用計算機計算 tan45°、sin30°的值，詢問學生的答案，並讓學生思考解釋為何是這些答案（如圖 5）。

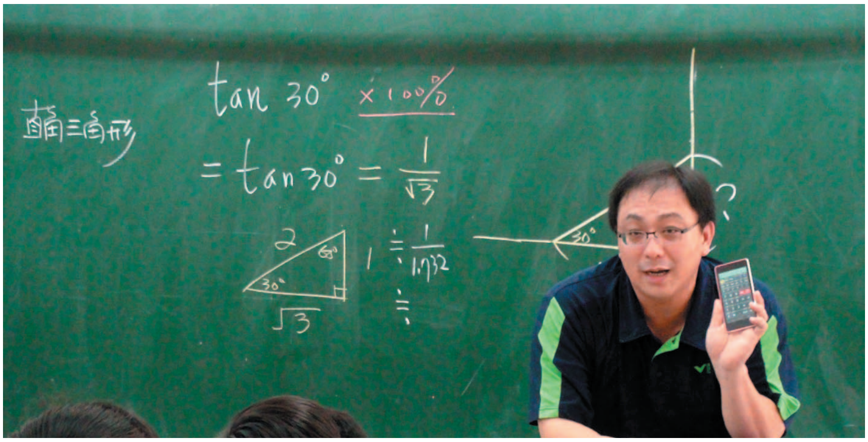


圖 5　利用統一規範的計算機來談直角三角比的計算

參、困難與突破

一、數學素養的掌握

從 PISA 開始被臺灣注意，數學素養一直被視為評量，而且要結合生活情境，要讓孩子能在學習、生活、與職業生涯的情境脈絡中面臨問題時利用數學，從而判斷、運用、解決、溝通。

因此當提到數學素養教材，作者時常會思考要如何從生活情境中引入，或是透過應用數學概念來解決現實問題。但是數學有時往往是自己內部連結的情境，也就是在數學自己的脈絡下，也能引人入勝，因此如何讓學生有興趣於課堂中，當然適合的故事或現實情境能讓學生產生興趣，但有時也要思考的是如何在數學的脈絡下，找到其中的共享或挑戰。

我們在這個過程中不敢說已經有了答案，但是從一個改編的故事開始，從解決故事中國王的問題來結束，是我們的嘗試。也利用學習到的數學知識來辨別、解釋、比較想解決的問題，而非找尋單一的答案，讓孩子感受不是要計算一個結果，而是如何利用算式、結果的表現去說明或解釋。也許我們應該先從讓數學課的氣氛如何開始做起，一個吸引的情境、一個數學把戲、一個孩子的臆測說法、或是一個謎題等。

二、數學與情境

此次設計的兩個教材分別由故事情境與現實情境出發。時常有讀者認為素養教材一定要從情境出發，但數學本身的熟練計算並非不重要，課程中仍須重視，因為精熟數學基本概念的操作與演練，才能把數學方法與思考靈活運用到與情境相連結的複雜問題。只是有時為了避免過於形式化的數學教學與學習，因此鼓勵教學現場應該經常、反覆幫助學生把所學的數學知識與現實世界做連結，甚至有創意地發展一些故事或活動來協助。

有時從生活或故事情境的需求引入數學概念的探究，有時利用數學知識與能力解決生活或故事情境的問題，如此不脫離生活經驗的數學學習，才可能讓大部分國民改變對數學的刻板認知，即使達不到熱愛數學，至少不會排斥數學；即使做不到隨時熟用數學，至少樂於嘗試使用數學。如此，我國的

學生在數學學習才不致有低興趣的情形，也才能在學習中有信心並抱有數學是對生活有用的信念。

三、課綱與現場的交替

透過教學前的備課、課綱的解讀、以及現場教學的回饋，有時我們會發現課綱的要求與說明是需要調整，有時是教學目標在教材中就沒有達到，在教學現場視學生的程度及教師的教學經驗作引導，而透過這幾次的公開授課、議課，就是以學生學習的觀察為依據，來做教材內容的調整與教師教學的參考案例，進而在議課中透過討論與提出觀察的狀況、做出適宜的建議，也可以將這些經驗在教師手冊中呈現。

未來十二年國教的推行，其中一個重要改變就是教師們每年一次的公開授課，而我們在這幾次的試教過程中提供一種觀課、議課的新方向，就是針對我們準備的教材作討論，授課教師本身僅是媒介，在此當然也是設計者。

當然有時對教材的建議會涉及對設計者的批評，同樣的進行方式，教材如果是審定版課本，或是教師學習社群共備完成的教材，那就完全沒有這方面的疑慮。

當教材在現場教學中遇到學生的學習時，會有什麼樣的火花？授課教師現場可以如何的調整與面對？班級學習狀況的紀錄、學生對於問題可能的回答、實作任務各式各樣的作法與表現，當紀錄這些資料在教師手冊，或是於議課的對談中出現，之後使用同樣教材的教師就知道，當面對學生時該怎麼調整教材，如此才有良好的備課、觀課、議課的進行方式。

參考文獻

李國偉、黃文璋、楊德清、劉柏宏（2013）。教育部提升國民素養實施方案—數學素養研究計畫結案報告。臺北市：教育部。

Encyclopaedia Britannica. (2010). *Mathematics in Context: Power of Ten*. Illinois: Chicago.

Encyclopaedia Britannica. (2010). *Mathematics in Context: Angle of Ten*. Illinois: Chicago.

第三章　國民中學篇 (I)

教學單元

(一) 指數律

1

單元

指數律

國王的棋盤

1 某種記錄方法

很久以前，在現今的印度，住著一位很有智慧的人。這個智者創造西洋棋的遊戲，國王非常喜愛智者所發明的遊戲。

國王對智者說：「你想要什麼作為獎賞？」

智者鞠躬並說道：「能為陛下您服務，這件事對我來說就已經是獎賞了。」

「但是我希望你能得到實質的獎賞。」國王用嚴厲的聲音說。「你得選擇一個獎賞！」

智者沉默了很久，「好的，陛下」智者終於說了：「我僅有一個要求，就是明天時，請國王您在棋盤的第 1 個方格上，賜給我 2 粒米；隔天，在第 2 個方格上，賜給我 4 粒米；第 3 天，在第 3 個方格上，賜給我 8 粒米；第 4 天，在第 4 個方格上，賜給我 16 粒米；……。就這樣每 1 個方格上，都賜給我前一天 2 倍的米粒，直到棋盤所有格子上都放了米為止。」

國王與在場的每一個人都感到很好奇，到最後會有多少粒米在棋盤上呢？他想像著棋盤上的米粒：「1、2、3、4、5、……、共有 64 個格子。到最後的米會有 1 公斤重嗎？」國王可不確定。

此時皇后對國王輕聲說：「最簡單的方式就是直接問智者一共需要多少米？」

國王怎能顯露出他有不確定的事呢？在這樣的自尊心作祟下，他大方地對智者說：「你的要求已被允許了。」

這件事引發了大臣與貴族們的一陣笑聲，討論著智者與他的古怪要求。

如上圖，你認為在一般大賣場可見的每 3 公斤一袋的米，夠不夠應付智者的要求呢？

國王為了方便負責的士兵知道每天要拿多少粒米，因此請大臣們一起商量如何記錄。

甲大臣說：「先幫負責的士兵算好米粒數。第 1 天，2 粒米；第 2 天，4 粒米；第 3 天，8 粒米；第 4 天，16 粒米，依此記錄下去即可。」

乙大臣說：「只要列出算式，負責的士兵們就可以算出來。第 1 天，2 粒米；第 2 天，2×2 粒米；第 3 天，2×2×2 粒米；第 4 天，2×2×2×2 粒米，依此記錄下去即可。」

丙大臣說：「我這邊想到一種記錄方式，只要負責的士兵能了解這個方法就可以。」

第 1 天，記為 2^1 粒米；第 2 天，2×2 記為 2^2 粒米；第 3 天，2×2×2 記為 2^3 粒米；第 4 天，2×2×2×2 記為 2^4 粒米，依此記錄下去。」

任務 1

請分別依甲、乙、丙三位大臣建議的方式，完成以下的問題與討論。

1. 完成以下表格：

	第 5 天	第 6 天	第 7 天	第 8 天	第 9 天	第 10 天	第 11 天
甲大臣							
乙大臣							
丙大臣							

2. 依甲、乙、丙三位大臣建議的方式，記錄第 20 天時所需要的米粒數。
   請寫出不同記錄方式的優缺點。
   甲大臣：
   乙大臣：
   丙大臣：

3. 如果你是國王，你會喜歡哪一種記錄方式呢？請寫出算式或是理由來支持你。

法國數學家笛卡兒(René Descartes，1596～1650)在 1637 年的著作《幾何學》中創立了一種與丙大臣相同想法的簡記方式。

一數連加數次時，可用乘法來簡記，例如：$5+5+5=5\times3$。

同樣的，一個數連乘數次時，有和丙大臣建議一樣的簡記方法。例如：5 連乘 3 次，即 $5\times5\times5$，可以表示成 5^3，其中 5^3 讀作五的三次方，5 稱為**底數**(或簡稱**底**)，右上角的 3 稱為**指數**，用來表示連乘的次數。

另外，相同數連乘的運算稱為**乘方**(或次方)。當乘方的指數為 1 時，通常省略不寫，例如：3^1 寫成 3。

任務 2

以下是國王的棋盤，請試著幫丙大臣記錄以下各天所需的米粒數。

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)
(17)	(18)	(19)	(20)	(21)	(22)	(23)	(24)
(25)	(26)	(27)	(28)	(29)	(30)	(31)	(32)
(33)	(34)	(35)	(36)	(37)	(38)	(39)	(40)
(41)	(42)	(43)	(44)	(45)	(46)	(47)	(48)
(49)	(50)	(51)	(52)	(53)	(54)	(55)	(56)
(57)	(58)	(59)	(60)	(61)	(62)	(63)	(64)

1. 第 30 天

2. 第 60 天

3. 最後一天

大臣們一面記錄，一面討論以下的問題。

任務 3

1. 第 4 天，需要 2^4 粒米，隔天，需要多少粒米？(請以 2 為底數的乘方表示)

2. 第 9 天所需要米粒數是第 6 天所需要米粒數的幾倍？

2 次方的運算

在臺灣，數字的位值由小到大會用到個、十、百、千、萬、億等名詞，這些名詞其實可以和 10 為底數的乘方相對應，在後續的學習中我們會討論。

【2014 年 7 月 30 日新聞】
審計部 29 日公布「102 年度中央政府總決算」報告書，經審計部審核，民國 102 年度審定歲入決算 1 兆 7304 億餘元。兆有多大呢？

名詞	實際數字	算式（以 10 連乘的運算）	以 10 為底數的乘方記錄
個	1		?
十	10	10	10^1
百	100	10×10	10^2
千	1000	$10\times10\times10$	10^3
萬	10000	$10\times10\times10\times10$	10^4
十萬	100000	$10\times10\times10\times10\times10$	10^5
百萬	1000000	$10\times10\times10\times10\times10\times10$	10^6
千萬	10000000	$10\times10\times10\times10\times10\times10\times10$	10^7
億	100000000	$10\times10\times10\times10\times10\times10\times10\times10$	10^8
十億	1000000000	$10\times10\times10\times10\times10\times10\times10\times10\times10$	10^9
百億	10000000000	$10\times10\times10\times10\times10\times10\times10\times10\times10\times10$	10^{10}
千億	100000000000	$10\times10\times10\times10\times10\times10\times10\times10\times10\times10\times10$	10^{11}
兆	1000000000000		

表一

任務 1

1. 10^8 是幾位數？是 1 後面幾個 0？

2. 10^{12} 是幾位數？是 1 後面幾個 0？

清朝《數理精蘊》記載的數字單位，由小到大依次為一、十、百、千、萬、億、兆、京、垓。萬以下是十進位，萬以後則為萬進位，即「萬萬為億、萬億為兆、萬兆為京、萬京為垓」。

任務 2

「萬萬為億」是指 1 萬的 1 萬倍為億，即 $10000\times10000=100000000$，也可利用以 10 為底數的乘方，參考上方的表格，記作 $10^4\times10^4=10^8$。請將下列各題的文字描述與運算，以 10 為底數的乘方記錄下來，並將「兆」、「京」、「垓」以 10 為底數的乘方表示。

1. 萬億為兆：$100000000\times10000=1000000000000$，可記作 $10^8\times10^4=10^{12}$。
2. 萬兆為京：
3. 萬京為垓：

在小學時，3 個 2 相加與 4 個 2 相加，總共有 7 個 2 相加。可記作

$$(2+2+2)+(2+2+2+2)=2+2+2+2+2+2+2$$

或者 $$2\times3+2\times4=2\times7$$

那麼，3 個 2 相乘再與 4 個 2 相乘，總共有 7 個 2 相乘。可以怎麼記，想一想？

$$(2\times2\times2)\times(2\times2\times2\times2)=2\times2\times2\times2\times2\times2\times2$$

或者 $$2^3\times2^4=2^7$$

你有發現什麼比較好的計算方法？

任務 3

試著計算下列以3為底數的乘法運算，並將答案以3為底數表示。

1. $3^2\times3^2$
2. $3^5\times3^6$
3. 3×3^4
4. 當兩個底數相同的乘方相乘時，指數之間有什麼關係嗎？

過去新聞報導中，曾出現很大且需運算的數，下面是利用以 10 為底數的記錄方式，請試著完成任務。

例如：某公司將半年的業績獎金 100000 元均分給 100 位員工，即 $100000 \div 100 = 1000$（元），記作 $10^5 \div 10^2 = 10^3$（元）。

任務 4

1. 新聞報導，這次威力彩頭獎金為 1 億元，由一家工廠的 100 位同事共同獲得，請問每人可分得多少元？

2. A 國目前國民人數約有 1000 萬人，如果 A 國負債約一兆元，請問 A 國平均每個人負債多少元？

在小學時，6 個 3 相加減掉 2 個 3 相加，會剩下 4 個 3 相加。可記作

$$(3+3+3+3+3+3)-(3+3)=3+3+3+3$$

或者 $$3\times 6-3\times 2=3\times 4$$

那麼，6 個 3 相乘除以 2 個 3 相乘，會剩下幾個 3 相乘呢？可以怎麼記錄？

$$(3\times 3\times 3\times 3\times 3\times 3)\div(3\times 3)=\frac{3\times 3\times 3\times 3\times 3\times 3}{3\times 3}=3\times 3\times 3\times 3$$

或者 $$3^6\div 3^2=3^4$$

你有發現什麼比較好的計算方法？

任務 5

試著計算下列以 5 為底數的除法運算，並將答案以 5 為底數表示。

1. $5^6\div 5^2$

2. $5^{12}\div 5^4$

3. 當兩個底數相同的乘方相除時，指數之間有什麼關係嗎？

在 14 世紀，歐洲數學家雷姆(Nicole Oresme，1323～1382)引用指數律中的加法律和乘法律來處理幾何和物理的問題。透過前面學習的指數律，對以下問題嘗試作運算。

任務 6

試計算下列算式，並在各式的(　)與□中，填入正確的數：

1. $(5^4)^2=(\quad)\times(\quad)=5^{\square}$

2. $(2^3)^4=(\quad)\times(\quad)\times(\quad)\times(\quad)=2^{\square}$

3. 觀察以上的運算，你發現了什麼？請你舉例說明。

4. $(10^5)^3=10^{\square}$

5. $(10^3)^5=10^{\square}$

6. $(10^5)^3$ 與 $(10^3)^5$ 的計算結果是否相同，請寫出算式或理由來說明。

現在的資訊科學和網路通訊，與指數律也息息相關。

美國數學家愛德華．卡斯納(Edward Kasner)在 1940 年創造 Googol 這個名詞，代表 10^{100}。根據網際網路搜索引擎谷歌(Google)公司公布的資料，Google 在 Googol 這個名詞上稍作微小的改變，藉以反映 Google 公司的使命，用以表示該公司在網路上擁有無邊無際的訊息資源儲存量。

任務 7

1. 某網路公司所做的統計，發現平均每天在網際網路上約新增加 10^{15} 位元的訊息量。若依此速度多久才會累積到 1 Googol 位元的訊息量？

2. 我們認識 1 Googol $=10^{100}$，小華聲稱他創造一個很大的數叫做100^{10}，請比較 10^{100} 與 100^{10} 的大小？並寫出算式或理由來說明。

3 計算機的使用

因為科技上的進步，以往複雜的計算現在可透過方便取得的計算機幫忙完成，請使用計算機，依指示做些小計算。（每臺計算機按鍵功能會有差異，可以請任課教師協助你。）

任務 1

拿出計算機，

1. 先按 10，再按 ×，接著按 = 1 次，你的計算機上顯示多少呢？能說說看這是怎麼算出來的？

2. 歸零後，先按 10，再按 ×，接著按 = 6 次，你的計算機上顯示多少呢？能說說看這是怎麼算出來的？

3. 歸零後，先按 10，再按 ×，接著按 = 25 次，你的計算機上顯示多少呢？能說說看這是怎麼算出來的？

你知道第 40 天，國王要放多少粒米在棋盤上嗎？你可以試著用手邊的計算機，算算看，並嘗試回答下面的問題。（你用的是哪一種計算機呢？電腦中的小算盤或是手機中的計算機？）

任務 2

以計算 2^{40}（2 的 40 次方）為例：

❶ **標準型計算機**

先按 2，再按 *，接著按 = 39 次，即可以得到運算結果。

❷ **工程型計算機**

先按 2，再按 x^y，接著按 40，按 =，即可以得到運算結果。

在此計算機中，先輸入的數字為 x（代表底數），後輸入的數字為 y（代表指數）。

❸

先按 2，再按 × 及 2，重複 39 次（螢幕呈現如 2×2×2×2×2×2×2× ⋯ ×2），按 = 即可以得到運算結果。

❹

先按 2，再按 ∧，接著按 40，按 =，即可以得到運算結果。

1.099512e12、1.099511627776×10^{12} 與 1099511627776 這三個數字相同嗎？

不同計算機的顯示方式有所不同，雖然 1.099511627776×10^{12} 與 1099511627776 這個十三位數相同，但受限於不同機型，顯示為 1.099512e12，此為近似值，數字最右邊的 **e12** 指的就是乘上 10^{12}（以 10 為底數時，指數為12）。

你可以對一個數取四捨五入到很大的位數，也可以到很小的位數，就看你想要多準確。2^{40}＝1099511627776，這個數字寫在書上容易，但是要記住就很痛苦。為了讓此類數字容易記憶，可以將它四捨五入。

1099511627776 → **1099512**000000 取七位有效數字，在前七位數之後的數都變成零，精確度99.99999%。

1099511627776 → **11**00000000000 取兩位有效數字，在前兩位數之後的數都變成零，精確度99%。

1099511627776 → **1**000000000000 取一位有效數字，在前一位數之後的數都變成零，精確度90%。

其實 1100000000000 已經很精確，因此通常很大的大數我們會四捨五入到兩位有效數字。而下表是我們進一步使用指數的記錄方式來呈現 1100000000000 成為 1.1×10^{12} 的演變過程。

原本數字的簡單運算				指數的記錄方式		
1100000000000	×	1	＝	1100000000000	×	1
110000000000.0	×	10	＝	110000000000.0	×	10^1
11000000000.00	×	100	＝	11000000000.00	×	10^2
1100000000.000	×	1000	＝	1100000000.000	×	10^3
110000000.0000	×	10000	＝	110000000.0000	×	10^4
11000000.00000	×	100000	＝	11000000.00000	×	10^5
1100000.000000	×	1000000	＝	1100000.000000	×	10^6
110000.0000000	×	10000000	＝	110000.0000000	×	10^7
11000.00000000	×	100000000	＝	11000.00000000	×	10^8
1100.000000000	×	1000000000	＝	1100.000000000	×	10^9
110.0000000000	×	10000000000	＝	110.0000000000	×	10^{10}
11.00000000000	×	100000000000	＝	11.00000000000	×	10^{11}
1.100000000000	×	1000000000000	＝	1.100000000000	×	10^{12}

表二

為了後面的計算與討論，我們將記錄方式以四捨五入取到小數點後一位，寫成 1.1×10^{12}。而在日常生活中，出現很大的數的情形越來越普遍，能以方便、精簡的方式去呈現這些數，也顯得越來越重要。

把一個正數表示成 $a\times10^n$ 的形式，其中 $1\leqq a<10$ 且 n 為整數，則 $a\times10^n$ 就是這個數的科學記號表示法。

當一個很大的數不易用一般的方式表現時，我們會採用科學記號表示，計算機亦然。

任務 3

請將下列科學或生活新聞中的大數字，用科學記號表示：

1. 蘋果公司股價在 2014 年 7 月 28 日上漲 1.38%至 99.02 美元，市值達到 5929.18 億美元，約新臺幣 17.78 兆元。請以科學記號表示 17.78 兆。

2. 「富比世」雜誌今天公布臺灣 50 大富豪名單，旺旺集團主席蔡衍明今年以新臺幣 2784 億元資產，連續第 3 年名列臺灣首富。請以科學記號表示 2784 億。

根據上述資料，比較蘋果公司與旺旺集團主席蔡衍明誰較有錢呢？

任務 4

1. 請比較 17.78 兆與 2784 億的大小，誰比較大？

2. 請比較 1.778×10^{13} 與 2.784×10^{11} 的大小，誰比較大？

過了 20 天，國王跟智者提到說，每天讓他的大臣與士兵們計算米粒數與搬米，實在太累！一開始，大臣在計算米的數目，十分輕鬆，2 粒米、4 粒米、8 粒米、16 粒米、…，但越來越感到計算的困難。士兵們頭幾天在搬運米時，僅利用手指拈起數粒米就完成，但過了一、兩星期後光是數出需要的米粒就非常不耐煩。

大臣們請國王跟智者反應：「每天讓他的大臣與士兵們計算米粒數與搬米，實在太累！他們已經精疲力竭了，能不能用別的方式代替。」

任務 5

第 20 天時，國王要提供多少米粒數？能利用計算機以外的方法來估算第 20 天的米量嗎？

約 1 萬粒？約 10 萬粒？約 100 萬粒？還是約 1000 萬粒呢？（提示：$2^{10}=1024$）

智者：「既然如此，我只拿最後一天的米就好了。」

任務 6

藉由第 20 天的米量，估算最後一天需要米多少粒？

還記得故事最後，國王的疑問嗎？「最後會有 1 公斤重的米嗎？」

任務 7

有一個小兵向國王報告：「50 粒米約 1 公克重。」
根據這個資料，請計算最後一天的米量有多重？

任務 8

根據 2012 年統計的結果，全世界的稻作產量高達 7 億公噸。請問這足夠國王支付最後一天的米量嗎？如果不夠，約幾年才可以提供完畢？

第三章　國民中學篇（I）

教學單元

（二）直角三角比

單元

直角三角形的三角比

75%的險升坡

1 75%險升坡

在網站的自行車討論綜合區出現以下的照片與一長串的討論：

阿文：「這是環島時拍到的，這個交通標誌是不是標示錯誤？」

小堅：「忘了點小數點吧，或者是你漏看，如果是 7.5%，看起來滿像的。」

阿文：「真的是寫 75%不是 7.5%，附上 *google* 地圖的連結，可以看到 *google* 上面的照片」。（連結如下）

https://www.google.com.tw/maps/@22.182002,120.874778,3a,15y,270.23h,86.48t/data=!3m6!1e1!3m4!1srtOK3IviAhDW2F6TcesPcw!2e0!7i13312!8i6656?hl=zh-TW

任務 1

請畫出該險升坡，並在圖中呈現「75%」這個訊息。

後面的討論串，又有了以下對話。

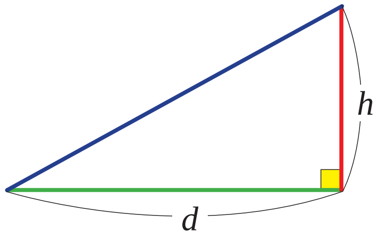
阿文：「75%，指的是 75 度嗎？」

小堅：「不是的，75%**是指每前進** 100 **公尺會上升** 75 **公尺**。登山都沒這麼陡，是否有人故意塗掉小數點？」

我們來看看他們對話中談到的「75%」是指什麼？

如圖一，坡度的意義和表示方式：

以坡面上兩點間的**高度差**除以兩點間的**水平距離**。即



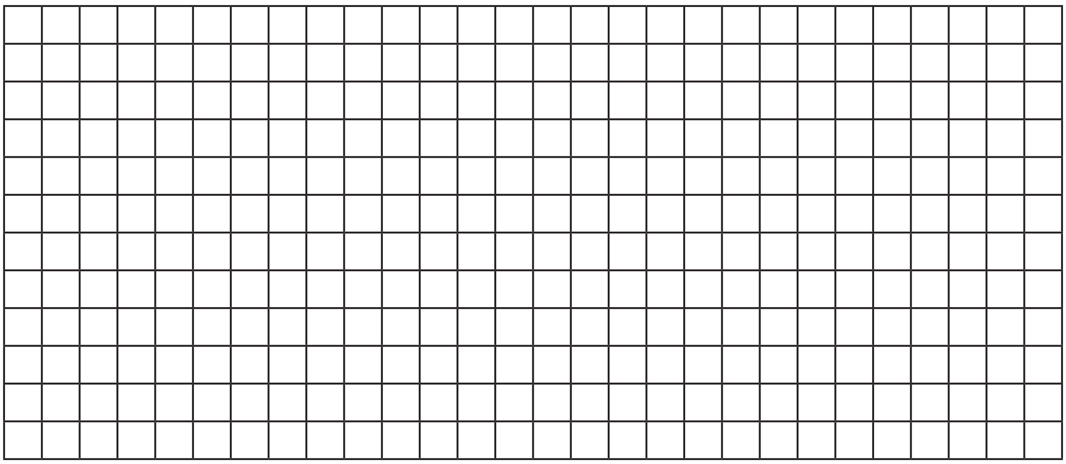
圖一

$$T(\text{坡度})=\frac{\text{高度差}}{\text{水平距離}}=\frac{h}{d}$$

其中 h 表示高度差，d 表示水平距離。坡度在道路上的標示常以「百分率」的形式出現。

任務 2

請在附件一的方格紙(單位長 1 公分)中，分別畫出坡度為 75%、7.5%的兩個直角三角形，並試著用量角器測量所繪製的兩個直角三角形的角度，並將角度標示上去。



(單位長 0.5 公分)

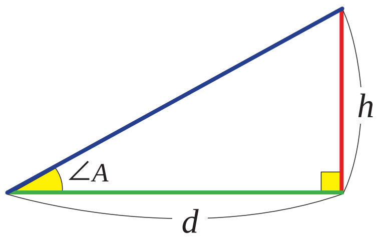
坡度為 75%、7.5%，指的就是 $\frac{h}{d}$ 分別為 $\frac{75}{100}$、$\frac{7.5}{100}$ 的直角三角形，經過化簡可以得到：

$$75\%=\frac{75}{100}=\frac{3}{4}，7.5\%=\frac{7.5}{100}=\frac{3}{40}。$$

小堅：「75%的坡度，角度約 37 度，大概要坦克車才能開的上去，即使一般轎車，爬坡也可能會有問題。」

如圖二，對於坡度 T，是指用高度差 h 與水平距離 d 所組成的直角三角形；可以測量出 h 的對角。

例如，坡度 75%是指$\angle A$ 對面的股(h)與相鄰的股(d)比值為 75%(即$\frac{3}{4}$)的直角三角形，$\angle A$ 的角度大約 37 度。



圖二

任務 3

請在附件一的方格紙(單位長 1 公分)中，繪製一個$\angle A=75$ 度的直角三角形。請問你可以利用哪些數據，來說明哪一個直角三角形的坡度比較大？

2 坡度與角度

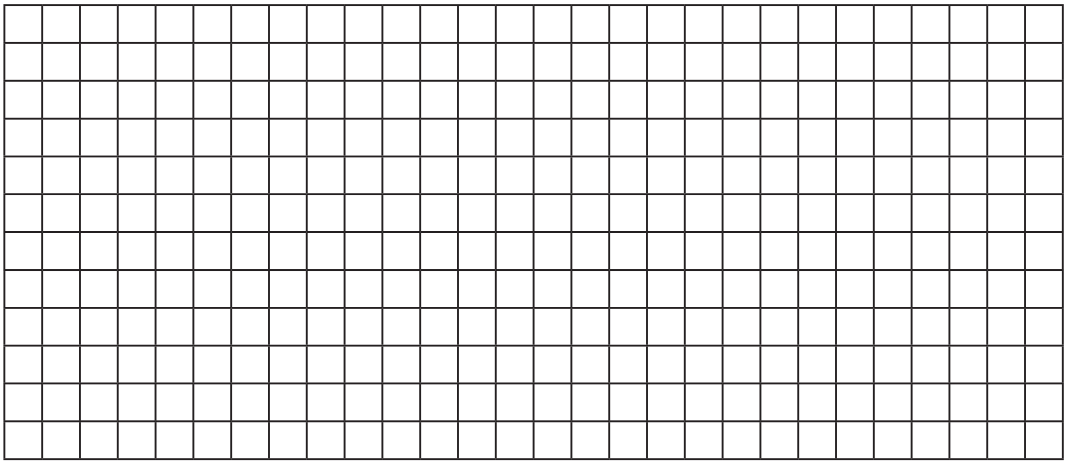
任務 4

從以下三個角度中挑選其中一個，當做$\angle A$ 的度數，在附件二的方格紙（單位長 1 公分）上畫出直角三角形，並計算這個直角三角形的坡度是多少？

⑴60 度

⑵45 度

⑶55 度



（單位長 0.5 公分）

請跟你選擇同樣$\angle A$ 度數的同學一起比較，你們所畫的直角三角形是否一樣大？

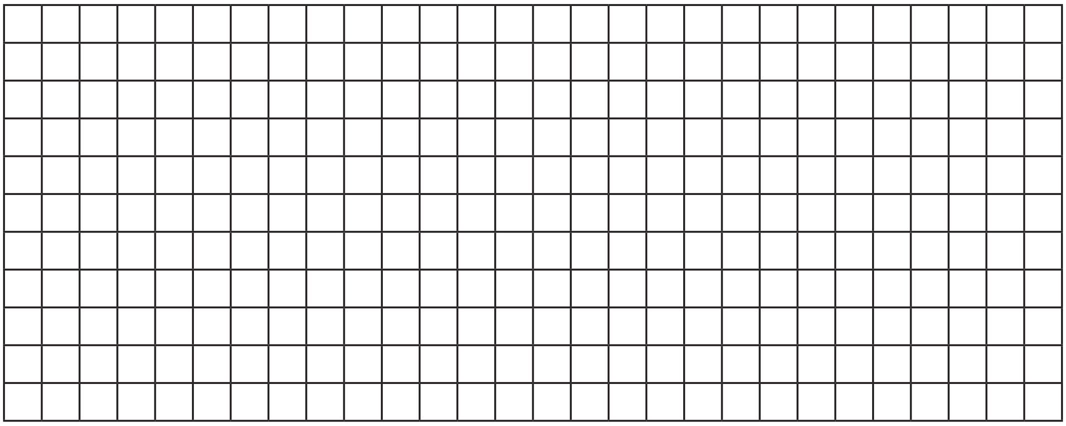
若是不一樣大，請檢查一下，你們所得到的坡度是否一樣呢？

請根據你們所得到結論，試著與同組同學分享為何會得到如此的結論呢？

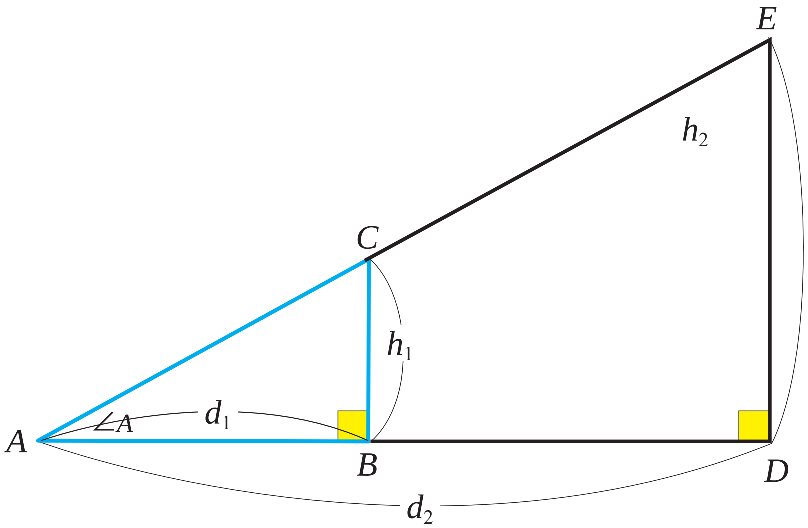
當 $\dfrac{h}{d}$ 值固定的直角三角形，所繪製不同的三角形它們的對應角有什麼關係呢？

任務 5

請在附件三的方格紙(單位長 1 公分)中，分別畫出 $\frac{h}{d}$ 值是 $\frac{4}{3}$ ，但是大小不同的直角三角形。並試著用量角器測量該兩個三角形的$\angle A$。說說看，你發現甚麼？



（單位長 0.5 公分）



由任務 4、任務 5 可以發現：

兩個直角三角形，當銳角的角度相等時，其 $\frac{h}{d}$ 的比值也會相等。

同樣地，兩個直角三角形，當它們 $\frac{h}{d}$ 的比值相等時，h 的對角角度也會相等。

前面所提的坡度($\frac{h}{d}$)常用來標記山坡、屋頂和道路的斜坡坡度有多大，並以直角三角形來協助觀察與描述，因此 $\frac{h}{d}$ 這個數值，在數學上也可以用 $\tan\angle A$ 或 $\tan A$ 表示，即 $\tan A=\frac{h}{d}$。$(0^\circ<\angle A<90^\circ)$

3 $\tan A$ 的討論

任務 6

(1)請問 $\tan 30^\circ$ 的值為多少？

(2)若某道路坡度為「$\tan 30^\circ$」，則請問每前進 100 公尺大概會上升多少公尺呢？

任務 7

有個山坡地，被標示坡度為 100%，請計算或測量一下這個山坡地坡度所對應的 $\angle A$ 為幾度。

4 直角三角比

依據前面的討論，在一個直角三角形 ABC 中，兩股分別為 7、24。我們也可以看成水平方向的距離為 7，鉛垂方向的距離為 24。

如此，可以得到 $\tan A=\dfrac{24}{7}$ 。

同時，注意這個直角三角形的斜邊是可以算出來的。如圖三，直角三角形 ABC 中，$\overline{AC}$ 為斜邊，

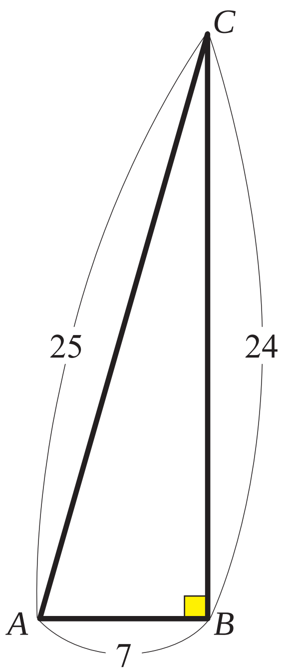
對 $\angle A$ 而言，$\overline{AB}$ 為 $\angle A$ 的鄰邊，$\overline{BC}$ 為 $\angle A$ 的對邊。

如果，我們將 $\tan A=\dfrac{24}{7}$ ，

看成是$\dfrac{\angle A\text{的對邊}}{\angle A\text{的鄰邊}}$，那麼另兩組比值，

$\dfrac{24}{25}$（$\dfrac{\angle A\text{的對邊}}{\angle A\text{的鄰邊}}$）、$\dfrac{7}{25}$（$\dfrac{\angle A\text{的鄰邊}}{\text{斜邊}}$）就分別用

$\sin A=\dfrac{\angle A\text{的對邊}}{\text{斜邊}}$ 、$\cos A=\dfrac{\angle A\text{的鄰邊}}{\text{斜邊}}$ 來表示。



圖三

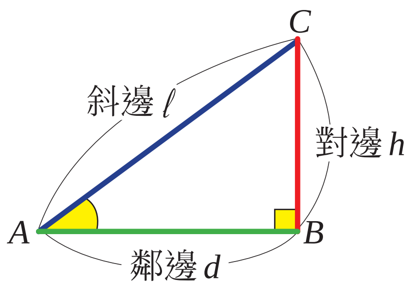
我們進一步將直角三角形三個邊長的兩兩比值，所表示的名稱整理如下：

$\tan A=\dfrac{h}{d}=\dfrac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}$ ，

$\sin A=\dfrac{h}{\ell}=\dfrac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}$ ，（此處用 $\sin A$ 表示 $\sin\angle A$）

$\cos A=\dfrac{d}{\ell}=\dfrac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}$ ，（此處用 $\cos A$ 表示 $\cos\angle A$）

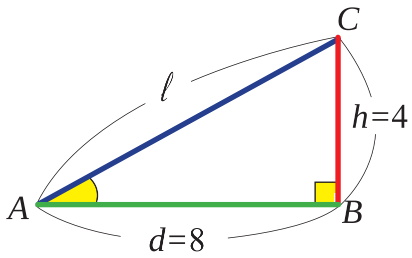
稱為 $\angle A$ 的直角三角比。



任務 8

如圖，有一直角三角形 ABC，已知 $h=4$、$d=8$，

求斜邊 ℓ、tan$A$、sin$A$ 與 cos$A$ 的值。



5 特殊角度的 tan$A$、sin$A$ 與 cos$A$

當 $\angle A$ 是某些特殊角度時，可以先描繪一個直角三角形，先計算出各邊長度關係，製作表格供之後使用。

任務 9

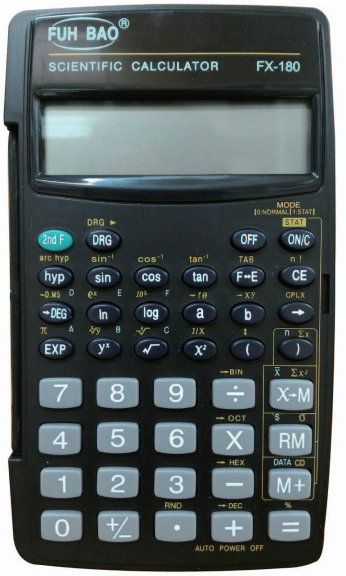
試著完成下表。

$\angle A$	tan$A$	sin$A$	cos$A$
30 度			
45 度			
60 度			

6 計算機的使用

當我們遇到∠A 的度數不是上述的特殊角時，我們可以使用如圖的計算機，算出∠A 的 tan$A$、sin$A$ 與 cos$A$ 的值。

首先，我們先來看看如何使用計算機。



1 先按 ON/C ，打開螢幕，並檢視螢幕左邊上方是否出現 *DEG*（表示 *degree* 度數）。

2 若左邊螢幕上方沒出現 *DEG* ，而是出現 *RAD*、或 *GRAD*，可以按 DRG 數次，來切換到 *DEG* 模式。

3 接著按∠A 的度數，例如 45（指的是 45°），再按 tan ，就會得到 1（即 tan45° 的值）。

4 若要求 sin$A$ 或 cos$A$ 的值，也可以依同樣的方式操作。

任務 10

利用計算機，當∠A=55° 時，tan$A$、sin$A$ 與 cos$A$ 的值為何？

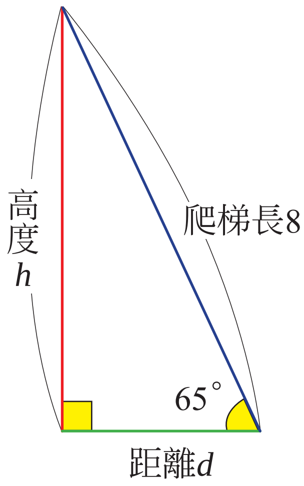
7 生活中的應用

任務 11

考量油漆工人在放置爬梯的安全，如果一座爬梯長度為 8 公尺，靠著牆面置放與地面接合角度為 65°，這樣的架設是比較穩固的。

(1) 依此擺放，8 公尺長的梯子，梯子底部離牆面有多遠呢？

(2) 依此擺放，8 公尺長的梯子，梯子頂部離地面有多高呢？

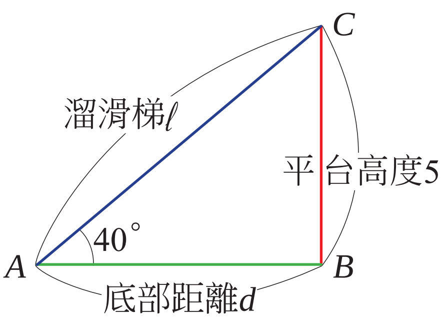


任務 12

校園規劃溜滑梯從 5 公尺的高度滑下，依規定溜滑梯的角度不可以超過 40 度。

(1) 請問溜滑梯的平台底部要保留多少公尺的水平距離來架設滑梯？

(2) 這個溜滑梯的長度是多少公尺？



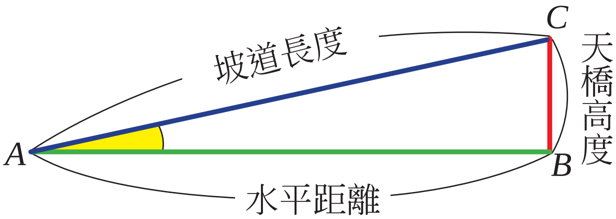
素養評量

（下列各題的運算結果，皆四捨五入到小數點後第 2 位）

1 根據內政部營建署公布的市區道路及附屬工程設計標準中，提到「人行天橋及人行地下道之出入口為斜坡式坡道者，其坡度不得大於百分之十二。」、「無障礙通行空間設置坡道者，坡道斜率不得大於一比十二。」等與坡度有關的規範。

⑴請在方格紙(單位長1公分)繪製「坡面與水平面夾角 12 度」、「坡度 12%」、「坡道斜率 1：12」三種直角三角形。並比較這三種坡度描述的直角三角形，哪一個比較陡？

⑵學校外面規劃人行天橋的設置，天橋高度 3 公尺，若依內政部法規，需要預備多長的水平距離來建置斜坡式坡道(坡道坡 12%)。(四捨五入到小數點後第 2 位)



2 請畫一個直角三角形在下方的方格紙上。將你指定的銳角 $\angle A$ 的度數及各邊的長度測量出來。

⑴請計算 $\tan A$ 的值。（四捨五入到小數點後第 2 位）

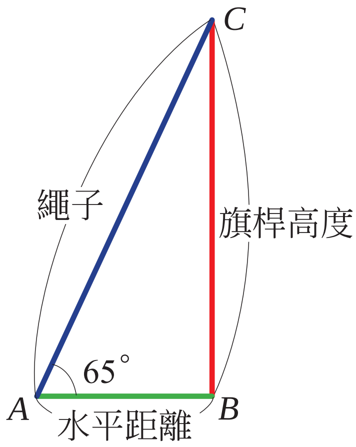
⑵請計算 $\sin A$ 的值。（四捨五入到小數點後第 2 位）

⑶請計算 $\cos A$ 的值。（四捨五入到小數點後第 2 位）

3 一直角三角形 ABC 中，設 $\overline{AC}=13$，$\overline{AB}=12$，$\overline{BC}=5$，試求 $\sin A$、$\cos A$、$\tan A$ 的值。（可以畫出三角形，須確定斜邊與直角位置）

4 利用計算機，當 $\angle A=70^\circ$ 時，$\tan A$、$\sin A$ 與 $\cos A$ 的值為何？（四捨五入到小數點後第 2 位）

5 如圖，旗桿頂垂下一條比旗桿長的繩子，小予將繩子一端拉住，往水平方向走了 10 公尺，拉直繩子，且繩子與地面的夾角為 65 度，求旗桿的高度與繩子的長度。（請利用計算 機作答，並四捨五入到小數點後第 2 位）



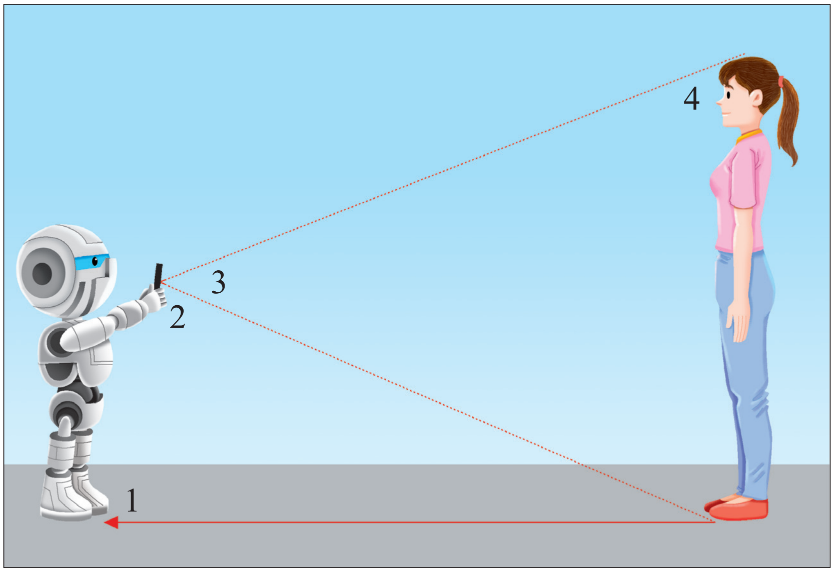
6 哈里發塔(阿拉伯語：خليفـــة بـرج，拉丁話：*burj khalifah*，英文：*Burj Khalifa*)，又譯哈利法塔，是位於阿拉伯聯合大公國首都杜拜境內的摩天大樓，為當前世界第一高樓與人工構造物，高度為 828 公尺，樓層總數 169 層。

政府欲在哈里發塔附近 5 公里內設置機場，且假設飛機離開跑道開始起飛時，維持 13 度，起飛點距離哈里發塔約 4000 公尺，這架飛機會不會直接撞到該建築物呢？

7 有使用過手機中的 *APP* 軟體嗎？透過手中的智慧型手機再配合《*Smart Measure*》軟體，你也可以立即知道任何物件的大概高度。

【附註】除了 *smart measure* 之外，尚有 *easy measure*、*Remote Height Meter*（遠距高度測量儀）等各類 *APP* 程式具有相同的原理與功能，本教材僅利用其中一種詳細說明，教師或同學可視下載狀況、是否收費、軟體穩定性來決定採用哪些 *APP* 程式。

⑴使用此手機軟體，唯一需要輸入的數值是你手持手機時的高度，即大約將身高減去 30 公分。假定你使用手機測量自己與對面那位女生的距離，該軟體利用手機中內建的陀螺儀（方向感測器），可用來測量鉛直、水平，或者是兩面（邊）之間的夾角。請在下圖中，指出該軟體需量出哪一個角度，即可以透過手持手機時的高度計算出你與該位女生的距離。



(A)∠1　(B)∠2　(C)∠3　(D)∠4

(2) 步驟 1 首先立正站定用手機向偵測物件的底部拍下一張照片，可以獲得測量物件與你的距離。

步驟 2 保持相同姿勢，再把手機相機鏡頭指向測量物件的最高點，然後按下【 樹林鍵 】，便可立即獲得此物件的高度。

請依據上述此軟體的操作步驟，寫下或畫圖說他是如何利用手機測量的角度，得到該女生的身高。

(3)《*Smart Measure*》是一款手機軟體，並不是專業測量工具，根據實地測試，利用《*Smart Measure*》來量度家中的大門和圍牆高度頗準確，但當測量電腦螢幕時卻顯示有 1.2 公尺長，所以評估使用該軟體測量大型物件會有較佳的表現。請試著用數學理由說明為何測量大型物件會比小型物件有較佳的表現。

【附件一】搭配 P2任務二、P3任務三

【附件二】搭配 P4任務四

【附件三】搭配 P5任務四

第四章　國民中學篇（II）

經驗分享

等差數列

第四章　國民中學篇 (II)

數學素養教材設計發展之經驗分享
等差數列

壹、緣起

十二年國民基本教育課程綱要總綱已於民國 103 年 11 月發布。十二年國民基本教育課程綱要因應人才培育的趨勢，提出素養導向的課程與教學，打開學校發展多元適性的課程空間，重視中小學十二年連貫統整的課程發展，強調學校整體課程的系統設計與實施。

在課綱研修工作之後，國家教育研究院於 104 年同步啟動為期 4 年 (104-107) 的兩大整合型計畫：一、素養導向教材與教學模組研發；二、課程綱要實施的轉化探究。國家教育研究院希冀透過素養導向教材原型之開發，提供教科書出版社與學校開發教材參考，以落實學生素養教學及學生核心素養之培養；結合研究合作學校共同進行各項課程綱要實施轉化之探究、模擬與實作，建置不同類型學校的課程綱要實施轉化模式與實踐案例，累積未來正式推動十二年國民基本教育新課程綱要之實踐知識與經驗，以提供學校端準備新課綱之參考。

「核心素養」是融合認知、技能和情意，經內化後的綜合表現，它能幫助學生積極回應個人的及社會的生活需求，迎接現在與未來的挑戰。「核心素養」較「基本能力」與「學科知識」涵蓋更寬廣的教育內涵，強調學習不宜以學科知識為限，而應關注學習與生活的結合，透過實踐力行而彰顯學習者的全人發展。

教育部提升國民素養實施方案─數學素養研究計畫結案報告（2013）中提到，數學素養內涵可更加明確闡述如下：數學素養的核心內涵應指個人的數學能力與態度，使其在學習、生活、社會與職業生涯的情境脈絡中面臨問題時，能辨識問題與數學的關聯，從而根據數學知識、運用數學技能、並藉

由適當工具與資訊，去描述、模擬、解釋與預測各種現象，發揮數學思維方式的特長，做出理性反思與判斷，並在解決問題的歷程中，能有效地與他人溝通觀點。

因此提升數學素養的願景是：有效學習數學的思維方式，以便靈活運用數學知識、技能與工具，解決生活中的問題，並成為具備理性反思能力的國民。做為能反思、能判斷、能決策的國民，必須具備解決問題的能力。如果數學課裡要學生解決的問題，是源自於現實的世界，例如如何規劃學校裡的緊急逃生路線，如何規劃有效使用學校水電資源以配合永續發展，這些影響生活品質的重要問題，便可以提供學習的動機與應用的導引，從而有助於建立國民的一般解決問題的能力。

純粹屬於數學本身的專技性問題並非完全不可取，因為精熟數學基本概念的操作演練，才有可能把數學方法靈活運用到與情境相連結的複雜問題。然而為避免形式化的數學教學與學習，教學現場應該經常、反覆並且具有創意地幫助學生把所學的數學與現實世界連結。如此不脫離生活經驗的數學學習，才有可能讓一般國民即使達不到熱愛數學，至少不會排斥數學；即使達不到隨時熟用數學，至少樂於嘗試使用數學。

貳、教材發展經驗分享

為試圖將核心素養的理念結合及轉化於數學課程之中，筆者加入十二年國民基本教育數學素養教材研發編輯小組，希望能透過規劃真實世界的數學問題解決脈絡課程，進一步發展學生使用數學知識進行問題解決的能力，幫助學生把所學的數學與現實世界連結，希冀提升學生數學素養的核心能力。數學領域研發編輯小組成員有王統新、古欣怡、朱安強、吳汀菱、吳姈蓉、林美曲、洪瑞英、馬雅筠、高健維、陳淑娟、曾明德、曾俊雄、蔡佩旻、鄧家駿等 14 位高國中小教師群，透過定期的會議討論、模組編寫、討論修改、專家審查、試教、同儕教師間的觀課、議課、再做模組的修改以迄完成，很感謝期間由召集人單維彰教授、副召集人鄭章華研究員，以及朱安強博士、陳淑娟研究員諮詢協助，以及國中小教師夥伴古欣怡老師、林美曲老師、曾

明德老師、蔡佩旻老師、鄧家駿老師的意見交換與討論。期待將新型態的數學素養教材模組提供為十二年國民基本教育數學領域教科書研發或教師自編教材參考。

以下將介紹等差數列模組的教材發展經驗。

一、起─教材架構與設計理念

數學的基本概念來源自生活的世界，但是數學與一般經驗科學有本質上的區別，也就是說數學關注的不是世界裡各種物件的物理或化學性質，而是它們之間的關係。關係由反思實體而生，本身卻不具有形的實體，充其量只是一些符號的表徵，這就是數學抽象性的本質。例如：1、2、3…，一、二、三…，或 one、two、three…只是自然數的不同表徵，它們所代表的概念性的數都是一樣的。然而日常生活裡的數卻總是伴隨著度量單位出現，例如：10 公斤玉米、60 度電、15 個小時。

數學在抽象的概念上發展，探索它們之間的相互牽連，從表象分殊的繁複概念裡，逐步抽離出更具統合性的上層精簡概念。然而世界之奇妙在於貌似虛空的思想建構，又往往出其不意並且極其有效地運用到實際的問題上。

故本教材研發企圖以生活中常見的數量與觀察情境切入數列概念，利用數形關係促進學生藉由觀察其規律建構數列概念，透過與生活情境的串聯，例如：火車座位規律來引入等差數列概念，進而以賣場飲料的排列方式，觀察出等差數列一般項的公式，最後是蚊子電影院擺放椅子的方式等等學習活動與任務，實際解決生活中的問題，逐步發展學生等差數列的相關概念，並處理生活中相關的問題解決情境。教材架構與教材設計理念分述如下：

（一）引起動機

由生活中的數列實例引發動機，利用觀察數列的變化引導學生了解數列與等差數列的意義，希望培養學生從生活中觀察數學規律，增進數學素養的提昇。

（二）主題一

學習活動由生活中的數列實例導入，以月曆、細胞分裂、計程車費率、

植物花瓣數目等實例讓學生觀察並認識不同數列，如等差數列、等比數列、無規律數列、費氏數列等，並說明數列在數學上的表示方法與符號運用，最後透過汽車儀表板及樂透號碼等數列練習題強化學生數列概念。

（三）主題二

透過生活中的數形關係設計，讓學生透過任務與練習，轉化數形關係，發現圖形中所呈現的數列規律，由不同的三個情境引導學生發現並進行討論。

（四）主題三

說明等差數列的意義，透過火車座位的實例引導學生發現等差數列，並介紹等差數列在數學上的表示方式，說明等差數列的意義。最後透過練習題判斷等差數列或計算不同項，熟練等差數列的規律。

（五）主題四

說明等差數列第 n 項的計算方式，透過實例與開放性問題讓學生各自找出飲料排列的規律，並推算各項的值，藉由對話式引導學生發現等差數列第 n 項公式。

（六）主題五

說明等差數列公差為負的情形，透過表格的整理，讓學生發現首項、公差、各項的值，並提供適當的任務來讓學生透過等差數列第 n 項公式來解決簡單的生活問題。

（七）延伸跳躍

最後，我們提供延伸跳躍思考任務讓學生思考如何以等差數列的概念解決較複雜的生活應用問題，整合強化前面所學習的內容。

二、承一分析等差數列單元學習目標與學生學習難點

十二年國民基本教育數學領域課程綱要的基本理念強調培養下一代的核心素養，亦即一個人適應現在生活及未來挑戰，所應具備的數學知識、能力與態度。課程目標重點在於學習對生涯有用的數學知識與能力，為學生日後進入大學、職場與社會做充分的準備。

核心素養強調多面向的學習，為了培養學生的核心素養，學校教育將不再只以學科知識作為學習的唯一範疇，而是著重培養學生在生活情境中，真實運用所學的學習表現。因此，教學上可多加運用校內外資源，進行觀察、探究、實作等多元有效的教學活動，更重視把數學思維方式、知識、能力與態度，運用在實際生活的問題解決或情境運用的「核心素養」能力培養。

在教材的脈絡設計上，筆者希望能將等差數列的單元目標與應用數學解決生活中問題的能力做緊密的結合，並透過學習難點分析，預先安排教材脈絡中值得學生進一步思考的議題，於是分析單元學習目標與學習難點如下：

（一）等差數列單元學習目標

1. 能觀察生活中的有序數列，理解其規則性，並認識「數列、首項、第 n 項、末項」等名詞。
2. 能察覺不同的數列樣式彼此間的關係。
3. 能觀察出各種不同的等差數列的規則性，求出其第 n 項，並認識「公差、等差數列」等名詞。
4. 能觀察出等差數列 a_1、a_1+d、a_1+2d、…的規則性，進而推導出其第 n 項公式　$a_n=a_1+(n-1)d$。
5. 能運用等差數列公式 $n=a_1+(n-1)d$ 解題，由已知條件推導出首項、末項、公差、項數。
6. 能應用等差數列解決生活中的問題。

（二）等差數列學習難點分析

1. 數列之觀察與迷思

在學習等差數列的過程中，一般學生對於數列的變化觀察，如增大或減少，均可容易觀察得知，惟在判別是否為等差數列時，易受兩數差為大數減小數之觀念影響，忽略了數列公差的定義為後項減前項，而產生誤判之情形。

2. 先備知識的學習經驗充分與否，決定了學習的深度

依學習架構分析，本單元學習前需具備之先備知識，涵蓋整數的四則運算、分數的四則運算、去括號、分配律及二元一次聯立方程式之解題技巧（代

入消去法、加減消去法）及未知數之運算規則。先備知識的學習經驗，是本單元學習的基本條件，依學習之理論，新知識的學習是舊經驗的延伸，補救教學的過程中往往需耗費更大的心力來彌補先備知識的不足。

3. 數列前、後項次與公差正負之相對關係的迷思

在解題過程中，容易出現之錯誤類型，有下列幾種：

(1) 基本算式（整數、分數的四則運算及去括號、分配律）之計算錯誤。

(2) 兩項次間相距的項數與公差彼此關係。

(3) 當公差為負時，前後項之計算，產生加減混淆之情形。相對於上述錯誤類型，究其原因則有：

A. 對基本公式的認知不清。

B. 對去括號規則的不了解。

C. 不清楚分配律等定律。

D. 數與量之計算觀念不了解。

三、轉

既然希望能發展新型態的數學素養教材模組，則期待由提升數學素養的目標來思考，參考數學素養白皮書建議文中已訂定提升數學素養的四大目標，蒐集相關素材，並設計教材脈絡。

（一）蒐集相關學習素材依據上述設計理念與單元學習目標分析，開始蒐集整理相關學習素材，分別敘述如下：

1. 等差數列的相關故事與歷史

德國數學家高斯 (Carl Friedrich Gauss) 計算等差級數和的故事。高斯十歲時，他的算術老師為了讓教室裡的小朋友安靜下來，靈機一動，便要求學生們算出「1+2+3…+100=?」，並且聲明算對的人就可先回家。不一會功夫，高斯回答：「5050」。訝異的老師請高斯解釋答案從何而來，他說：「我發現數列存在這個模式 1+100=101、2+99=101、3+98=101 以此類推直到 50+51=101。因為共有 50 組數對，總和必定是 50*101+5050。」

2. 思考生活中的數列與等差數列案例，如圖 1 所示之火車座位示意圖。

圖 1　火車座位示意圖

3. 網路相關資料媒材網路上有許多等差數列的科學或生物現象的案例

以植物花辮之觀察進行等差數列之教學（如圖 2 所示），觀察花瓣的數目中，我們發現最常見的花瓣數目是 5，其他花瓣的數目為 3（百合）。

其他常見花瓣還有如下：5 瓣：朱槿、杜鵑、梅花；8 瓣：桔梗；13 瓣：金盞花；21 瓣：紫莞；雛菊大多是 34，55，89 瓣。

圖 2　植物花瓣圖

4. 國外教材

我們也參考了國外的教材，來了解國外在進行等差數列的教學發展，以「Power Algebra.com」（如圖 3-1 所示）為例：

（二）依據數學素養目標設計教材脈絡

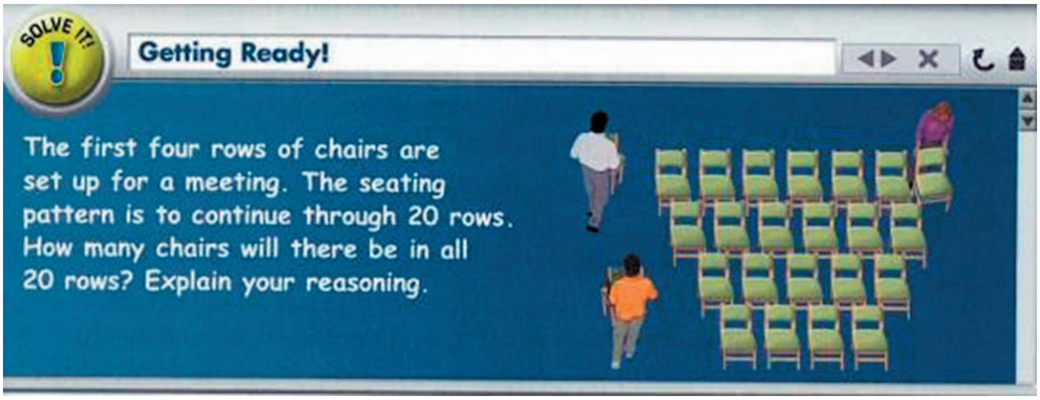


圖 3-1　Power Algebra 教材示意圖

1. 目標 1：學習並發揮數學思維的特長。
2. 目標 1-1：由繁化簡、以簡馭繁（抽象性）。
   (1) 指標 1-1-1：當面對不同情境的問題時，能有效蒐集、認知與整理相關的資訊，從中尋求事物間的關係與共通的性質。

國中八年級的等差數列，承接著國小數形關係(如圖 3-2)的概念而來，學生在遇到生活情境的資訊時，應具備觀察關係、有效蒐集資訊的能力，

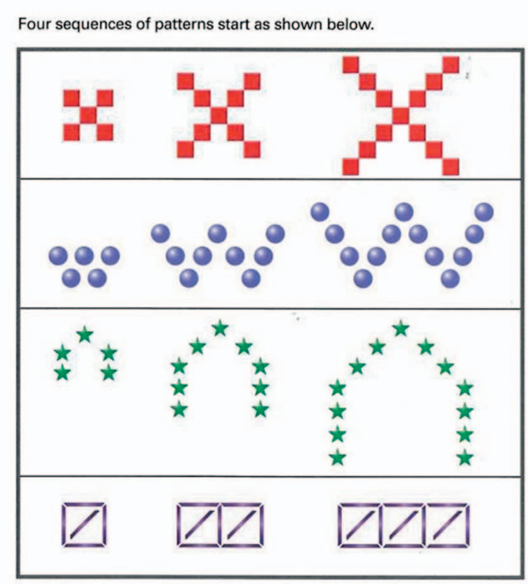


圖 3-2　Power Algebra. 教材示意圖 - 圖形關係

我們在教材中設計月曆、細胞繁殖、費率、花瓣等數字觀察，以數列導入，進而發現等差關係。以月曆為例（如圖 4），觀察月曆上的數字 1,8,15,22,29，想想看：A. 這是數列嗎？；B. 有沒有什麼規律？

圖 4　月曆範例圖

(2) 指標 1-1-2：針對問題能尋求適當的數學表達方式陳述，然後嘗試運用數學方法解決。

例題如下敘述之：

小貝與小真想搭自強號火車到花蓮去玩，買了兩張火車票（如圖 5 所示），小貝、小真座位號碼分別為 4 車 33 號、4 車 35 號。

圖 5　火車車票圖

小真：先來找找我的座位到底在哪裡呢？

小貝：好啊！但你知道火車內的座位是怎麼排的嗎？

小真：知道阿！我畫給你看（如圖 6）

火車座位：

左窗	左道		右道	右窗
1	3	走道	4	2
5	7		8	6
9	11		12	10
...	...		...	...

圖 6　火車座位配置表

任務一：請幫小真與小貝檢查看看是不是會坐在一起呢？請說明理由。

答案：

利用小學經驗，觀察到規律：

左窗的號碼被 4 除都是餘 1、左道的號碼被 4 除都是餘 3、右道的號碼被 4 除都是整除、右窗的號碼被 4 除都是餘 2。所以數一數就可以知道小貝的座位在左窗第九列。因為都是第九列的奇數，所以會坐在一起。

(3) 指標 1-1-3：能將針對特定問題所發展出的數學架構與方法，用以解決不同情境的問題。

生活上等差數列的例子，公差也有可能為負的，以前面火車座位的例子，當你從車廂的後門進入時，車廂的座位排列也可能如圖 7 所示：

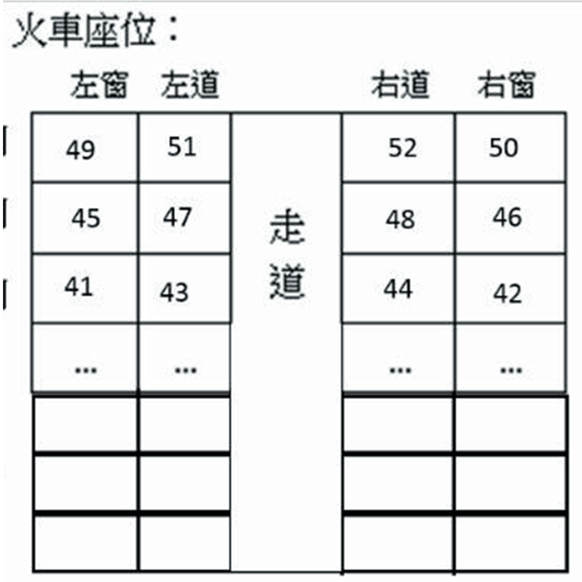


圖 7　車廂內座位排列圖

任務一：請將火車座位中右窗的號碼所形成的數列之前 10 項寫出，並寫出其首項及公差。

	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10
右窗	50	46	42	38	34	30	26	22	18	14

首項為 50；公差為 -4。

3. 目標 1-2：有條理的分析與推論（邏輯性）。

(1) 指標 1-2-1：能夠明辨推理的前提以及分析過程的合理性，並且重視論述的因果關係。

例題如下敘述之：

小真每天使用悠遊卡坐捷運上下課，有一天她下課後坐捷運刷卡出站時，刷卡機畫面顯示餘額為 0 元，於是當天她將悠遊卡加值到 500 元。若她每天坐捷運上下課各花費 30 元，問此次加值後，第幾次出站刷卡時，刷卡機畫面會出現餘額為負的？

4. 目標 1-3：永續而深刻的創新力。

(1) 指標 1-3-1：能將學校所教授的數學知識進行轉化與應用，以解決實際生活問題。

例題如下敘述之：

小貝與小真住在同一條馬路上，在此條馬路上的左邊的門牌號碼皆為奇數、右邊皆為偶數，每一號碼代表一棟大樓，小真家的門牌號碼為 3 段 52 號，小貝家的門牌號碼為 3 段 12 號，若想要從小真家要走到小貝家，請問要經過幾棟大樓呢？

5. 目標 2：充實並活用基本的數學知識。

6. 目標 2-1：變化與關係。

(1) 指標 2-1-1：能認識與應用函數的概念。

例題如下所示：

小貝：如果 n 代表飲料某一層，a_n 代表某一層的飲料瓶數，d 代表相鄰兩層飲料瓶數的差，a_1 代表最上面一層飲料瓶數。由上面的規則，可以發現某一層的飲料瓶數 = 最上面一層飲料瓶數 + (某一層 -1) × 相鄰兩層飲料瓶數的差，即 $a_n=a_1+(n-1)\times d$；例如：若飲料塔有 23 層，則最底層飲料有多少瓶？

$1+(23-1)\times 2=1+22\times 2=45$。

7. 目標 2-2：空間與形狀。

(1) 指標 2-2-1：能具備與應用基本的幾何知識。

生活中到處可見「數與形」，以及一些隱藏在「數與形」裡某些的規律，以圖八為例，小貝與小真一起用火柴棒排成如下列的圖案，依此規律：

任務一：根據下圖的規律，將各圖的如圖 (1) 之小三角形個數紀錄如下，並完成以下空格：

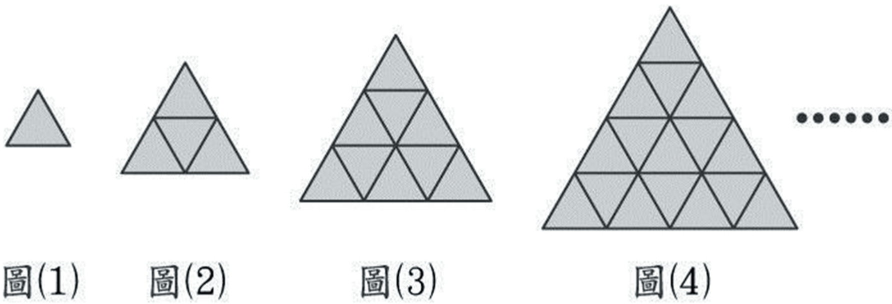


圖 8　火柴棒排列示圖

任務二：根據上圖的規律，將各圖的如圖 (1) 之小三角形個數紀錄如下，並完成以下空格：

圖	圖 (1)	圖 (2)	圖 (3)	圖 (4)	圖 (5)	圖 (6)
項數	a1	a2	a3	a□	a□	a□
三角形個數	1	4	9	16	25	36

任務三：請幫他們想想看，以此類推，則圖 (10) 會有多少個如圖 (1) 的小三角形？請說明理由。

8. 目標 2-3：數量

(1) 指標 2-3-1：能掌握與應用數、量與符號表徵。

例題如下敘述之：

小貝：再改寫一下會看得更清楚喔！如下圖 9 說明。

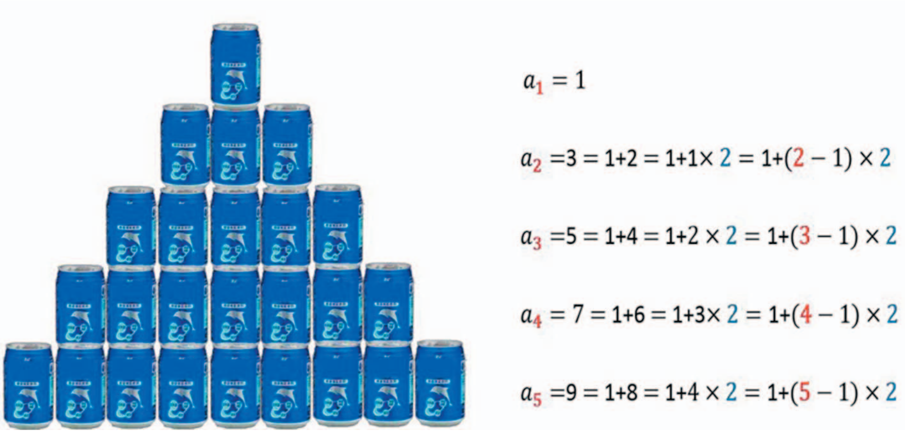


圖 9　範例圖

將以上算式以表格方式記錄如下：

項數	a1	a2	a3	a4	a5
	1	3	5	7	9

記錄一	1	1+2	1+4	1+6	1+8
記錄二	1	1+1x2	1+2x2	1+3x 2	1+4x 2
記錄三	1	1+(2 － 1) x2	1+(3 － 1) x2	1+(4 － 1) x2	1+(5 － 1) x2

任務一：從表中之紀錄，你看到什麼規律？

紀錄一：將各層轉換成與第一層有關。紀錄二：將各層轉換成與第一層、公差有關。紀錄三：將各層轉換成與第一層、公差、項數有關。請以記錄一、紀錄二、紀錄三之方式完成 a5 欄位的之空格。

9. 目標 3：建立健康的對待數學的態度。

(1) 指標 3-1-1：能培養出對數學的自信，並樂於嘗試使用數學，而成為思路清晰並擅長溝通的國民。

例題如下敘述之：

請舉一個等差數列的例子 (可以是數字或圖形)，並求出第 40 項，且說服你的同學你的解法是對的。

四、合一教學實施的回饋

等差數列的試教，在新北市立重慶國中進行，透過教學現場的觀課、議課，我們從教學現場得到教師觀課與學生學習的回饋整理如下：

（一）來自學生的回饋

開放性問題，小組間互相討論並做分享，學生會寫出較簡單的例子或是參考教材的例子，但仍會有較不一樣的想法如下：

1. 班上置物櫃號碼 :1,5,9,13,17。

2.3,7,11,15,19,23…，規律為加 4（如圖 10 所示）。

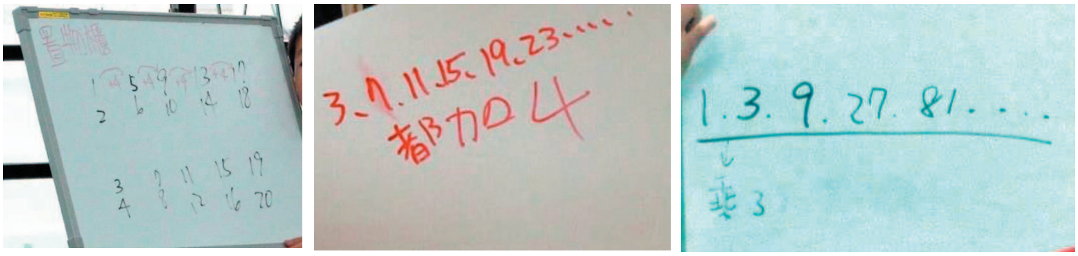


圖 10　學生回饋圖

3.1,3,9,27,81,…，規律為乘 3。

學生在舉例時應會有各種樣貌的數列，有無規則、遞增 / 遞減 / 不變。若學生僅出現遞增與公差為正的例子，可另舉二例，公差分別為 0 及負，請學生依老師給定的數列找出規則，範例如下：

1. 20,18,16,14,12,10,8,6。

2. 6,6,6,6,6,6,6,6。

學生在記錄首項及末項時會有錯誤記錄方式，如練習一的首項為 0、末項為 180，有學生記錄成 a_0、a_{180} 表示，可提醒學生正確的紀錄方式為首項為 $a_1=0$、末項為 $a_n=180$。

有些學生若無坐火車的經驗，可讓學生試著畫出火車座位表，思考火車座位的排列方式，等學生畫出後，再讓學生參考教材中的座位表去做後面題目討論（如圖 11 所示）。

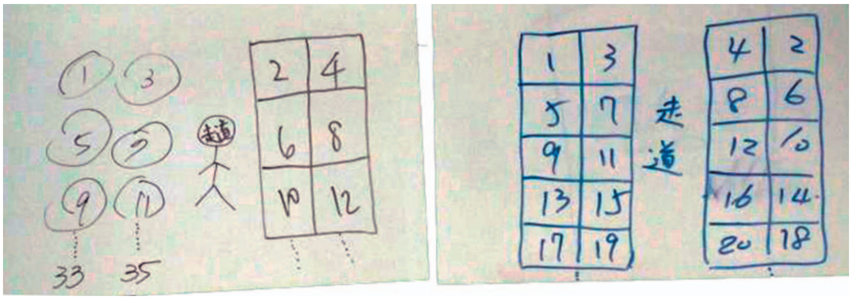


圖 11　學生呈現兩種座位排列的方式

敘述較長的問題，需要運用閱讀理解策略，了解學生是否理解題意，以利於後面的解題。

（二）來自教師的回饋

引導學生發現數量關係時可用的策略：

1. 用圖像來模擬每一項的情形。
2. 觀察相鄰兩圖之間的關係。
3. 使用學過的數字關係。如遞增、遞減、倍數關係、平方關係、立方關係等。

教師的回饋如下幾點表示：

1. 學習內容能與學生的生活經驗結合。
2. 老師的追問很重要，在門牌號碼的例子中，學生對於是否包含頭尾門牌號碼不清楚，老師進一步舉例可讓學生清楚題意。
3. 學生可由練習中回顧等差數列概念。學生面對問題時傾向於先各自做問題解決，教師可進一步鼓勵學生進行討論以及想法交換。
4. 儲值問題若學生自行閱讀感覺無從下筆，但經教師提示後，學生試圖想方法解決問題。

參、困難與突破

一、數學教育在數學素養上的突破

數學是數學素養的基礎，但是數學並不等於數學素養，目前學校的數學教材並非為培養學生的數學素養所準備。數學課程有著嚴格的體系，前一個知識的學習是為了下一個知識服務的。教師的教學過於強調計算和公式，能讓學生有運算上的熟悉度，但很難讓學生看到數學的實際價值，學生也很難將學校數學和現實世界進行連結。因此，學校的數學課程和教師的教學必須在知識和真實問題之間建立關係，才能讓學生在一定的情境脈絡設計下，截取有價值的資訊，建立模型、解決問題、並能正確講述或者描述，讓周圍人了解其工作，由此所產生的高原經驗 (plateauexperiences)，將能對學生人格狀態（包括個性、情緒表達、行為模式等）有明顯的正向轉化。數學素養比單純的數學少一些公式，多一些直覺、數感；少一些抽象，多一些脈絡；少一些符號，多一些具體；更能引發學生學習數學與解決問題的興趣。

二、數學能力的養成與情境脈絡的取捨

此次設計的教材由生活常例以及兩學生的暑假生活故事情境出發，鋪陳學生能逐漸累積等差數列的概念與知識。學生對於數學知識的熟悉度，將會嚴重影響學生在情境脈絡中發現數學關係的能力，兩者缺一不可。故數學知識的內部連結與熟悉度仍須重視，如此學生才能產生數感，並以數學的思維方式來思考解決複雜的生活問題。

具有數學素養的學生將會懂得數學的價值、對自己的數學能力有信心、有解決數學課題的能力、學會數學交流、學會數學的思想方法（陸昱任，2004）。將學生學習的數學內容與現實世界的情境脈絡連結，從而豐富學生對於數學概念的直觀掌握。自然科學與社會科學都有許多的學習素材，數學可與其他學科進行良性互動，促進多個素養的提升。強化學生邏輯推理的能力，也同時提升閱讀素養，脈絡與數學遷移相輔相成，建議教師能反覆地給予學生這樣的刺激與任務，幫助學生把所學的數學知識與現實世界做有意義連結與遷移，或是鼓勵學生發展故事或劇本來操作他們學過的知識與生活情境。

三、教材設計與教學現場的回饋

透過課綱解讀、教材設計、教學、學生學習以及現場教學的回饋，有時我們會發現有很多磨合處是需要調整，怎樣的提問方式能帶給學生不一樣的思考式學習，提問的問題是否夠清楚？當教材在現場教學中遇到學生的學習時，學生會有什麼想法與提問？教師應如何的調整與面對？唯有不斷的教與學，教材才會被賦予成長與生命。

此外，除了傳統的將完備的數學內容灌輸給學生、讓學生照著演練與解題之外，是否應給予學生機會嘗試感受數學的創造歷程？抽象性是數學思維的一種主要特色，但是需要長時間與循序漸進的學習，才能體會抽象性的必要與重要。經由邏輯上嚴謹的程序推得直觀上貌似顯然的事實，雖然在知識的組織上簡潔，但是在學習的認知方面可能使很多學生產生困惑，甚至缺乏信心與放棄。讓學生經歷數學知識產生的過程，透過逐步澄清概念、大膽猜想結果、保留繼續思考的開放性，更能促進學生對於自身數學知識的信心，進而相信數學能幫助自己獲得成功，進而繼續學習。

第四章　國民中學篇（II）

教學單元

等差數列

單元

等差數列

1 生活中的數列

1 數列的意義

將一些數字依序排成一列，我們稱之為數列。數列可以是有規律的，也可以是沒有規律的。

例如：1, 3, 5, 7, 9、

2, 9, 5 , 4, 3、

1, 1, 2, 3, 5, 8、

5, 5, 5, 5, 5, 5、

2, 4, 8, 16, 32、

8, 5, 2, -1, -4。

像這樣將數字排成一列，無論有規律、沒規律或重複出現都叫做數列。

2 生活中的數列

生活中常會看到一些數字排列在一起，例如：

1. 月曆

August

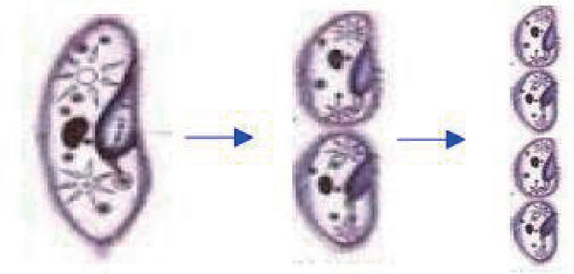
Sun.	Mon.	Tue.	Wed.	Thur.	Fri.	Sat.
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31					

觀察月曆上的數字 1, 8, 15, 22, 29，想想看，

(1)這是數列嗎？

(2)在這個月曆上，你還可以找到什麼有規律的數列嗎？

2. 細胞分裂



某單細胞生物，一個細胞就是一個生物，其進行第一次的細胞分裂後，產生二個細胞，就變成二個生物；進行第二次的細胞分裂後，產生四個細胞，就變成四個生物(如上圖所示)。因此，此單細胞生物經多次細胞分裂產生的細胞數依次為 1, 2, 4, ⋯⋯，想想看，

(1)這是數列嗎？

(2)有沒有什麼規律？

3. 費率

北北基計程車運價自 104 年 10 月 1 日起，調漲的費率表中增列了加收費用，如下表：

大臺北地區計程車運價簡易對照表

New Taxi Fare Table for Taipei City, New Taipei City and Keelung City. (effective from Oct.1st, 2015)

台北市・新北市及び基隆市タクシー運賃簡易早見表（2015 年 10 月 1 日施行）

※2015 年 10 月 1 日零時起實施「計程車新運價」，乘客應付車資除依舊式計費表顯示金額外，再依本表加收。

	計費表級距(元) Current Fare	加收費用(元) Surcharge Fare	計費表級距(元) Current Fare	加收費用(元) Surcharge Fare
日間 (Day-time) 06:00~23:00	70-95	0	550-595	120
	100-145	5	600-645	130
	150-195	20	650-695	145
	200-245	30	700-745	155
	250-295	45	750-795	170
	300-345	55	800-845	180
	350-395	70	850-895	195
	400-445	80	900-945	205
	450-495	95	950-995	220
廣告	500-545	105	1,000-1,045	230

北北基計程車新式計費表

加收費用金額數字如下：

0, 5, 20, 30, 45, 55, 70, 80, 95, 105, 120, 130, ⋯⋯，想想看，

(1)這是數列嗎？

(2)有沒有什麼規律？

4. 植物的花瓣

			
1 個花瓣的花	2 個花瓣的花	3 個花瓣的花	5 個花瓣的花
			
8 個花瓣的花	13 個花瓣的花	21 個花瓣的花	34 個花瓣的花

觀察花瓣的數目，我們發現最常見的花瓣數目是 5，其他花瓣的數目如下:

3：百合。

5：朱槿、杜鵑、梅花。

8：桔梗。

13：金盞花。

21：紫菀。

雛菊大多是 34，55，89 瓣。

花瓣的數目包含了一種極為奇妙的模式，這個奇特的數目：3，5，8，13，21，34，55，89，幾乎囊括了所有的花朵瓣數。

（資料來源：*http：//www.twwiki.com/wiki/%E8%B2%BB%E6%B0%8F%E6%95%B8%E5%88%97*）

常見花瓣數目：3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89，想想看，

(1)這是數列嗎？

(2)有沒有什麼規律？

把數字像這樣依序排列成一串稱為數列，數列中的每一個數都稱為一個項，例如：數列 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 中，
第一個數 3 稱為第 1 項或首項，以符號 a_1 表示；
第二個數 5 稱為第 2 項，以符號 a_2 表示；
第三個數 8 稱為第 3 項，以符號 a_3 表示。
這個數列共有 8 項，最後一個數稱為末項（或稱為第 n 項），通常用 a_n 表示。
（特別注意 a_n 的紀錄方式，其中 n 為下標，且 n 為正整數，為每一項的相對位置）

因此，這個數列分別以符號可表示為：
$a_1=3$，$a_2=5$，$a_3=8$，$a_4=13$，$a_5=21$，$a_6=34$，$a_7=55$，$a_8=89$。

補給站

代數符號的產生

現在的代數式子，用 x、y、z…… 表示未知數，這種記法是十六、七世紀時在歐洲逐漸發展起來的。十六世紀末，法國數學家韋達（*Francois Viete*，1540-1603 年），在他所著的《分析方法入門》一書，對符號代數學的發展有不少貢獻。現在我們所用的加號「＋」及減號「－」，是他所創用的。他用母音（a、e、i、o、u）代表未知量，但是笛卡兒（*Rene Descartes*，1596-1650 年）後來改用字母序列的後面部分字母 x、y、z…… 表示未知量，這個習慣一直延用到現在。


韋達


笛卡兒

任務 1

請舉一個數列的例子，並說明此數列是否有規律，規律為何？

練習 1

（資料來源：樂透彩網站 *http://www.pilio.idv.tw/*）

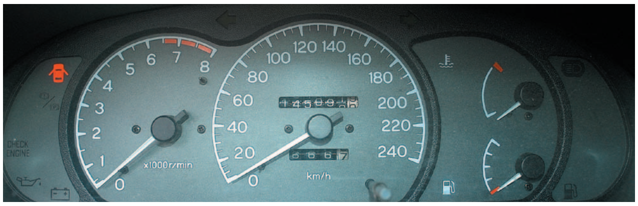
某期大樂透的開獎號碼 3, 6, 8, 15, 20, 30, 40，想想看，

(1)這是數列嗎？

(2)有沒有什麼規律？

(3)若是數列，此數列有幾項？首項是多少？末項是多少？

練習 2



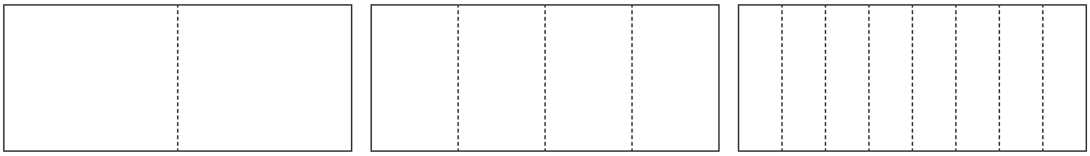
汽車儀表板上的數字 0, 20, 40, 60, ⋯⋯, 240，想想看，

(1)這是數列嗎？

(2)有沒有什麼規律？

(3)若是數列，此數列有幾項？首項是多少？末項是多少？

練習 3



一張紙對摺一次可將紙分成兩等分，對摺兩次可將紙分成四等分，對摺三次可分成八等分，依此規則，每次對摺後形成的等分數字為 2, 4, 8, ⋯⋯，想想看，

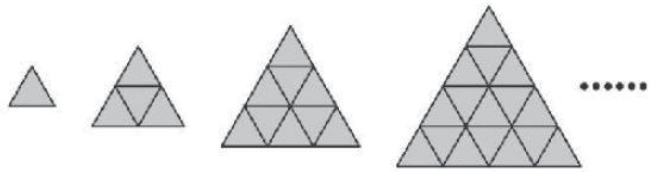
(1)這是數列嗎？

(2)有沒有什麼規律？

2 數形關係

生活中到處可見「數與形」，以及一些隱藏在「數與形」裡的某些規律，以下圖為例：

小貝與小真一起用火柴棒排成如下列的圖案，依此規律，



圖(1) 圖(2) 圖(3) 圖(4)

任務 2

根據上圖的規律，將各圖的小三角形個數紀錄如下，並完成以下空格：

	圖(1)	圖(2)	圖(3)	圖(4)	圖(5)	圖(6)
	a_1	a_2	a_3			
三角形個數	1	4				

任務 3

請幫他們想想看，圖⑽會有多少個小三角形？請說明理由。

練習 4

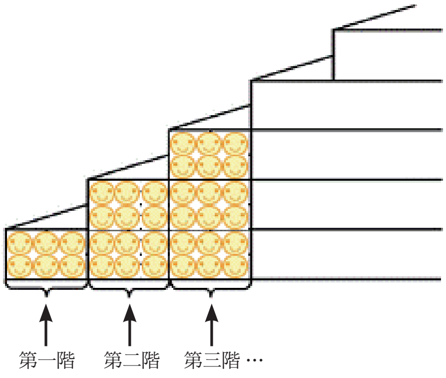
觀察下圖，並依圖(1)至圖(5)的規則性排列，回答下列問題:

圖(1)　圖(2)　圖(3)　圖(4)　圖(5)

1. 請依序寫出圖(1)至圖(7)中，黑珠的顆數。
2. 請依序寫出圖(1)至圖(7)中，白珠的顆數。

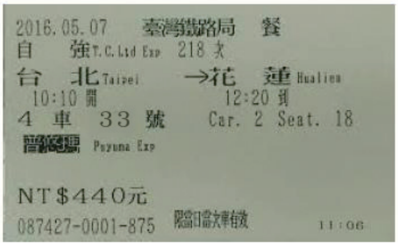
練習 5

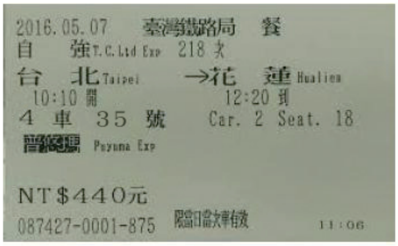
如圖，有一樓梯，它的每一階的長度、寬度與增加的高度都一樣。有一工人在此樓梯的一側貼上大小相同的正方形磁磚，第一階貼了 6 塊，第二階貼了 12 塊，……，依此規律貼了每一階的磁磚，請寫下此樓梯第一階到第六階各貼了多少磁磚？(仿自 91 年基測題)



3 等差數列的意義

小貝與小真想搭自強號火車到花蓮去玩，買了兩張火車票(如圖一)，小貝、小真座位號碼分別為 4 車 33 號、4車 35 號。





圖一

小真：先來找找我的座位到底在哪裡呢？

小貝：好啊！但你知道火車內的座位是怎麼安排的嗎？

小真：知道阿！我畫給你看。(如圖二)

火車座位

	左窗	左道		右道	右窗
第一列	1	3	走	4	2
第二列	5	7		8	6
第三列	9	11	道	12	10
	…	…		…	…

圖二　火車座位配置表

任務 4

請幫小真與小貝檢查看看，是不是會坐在一起呢？請說明理由。

小貝：我發現火車的每一排座位號碼是有規律的。例如，將左窗的號碼依序排列成一數列為：1, 5, 9, 13, 17, ⋯⋯。

小真：你好厲害喔！怎麼知道 9 後面的號碼是多少呢？

小貝：5 跟 1 差 4，9 跟 5 差 4，前後兩數都差 4，也就是後面的數減前面的數，差都一樣都是 4（如圖三）。所以可以用這樣的規律，把 9 後面的號碼寫出來。

火車座位

	左窗	左道	走道	右道	右窗
第一列	1	3		4	2
第二列	5	7		8	6
第三列	9	11		12	10
	…	…		…	…

圖三　火車座位配置表

【等差數列】

一個數列中，如果它的任意相鄰兩個數字之間，後項減前項的差是固定的，則稱為「等差數列」，而這個固定的差稱之為「公差」。

所以數列 1, 5, 9, 13, 17, ⋯⋯，稱為等差數列，公差為 4。

利用符號記錄這個數列的前五項可表示如下：

$$a_1=1$$

$$a_2=5=1+4=1+1\times4$$

$$a_3=9=1+8=1+2\times4$$

$$a_4=13=1+12=1+3\times4$$

$$a_5=17=1+16=1+4\times4$$

或以表格方式記錄成如下：

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
座位號碼	1	5	9		

＋4　＋4　＋4

任務 5

請把這個等差數列的第六項到第十項依照上面的規則寫下來。

	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
座位號碼					

任務 6

依照上面對火車座位號碼配置的觀察，請幫小真找找看她的座位到底在哪裡呢？（請回答左窗、左道、右道、右窗及第幾列）

任務 7

請將火車座位中，左道、右道的號碼所形成的數列，寫出前 10 項。

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
左道	3	7	11							
右道	4	8	12							

練習 6

判斷下列數列是否為等差數列？如果是，公差是多少呢？

(1) 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144

(2) 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5

練習 7

在下列空格中填入適當的數，使得每個數列成為等差數列：

(1) 4, 11, ________, ________, ________。

(2) -4, -2, ________, ________, ________。

4 等差數列第 n 項

小貝與小真逛賣場的時候，發現飲料排得很特別，像是一個飲料塔(如圖四)，兩個人又開始討論起來，推測如果有三十層，則最底層有多少瓶？

圖四

小貝：這些飲料的排列方式似乎也是有規律的。

任務 8

請寫出這些飲料排列方式的規律？

任務 9

根據前面觀察到的規律，如果這個飲料要排十層，則最下面一層要放幾瓶？寫出你的做法。

小真：有沒有其他比較快的方法可以算出來？

小貝：利用前面火車座位例子的記錄方式，這是一個等差數列 1, 3, 5, 7, 9, ...，第一項是 1，公差是 2。（如圖五）

圖五

$a_1=1$

$a_2=3=1+2$

$a_3=5=1+4$

$a_4=7=1+6$

$a_5=9=1+8$

小真：各項在首項後面出現的數字 2, 4, 6, 8，好像都跟公差 2 有關！

小貝：每列的瓶數可以寫成這樣，如下圖六說明。

圖六

$a_1=1$

$a_2=3=1+2=1+1\times 2$

$a_3=5=1+4=(1+2)+2=1+2\times 2$

$a_4=7=1+6=(1+2+2)+2=1+3\times 2$

$a_5=9=1+8=(1+2+2+2)+2=1+4\times 2$

小真：首項是固定要加的，各項公差前面乘數字 1, 2, 3, 4，跟項數是否有關係？

小貝：再改寫一下會看得更清楚喔！如下圖七說明。

圖七

$a_1=1$

$a_2=3=1+2=1+1\times2=1+(2-1)\times2$

$a_3=5=1+4=1+2\times2=1+(3-1)\times2$

$a_4=7=1+6=1+3\times2=1+(4-1)\times2$

$a_5=9=1+8=1+4\times2=1+(5-1)\times2$

將以上算式以表格方式記錄如下：

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
	1	3	5	7	
記錄一	1	$1+\quad 2$	$1+\quad 4$	$1+\quad 6$	
記錄二	1	$1+\ 1\times2$	$1+\ 2\times2$	$1+\ 3\times2$	
記錄三	1	$1+(2-1)\times2$	$1+(3-1)\times2$	$1+(4-1)\times2$	

1. 從表中之紀錄，你看到什麼規律？

2. 請以記錄一、記錄二、記錄三之方式，完成 a_5 欄位的之空格。

任務 10

根據圖七的記錄方式，將第十層的瓶數以首項、項數及公差表示。

小真：哦！原來這麼簡單。

任務 11

根據前面的記錄方式，將第三十層的瓶數以首項、項數及公差表示。

小貝：如果 n 代表飲料某一層，a_n 代表某一層的飲料瓶數，d 代表相鄰兩層飲料瓶數的差，a_1 代表最上面一層飲料瓶數，由上面的規則可以發現：某一層的飲料瓶數＝最上面一層飲料瓶數＋（某一層－1）×相鄰兩層飲料瓶數的差，即 $a_n=a_1+(n-1)\times d$。

例如：如果像圖七那樣排列，且飲料塔有 23 層，則最底層飲料有多少瓶？

$1+(23-1)\times 2=1+22\times 2=45$（瓶）。

【第 n 項】

一等差數列中，若首項為 a_1，公差 d，則第 n 項為 $a_n=a_1+(n-1)\times d$。

任務 12

請舉一個等差數列的例子(可以是數字或圖形),並求出第 40 項,且說服同學你的解法是對的。

練習 8

已知某等差數列的首項為 13 且公差為 3,求第二十項。

練習 9

已知某等差數列的第三項為 5,第五項為 19,求首項及第十項。

5 等差數列公差為負

生活上等差數列的例子，公差也有可能為負的，以前面火車座位的例子，當你從車廂的後門進入時，車廂的座位排列也可能如圖八所示：

火車座位：

	左窗	左道		右道	右窗
第一列	49	51	走道	52	50
第二列	45	47		48	46
第三列	41	43		44	42
	…	…		…	…

圖八

任務 13

如圖八，請將火車座位中，右窗的號碼所形成的數列之前 10 項寫出，並寫出其首項及公差。

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
右窗	50	46	42							

首項為__________，公差為__________。

任務 14

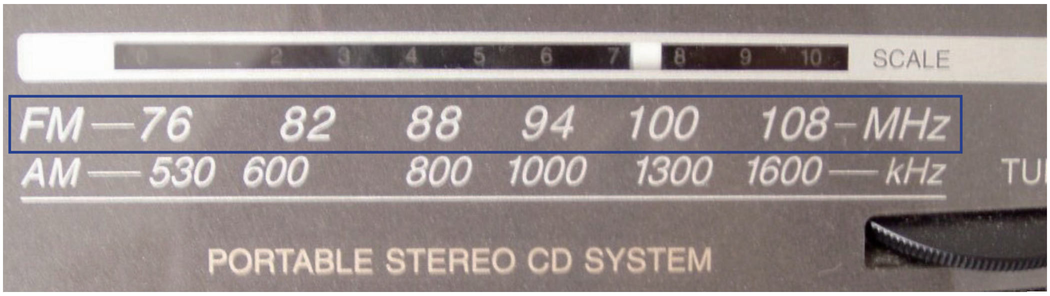
小貝與小真住在同一條馬路上，在此條馬路上的左邊的門牌號碼皆為奇數、右邊皆為偶數，每一號碼代表一棟大樓，小真家的門牌號碼為 3 段 52 號，小貝家的門牌號碼為 3 段 12 號，若想要從小真家要走到小貝家(包含小貝、小真家的大樓)，請問要經過幾棟大樓呢？

練習 10

小真每天使用悠遊卡坐捷運上下課，有一天她下課後坐捷運刷卡出站時，刷卡機畫面顯示餘額為 0 元，當天她將悠遊卡加值到 500 元。她每天坐捷運上下學，每次均花費 30 元，問第幾次出站刷卡時，刷卡機畫面會出現餘額為負的？

綜合演練

❶



圖為廣播儀表板上的數字 76, 82, 88, 94, 100, 108，

(1) 想想看，這是數列嗎？

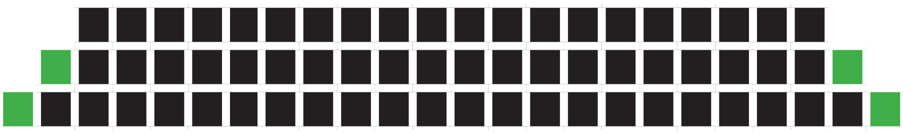
答:＿＿＿＿＿＿＿＿

(2) 有沒有甚麼規律？

答:＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

(3) 若是數列，請問有幾項？首項是多少？末項是多少？

❷暑假期間，區公所在學校舉辦居民蚊子電影院活動，小貝與小真參加志工服務協助搬椅子布置場地。區公所承辦人員告訴兩位同學，依照學校場地的大小與參加人數，第一排需要排 20 個座位，每一排比它的前一排多 2 個座位，以這樣的規律進行座位的安排，如果蚊子電影院共有 24 排的話，最後一排要搬幾張椅子？



第一排 20 位
第二排 22 位
第三排 24 位

1. 規律是什麼？

(1)請將每一排的座位數量使用數字表示，並列出來。

20, ________ , ________ , ________ , ________ , ________......

(2)請觀察每一排座位數量的規律，發現它是一種______________數列。

說明原因：

2. 最後一排有幾個座位？

❸小真測試低溫冷凍車是否保持恆溫，於是他從某天中午開始，一直到隔天中午，每經過 1 個小時就去測量一下冷凍庫的溫度，其測量結果如下：

經過時間(小時)	溫度(℃)	經過時間(小時)	溫度(℃)
1	−18	13	−18
2	−18	14	−18
3	−18	15	−18
4	−18	16	−18
5	−18	17	−18
6	−18	18	−18
7	−18	19	−18
8	−18	20	−18
9	−18	21	−18
10	−18	22	−18
11	−18	23	−18
12	−18	24	−18

請問：

1. 冷凍庫每個小時顯示的溫度有什麼規律？
2. 每小時顯示的溫度是等差數列嗎？
3. 若是等差數列，請問有幾項？首項是多少？末項是多少？公差是多少？

❹某公司舉辦體重減重管理計畫，活動時間為期 20 週，只要達標就可以獲得獎項。所謂健康體重管理是以補充足夠的營養，並搭配飲食控制及運動，進而達到理想體重。小文因長時間不運動且常吃消夜，近年來體重暴增，為了讓自己減重及維持健康身體，於是他就去報名了體重減重管理計畫，希望能夠恢復到標準體重，報名當天量了身高與體重並開始記錄每日體重變化，其中身高為 166 公分，體重為 90.2 公斤。請問：

1. 以世界衛生組織計算男性標準體重之方法：(身高 $cm-80$)$\times 70\%=$標準體重，求小文的標準體重為多少公斤？
2. 開始報名後第一週小文去量他的體重，發現體重變成 88.7 公斤，如果每週減重的量都是固定的，求第十週小文的體重變成多少公斤？
3. 持續這樣的方式減重，是否能於第 20 週後，達到標準體重呢？

第五章　普通型高中篇（I）

經驗分享

（一）相關係數與最佳直線

第五章　普通型高中篇 (I)

數學素養教材設計發展之經驗分享
（一）相關係數與最佳直線

壹、教材設計理念

一、教材架構

本教材企圖從歷史與生活的角度切入，透過一連串的活動發展概念與程序性的知識，活動之後都會統整前面的概念與程序，並且做一個小結論，除了活動、任務之外，編者設計了六個評量問題，希望學生可以透過實作的方式熟悉計算機的操作，並且深化教材中的概念。

二、教材設計想法

（一）第一單元編者選擇了介紹相關係數的歷史與相關性的生活應用，除了希望學生的學習可以更緊密連接相關的歷史與應用的脈絡之外，更希望能提升學生數學閱讀的能力。

（二）編者先從散布圖與直線相關性出發，用 Excel 畫出散布圖並且討論兩筆數據的直線相關程度，編者希望能引發學生思考為何需要發展相關係數衡量直線相關程度，因此設計例題讓學生發現光靠散布圖無法客觀判定直線相關性，引發其探討如何發展衡量直線相關性的統計量 (相關係數) 的動機。

（三）教材在相關係數的定義方式，有別於一般教科書的內容，編者以如何衡量直線相關性為出發點，設計例題讓學生討論如何選擇直線來代表數據的直線關係，討論的核心是各種誤差形式的優缺點。一般課程總是直接寫出最小平方法的誤差形式，課堂上再由老師解釋原因，不過編者希望誤差形式是透過學生的討論產生的，這樣更能夠深化最小平方法的概念。

（四）獲得最小平方法的誤差形式的共識之後，編者繼續設計例題用同學理解的方法（配方法）找出最佳直線，有鑑於學生程度的個別差異，學習單上把配方的過程顯示出來，希望學生可以先繞過繁瑣的代數計算，而直接根據配方結果找出最佳直線 $y=a+bx$。

（五）為了能夠簡化計算，編者將數據標準化並且找最佳直線，誤差 $=a^2+[b-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i'y_i')]^2+1-[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i'y_i')]^2$，上述關係中，a=0，$b=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i'y_i')$ 時，誤差最小，這表示直線 $y=[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i'y_i')]x$ 最能代表數據的直線關係，並且據此定義相關係數，$r=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i'y_i')$ 再將這個定義寫成原來數據的定義形式：相關係數 $r=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i'y_i')=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)^2\cdot\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_y)^2}}$ 教材這樣的安排是以衡量直線相關為核心，最佳直線的過程中自然定義出相關係數，編者認為這比一般教科書中總以的 $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)$ 正負與相關性、有界性的理由來解釋相關係數的定義來得有說服力，又因為誤差的最小值為 $1-r^2$，因此很容易得知 $-1\leqq r\leqq 1$，可以避免介紹複雜的方法得到係數範圍的教學流程。

（六）編者將利用 Excel 畫散布圖、計算相關係數與最佳直線的程序都放在教材的附錄中，鼓勵學生利用電腦做計算，這樣的用意是希望學生學習的重心不全是用紙筆計算相關係數或最佳直線，更重要的是散布圖的解讀，了解相關係數與最佳直線的意義。

貳、教學模組亮點

一、從歷史與生活的角度切入

（一）讓學生的學習緊密連接相關歷史與應用的脈絡。

（二）期能提升學生數學閱讀的能力。

二、根據核心概念設計不同教學活動

（一）創造一個探索問題、解決問題的課堂環境，以發展概念與程序性的知識。

（二）有助於提升學習動機、上課參與及學習興趣。

三、透過實作熟悉計算機操作，深化教材概念

（一）將 Excel 畫散布圖、計算相關係數與最佳直線的程序放在教材的附錄，鼓勵學生利用電腦做計算。

（二）用意是希望學生學習的重心不全是用紙筆計算，更重要的是對散布圖的解讀，了解相關係數與最佳直線的意義。

四、定義相關係數的方式，有別於一般教科書

（一）以如何衡量直線相關性為出發點，設計活動讓學生討論如何選擇直線來代表數據的直線關係。

（二）以討論各種誤差形式的優缺點，深化最小平方法的概念。

（三）從求最佳直線的過程中自然定義出相關係數 r，編者認為這比一般教科書中以正負、強度、無關單位、範圍有界等理由來解釋相關係數的定義更有說服力。

（四）透過誤差的最小值為 $1-r^2\geqq 0$，很容易得知 $-1\leqq r\leqq 1$，可以避免介紹複雜的方法得到相關係數範圍的教學流程。

參、教學模組架構

一、學生手冊

（一）歷史與生活

（二）直線相關

（三）最佳直線與相關係數

（四）評量

二、教師手冊

（一）採書中書方式。

（二）將學生手冊每頁加入「搭配學生手冊」的說明。

（三）內容分「活動解答」，「教學活動安排」與「教學注意事項」等三部分。

肆、教學模組試教過程

一、參與人員

（一）試教、觀課與議課指導教授：中央大學單維彰教授、國家教育研究院陳淑娟研究員、鄭章華研究員。

（二）試教、觀課與議課參與教師：臺北市建國高中林信安老師、曾俊雄老師、徐建策老師、陳嘯虎老師、游明俐老師、陳佩如老師等。

二、試教

（一）單元：最佳直線與相關係數

（二）教材作者：臺北市建國高中 林信安老師、曾俊雄老師

（三）試教教師：臺北市建國高中 林信安老師

（四）時間：103 年 10 月 28 日、30~31 日

（五）地點：臺北市建國高中 夢紅樓七樓 127 班學生

（六）試教節數：四節

三、觀課

（一）進行教學流程檢核。

（二）關注學生動機與學習投入情形與成效。

（三）觀察者填寫「教學觀察回饋表」。

四、議課

（一）討論對於學生學習情形的觀察。

（二）針對相關係數切入方式進行討論。

（三）針對最佳直線的四種誤差 E_1、E_2、E_3、E_4 的教材設計、教學方法與所需時間進行討論。

（四）分享教學觀察中的收穫。

五、反思

（一）針對教材內容有誤部分進行勘誤，更正。

（二）針對文字流暢度做修改。

（三）針對意見及建議進行教材修正。

圖 1 林信安老師試教場景圖

林信安老師試教場景－老師講解

林信安老師試教場景－學生分組討論

林信安老師試教場景－教師觀課

臺北市建國高中－議課場景

伍、教學模組開發困難及突破

一、困難之處：

（一）在教材撰寫初期，對數學素養意涵不易掌握。

（二）撰寫者擔心所開發教學模組是否算是數學素養導向教材。

（三）闡述所開發教學模組與數學素養培養理念的聯繫。

（四）闡述所開發教學模組如何培養數學素養。

（五）闡述所開發教學模組要培養什麼樣的數學素養。

二、突破之處

以下是審查委員審查這一份教材時，所給予的四點肯定：

（一）以結合歷史與生活和實際問題情境出發，立意佳。

（二）以創新的方式切入介紹相關係數的概念。

（三）以有系統的方式檢驗教學成效。

（四）研修成果極具參考價值。

陸、結論與建議

數學素養導向教材的撰寫尚在摸索階段，是一種新挑戰，需要新點子，更要創新格局，每一步都是新的嘗試，期待能為未來開創一種新型態教材，為提升國民數學素養努力！還望各位教育先進、學者專家多給於指導、批評與指教。

第五章　普通型高中篇（Ｉ）

經驗分享

（二）排列組合

第五章　普通型高中篇（I）

數學素養教材設計發展之經驗分享

（二）排列組合

壹、教材設計理念

一、教材架構

本教材先從歷史與生活的角度切入，期望學生了解「數學是一種人類活動的結果，而不是一開始便是如此型態的結構，並能對數學與我們的社會、文化以及與其它各種不同學科之間的關係，提供更多的認識」。接著透過一連串的活動發展概念與程序性的知識，活動之後都會統整前面的概念與程序，並且做一個小結論，除了活動、任務之外，編者設計評量問題，希望學生透過解題實作，深化教材中的概念與知識。

二、教材設計想法

（一）第一單元編者選擇了介紹排列組合的歷史與生活上的相關應用，除了希望學生的學習可以更緊密連接排列組合的歷史與應用的脈絡外，更希望能提升學生數學閱讀的能力。

（二）編者先從重複排列出發，以生活應用題引起動機，並結合前一單元的乘法原理，介紹重複排列。

（三）在直線排列的教法設計上，有別於一般教科書。有鑑於學生剛開始學習「排列」時，不一定有「位置」的想法，編者以「排入」的方式得出：n 個不同的事物排成一列，共有 $1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n = n!$。有了 $n!$ 的觀念之後，並不急於介紹符號 P_k^n，而先進入「有相同物的排列」的計算，深化學生對乘法原理、除法原理與階乘（$n!$）觀念的掌握。

透過「有相同物的排列 (不盡相異物排列)」觀念的建構，$P_3^5=\dfrac{5!}{(5-3)!}=\dfrac{5!}{2!}=60$ 的學習脈絡，很自然的透過下列方式進行：五人取三人排列，每一種排法勢必有兩個人不用排到，現以各別表示第位出場的順序，並以×表示不用出場，現在先固定五人的順序，則 $abc\times\times$ 的每一種排列就相當於一種出場方法，於是共有 $\dfrac{5!}{2!}=60$ 種出場的順序。即 $P_3^5=\dfrac{5!}{(5-3)!}=\dfrac{5!}{2!}=60$ 。而組合數，就相當於○ ○ ○ ××的排列數，即 $C_3^5=\dfrac{5!}{3!2!}$ 。

（四）傳統的排列組合的教學中太多題型與策略技巧，使學生產生很大的挫折感，進而影響學生的學習動力。我們基本以最少的觀念希望只透過階乘 (n!) 與「有相同物的排列 (不盡相異物排列)」觀念的掌握，其實背後基本上為樹狀圖與乘法原理就可掌握「排列」與「組合」的核心！

（五）請教師理解每一活動為一教學模組，教師可根據學生程度與現場教學狀況，調整各任務的實施，或可作為再一次講解深刻印象，或作為課堂立即評量或是作業等。

（六）許多活動的任務陳列，有古有今，希望讓讀者有「貫古通今」之感；在排列組合的學習過程中，「每一個數學式子，背後都有其故事」，我們依此「式境合一」概念，對照解析幾何學習中的「數形合一」，設計開放性問題、多元表徵與平行任務 (parallel tasks) 等輔助學習者透過討論，從不同面向思考數學概念或解題，建立更清晰的數學觀念，或是進行差異化教學；教師手冊中有些「補充練習題」，可作為學生補充練習或思考之用。

貳、教學模組架構

一、學生手冊

（一）歷史與生活

（二）排列組合

1. 重複排列
2. 直線全取排列
3. 有相同物的排列
4. 組合與排列 n 人取 k 人的組合與排列「含餘組合公式（組合對稱公式）、巴斯卡性質」
5. 評量

二、教師手冊

（一）採書中書方式。

（二）將學生手冊每頁加入「搭配學生手冊」的說明。

（三）內容分「活動解答」，「教學活動安排」與「教學注意事項」等三部分。

參、教學模組試教過程

一、參與人員

（一）試教、觀課與議課指導教授：中央大學單維彰教授、國家教育研究院陳淑娟研究員、鄭章華研究員

（二）試教、觀課與議課參與教師：臺北市建國高中曾俊雄老師、翁福永老師、游明俐老師、王統新老師、林子靖老師、中山女中吳汀菱老師、洪瑞英老師等。

二、試教

（一）單元：排列組合

（二）教材作者：臺北市建國高中曾俊雄老師、王統新老師

（三）試教教師：臺北市建國高中 曾俊雄老師

（四）時間：104 年 11 月 12~13 日

（五）地點：臺北市建國高中　220 班教室

（六）試教節數：四節

三、觀課

（一）進行教學流程檢核。

（二）關注學生動機與學習投入情形與成效。

（三）觀察者填寫「教學觀察回饋表」。

四、議課

（一）討論對於學生學習情形的觀察。

（二）針對改變當前課本的教學脈絡：以「重複排列 ---> 直線全取排列 ---> 有相同物的排列 ---> 組合與排列 n 人取 k 人的組合與排列」為順序的方式進行討論。

（三）針對新穎的直線全取排列 (n!) 的教材設計與教學方式進行討論。

（四）針對新穎的排列 (P) 與組合 (C) 整合於一活動進行的教材設計與教學方式進行討論。

（五）針對含餘組合公式 (組合對稱公式) 的教學方式進行討論。

（六）針對巴斯卡性質的教材設計與教學方式進行討論。

（七）分享教學觀察中的收穫。

五、反思

（一）針對教材內容有誤部分進行勘誤，更正。

（二）針對文字流暢度做修改。

（三）針對意見及建議進行教材修正。

六、修訂後審查委員給予肯定

（一）整體說明較上次清楚且有整體感，較能體現素養導向的目標。

（二）整體修正讓內容更有連貫性且與生活結合度更高。

圖 1　試教場景圖

曾俊雄老師試教場景－學生發表作法　　曾俊雄老師試教場景－活動設計實施

第五章　普通型高中篇（Ⅰ）

教學單元

（一）相關係數與最佳直線

最佳直線與相關係數

壹 歷史與生活

一 歷史
二 生活

貳 直線相關

一 散布圖與相關

叁 最佳直線與相關係數

一 最小平方法
二 定義相關係數
三 找最佳直線

壹 歷史與生活

1 歷史

法蘭西斯．高爾頓爵士 *Sir Francis Galton*
（西元1822～1911，英國人）

1884 年，英國人類學家高爾頓（*Sir Francis Galton*）在倫敦成立人體測量實驗室，收集了許多關於親子間的資料，包括身高、體重、特定骨頭的長度等。他發現「非常高的父母所生的孩子，往往會比父母矮些，而非常矮的父母所生的孩子，則往往比父母高」，他把這個現象稱作「迴歸至平均值（*regression to the mean*）」，這就是現在的統計上「迴歸（*regression*）」一詞的起源。

事實上，高爾頓是演化論之父達爾文（*Charles Darwin*）的表弟，高爾頓原本在劍橋讀醫學。1860 年時，高爾頓轉向氣象學的研究，在這段研究過程中，他對於統計方面的興趣與能力漸漸的浮現。1865 年起，高爾頓由於自己家族的經驗以及達爾文的影響，興趣轉向於人類種族的進化與遺傳學，並開始了研究統計上的問題。而他最為大家熟知的事蹟，便是首先發現了不同人、不同種族具有不同指紋。這讓人們知道世界上每個人的指紋都是獨一無二的，甚至有特定的方法可用來區分並辨識一個人的身分。

起初，為了了解遺傳的特性，高爾頓試圖從智力演化的方向去探討，卻礙於當時沒有一套完善測量智力的方法而遭遇到瓶頸。於是他想到一個能容易測量且公正的人類特徵「身高」，這才有了人體測量實驗室的成立。

高爾頓在達爾文的《物種原始》一書中提到他對於遺傳的看法：「這些新的觀念，激勵我去研究遺傳學和人類種族的進化。」此時，他需要一個好方法來描述這個世代的智力，與前一個世代的智力是「相關」的。高爾頓再嘗試尋找可供測量如此關係的數學方法後，他開始使用了相關係數（*correlation coefficient*）的概念。他使用字母「*r*」來表示相關係數，而這個傳統一直延續至今。現今的相關係數的公式是由高爾頓的學生皮爾森（*Karl Pearson*）所發展出來的。

（資料來源：國立臺灣大學「生物統計學程」*http://www.economics.soton.ac.uk/staff/aldrich/Figures.htm#gal*）

2 生活

在網路新聞上搜尋「相關係數」一詞，可發現它在經濟、科學、政治等生活應用的各種新聞不少，例如：

『生活幸福感是一個非常主觀的概念，在這一次的調查中，我們針對「生活幸福感」作出調查，同時透過和生活幸福感可能有關的 11 個面向分別進行電話訪問。調查結束之後，統計分析顯示，按照相關程度的高低，和生活幸福感最相關的面向分別為：未來發展樂觀度（相關係數為 0.545）、經濟收入（0.457）、工作情況（0.450）、家庭關係（0.362）、人際關係（0.319）、地方政府施政（0.291）、環境品質（0.276）、健康狀況（0.270）、政治權利（0.265）。至於治安狀況則不具有統計解釋力、宗教信仰相關係數偏低，這兩個面向因此只有表面上的參考價值，我們不再作深入的探討。』（2012/05/17　幸福指數的重要性 臺灣競爭力論壇彭錦鵬，臺灣競爭力論壇理事長）

甚至，我們會在財經新聞上聽到這樣的報導：「歷史經驗顯示，美國聯準會升息前，美元會有一波明顯上漲的走勢，而美國十年期公債與基準利率相關係數高達 0.92（呈高度正相關），且殖利率曲線走勢明顯快於聯邦基準利率，因此，可視這兩指標為美國何時升息的領先指標……。」（2015/07/31　從 7 月的利率會議聲明，來看 9 月美聯儲升息的機率！）

現在生活周遭中許多變數間關聯性的探討，與種種分析數據的方法，其實是源自於數百年來科學家們努力的成果。

貳 直線相關

1 散布圖與相關

前言：

在日常生活中，我們也常常將兩個數據資料相提並論，例如：吸菸與肺癌、咖啡因與骨質疏鬆症、睡眠時數與肥胖程度、國民所得與壽命、產品的售價與需求量等等。

針對兩個數據資料之間可以討論以下三個問題：

(1) 兩個數據資料間的關聯性為何？

(2) 如何衡量兩數據資料直線相關的程度？

(3) 如何找出最佳的直線來描述兩數據資料的關係並作預測？

活動 1

數學成績高的學生，物理成績通常也不會很低嗎？

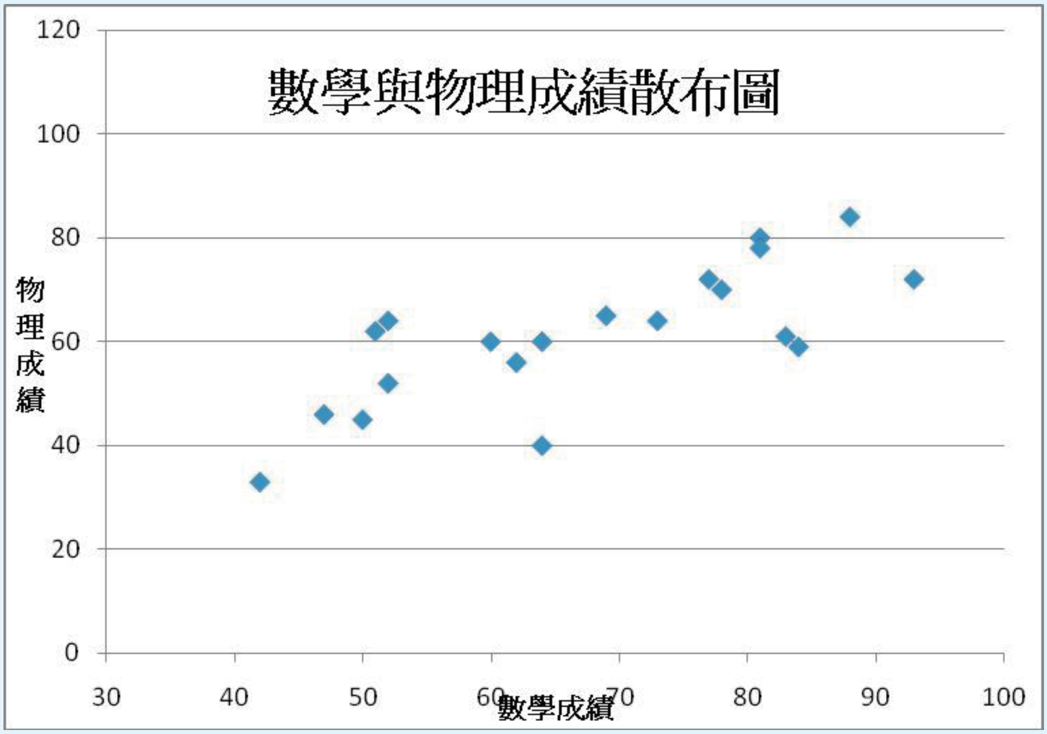
考慮某個社團中成員數學與物理的成績：

編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
數學	93	88	83	42	50	81	52	69	73	78
物理	72	84	61	33	45	80	64	65	64	70

編號	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
數學	84	52	77	64	62	64	60	81	51	47
物理	59	52	72	40	56	60	60	78	62	46

將兩個數據資料，以數對方式畫在坐標平面上，以表明它們的分布情形的圖形，如圖所示，稱為**散布圖**，散布圖上的點稱為**樣本點**。

觀察數學與物理的散布圖，經由計算數學與物理成績的平均數分別為67.55 與 61.15 分，是否有數學成績超過（低於）平均數，而物理成績超過（低於）平均數的趨勢？



活動 2

適量的飲用葡萄酒可以預防心臟病？

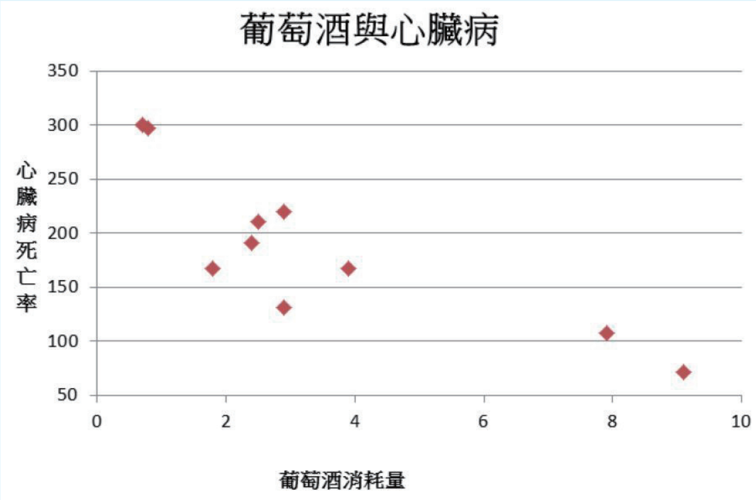
下表是 10 個已開發國家一年葡萄酒消耗量（平均每人從喝葡萄酒所攝取的酒精量）以及一年中因心臟病死亡率（每十萬人死亡人數）。

國家	澳洲	奧地利	比利時／盧森堡	加拿大	丹麥
葡萄酒消耗量（公升）	2.5	3.9	2.9	2.4	2.9
心臟病死亡率（每十萬人死亡人數）	211	167	131	191	220

國家	芬蘭	法國	荷蘭	愛爾蘭	義大利
葡萄酒消耗量（公升）	0.8	9.1	1.8	0.7	7.9
心臟病死亡率（每十萬人死亡人數）	297	71	167	300	107

※ 資料來源出自《統計學的世界》*P*400 （*David S.Moore*著，鄭惟厚譯，天下文化）

觀察上述資料的散布圖，經由計算葡萄酒消耗量、心臟病死亡率的平均數分別為 3.49 公升、186.2 人，是否有葡萄酒消耗量超過（低於）平均數的國家，他們人民心臟病死亡率低於（高於）平均數的趨勢？



根據前面兩個問題，可以得到以下結論：

1. 散布圖（*scatter plot*）的意義：

蒐集了兩數據資料 X 與 Y：(x_1, y_1)、(x_2, y_2)、……、(x_n, y_n)，將每一個數對 (x_i, y_i) 標示在坐標平面上，所得的圖形稱為**散布圖**，散布圖上的點稱為**樣本點**。

從散布圖中，我們可以觀察資料分布的整體型態與相關情形。

2. 正相關與負相關

從散布圖中觀察兩個數據資料 X 與 Y 之間的相關情形，當其中一個數據的值高於平均時，另一數據的值也傾向高於平均；而其中一個數據的值低於平均時，另一數據的值也傾向低於平均，則稱數據資料 X 與 Y 是**正相關**（positively associated），**此時樣本點大致上會從左下往右上傾斜**。如果其中一個數據的值高於平均時，另一數據的值傾向低於平均；而若其中一個數據的值低於平均時，另一數據的值傾向高於平均，則稱數據資料 X 與 Y 是**負相關**（negatively associated），**此時樣本點大致上會從左上往右下傾斜**。

任務 1

從散布圖判別正相關與負相關：

(1)活動 1 中，請問兩筆資料是正相關或是負相關？

(2)活動 2 中，請問兩筆資料是正相關或是負相關？

任務 2

某公司在過去數年擁有穩定的月銷售金額。今年該公司決定調整廣告費用以觀察是否對銷售金額有明顯影響，為了利於評估廣告對銷售金額的影響，該公司蒐集的資料數據如下表。其中每月廣告費用 x_i（單位：千元）與銷售金額 y_i（單位：千元）。

月分	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
廣告費用 x_i（千元）	2	4	6	5	3	5	4	3	5	7
銷售金額 y_i（千元）	35	50	60	60	45	55	40	40	50	65

(1)請根據上述資料畫出散布圖，並將「銷售金額」置於垂直坐標軸上。

(2) 請描述資料分布的整體型態及「廣告費用」、「銷售金額」二者的關聯性。

任務 3

某肥皂廠商欲推出一種新產品，在上市前以不同的單價 x （單位：十元）

調查市場的需求 y （單位：萬盒），調查結果如下表：

單價 x	8	9	10	11	12	13
需求 y	13	12.4	11	9.6	9.2	8

(1) 請根據上述資料畫出散布圖，並將「需求」置於垂直坐標軸上。

(2) 請描述資料分布的整體型態及「單價」、「需求」二者的關聯性。

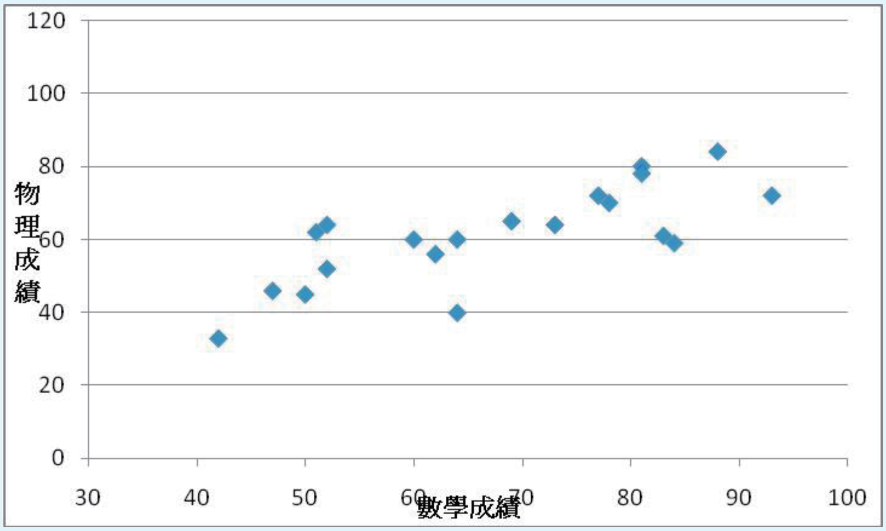
叁　最佳直線與相關係數

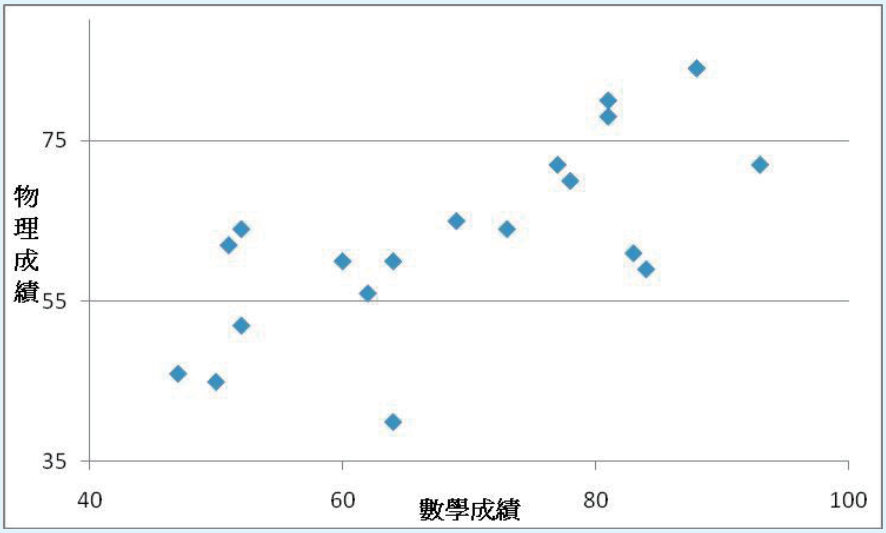
1 最小平方法

散布圖呈現兩個數據資料間相關的方向、型式、強度。其中直線相關尤其重要，因為直線是最簡單的型態，但是光用眼睛看，並不容易判斷出相關的強度。

活動 3

只靠散布圖判別兩變量的相關足夠嗎？





上面兩個散布圖，哪個圖的數學、物理成績直線相關比較強？

活動三中，兩個散布圖畫的是同一組數據，只是兩個圖形的坐標選取之範圍不同，所以只要修改散布圖上坐標軸的刻度或範圍，或是點和點之間的空白處大小，眼睛就可能受騙。所以得定義一個統計量（相關係數）來衡量兩個變數的直線相關強度，我們先從代表兩筆數據的直線開始，探討如何找出最佳（最適合）直線並定義相關係數。

活動 4 最小平方法的引進

右表中有 4 筆資料：

x	1	2	3	4
y	3	1	2	7

若想用直線 $y=a+bx$ 來表示 x、y 的關係，那麼 a、b 要如何取，才會使直線 $y=a+bx$ 與散布圖中的點愈靠「近」呢？

(1)令樣本點 $(x_1,y_1)=(1,3)$、$(x_2,y_2)=(2,1)$、$(x_3,y_3)=(3,2)$、$(x_4,y_4)=(4,7)$，希望能夠選取 a、b 的值，使得資料點 x_i 的 y 坐標 y_i（實際值）與 $a+bx_i$（預測值）的誤差要最小。

請就下面幾種誤差的形式加以討論它們有甚麼優缺點。

$$E_1=|(y_1-(a+bx_1))+(y_2-(a+bx_2))+(y_3-(a+bx_3))+(y_4-(a+bx_4))|$$

$$E_2=|y_1-(a+bx_1)|+|y_2-(a+bx_2)|+|y_3-(a+bx_3)|+|y_4-(a+bx_4)|$$

$$E_3=(y_1-(a+bx_1))^2+(y_2-(a+bx_2))^2+(y_3-(a+bx_3))^2+(y_4-(a+bx_4))^2$$

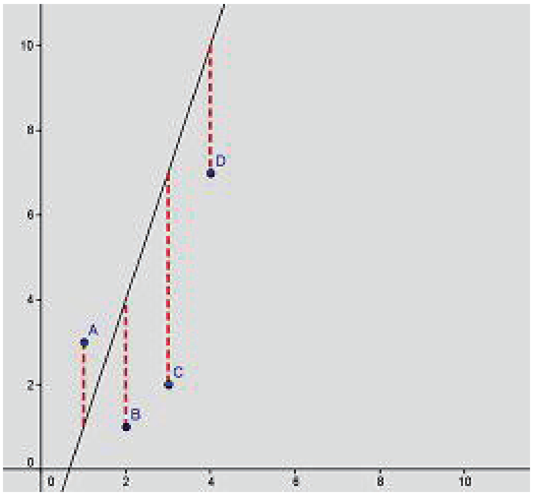
$$E_4=\frac{1}{4}[(y_1-(a+bx_1))^2+(y_2-(a+bx_2))^2+(y_3-(a+bx_3))^2+(y_4-(a+bx_4))^2]$$

(2)經計算 x、y 兩筆數據資料的算術平均數分別為 $\mu_x=\dfrac{10}{4}$，$\mu_y=\dfrac{13}{4}$。考慮通過 (μ_x,μ_y) 斜率為 m 的直線 $y=m(x-\mu_x)+\mu_y$，利用 GeoGebra 軟體找出誤差最小時斜率為 m 的值。

如果散布圖顯示出兩個數值資料之間有很強的直線相關，可以在散布圖中畫條直線，來對這個直線相關做一個概述。**最小平方法**就是一種找出這樣的直線之方法，找出來的直線稱為**最佳直線**或**迴歸直線**。

最小平方法

對於給定有限個樣本點（x_1, y_1）、（x_2, y_2）、……、（x_n, y_n），求出一條直線 $y=a+bx$ 使得誤差平方的平均 $E=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}[y_i-(a+bx_i)]^2\right)$ 最小。求得的直線 $y=a+bx$ 稱為 **y 對 x 的最佳直線或迴歸直線**。



活動 5　用最小平方法找最佳直線

考慮活動 4 中的 4 個樣本點：

$(x_1, y_1)=(1, 3)$、$(x_2, y_2)=(2, 1)$、$(x_3, y_3)=(3, 2)$、$(x_4, y_4)=(4, 7)$，

根據配方法，找出 a、b 使得誤差

$$E=\frac{1}{4}\left[(3-(a+b))^2+(1-(a+2b))^2+(2-(a+3b))^2+(7-(a+4b))^2\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\left(2a+5b-\frac{13}{2}\right)^2+5\left(b-\frac{13}{10}\right)^2+\frac{123}{10}\right]$$ 最小。

任務 4　考慮 3 個樣本點

$(x_1, y_1)=(1, 2)$、$(x_2, y_2)=(2, 1)$、$(x_3, y_3)=(3, 3)$，求兩實數 a、b 使得下列 E 值最小：

$$E=\frac{1}{3}\left[(y_1-a-bx_1)^2+(y_2-a-bx_2)^2+(y_3-a-bx_3)^2\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[(2-a-b)^2+(1-a-2b)^2+(3-a-3b)^2\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[3(a+2b-2)^2+2\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}\right]$$，試求此兩筆數據資料的最佳直線。

2 定義相關係數

活動 6

如下表所示，給定 X、Y 兩個數據資料，

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

若 X 與 Y 的關係可以用直線來描述，利用最小平方法可以找到 Y 對 X 的最佳直線 $L：y=a+bx$ 使得誤差 $E=\dfrac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}[y_i-(a+bx_i)]^2\right)$ 最小。

為了配方方便起見，將 X、Y 兩個數據資料標準化成 X'、Y'

X'	x'_1	x'_2	$\cdots$	x'_n
Y'	y'_1	y'_2	$\cdots$	y'_n

其中 $x'_i=\dfrac{x_i-\mu_x}{\sigma_x}$，$y'_i=\dfrac{y_i-\mu_y}{\sigma_y}$。

設標準化後，由最小平方法得到 Y' 對 X' 的最佳直線 $L'：y'=a+bx'$

考慮誤差 $E'=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[y'_i-(a+bx'_i)]^2$

(1)數據資料 X'、Y' 的平均數與標準差分別為 0 與 1，

試求下列各項之值 $\sum_{i=1}^{n}x'_i$，$\sum_{i=1}^{n}y'_i$，$\sum_{i=1}^{n}(x'_i)^2$，$\sum_{i=1}^{n}(y'_i)^2$。

(2)誤差 $E'=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[y'_i-(a+bx'_i)]^2$ 可以配方化成

$$a^2+\left[b-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x'_iy'_i)\right]^2+1-\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x'_iy'_i)\right]^2$$

根據上式可以得知當 a、b 之值為何時，E' 有最小值？

(3)試求數據資料標準化之後的最佳直線。

活動六中，令 $r=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i'\,y_i')$，接下來，我們來討論 r 的範圍，以及 r 與最佳直線的關係。

活動 7

活動六中，令 $r=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i'\,y_i')$

(1)請問 Y' 對 X' 的最佳直線如何表示？（以 r 表示）

(2)請問 r 的範圍為何？

(3)請討論當 r 改變時，選用最佳直線代表數據資料的關係是否合適？

根據活動六、七的討論，$r=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i'\,y_i')$ 可以作為衡量兩個變數 X、Y 直線相關的強弱程度的統計量，我們稱為**相關係數**。

※ 相關係數（correlation coefficient）的定義：

衡量兩個變數直線相關的程度的統計量 相關係數定義如下：

對於兩組數據資料 X、Y

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

X 與 Y 的相關係數 r 定義為 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i'\,y_i')$，

其中 $x_i'=\frac{x_i-\mu_x}{\sigma_x}$，$y_i'=\frac{y_i-\mu_y}{\sigma_y}$（標準化資料）

相關係數亦可以寫成

$$r=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y_i-\mu_y}{\sigma_y}\right)=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)}{n\cdot\sigma_x\cdot\sigma_y}$$

其中，μ_x、μ_y 為 X、Y 的算術平均數；σ_x、σ_y 為 X、Y 的標準差。

任務 5

證明：相關係數 $r=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)^2\cdot\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_y)^2}}=\dfrac{(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i)-n\mu_x\mu_y}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\mu_x^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2-n\mu_y^2}}$

根據前面的討論，相關係數 r 可以量測兩個數據資料的直線相關程度，並且具有以下特性：

(1)它的範圍有界，強度大小的絕對值不大於 1，即 $-1\leq r\leq 1$。

(2)它能表達出相關性的正負方向。

(3)它與變數所使用的量測單位無關。

(4)它能表達出兩變數間直線相關性的強度大小。

說明如下：

(1)相關係數的範圍有界，強度大小的絕對值不大於 1，

即 $-1\leq r\leq 1$。根據活動六的結果即可得知。

(2)相關係數能表達出直線相關的方向。

設 (X,Y) 的數據資料為 (x_1,y_1)、(x_2,y_2)、…、(x_n,y_n)，在散布圖中以 $y=\mu_y$ 為新的橫軸，$x=\mu_x$ 為新的縱軸，則可將散布圖分成四個象限，

如果點 (x_i,y_i) 在第一、三象限內，則 $(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)$ 的值為正；

如果點 (x_i,y_i) 在第二、四象限內，則 $(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)$ 的值為負，因此

(a) 若 $r>0$ 時，即 $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)>0$，則 X、Y 為正相關。

即表示 X 與 Y 的變動趨勢大致相同。

(b) 若 $r<0$ 時，即 $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)<0$，則 X、Y 為負相關。

即表示 X 與 Y 的變動趨勢大致相反，即此增彼減或此減彼增。

(3)相關係數與數據所使用的量測單位無關。

$$r=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i'y_i')=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)^2\cdot\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_y)^2}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\cdot\mu_x\cdot\mu_y}{n\cdot\sigma_x\cdot\sigma_y}$$

分子、分母單位相消，所以相關係數 r 與使用的單位無關。

(4)相關係數能表達出直線相關的強度。

(a) 若 r 值很接近 0，表示兩變數之間有很弱的直線相關；

(b) 若 r 的絕對值越接近 1，表示兩變數之間的直線相關程度越大。

(c) $r=1$ 時，表示樣本點都落在斜率為正的一條直線上，

$r=-1$ 時，表示樣本點都落在斜率為負的一條直線上。

3 找最佳直線

根據前面的討論，對於標準化的資料 X'、Y' 而言，Y' 對於 X' 的最佳直線為 $y'=rx'$。因為 $x_i'=\dfrac{x_i-\mu_x}{\sigma_x}$，$y_i'=\dfrac{y_i-\mu_y}{\sigma_y}$，因此可以令 $x'=\dfrac{x-\mu_x}{\sigma_x}$，$y'=\dfrac{y-\mu_y}{\sigma_y}$ 代入 $y'=rx'$ 得到 $\dfrac{y-\mu_y}{\sigma_y}=r\left(\dfrac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)$，化簡為 $y=\left(r\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}\right)(x-\mu_x)+\mu_y$。

我們稱 $y=\left(r\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}\right)(x-\mu_x)+\mu_y$ 為數據資料 Y 對 X 的最佳直線。

任務 6

請問 Y 對 X 的最佳直線的斜率等於多少？一定會通過哪一點？

任務 7

利用 σ_x、σ_y、r 的定義，試推導 Y 對 X 的最佳直線的斜率

$$r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)^2}。$$

根據前面的討論，可以整理成以下的結論：

(1)若給定 X、Y 兩筆數據資料，將 X、Y 標準化成數據 X' 、Y' ，

則 Y' 對 X' 的最佳直線 L' 為 $y'=rx'$ ，其中 r 為數據 X、Y 的相關係數。

(2)若給定 X、Y 兩筆數據資料，$\begin{array}{c|c|c|c|c} X & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \hline Y & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{array}$，則 Y 對 X 的最佳直線 $L：y=a+bx$

必通過點（μ_x，μ_y），斜率 $b=\dfrac{r\sigma_y}{\sigma_x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)^2}$。

※ 線性模型

要預測必須先有模型，若我們決定模型為線性模型，然後根據蒐集到的數據，利用最小平方法決定直線的斜率和截距，找出最佳直線或迴歸直線。若是兩個數據之間的關係是可以解釋或預測的話，我們就可以透過最佳直線用一個變數來解釋或預測另一個變數。

活動 8

假設臺灣某珍珠奶茶店的店長注意到每天珍珠奶茶的銷售金額似乎與當天的最高氣溫有關，於是隨機選了 6 天並記錄了該日最高氣溫（攝氏）和珍珠奶茶的銷售金額（千元）如下表：

編號	1	2	3	4	5	6	平均
最高氣溫（攝氏 x 度）	31	35	33	37	34	34	34
銷售金額（y 千元）	60	78	81	102	90	75	81

店長觀察數據之後認為「銷售金額」與「最高氣溫」二者之間似乎有某種關聯性，他希望能找到這項關聯，並加以利用，但是他沒有學過數據分析，我們來幫他做這件事吧！

(1)請根據上述資料畫出散布圖。

(2)請描述資料分布的整體型態 及「最高氣溫」、「銷售金額」二者的關聯性。

(3)計算「最高氣溫」、「銷售金額」二者的相關係數。

(4)求這 6 筆資料「最高氣溫」對「銷售金額」的最佳直線方程式。

(5)用最佳直線方程式估計最高氣溫 36 度時珍珠奶茶的銷售金額。

(6)若最高氣溫為攝氏 100 度，則銷售金額為多少元？這樣的預測合理嗎？

任務 8

設抽樣某班 8 位學生的數學成績（x）與英文成績（y），結果如下：

$\mu_x=65$，$\mu_y=70$，$\sigma_x=10$，$\sigma_y=5$，$r=0.8$

⑴請寫出英文成績（y）對數學成績（x）的最佳直線方程式。

⑵若此班某位同學數學成績 65 分，請預測此生的英文成績。

任務 9

在活動八中，若店長為提供想加盟開店的美國友人資料，將攝氏溫度（x 度）及臺幣（y 千元）單位分別轉換成華氏溫度（u 度）及美元（v 千美元）。那麼

⑴相關係數會怎麼改變？

⑵以最小平方法決定的最佳直線斜率會怎麼改變？

⑶最佳直線方程式為何？

（已知當攝氏溫度為 x 時，華氏溫度為 $u=\dfrac{9}{5}x+32$；1 美元以 30 元臺幣計算）

你可以利用 *Excel* 來計算以上各問題。

任務 10

同學們可將任務九的問題一般化：

設有兩個變數 X、Y 的 n 筆數據資料（ x_i , y_i ），$i=1$，2，…，n。已知 X、Y 的算術平均數分別為 μ_x、 μ_y，標準差分別為 σ_x、 σ_y，相關係數為 r_{XY}，Y 對 X 的最佳直線斜率為 m。若將變數 X 與 Y 經由伸縮、平移分別得到變數 U、V，其中 $U=aX+b$，$V=cY+d$，其中 a、b、c、d 均為常數，即 $\mu_i=ax_i+b$，$i=1$，2，…，n；$v_i=cy_i+d$，$i=1$，2，…，n。那麼

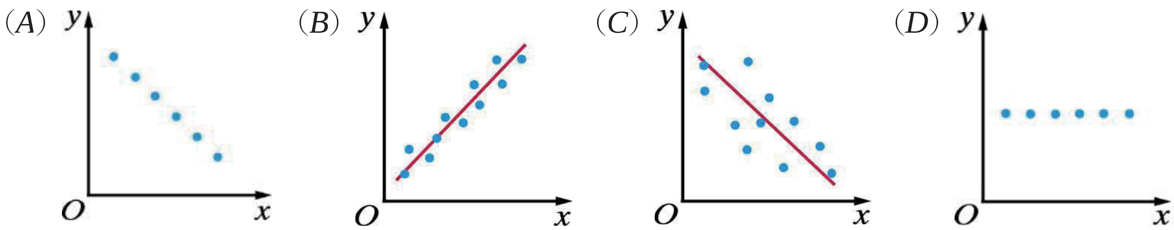
(1) U、V 的相關係數會怎麼改變？

(2) V 對 U 的最佳直線斜率會怎麼改變？

(3) V 對 U 最佳直線方程式為何？

評　　量

1.



⑴請排出上面 4 個散布圖中 x，y 的相關強度的大小次序（由強到弱）。

⑵請排出上面 4 個散布圖中 x，y 的相關係數的大小次序（由大到小）。

2. 汽車每公升汽油跑的公里數在速度增加時會先上升再下降，假設這種關聯相當規則，汽車行駛的速度（每小時公里數）和汽油里程（每公升公里數）資料所示：

速度	32	48	64	80	96
汽油里程	10.14	11.83	12.68	11.83	10.14

⑴請計算「速度」、「汽油里程」的相關係數。

⑵請解釋為何「速度」、「汽油里程」二者的關聯性很強，但相關係數卻是 0。

3. 請利用下面的數據畫一個散布圖。

x	1	2	3	4	10	10
y	2	4	4	6	2	12

計算相關係數的結果大約是 0.5。對這組數據中的大部分的點來說，x 和 y 之間有很強的直線關聯，是什麼因素導致相關係數只有 0.5 左右？

4. 蒐集學生十人（甲、乙、⋯、癸），記錄期考數學成績與該學期數學課缺課數，如下表所示：

學生	甲	乙	丙	丁	戊	己	庚	辛	壬	癸
缺課數	1	4	3	3	4	3	5	4	3	0
成績	100	90	90	80	70	70	60	60	80	100

(1)試求出缺課數與數學成績的相關係數。

(2)設缺課數為 x，數學成績為 y，試求數學成績對缺課數的最佳直線。

(3)若阿杰缺了 10 堂課，根據最佳直線的預測，他的數學成績為多少分？

(4)當缺課數 42 節時，是否仍可以此直線來預測學生的成績？

5. 調查某國家某一年 5 個地區的香煙與肺癌之相關性，所得到的數據為（x_i, y_i），$i=1$、2、3、4、5，其中變數 X 表示每人每年香煙消費量（單位：十包），Y 表示每十萬人死於肺癌的人數。

若已計算出下列數值

$$\sum_{i=1}^{5} x_i=135\text{ , }\sum_{i=1}^{5} x_i^2=3661\text{ , }\sum_{i=1}^{5} x_i y_i=2842\text{ , }\sum_{i=1}^{5} y_i=105\text{ , }\sum_{i=1}^{5} y_i^2=2209\text{ ,}$$

求 X 與 Y 的相關係數。

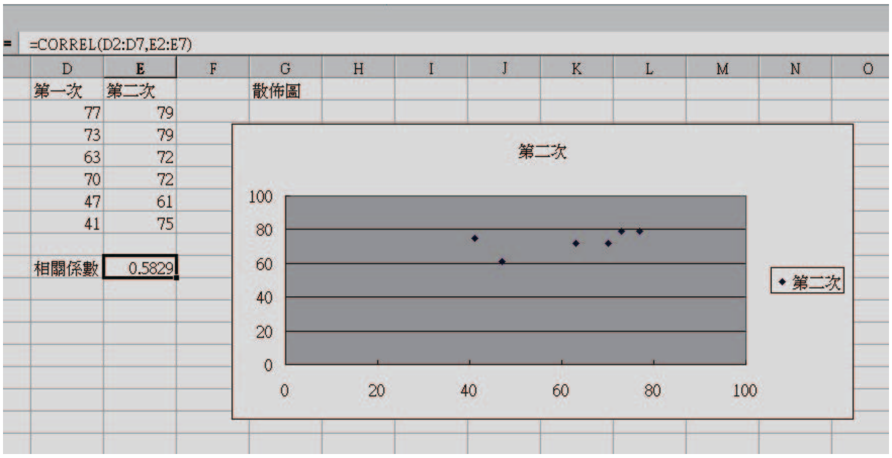
6. 高爾頓（*Galton*）當時曾研究過肘長與身高的相關性，我們可以找幾位同學，測量其肘長與身高，畫出散布圖。

並判定肘長與身高兩數據資料是正相關或是負相關？

計算相關係數與求身高（y）對肘長（x）的最佳直線，並利用預測同學身高看看準不準？

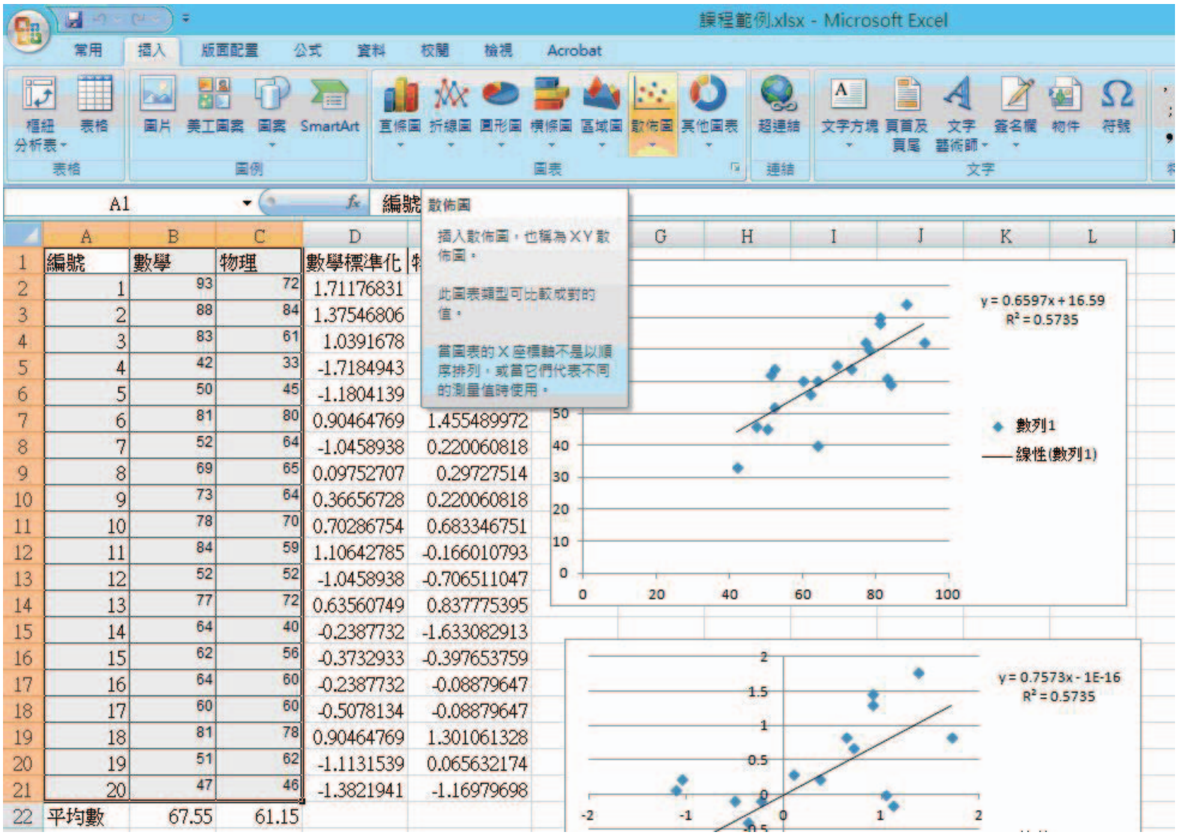
附錄一

1. 用 *Excel* 計算相關係數：



2. 利用 *Excel* 畫散布圖

選定資料然後插入散布圖



3. 利用 *Excel* 求最佳直線：

(1)指令：*LINEST*

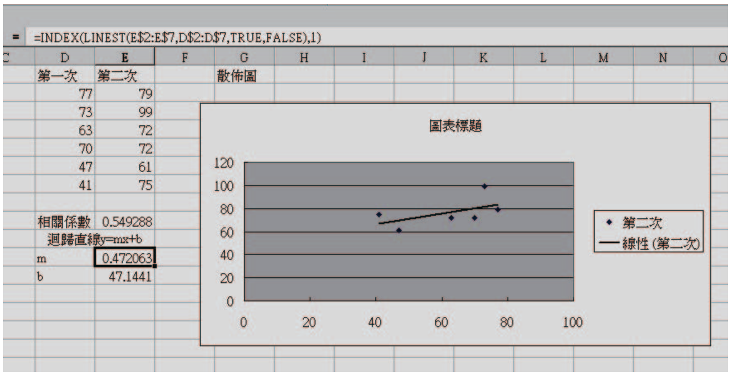
功用：使用最小平方法計算最適合於觀測資料組的迴歸直線公式，並傳回該直線公式的陣列。由於此函數傳回陣列值，所以必須輸入為陣列公式。

語法：LINEST（known_y's,known_x's,const,stats）

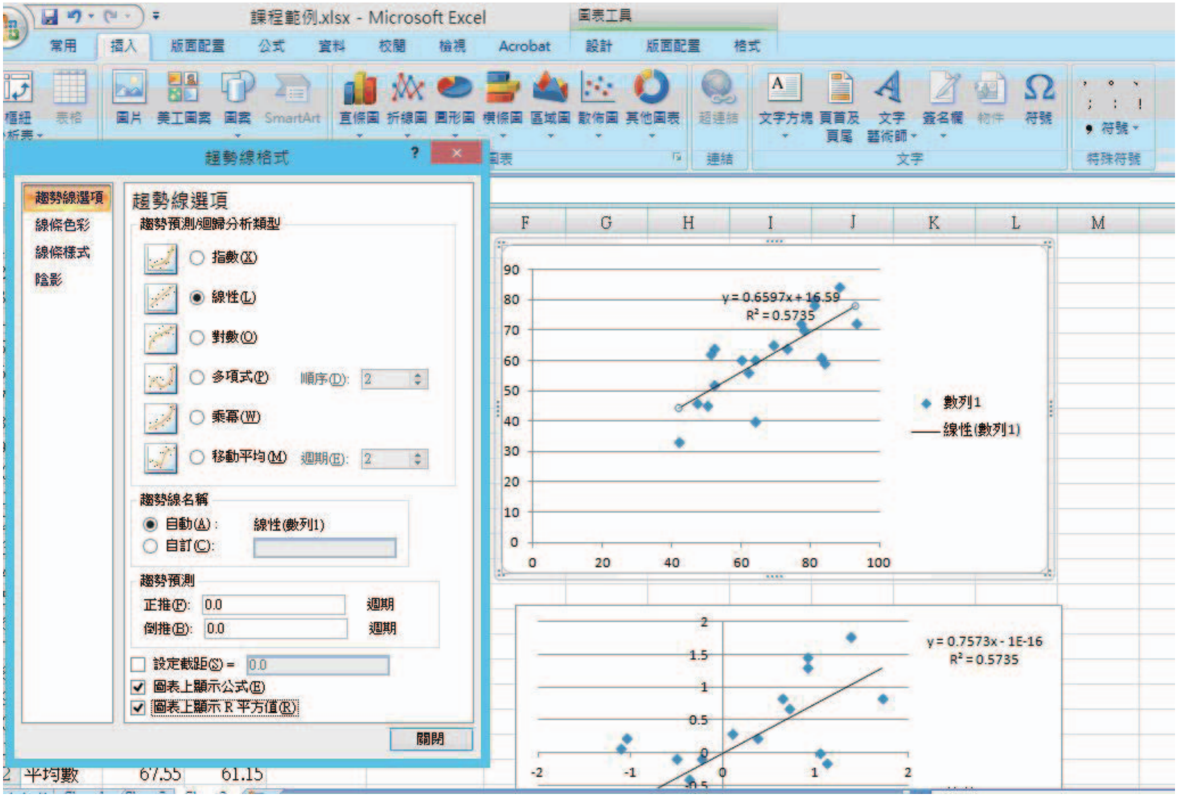
最佳直線：$y=mx+b$

m 的計算：*INDEX*（*LINEST*（*known_y's,known_x's,const,stats*）,1）

b 的計算： *INDEX*（*LINEST*（*known_y's,known_x's,const,stats*）,2）



(2)選定樣本點，然後按滑鼠右鍵再選加入趨勢線，再選單中選取線性，並且選圖表上顯示公式與 *R* 平方值 即可得到最佳直線與相關係數平方值。


課程範例.xlsx - Microsoft Excel
圖表工具
趨勢線格式
趨勢線選項
趨勢預測/迴歸分析類型
指數(X)
線性(L)
對數(O)
多項式(P)
乘冪(W)
移動平均(M)
趨勢線名稱
自動(A):
線性(數列1)
自訂(C):
趨勢預測
正推(F): 0.0 週期
倒推(B): 0.0 週期
設定截距(S) =
圖表上顯示公式(E)
圖表上顯示R平方值(R)
關閉
y = 0.6597x + 16.59
R² = 0.5735
數列1
線性(數列1)
y = 0.7573x - 1E-16
R² = 0.5735
平均數
67.55
61.15

第五章　普通型高中篇（I）

教學單元

（二）排列組合

排列組合

壹 歷史與生活

貳 排列組合

一 重複排列

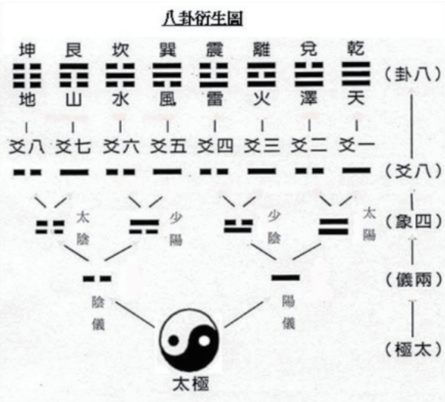
二 直線全取排列

三 有相同物的排列

四 組合與排列：n 人取 k 人的組合與排列

壹 歷史與生活

在中國，周易繫辭上說：「易有太極，是生兩儀，兩儀生四象，四象生八卦」。陰陽八卦以符號邏輯排列組合的科學面貌，在中國的歷史上流傳了幾千年，影響了黃道曆法、中醫學理論、占卜術等早與人們的生活息息相關。「易」是變化的意思，「太極」指萬物的本源，相傳伏羲氏首畫一長線「—」為陽爻，次畫二短線「－－」為陰爻，象徵陰陽二氣，是為「兩儀」。若每次取 2 個爻，有 $2^2=4$ 種不同的排列，即為「四象」；若每次取 3 個爻為一卦，則形成「八卦」；而「周易」進一步取兩個八卦上下組合構造出「六十四卦」。



北宋著名科學家沈括（1031－1095）的《夢溪筆談》中，考慮過在 19×19 個格點的圍棋棋盤上所有可能的不同布局的總數，他利用棋盤上每一個格點都有黑子、白子、空位三種可能出現的狀態，應用排列組合知識計算出圍棋不同局面總數是 3^{361}。

至清代，陳厚耀（1648－1722），受西方數學傳入中國，其中許多關於排列組合計算內容的影響，撰寫了〈錯綜法義〉一文，以系統化的方式通過具體的例題，來說明各種類型的排列組合問題的計算方法。例如，他舉例「串名」問題來論述「無重複排列」問題：

『今如合夥當差，有張李王三家串姓為名，當排出串名若干？』

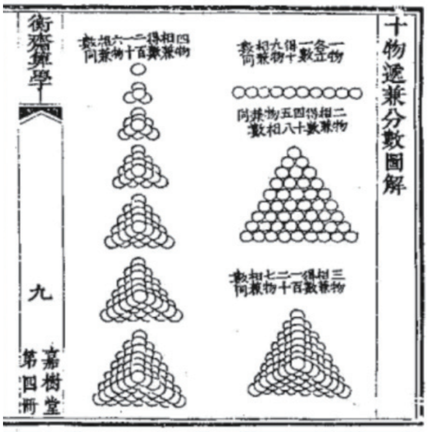
『又如趙錢孫李周吳鄭王八姓，串名當差，其串名只三字，當排出串名若干？』

而清代，汪萊（1768－1813）在著作《衡齋算學四》中稱組合理論為「遞兼數理」，經過自己的獨立刻苦鑽研，得出

$$C^n_m=\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m(m-1)\cdots 2\cdot 1}\text{、}C^n_m=C^n_{n-m}$$

等重要的組合關係式，他論證了組合數與傳統數學中的三角堆垛的關係，也與巴斯卡的工作有異曲同工之妙，為中國數學史上第一次以專題的形式探討組合的某些性質和計算公式。

(Blaise Pascal , 1623-1662)



汪萊的「十物遞兼分數圖解」，出自《衡齋算學》第四冊。可以清楚看出汪萊是透過三角垛來計算組合的。

在印度，排列組合問題的出現也是相當早的，據說在西元前 600 年左右，*Susrute* 的醫學著作中就有這樣的問題：甜、酸、鹹、辣、苦、澀 6 種味道可調配出多少種不同的味道？其答案是：單味 6 種，雙味 15 種，三味 20 種，四味 15 種，五味 6 種，六味 1 種。

另外，在西元前 200 年，*Pingala* 亦提到了從 n 個字母中，依次取 1，2，...，n 個字母，各有多少種方法的問題。據考證，印度人在六世紀時已經掌握了計算排列組合的一些基本公式。例如，大約在六世紀時，*Varahamihira* 的著作中曾提出：16 種原料每次取 4 種，共有 1820 種取法。其次又提到一位有經驗的建築師為國王建造一座雄偉的宮殿，這座宮殿有 8 個門，每次開一個門或每次開兩個門或每次開三個門，⋯ 等，這樣總共有多少種不同開門的組合方法呢？其答案是開 1 到 8 個門的組合數分別為 8，28，56，70，56，28，8，1，而且總共有 255 種組合方法。

隨著歐洲的文藝復興，排列組合的研究才開始在歐洲有了較快的發展，1494 年第一本涉及排列組合問題的印刷版著作出版，作者是義大利數學家帕奇歐里。而早期的機率理論的發展主要是討論古典機率問題，而古典機率的計算幾乎就是排列組合的具體應用，同時也促進了排列組合的進一步研究。 (Luca Pacioli , 1445-1517)

西元 1713 年瑞士數學家雅各布．伯努利（*Jacob Bernoulli*，1654－1705），在其出版的著作《猜度術》中有系統的論述了排列組合，從而形成了近代的排列組合理論。上圖為 1994 年第 22 屆國際數學家大會在瑞士的蘇黎世召開，瑞士郵政發行的雅各布．伯努利的紀念郵票，郵票的圖案是雅各布．伯努利的頭像，及以他名字命名的大數定律及大數定律的幾何示意圖。

參考資料：

(1) 歐陽維誠，《周易的數學原理》，湖北教育出版社。
(2) *M.Kline*，《數學史－數學思想發展》，九章出版社。
(3) 劉雲章，《數學溯源－數學名詞的故事》。
(4) 李迪，《清代著名數學家汪萊及其數學成就－紀念汪萊逝世 180 周年》
(5) 朱家生、吳裕賓，《陳厚耀〈錯綜法義〉研究》
http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/vol5no1b.htm
(6) 《高中數學教學手冊》龍騰出版社

貳　排列組合

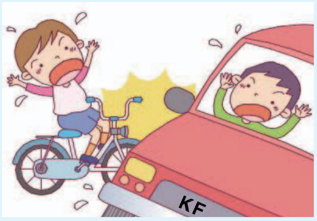
於前一節的單元學習中，已經學會了樹狀圖、加法原理、乘法原理及取捨原理；我們在日常生活中常會遇到一些有關排列的問題，利用以下的活動，複習乘法原理。

1 重複排列

以下我們藉由活動來認識重複排列。

活動 1 警方至多須清查多少輛汽車

1. 一輛汽車在公路上肇事後加速逃逸，據目擊者柯南指稱，只記得車牌號碼為 KFC－□□78，其中□為 0 到 9 的數字。聰明的你能否告訴警方至多只須清查多少輛就可以查出肇事汽車？



2. 承第 1 題，如果目擊者柯南，只記得車牌號碼為 D□□－5678，其中□為 A 到 Z 的英文字母。則警方至多須清查多少輛汽車？

活動一第 1 題中，0 到 9 的 10 個數字可以在兩個空格□□中重複出現的排列，以及第 2 題中，A 到 Z 共 26 個英文字母可以在兩個空格□□中重複出現的排列。像這樣排列時，如果相同的物件可以重複出現，這種排列就稱為**重複排列**。

推廣問題

從 m 種不同之物件中，任意選取 n 個排成一列，若每種物件都可以重複出現（每種物件至少有 n 個），則共有幾種排列的方法？

【重複排列】

從 m 種不同之物件中，任意選取 n 個排成一列，若每種物件都可以重複出現（每種物件至少有 n 個），則共有 m^n 種排列的方法。

任務 1　古代的陽爻「—」、陰爻「－－」與八卦、六十四卦

請解釋在「周易」中的「八卦」與「六十四卦」的數量是如何產生的？

八卦

坤 (地)	艮 (山)	坎 (水)	巽 (風)	震 (雷)	離 (火)	兌 (澤)	乾 (天)	← 上卦 ↓ 下卦
2.坤為地	23.山地剝	8.水地比	20.風地觀	16.雷地豫	35.火地晉	45.澤地萃	12.天地否	坤 (地)
15.地山謙	52.艮為山	39.水山蹇	53.風山漸	62.雷山小過	56.火山旅	31.澤山咸	33.天山遯	艮 (山)
7.地水師	4.山水蒙	29.坎為水	59.風水渙	40.雷水解	64.火水未濟	47.澤水困	6.天水訟	坎 (水)
46.地風升	18.山風蠱	48.水風井	57.巽為風	32.雷風恆	50.火風鼎	28.澤風大過	44.天風姤	巽 (風)
24.地雷復	27.山雷頤	3.水雷屯	42.風雷益	51.震為雷	21.火雷噬嗑	17.澤雷隨	25.天雷無妄	震 (雷)
36.地火明夷	22.山火賁	63.水火既濟	37.風火家人	55.雷火豐	30.離為火	49.澤火革	13.天火同人	離 (火)
19.地澤臨	41.山澤損	60.水澤節	61.風澤中孚	54.雷澤歸妹	38.火澤睽	58.兌為澤	10.天澤履	兌 (澤)
11.地天泰	26.山天大畜	5.水天需	9.風天小畜	34.雷天大壯	14.火天大有	43.澤天夬	1.乾為天	乾 (天)

六十四卦

補給站

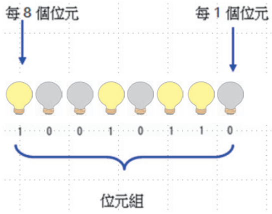
「八卦」的八卦：

德國數學哲學大師威廉・萊布尼茲（*Gottfried Wilhelm Leibniz*，1646 年 7 月 1 日－1716 年11 月 14 日）被稱為現代計算機基礎的二進位的發明者。據說萊布尼茲通過在中國的傳教士，得到了八卦圖，他領悟到只要把八卦中的陰爻代表 0，陽爻代表 1，就可以創立一種新的記數法：二進位。這一神話雖然已經被部分數學史家進行了批駁，但至今仍廣為傳播。

資料來源：*http://baike.baidu.com/view/18536.htm*

任務 2 現代的「0」、「1」與電腦位元（*bits*）、位元組（*Byte*）

電腦紀錄資料的最小單位稱為「位元（*bit*）」，每 1 個位元就是一個 0 或一個 1 的訊息，它可表示的資料量是 2 個。而我們將八個位元（*bits*）定義為一個「位元組（*Byte*）」。則

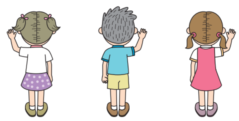


⑴一個位元組（*Byte*），即 8 位元，可以表示幾個不同的資料量？

⑵於 1984 年由<u>臺灣資策會工業局</u>和 13 家業者所共同制定的編碼系統稱為「*Big*5 碼」，其中包含 5401 個常用字、7652 個次常用字及 408 個符號（含標點符號、注音符號、單位符號……），共 13461 個字，則需用幾個位元組（*Byte*）來表示才夠？

任務 3 平行差異化任務與數學擬題

1. 自動販賣機有 5 種飲料可供選擇（假設每一種的數量都超過 3 瓶），若甲、乙、丙三人欲各購買一罐飲料，則選購的方法有幾種？
2. 請以「甲、乙、丙三位學生及 5 罐飲料」為情境敘述，設計出答案為 $3\times3\times3\times3\times3=3^5$ 的問題。

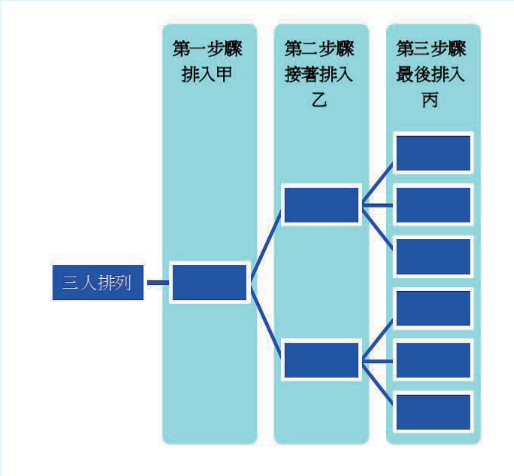


2 直線全取排列

活動 2 三人與四人排列的情形

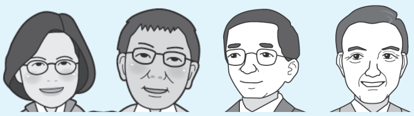
1.【三人排列的情形】

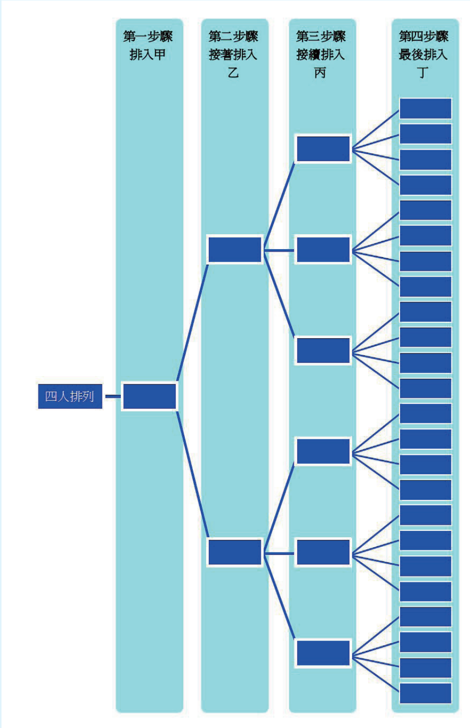
三位總統候選人甲、乙、丙於辯論會開始之前，排成一列拍照紀念，試問主辦單位共有幾種不同的排法？



2.【四人排列的情形】

若有四位總統候選人甲、乙、丙、丁，於辯論會開始之前，排成一列拍照紀念，試問主辦單位共有幾種不同的排法？





推廣問題

將 n 個不同的物件排成一列，共有多少種排列法？

說明

當 n 是正整數時，為了方便，我們用符號 $n!$ 表示 $1\times2\times3\times\cdots\cdots\times(n-2)\times(n-1)\times n$，讀做「$n$ 的階乘」，即 $n!=1\times2\times3\times\cdots\cdots\times(n-2)\times(n-1)\times n$。

例如：

$1!=1$，$2!=1\times2=2$，$3!=1\times2\times3=6$，$4!=1\times2\times3\times4=24$。

另外，我們規定 $0!=1$。並且由定義我們可以看出：當 n 是大於 1 的整數時，$n!=n\times[(n-1)!]$。

【直線全取排列】

將 n 個不同的物件排成一列，共有 $n!$ 種排法。

任務 4　熟悉符號 $n!$ 平行差異化任務

1. (1) 試求 $(3+4)!$ 之值　。
   (2) 試求 $3!+4!$ 之值　。
   (3) 請問 $(3+4)!$ 與 $(3!+4!)$ 相等嗎？
2. (1) 試求 $\dfrac{12!}{10!}$ 之值。
   (2) 設 n 為正整數，若 $\dfrac{(n+2)!}{n!}=72$，求 n 之值。

任務 5　古代的排列遊戲問題

請你算算看，清代數學家陳厚耀〈錯綜法義〉的文章中的「串名」問題：

『今如合夥當差，有張李王三家串姓為名，當排出串名若干？』

例如：張李王，王李張等就是串姓所得之名。

任務 6　跨領域，現代 n 的階乘與程式設計

在程式設計上，常用以下的一階遞迴關係設計「n 的階乘」的演算法。

設 $\begin{cases} a_n = n \times a_{n-1}，n \geq 1 \\ a_0 = 1 \end{cases}$，$n$ 為正整數。

(1) 求 a_1、a_2、a_3 的值。

(2) 試證明：$a_n = n!$，$n \geq 1$。

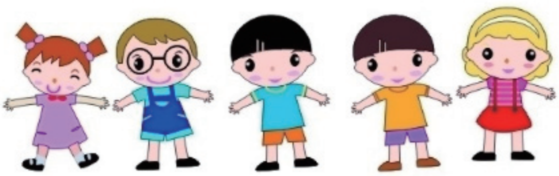
任務 7　多重表徵與開放問題

某日，大雄與柯南一同作下列的數學問題：

「求甲、乙、丙、丁、戊五人排成一列拍照，其中甲不排第一位的方法數。」

大雄說：答案為（$5! - 4!$）種。

柯南說：答案為 $4 \times 4!$ 種。



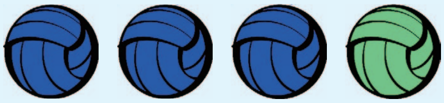
請判斷兩位的答案是否正確？

並評析大雄與柯南的解題思路。

3 有相同物的排列

活動 3 有相同物的排列

1.【有相同物的排列(一)】
體育課老師將 3 個相同的藍色躲避球，與 1 個綠色躲避球分給四組使用，每組一個，則共有多少種分法？



2.【有相同物的排列(二)】
體育課老師將 3 個相同的藍色躲避球，與 2 個綠色躲避球分給五組使用，每組一個，則共有多少種分法？

推廣問題

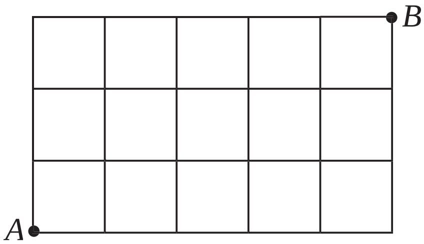
k 種相同物件的排列

設 n 個物件共分成 k 組，其中第一組由 m_1 個相同物件組成，第二組由 m_2 個相同物件組成，…，第 k 組由 m_k 個相同物件組成，且 $m_1+m_2+\cdots+m_k=n$，若組與組間的物件皆不相同，則這 n 個物件排成一列的方法共有幾種？

【有相同物的排列】
設有 k 種不同種類的物件(同類中的物件視為相同)，第 1 類有 m_1 個，第 2 類有 m_2 個，…，第 k 類有 m_k 個，共計 n 個，即 $m_1+m_2+\cdots+m_k=n$。
將此 n 個物件排成一列，共有 $\dfrac{n!}{m_1!\times m_2!\times\cdots\times m_k!}$ 種排法。

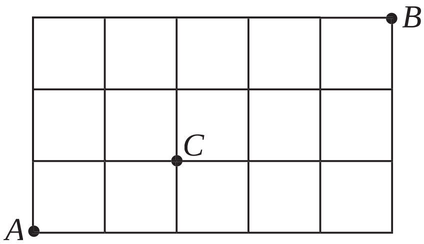
任務 8　節能減碳，步行上班的路線有幾條？

大雄住在具有棋盤式道路系統的城市，如下圖所示方格的邊線，皆為可行走道路，A 點為住家位置，而向東 5 個街區（*blocks*），再往北 3 個街區的 B 點為上班處所，為了落實節能減碳，每天步行 8 個街區上班（即是以走捷徑方式，「不繞遠路」從 A 走到 B），請問大雄總共有幾條路線可以選擇？



補充練習

承【任務 8】，若 C 點為一公園，則從 A 走捷徑到 B，而且必須經過 C 的走法有幾種？



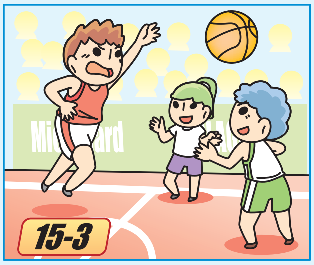
任務 9　數學擬題，開放問題

設計答案為 $\dfrac{(1+2+3)!}{1!\times 2!\times 3!}$ 種方法的問題。

4 組合與排列：n 人取 k 人的組合與排列

活動 4 教練的選擇與安排（5人選 3人的組合與排列）

1. 教練想從甲、乙、丙、丁、戊五位籃球選手中，選出三位上場參加三對三籃球賽，則選擇的方案共有多少種？
2. 教練想從甲、乙、丙、丁、戊五位籃球選手中，選出一位後衛，一位前鋒和一位中鋒，參加三對三籃球賽，則安排的方案共有多少種？



說明

由【活動 4】中，我們可以知道：

①第 1.題中，教練選出選手而不給予分配職位，像這樣只選取而不考慮同一組內組成份子次序的方式，我們稱之為**組合**，而所有組合總數稱為組合數。

我們以符號 C^n_k 表示從 n 個不同的物件中取出 k 個為一組的組合數，其中 C 是組合（*Combination*）的第一個字母。

例如：第 1.題中的問題，就相當於是求「從 5 人中選出 3 人為一組的組合數」，就可以符號 C^5_3 表示。

②與第 1.題對照，第 2.題中教練將選出的選手給予分配不同的職位，不同的安排視為相異的結果，是一種**排列**問題。

我們以符號 P^n_k 表示從 n 個不同的物中取出 k 個排成一列的方法數，其中 P 是排列（*Permutation*）的第一個字母。

例如：第 2.題中的問題，就相當於是求「從 5 人中選出 3 人排成一列的方法數」，就可以符號 P^5_3 表示。

③組合數 C^5_3 與排列數 P^5_3 的關係：

【第一種解法】乘法

考慮活動 4 中，我們可以先從這 5 位選手中任選 3 個為一組合的選法有 C^5_3 種，這 C^5_3 種組合中，每一組合內的 3 位選手任意排成一列，就對應有 3！＝6（種）排列。由乘法原理，可得 C^5_3 與 P^5_3 有下列的關係式：

$P^5_3 = C^5_3 \times 3! = 60$，即排列數 P^5_3 是組合數 C^5_3 的 3！倍。

【第二種解法】除法

考慮活動四中，從 5 個人中選取 3 人出來排列的方法為 P^5_3，而所選出來的 3 人的排列數 3！種只能對應 1 種組合數，因此 5 人中選取 3 人為一組合的方法數有 $C^5_3=\dfrac{P^5_3}{3!}=10$ 種。

例如：5 個人中選取 3 人出來排列的情況中，甲丙丁、甲丁丙、丙甲丁、丙丁甲、丁甲丙、丁丙甲，這 6 種情形若不考慮順序，則視為相同選法。

推廣問題

1. 從 n 個不同的物件中取出 k 個（$1 \leq k \leq n$）為一組的組合數 C^n_k 為何？
2. 從 n 個不同的物件中取出 k 個（$1 \leq k \leq n$）任意排列的排列數 P^n_k 為何？
3. C^n_k 與 P^n_k 的關係為何？

【組合 C^n_k 與排列 P^n_k】

1. 從 n 個不同物件中任選 k 個 $(1\leq k\leq n)$ 為一組的組合數，以符號 C^n_k 表示。

(1) $C^n_k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}=\dfrac{n\times(n-1)\times\cdots\times(n-k+1)}{k\times(k-1)\times\cdots\times2\times1}$。

(2) 當 $k=n$ 時，$C^n_n=\dfrac{n!}{n!(n-n)!}=\dfrac{n!}{n!0!}=1$，

又 $k=0$ 時，$C^n_0=\dfrac{n!}{0!(n-0)!}=\dfrac{n!}{0!n!}=1$。

2. 從 n 個不同物件中任選 k 個 $(1\leq k\leq n)$ 排成一列的方法數，以符號 P^n_k 表示。

(1) $P^n_k=\dfrac{n!}{(n-k)!}=\dfrac{n\times(n-1)\cdots2\times1}{(n-k)\times(n-k-1)\times\cdots\times3\times2\times1}$

$=n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+2)(n-k+1)$。

(2) 當 $k=n$ 時，$P^n_n=n!$，又 $k=0$ 時，$P^n_0=\dfrac{n!}{(n-0)!}=\dfrac{n!}{n!}=1$。

任務 10

請討論：為何規定 $0!=1$。

任務 11　熟悉符號 C^n_k 與檢驗古印度組合問題的答案

1. 試求下列各數：

(1) C^5_0　(2) C^5_1　(3) C^5_2　(4) C^5_3　(5) C^5_4　(6) C^5_5

2. 西元前 600 年左右，據說在印度 *Susrute* 的醫學著作中提到：以甜、酸、鹹、辣、苦、澀 6 種味道可調配出 15 種「雙味」的味道，與 20 種「三味」的味道。請檢驗答案的正確性。

補充練習

1. 承【任務 11】，西元前 600 年左右，據說在印度 *Susrute* 的醫學著作中就有這樣的問題：甜、酸、鹹、辣、苦、澀 6 種味道可調配出多少種不同的味道？請解釋他們的答案為何是單味 6 種，四味 15 種，五味 6 種，六味 1 種。

2. 請舉生活上的例子，說明 $C_0^n=1$。

說明

①從【任務 11】的第 1 題，我們發現 $C_0^5=C_5^5$，$C_1^5=C_4^5$，$C_2^5=C_3^5$。即

$C_0^5\quad C_1^5\quad C_2^5\quad C_3^5\quad C_4^5\quad C_5^5$

相等

相等

相等

這個現象，我們可以這樣解釋：

因為從 5 個之中取走 k 個（$k=0$，1，2，3，4，5）的方法數，相當於從 5 個之中留下（$5-k$）個的方法數。

②這樣的性質可推廣至一般情形：從 n 個不同的物件中取走 k 個的方法數，相當於從這 n 個物件中留下（$n-k$）個的方法數。

因此 $C_k^n=C_{n-k}^n$。這個等式依它所表現的上述性質，常被稱為**餘組合公式**，或是**組合對稱公式**。

【餘組合公式（組合對稱公式）】

設 n、k 為整數，且 $0\leq k\leq n$，則 $C_k^n=C_{n-k}^n$。

任務 12 熟悉符號 P^n_k 與古代的排列遊戲問題

1. 試求下列各數：

(1) P^5_3　(2) P^6_6　(3) P^{10}_4

2. 請你再算算看，清代數學家陳厚耀的數學〈錯綜法義〉文章中的另一個「串名」問題：

『又如趙錢孫李周吳鄭王八姓，串名當差，其串名只三字，當排出串名若干？』

任務 13 開放問題（組合與排列關係連結）

1. (1)設計答案為 C^6_4 種方法的問題。

(2)承(1)的題幹，繼續設計使答案成為 P^6_4 。

2. 請依上述問題說明 $P^6_4 = C^6_4 \times 4!$ 。

任務 14 巴斯卡性質

從甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛 8 人中，任選 3 人為一組。

(1)試問有幾種可能的組合？

(2)所有可能的組合中，含甲的組合有幾種？不含甲的組合有幾種？

(3)試討論(1)與(2)兩者之間的關係。

可將上述任務中的情形一般化：

設 n 個人中有一特定人物甲，則 n 中取 m 的組合中，可分成兩類：

①含特定人物甲者：有 C^{n-1}_{m-1} 種方法。

②不含特定人物甲者：有 C^{n-1}_{m} 種方法。

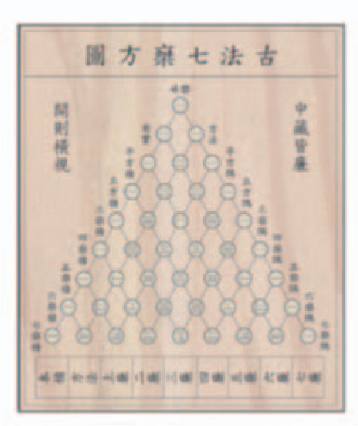
由加法原理得 $C^{n}_{m}=C^{n-1}_{m}+C^{n-1}_{m-1}(1\leq m\leq n-1)$，

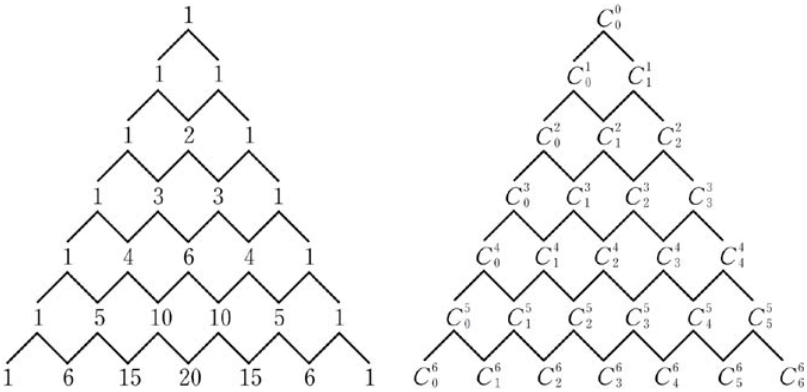
這個性質就是表現巴斯卡三角形（或**楊輝三角形**）上下兩層的關係式，

所以將它稱為巴斯卡性質。

【巴斯卡性質】

設 m，n 為自然數，且 $1\leq m\leq n-1$，則 $C^{n}_{m}=C^{n-1}_{m}+C^{n-1}_{m-1}$。





巴斯卡三角形(楊輝三角形)

任務 15　巴斯卡性質的應用

某民宿有 10 間房間，第 1 間住有 1 人，第 2 間住有 2 人，第 3 間住有 3 人，第 4 間住有 4 人，第 5 間住有 5 人，第 6 間住有 6 人，第 7 間住有 7 人，第 8 間住有 8 人，第 9 間住有 9 人，第 10 間住有 10 人。當晚進行抽獎活動，特獎有 2 位，民宿主人想知道這 2 位不在同一房間的情形有多少種？我們來幫他算一算！

評　量

1. $69\times68\times67\times66$ 之值等於下列哪一個選項？
(A) $\dfrac{69!}{66!}$ (B) $\dfrac{69\times(68!)}{65!}$ (C) $\dfrac{69!}{(4!)(65!)}$ (D) $\dfrac{69!\times68\times67}{65!}$

2. (1)若 $C^n_2=45$，求 n 之值。
(2)已知 $C^n_8=C^n_6$，求 n 之值。

3. 試以 A、B、C、D 四個相異物件進行分組，並說明 $C^4_3=C^4_1$。

4. 請問「$P^n_k=P^n_{n-k}$」是否恆成立？若認為正確，請證明；若認為錯誤，請舉一反例說明。

5. 某動物園的遊園列車依序編號 1 到 7，共有七節車廂，今想將每節車廂畫上一種動物。如果其中的兩節車廂畫企鵝，另兩節車廂畫無尾熊，剩下的三節車廂畫上貓熊，並且要求最中間的三節車廂必須有企鵝、無尾熊及貓熊，則七節車廂一共有多少種畫法？

6. 大樂透彩券簽注規則是從 1～49 中任選 6 個號碼進行投注，每注（6 個號碼）費用 50 元。開獎時，開獎單位將隨機開出 6 個號碼加 1 個特別號，而開出的 6 個號碼（不含特別號），就是該期大樂透的頭獎號碼，試問：

⑴開獎前，頭獎號碼的可能情形有多少種？

⑵為確保中頭獎，須投注每一種可能情形，則需花費多少金額?

⑶若阿九想在他看好的 8 個數字中選 6 個號碼簽注，則他需花費多少金額，才不致遺漏任何一種可能情形?

7. 有 1 枝原子筆，2 枝相同的鉛筆與 3 枝相同的鋼筆。

(1)全部分給 6 個人，每人恰得 1 枝，共有多少種分法？

(2)全部分給 8 個人，每人最多分得 1 枝，共有多少種分法？

8. 啦啦隊競賽規定每隊 8 人，且每隊男、女生均至少要有 2 人，某班共有 4 名男生及 7 名女生想參加啦啦隊競賽。若由此 11 人中依規定選出 8 人組隊，則共有多少種不同的組隊方法？

9. 從玫瑰、菊花、杜鵑、蘭花、山茶、水仙、繡球等七盆花中選出四盆靠在牆邊排成一列，其中杜鵑及山茶都被選到，且此兩盆花位置相鄰的排法共有多少種？

挑戰題

1. 請求出下列 A，B，C，D 四個集合的元素個數，其中 (x,y,z) 為三元有序數組

$A=\{(x,y,z)\mid 1\leq x,y,z\leq 9$，$x,y,z$ 為整數，且 x,y,z 互異$\}$。

$B=\{(x,y,z)\mid 1\leq x,y,z\leq 9$，$x,y,z$ 為整數$\}$。

$C=\{(x,y,z)\mid 1\leq x<y<z\leq 9$，$x,y,z$ 為整數$\}$。

$D=\{(x,y,z)\mid 1\leq x\leq y\leq z\leq 9$，$x,y,z$ 為整數$\}$。

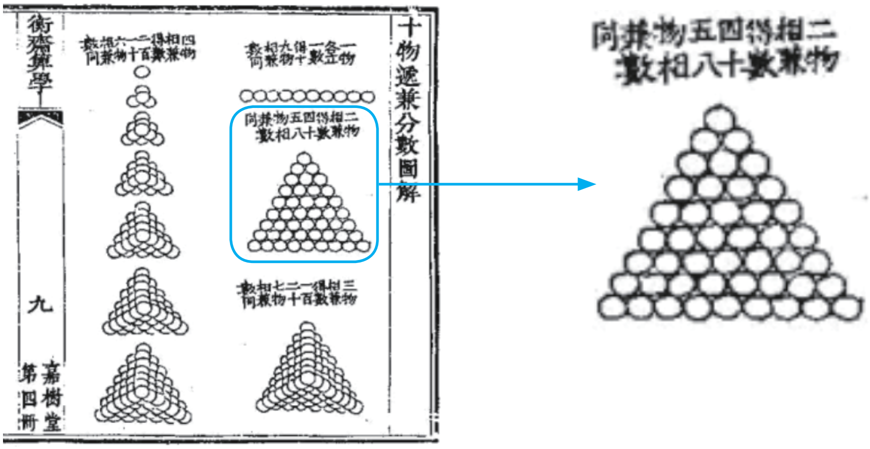
2. 在第一節的歷史與生活中提到：

大約在六世紀時，*Varahamihira* 的著作中曾提出一位有經驗的建築師為國王建造一座雄偉的宮殿，這座宮殿有 8 個門，每次開一個門或每次開兩個門或每次開三個門，… 等，這樣總共有多少種不同的組合方法？其答案是開 1 到 8 個門的組合數分別為 8，28，56，70，56，28，8，1，而且總共有 255 種組合方法。

而又 $255=\underbrace{2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2}_{8\text{ 個 }2}-1$，請就上述問題，分別以不同解題思路說明為什麼？

$$8+28+56+70+56+28+8+1=\underbrace{2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2}_{8\text{ 個 }2}-1$$

3. 探究古人計算組合數的方法！



清代數學家汪萊在著作《衡齋算學四》的〈遞兼數理〉中提出「十物遞兼分數圖解」，利用各種三角堆的和求出相對應的組合數 C_k^{10}。其中組合數 C_2^{10} 的求法是利用與平三角堆總和的對應規律，導出 $C_2^{10}=9+8+7+6+5+4+3+2+1$，如上圖，進而求得 $C_2^{10}=\dfrac{9\times10}{2}=45$。請解釋 $C_2^{10}=9+8+7+6+5+4+3+2+1$ 為何成立。

4.⑴設 n，k 都是正整數，且 $2 \leq k \leq n$，
試證明 $C_k^n = C_k^{n-2} + 2C_{k-1}^{n-2} + C_{k-2}^{n-2}$ 。
⑵設計一個情境式的敘述，說明 $C_k^n = C_k^{n-2} + 2C_{k-1}^{n-2} + C_{k-2}^{n-2}$ 。

第六章　普通型高中篇（II）

經驗分享

平面上的線性轉換

第六章　普通型高中篇（II）

數學素養教材設計發展之經驗分享
平面上的線性轉換

壹、教材設計理念

一、設計動機

「平面上的線性變換」是 107 課綱 F-11A-3 的學習內容，又線性變換有廣泛的用途，在數學、統計、金融、電腦影像處理中都是常用的工具，在高中放入此單元，作為大學理工科系「線性代數」課程的準備。一般學生學習時，常流於表面的記憶背誦與矩陣乘法計算，沒有體會到「變換矩陣」本身的意義，因此設計此課程，希望能讓學生透過一連串有意義的學習活動，理解並內化教材中的概念，俾使未來學生即便忘記這些基本變換矩陣的內容，也能自行輕易推導出來。

二、教材設計想法

（一）以探索式活動引導學生將操作矩陣乘法的動作與圖形變換連結，待熟練之後，經由活動，猜測可能的變換，在過程中認識到線性變換的性質，漸進的建立概念的發展。

（二）線性變換既是幾何上的變換，幾何圖形與代數式的連結為教學上的重點，教學活動中的每一個概念建立時，都要將代數式的在幾何上的意涵以圖形和文字說明清楚表達。

（三）活動以學生現有知識架構來規劃，在活動三中製造一個認知衝突，強化這個基本概念；在練習 6 中，也讓學生提出自己的想法，發展一題多解、綜合概念應用的能力。也在各個活動適當時機鋪陳未來要發展的概念如練習 5，為介紹新概念奠基。推移變換是學生比較不易產生直觀的變換，所以在課程中定義時，要將推移的方向，及推移根據哪

一個坐標的倍數，如何移動，三者皆介紹清楚，才展開後面的活動。

本課程設計在於建立學生線性代數中由基底變換到基底的概念，期許建立概念後，將來進一步學習線性代數時，能以此為概念擴展。

貳、教學架構

分為三部分探討：平面上的線性變換、平面上特殊的線性變換與線性變換的面積比，在前言中，介紹影像處理中，畫素品質，影像如何旋轉、伸縮、鏡射等動作都與矩陣相關，引起學生學習的動機，並以圖片工具列中旋轉圖示來當引言切入矩陣變換學習之旅。

一、平面上的線性變換

（一）變換矩陣

先從舊經驗出發透過活動 1 建立矩陣與點坐標的對應，確立矩陣乘法是一種函數對應，能利用矩陣乘法來表示平面上的點經變換後對應點的位置關係，加強函數對應概念。接著安排活動 3 的三小題，透過分組討論，讓學生隨著小題慢慢深入思考，讓概念建立，並且透過討論，讓學生提出策略，彼此想法激盪。特別於此處安排討論 2 的問題，讓思考方向不會偏離，緊緊扣住學習主題脈動，也讓學生將活動 3 的討論再次整理，確認概念。活動 4 的 (2) 結合原點變換到原點的概念，向量由二點組成，建立點變換到點，向量變換到向量的概念，為基底概念作伏筆。

（二）線性組合觀點看線性變換

活動 5 透過先讓學生在坐標平面上畫出向量 $\overline{p}=2\overline{i}+3\overline{j}$ 的線性組合與經矩陣 A 變換後所得向量 $\overline{k}=2\overline{u}+3\overline{v}$ 的線性組合關係式，請學生觀察二者的關係，也利用矩陣運算規則，將運算式寫出讓學生利用圖形解釋上式算式所代表的意義，讓學生建立以線性組合觀點看線性變換的概念，建立掌握基底變換即可掌握線性變換矩陣，此處特別設計讓學生先畫出圖形，在下一頁再以圖形表示，如下圖表示。

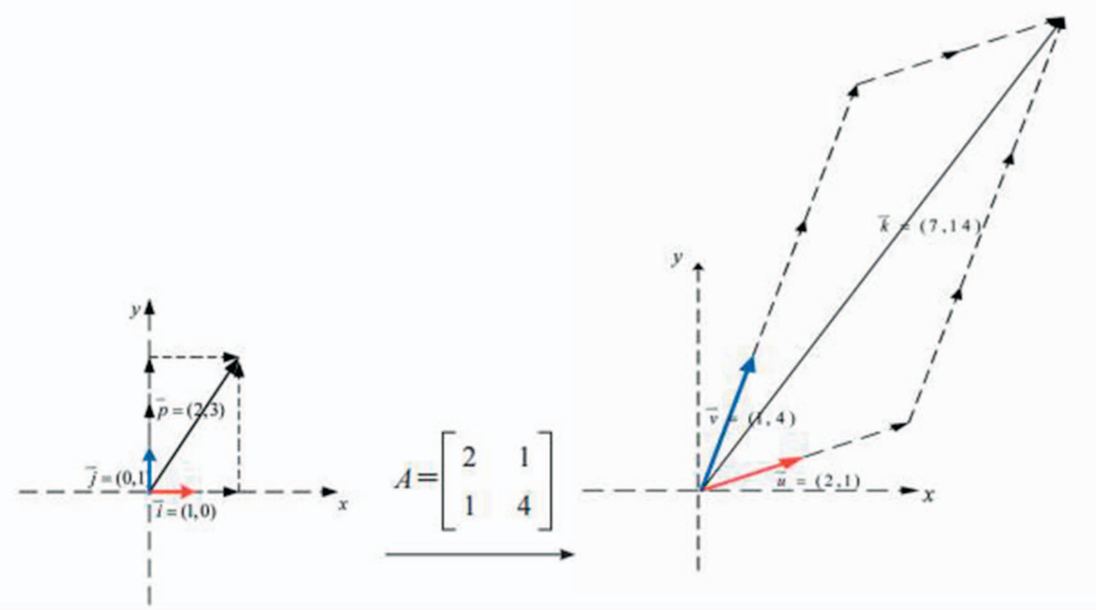


圖 1 線性組合關係式圖

二、平面上特殊的線性變換

以前段教學為基礎，讓學生透過討論，實做，思考建立線性變換的心像，再以此為基石讓學生透過以 $\vec{i}=(1,0)$ 與 $\vec{j}=(0,1)$ 的變換，即可得二階變換矩陣 A 的概念，來自己推導出四種特殊變換矩陣。並輔以 geogebra 軟體，輸入變換矩陣使得圖像 (圖可以選讓學生有親近感的，此處為本校校熊) 呈現伸縮、旋轉、鏡射、推移變換，加強視覺感受，此軟體可見於參考資料。

（一）旋轉矩陣

利用將 $\vec{i}=(1,0)$ 與 $\vec{j}=(0,1)$ 旋轉 θ 角 ，透過三角運算即可得旋轉矩陣

（二）鏡射矩陣

利用將 $\vec{i}=(1,0)$ 與 $\vec{j}=(0,1)$ 對直線 $y=mx=(\tan\theta)x$ 做鏡射，因為 $\vec{j}=(0,1)$ 鏡射較不易處理角度，但利用鏡射二向量夾角不變，可由鏡射後的向量其有向角為 2 θ ，可得 $\vec{j}=(0,1)$ 鏡射後的有向角為 $2\theta-90^{\circ}$

（三）推移矩陣

水平推移、$\vec{i}=(1,0)\to\vec{u}=(1+0\cdot k,0),\vec{j}=(0,1)\to\vec{v}=(0+1\cdot k,1)$ 鉛直推移，

$\overline{i}=(1,0)\rightarrow\overline{u}=(1,0+1\cdot k)=(1,k),\overline{j}=(0,1)\rightarrow\overline{k}=(0,1+0\cdot k)=(0,1)$ 將係數關係仔細寫出，學生概念更清楚。

（四）在每個變換後，透過軟體 GGB，輸入對應的矩陣，讓學生可以看到圖像對應的變換，可以將抽象化的過程以具象呈現。

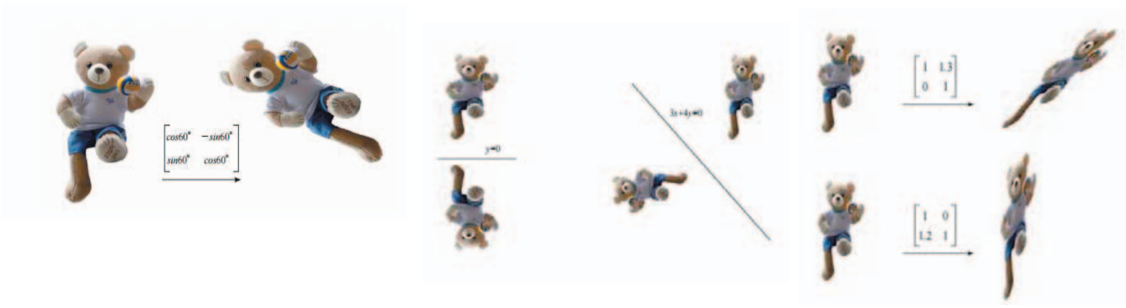


圖 2 geogebra 軟體示例

三、**線性變換面積比**

由活動 5 知，由基底向量所張成的二平行四邊形面積比為 $1:|\det A|$，若是任意二向量張成的平行四邊形與經由線性變換矩陣後所得的二向量張成的平行四邊形，二者面積比是否仍然為 $1:|\det A|$ ？由此引入推導證明，由於前二段的基礎，這一段概念容易建立。

參、教學模組試教過程

一、試教時間：105.1.26 與 105.1.27 共 4 節課。

二、對象：中山女高高三某班學生，由於當時高二未上此單元，所以為此單元初學者。

三、觀課與議課摘要：共有 7 位老師參與觀課與議課過程，透過觀課紀錄教學流程並於議課時給與建議：

（一）學生可由圖形尋找策略，請學生朗讀資料加強概念建立，讓同學可用自己的話說出變換的關聯，良好且完整的建立了學生對基底的概念。

（二）從動畫感受到兩方向伸縮比例不同圖形變化，教材設計、內容呈現，學生討論熱烈，師生互動佳。

（三）活動 5 結束後可回顧任務 3(3)，任務 9 的格子不夠，活動七與八在格

子上加上圓，繪圖會更完整。

（四）學生回饋：

1. 甲生：我之所以對線性變換矩陣的公式不易忘記或是搞混的原因是因為在上課的時候，老師給的不是一個死背的公式，而是一個開放性的討論讓我們自己推導公式，我很喜歡這樣的教學，因為上課可以很輕鬆但又收穫滿滿，自己的數學邏輯概念也能提升。另外，還用了程式的輔助，讓我們能真正感受到不論是放大、縮小、旋轉、鏡射的感覺，不是只有在紙上的數字計算而已。對於複習也有很大的幫助，因為拿出講義從推導到公式的產生都很熟，所以很輕鬆的複習完。唯有推移矩陣在課堂上講的稍快，是 x 變還是 y 要變一直不懂，所以有點難理解，搞清楚後也沒什麼太大的問題。

2. 乙生：我覺得教的蠻好的，我後來複習就是以那段記憶為基礎的，因為老師會舉生活例子也會一起演算，所以其實蠻深刻的。基本上我覺得沒什麼要改的，不過推移那邊我覺得要再講久一點，因為矩陣那邊一開始我最不懂的就是這個。這單元也可以跟第五冊複數的極式好像可以連結，我覺得滿有趣的。

3. 丙生：我覺得滿有用的，可以直接問問題還有一點點小小的腦力激盪，而且配合的講義學習單也比課本稍微有系統，在課程上好像比較契合，而且這份課程在順序上有比較〝被連載一起〞的感覺。

肆、結語

在向量的單元中，107 年課綱比先前的課綱更強調線性組合的重要性，作為高中課程與大學線性代數課程的銜接，無疑是相當有幫助的。本教材根據此原則，設計了以「基底變換」與「線性組合」為概念核心，並據以介紹四個常見的變換。

建議教師們在此單元教學時，除了介紹變換矩陣可將點變換到點，也應強調，同一個運算式，亦可視為此變換矩陣式將一個向量變換至另一向量，然後擴展到同時變換兩個向量，這是為了未來「變換一組基底」而做準備。

大學生在初學習線性代數的困難點之一，是如何將矩陣運算式與抽象的概念連結，然後作嚴謹的論證，所以常在學到「線性變換和不同基底之間的座標變換」後，便搞不清楚在學甚麼了。高中「線性變換」是以具體的二維空間來介紹此概念，若學生能在這裡有栩栩如生的心像，使將來能類推到三維空間甚至 n 維空間，或可減少學習困難度。同學們在學習時，也該將矩陣的運算式所蘊含的意義釐清，以二維、三維具象的圖形來幫助思考，鞏固基本觀念。

第六章　普通型高中篇（II）

教學單元

平面上的線性轉換

平面上的線性變換與二階方陣

壹 平面上的線性變換（*linear transformation*）

一 變換矩陣

二 線性組合觀點看線性變換

貳 平面上特殊的線性變換

一 伸縮變換

二 旋轉變換

三 鏡射變換

四 推移變換

叁 線性變換的面積比

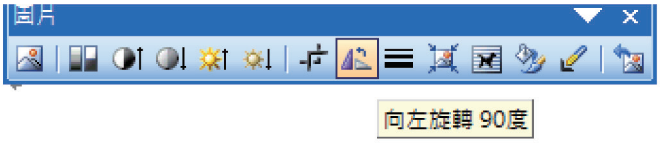
2

前言

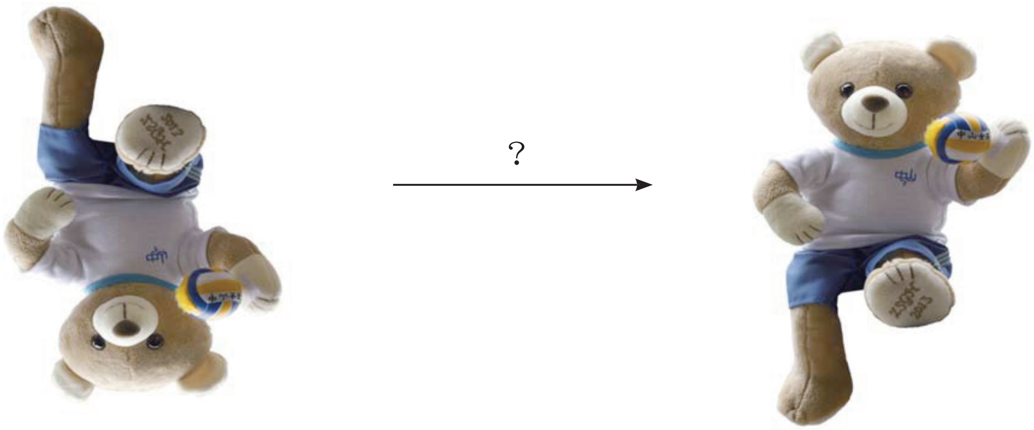
購買電視或數位相機時，最常提到「畫素」(*pixel* 亦稱為「像素」、「像點」)，此名詞的意思是這個裝置會把取得的影像，以格狀來儲存，每一格為一個畫素，影像的長與寬被切成許多格，那麼每一個影像便是一個矩陣，矩陣中的每一個元素就是每一格子儲存的資料。因此，畫素愈高矩陣愈大，影像呈現得更清楚，不過代價便是影像所使用的記憶空間增大，處理時所需的時間也會增加。

在處理影像的時候，這個矩陣的每一個元素儲存了這一個格子影像的顏色與透明度。當顯示靜態畫面時，只要在矩陣上打上各位置所對應的顏色數值，即可呈現所需圖案；但若要展現動態畫面時，便須逐次變換圖案的位置、角度與大小，這就牽涉到平面變換的概念，基本的平面變換有平移、旋轉、伸縮、鏡射與推移，如何使用矩陣的運算，來使影像旋轉、平移、縮放、鏡射 … 等，此處因平移概念較為簡單，所以我們介紹其餘四種變換。

如下圖，當我們收到了這一張照片，你是不是會使用工具列來將圖修正呢？



這背後的數學原理為何呢？讓我們來展開這段數學學習之旅囉！



壹　平面上的線性變換（linear transformation）

1 變換矩陣

在之前的單元，我們學習了矩陣的乘法，現在我們要專門來討論二階方陣的一個特別作用。

活動 1

請利用矩陣乘法性質計算下列各值：

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}=$ ....　　(2) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}=$ ....

(3) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}=$ ....　　(4) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}=$ ....

【討論1】

對於這個矩陣乘法，我們可以有幾何意義的解釋嗎？

(1) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ 在坐標平面上代表什麼？

(2) $\begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}$ 在坐標平面上可以代表什麼？

(3)猜一猜 $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ 的意義可能是什麼？

如 $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$，$P=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$，$Q=\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$，$R=\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$，$P'=\begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}$，$Q'=\begin{bmatrix} 9 \\ -3 \end{bmatrix}$，$R'=\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$，

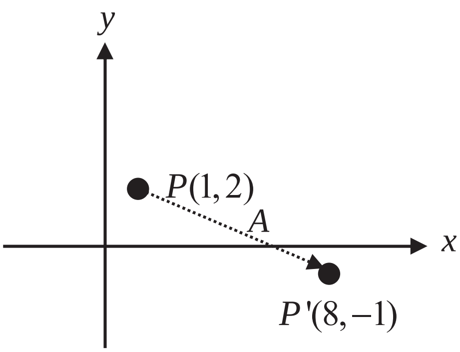
則 $AP=P'$，$AQ=Q'$，$AR=R'$，

對於這個矩陣乘法，我們可以視為 $P \xrightarrow{A} P'$，$Q \xrightarrow{A} Q'$，$R \xrightarrow{A} R'$，

也就是說，將矩陣 A 視為一個函數，型如：$x \xrightarrow{f} f(x)$，

只是這裡需看成是：

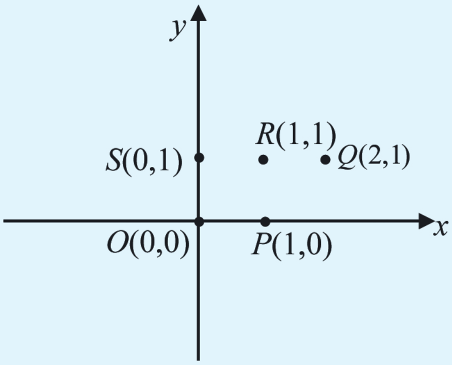
將點（1，2）透過矩陣 A 轉換得到點（8，−1）；點（0，3）透過矩陣 A 轉換得到點（9，−3）；點（−2，1）透過矩陣 A 轉換得到點（−1，−3），所以我們將平面上的點（x，y）寫成 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 的形式，則上式就可以解釋成矩陣 $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ 作用在點 P（1，2）上，得到點 P'（8，−1），亦即矩陣 $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ 可視為將點 P（1，2）變換為點 P'（8，−1）的一個動作，如右圖所示。



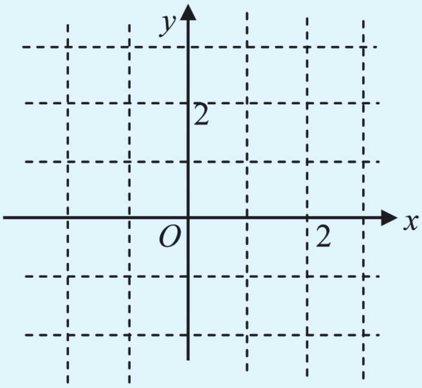
用這個觀點來看，**矩陣 $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ 即代表一個平面上點與點之間的一個變換規則**（簡稱為**變換**）。

活動 2

圖一中有五個點，分別為點 O（0，0）、點 P（1，0）、點 Q（2，1）、點 R（1，1）、點 S（0，1），矩陣 $A=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，請試在圖二中描繪出 O、P、Q、R、S 經矩陣 A 變換後的五個點 O'、P'、Q'、R'、S' 分別所對應的位置。



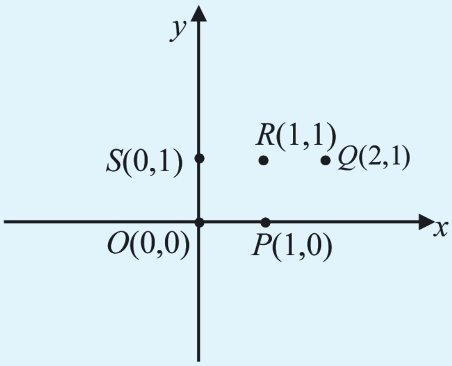
圖一



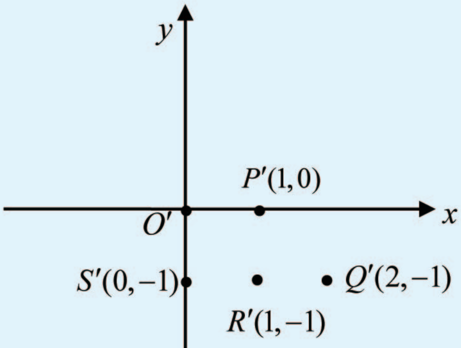
圖二

活動 3 分組討論

1. 若矩陣 B 將 O、P、Q、R、S 五點變換至圖三的五個對應點 O'、P'、Q'、R'、S'，要如何求出 B，請提出你的策略，並說明如何確定你的答案是正確的？

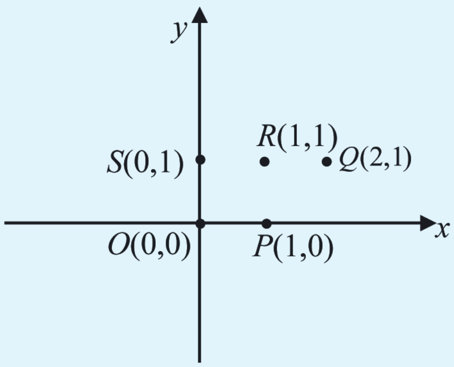


圖一

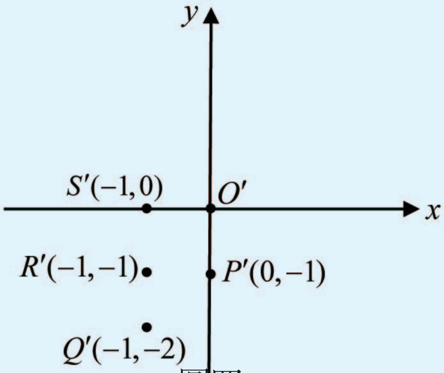


圖三

2. 若矩陣 C 將 O、P、Q、R、S 五點變換至圖四的五個對應點 O'、P'、Q'、R'、S'，要如何求出 C，請提出你的策略，並說明如何確定你的答案是正確的？

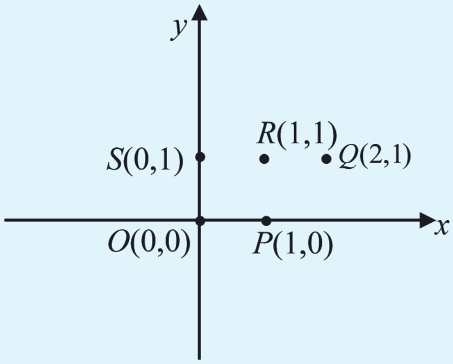


圖一

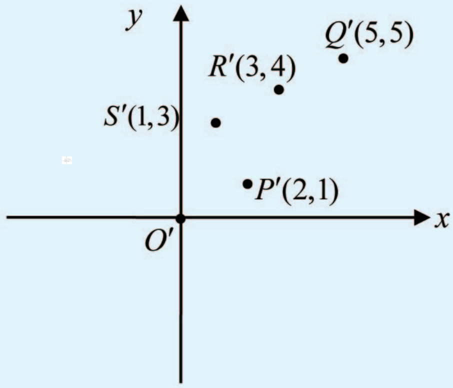


圖四

3. 若矩陣 D 將 O、P、Q、R、S 五點變換至圖五的五個對應點 O'、P'、Q'、R'、S'，要如何求出 D，請提出你的策略，並說明如何確定你的答案是正確的？



圖一



圖五

【討論 2】

1. 觀察活動三的三個變換前後的圖形，有沒有哪一個點是不動點？
2. 已知一個圖形經由某個矩陣變換後得到另一個圖形，如何從原始圖形坐標和變換後的圖形坐標來求出此變換矩陣呢？我們要代入圖形中所有的點嗎？一個點夠嗎？
3. 你認為知道原圖形通過哪些點坐標及其變換後的點坐標，就可以更有效率的求出變換矩陣？

活動 4

1. 請找出點 O（0，0）、（1，0）與（0，1）經二階方陣 $A=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ 變換後的點坐標分別為何？

2. 向量 $\overrightarrow{i}=(1,0)$ 與向量 $\overrightarrow{j}=(0,1)$ 經二階方陣 $A=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ 變換後分別為何？

任務 1

$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$、$C=\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$，

請問上述矩陣所代表的變換，各將點（1，0）與（0，1）變換為哪兩點？

任務 2

1. 如果一個變換矩陣 A 使得 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$，

   則變換矩陣 A 為何？

2. $A\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ 的結果為＿＿＿＿＿＿。

任務 3

設二階方陣 $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$，

(1)求點 O（0 , 0）經過 A 作變換後所對應的點 O' 的坐標為＿＿＿＿＿＿。

(2)求點 P（4 , 1）經過 A 作變換後所對應的點 P' 的坐標為＿＿＿＿＿＿。

(3)求 $\overrightarrow{OP}=$（4 , 1）經過 A 作變換後所對應的向量 $\overrightarrow{O'P'}$ 為＿＿＿＿＿＿。

任務 4

設平面上的一線性變換 A 使得 $\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix} 8 \\ -38 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix} 7 \\ -26 \end{bmatrix}$，

試求矩陣 A 。

2 線性組合觀點看線性變換

活動 5

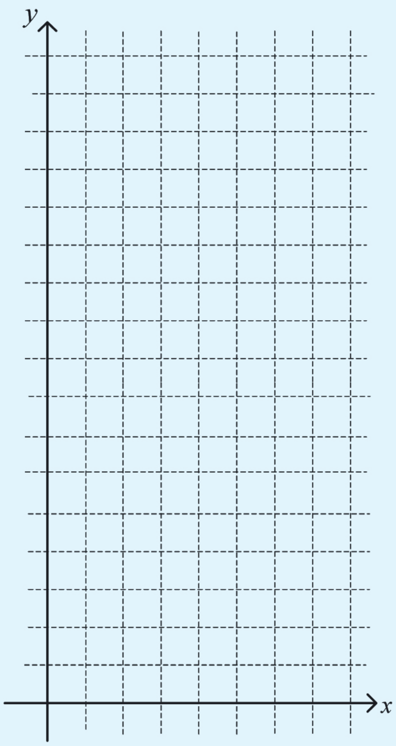
若變換矩陣 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$，又

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$，視為 $\overrightarrow{i}=(1,0)\xrightarrow{A}\overrightarrow{u}=(2,1)$；

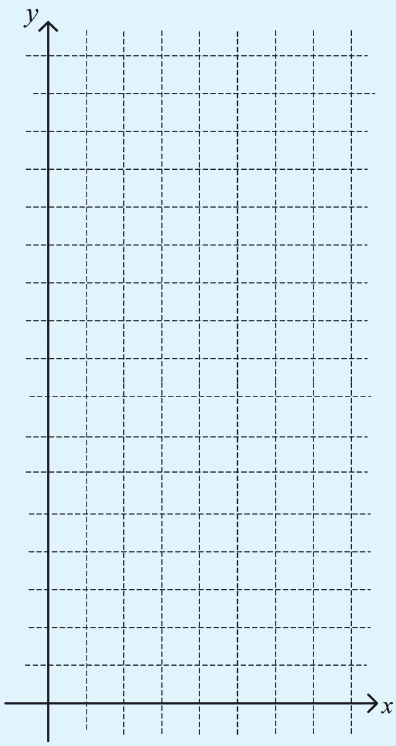
$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$，視為 $\overrightarrow{j}=(0,1)\xrightarrow{A}\overrightarrow{v}=(1,4)$；

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 \\ 14 \end{bmatrix}$，視為 $\overrightarrow{p}=(2,3)\xrightarrow{A}\overrightarrow{k}=(7,14)$。

(1)請在下方左邊的坐標平面上畫出 $\overrightarrow{i}$、$\overrightarrow{j}$、$\overrightarrow{p}$，並於下方右邊的坐標平面上畫出 $\overrightarrow{u}$、$\overrightarrow{v}$、$\overrightarrow{k}$ 上述六個向量所對應的位置。（以原點為向量的起點）



$\xrightarrow{A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}}$

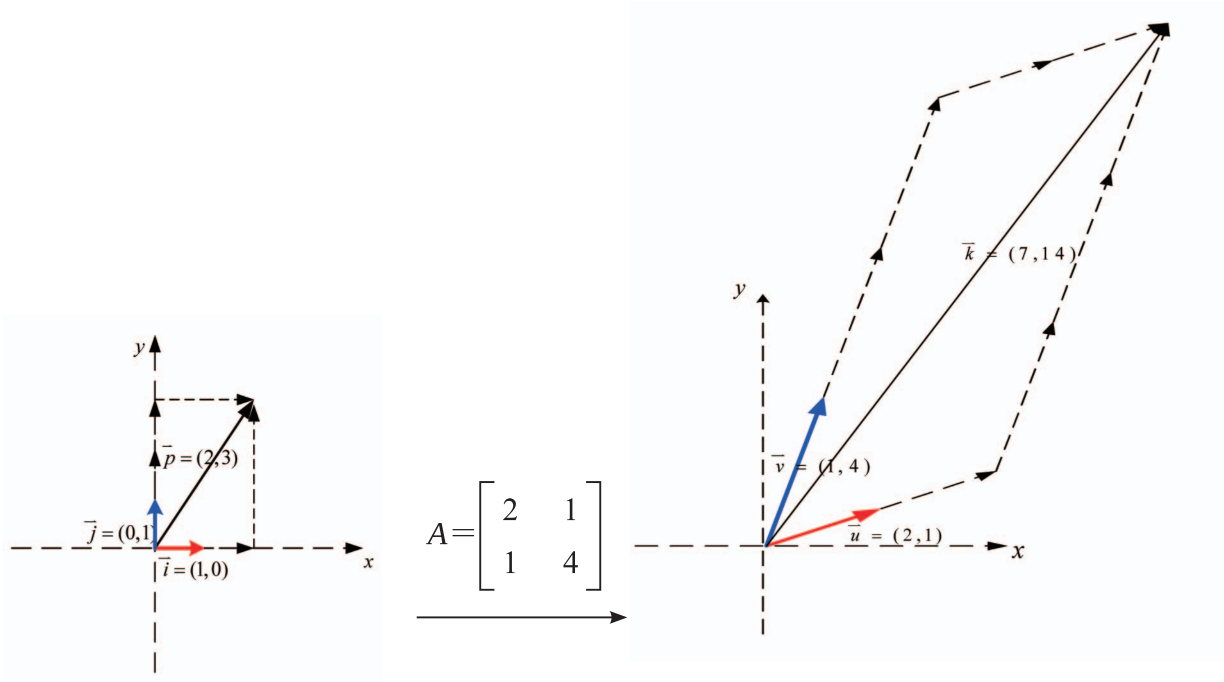


⑵利用矩陣運算規則，可得運算式如下：

請利用圖形解釋下列算式所代表的意義。

$$\begin{bmatrix}2&1\\1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\1&4\end{bmatrix}\left(2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=2\begin{bmatrix}2&1\\1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}2&1\\1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$=2\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\14\end{bmatrix}$$



圖六　　　　　　　　　　　　圖七

現在我們以向量觀點來看點的變換，如點（2，3）視為向量 $\vec{p}$ ＝（2，3），因為平面上任何向量皆可以二個不平行的非零向量作線性組合，所以

$\vec{p}$ ＝（2，3）＝2（1，0）＋3（0，1）＝2 $\vec{i}$ ＋3 $\vec{j}$ ，如圖六，

$\vec{k}$ ＝（7，14）＝2（2，1）＋3（1，4）＝2 $\vec{u}$ ＋3 $\vec{v}$ 仍保有線性組合概念，如圖七。

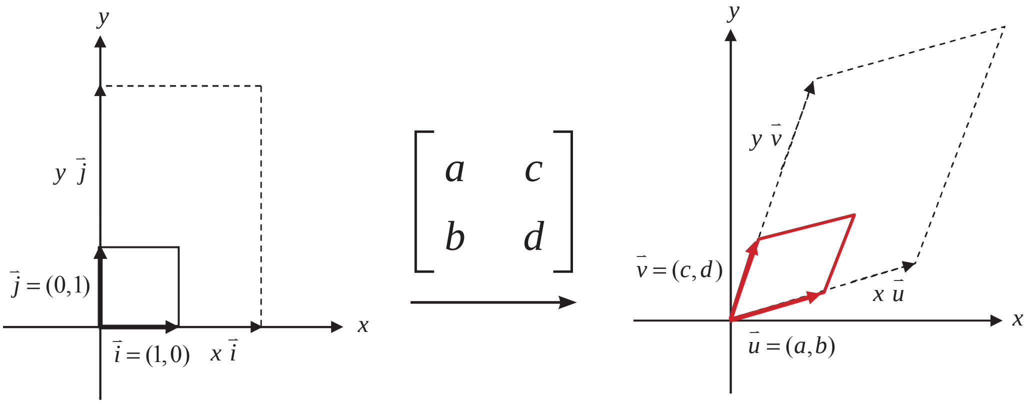
因為線性變換矩陣 $A=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ 可將向量 $\overrightarrow{i}=(1,0)$ 變換到向量 $\overrightarrow{u}=(a,b)$，向量 $\overrightarrow{j}=(0,1)$ 變換到 $\overrightarrow{v}=(c,d)$，所以我們只要知道 $\overrightarrow{i}=(1,0)$ 與 $\overrightarrow{j}=(0,1)$ 的變換，即可得二階變換矩陣 A。

向量 $\overrightarrow{u}=(a,b)$ 是這個變換 $A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ 將向量 $\overrightarrow{i}=(1,0)$ 變換後的結果，

向量 $\overrightarrow{v}=(c,d)$ 是這個變換 $A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ 將向量 $\overrightarrow{j}=(0,1)$ 變換後的結果。

因為 $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\left(x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}+y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)=x(\overrightarrow{u})+y(\overrightarrow{v})=x\overrightarrow{u}+y\overrightarrow{v}$，

由矩陣的係數積與分配律性質，可得 $A\left(x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}+y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)=x\left(A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)+y\left(A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ 為一線性組合，故矩陣 A 被稱為**線性變換**。也就是說，A 將所有的向量從以 $\overrightarrow{i}=(1,0)$ 和 $\overrightarrow{j}=(0,1)$ 為基底的向量空間（直角坐標系）變換到一個以向量 $\overrightarrow{u}=(a,b)$ 和 $\overrightarrow{v}=(c,d)$ 為基底的向量空間（斜角坐標系），向量 (x,y) 被 A 矩陣變換為向量 $x\overrightarrow{u}+y\overrightarrow{v}$，如下圖八。



圖八

只要能求得 $\overrightarrow{i}=(1,0)\rightarrow\overrightarrow{u}=(a,b)$ 和 $\overrightarrow{j}=(0,1)\rightarrow\overrightarrow{v}=(c,d)$，

這個變換矩陣 $A=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ 就能得知。

【討論 3】

觀察圖八中，由 $\overrightarrow{i}=(1\,,\,0)$和 $\overrightarrow{j}=(0\,,\,1)$張成的平行四邊形面積 A_1 與由向量 $\overrightarrow{u}=(a\,,b)$和 $\overrightarrow{v}=(c\,,d)$張成的平行四邊形面積 A_2，二者面積有何關係？

【討論 4】

已知「點經過矩陣變換亦為點，向量經過矩陣變換亦為向量」，那麼直線經過矩陣變換亦為直線嗎？並請說明原因。

觀察任務 4，可將之視為二點 $P(4,-2)$，$Q(3,-1)$經矩陣 $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\-7 & 5\end{bmatrix}$分別變換到二點 $P'(8,-38)$，$Q'(7,-26)$，又二點決定一直線，若將之視為直線 PQ 經矩陣 A 變換到直線 $P'Q'$，是否直線 PQ 上每一點皆可對應到直線 $P'Q'$ 上？我們做以下初步的檢驗：

先求出直線 PQ 方程式為 $x+y=2$，直線 $P'Q'$ 方程式為 $12x+y=58$，直線 PQ 上另一點 $R(5,-3)$，因為 $\begin{bmatrix}3 & 2\\-7 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-50\end{bmatrix}$，所以點 $R(5,-3)$對應到點 $R'(9,-50)$，點 R' 在直線 $P'Q'$ 上。

直線可由點及方向向量組成，又點經過矩陣變換亦為點，向量經過矩陣變換亦為向量，所以我們將直線 L 以參數式 $\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\end{cases}$，$t\in R$ 表示，$\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$即 L 上任一點(x,y)可表示為 $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$，變換矩陣為 A。

因為 $A\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=A\left(\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\right)=A\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}+tA\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_0'\\y_0'\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}a'\\b'\end{bmatrix}$，

其中 $\begin{bmatrix}x_0'\\y_0'\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}a'\\b'\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$，則 $\begin{bmatrix}a'\\b'\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$，所以矩陣 A 把直線 L 變換成一直線 L'。

任務 5

設 A 是平面上的線性變換，$A=\begin{bmatrix}3 & -1\\0 & -2\end{bmatrix}$，直線 $L：2x+y-4=0$，求直線 L 經矩陣 A 變換後的直線方程式。(請寫出二種以上的解法)。

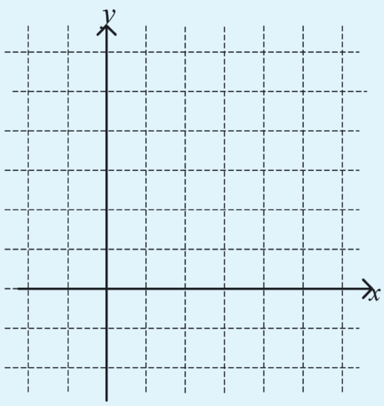
貳　平面上特殊的線性變換

這裡我們要介紹平面上常見的四種變換：伸縮、旋轉、鏡射與推移，又因為線性變換矩陣 $A=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ 可將向量 $\overrightarrow{i}=(1,0)$ 變換到向量 $\overrightarrow{u}=(a,b)$，向量 $\overrightarrow{j}=(0,1)$ 變換到向量 $\overrightarrow{v}=(c,d)$，又 $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=A\left(x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}+y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)=x\left(A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)+y\left(A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$，所以我們只要知道 $\overrightarrow{i}=(1,0)$ 與 $\overrightarrow{j}=(0,1)$ 的變換，即可得二階變換矩陣 A，所以在這裡我們將尋找 $\overrightarrow{i}=(1,0)$ 與 $\overrightarrow{j}=(0,1)$ 經由四種變換：伸縮、旋轉、鏡射與推移而變換到新向量 $\overrightarrow{u}=(a,b)$ 與 $\overrightarrow{v}=(c,d)$，進而找到變換矩陣 $A=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$。

1 伸縮變換

活動 6

請找出坐標平面上，以原點 O 為中心，將 $\overrightarrow{i}=(1,0)$ 與 $\overrightarrow{j}=(0,1)$ 沿水平向伸縮 r 倍 $(r>0)$，鉛直向伸縮 s 倍 $(s>0)$ 的向量為何？



坐標平面上，若以原點 O 為中心，將點 $P(x, y)$ 沿水平向伸縮 r 倍 $(r>0)$，鉛直向伸縮 s 倍 $(s>0)$，得點 $P'(x', y')$，則 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，

並稱矩陣 $\begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{bmatrix}$ 為伸縮變換矩陣。

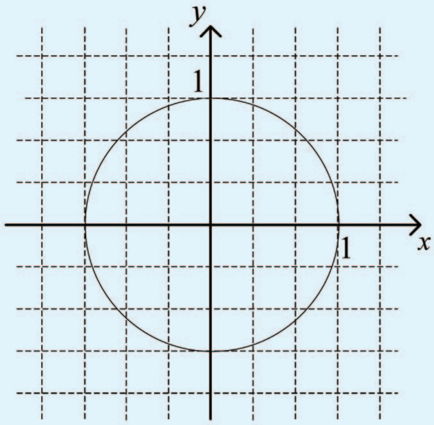
$\xrightarrow{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix}}$

2 旋轉變換

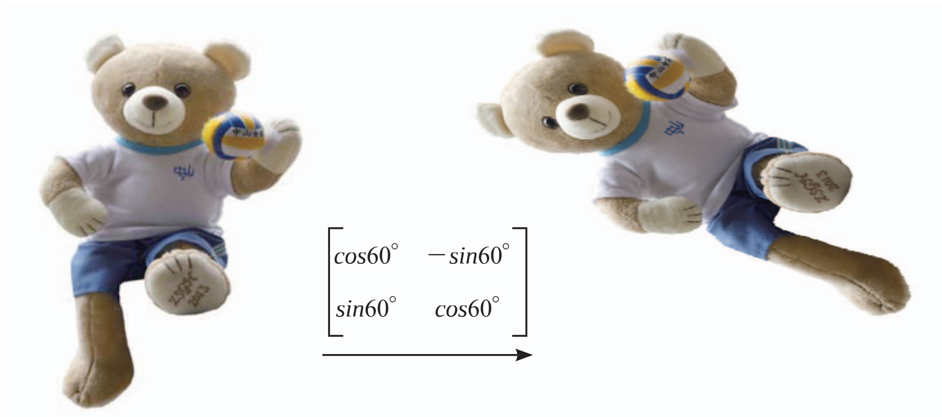
我們介紹以**原點為中心**旋轉 θ 角的變換（θ 大於 0 時，表逆時鐘方向旋轉；θ 小於 0 時，表順時鐘方向旋轉）。

活動 7

請找出坐標平面上，以原點 O 為中心，將 $\overrightarrow{i}=(1, 0)$ 與 $\overrightarrow{j}=(0, 1)$ 旋轉 θ 角後的向量為何？



坐標平面上，若以原點 O 為中心，將點 $P(x , y)$ 依逆時針方向旋轉 θ 角後得點 $P'(x' , y')$，則 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，並稱矩陣 $\begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{bmatrix}$ 為旋轉矩陣。

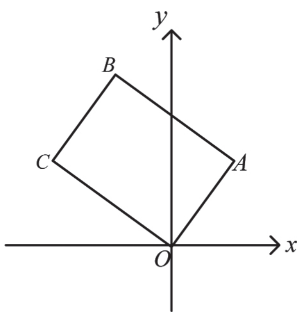


任務 6

設△OAB 為正三角形且 $O(0 , 0)$，$A(4 , 2)$，求 B 點的坐標。

任務 7

如圖所示，$OABC$ 為一矩形，已知 $\overline{OP}=\sqrt{3}\ \overline{OA}$，且 A 點坐標為 $(3 , 4)$，試求 B 點的坐標。



3 鏡射變換

需討論以那一條直線為對稱軸的鏡射變換。

(1)對 x 軸作鏡射：$\overrightarrow{i}=(1,0)\to\overrightarrow{u}=(1,0)$，$\overrightarrow{j}=(0,1)\to\overrightarrow{v}=(0,-1)$，

所以鏡射矩陣為 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$。

(2)對 y 軸作鏡射：$\overrightarrow{i}=(1,0)\to\overrightarrow{u}=(-1,0)$，$\overrightarrow{j}=(0,1)\to\overrightarrow{v}=(0,1)$，

所以鏡射矩陣為 $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$。

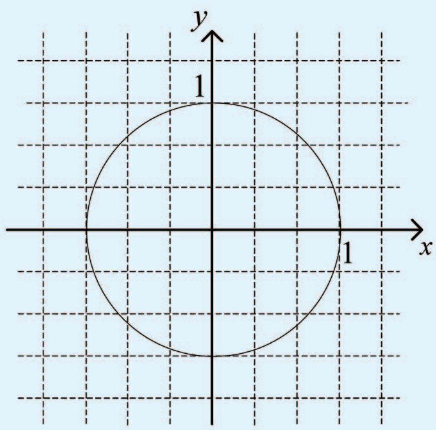
(3)對直線 $x=y$ 作鏡射：$\overrightarrow{i}=(1,0)\to\overrightarrow{u}=(0,1)$，$\overrightarrow{j}=(0,1)\to\overrightarrow{v}=(1,0)$，

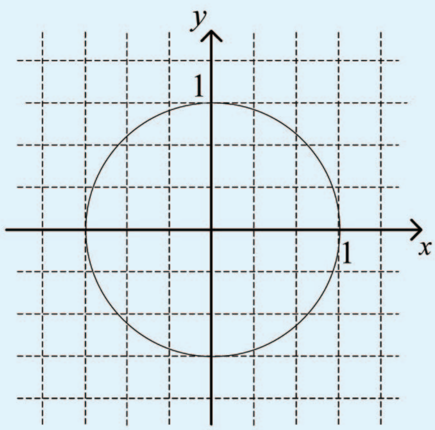
所以鏡射矩陣為 $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$。

若對稱軸為一般直線呢？其對稱直線為 $y=mx=(\tan\theta)x$，請看：

活動 8

直線 L 是過原點且與 x 軸正向夾 θ 角的直線，其方程式為 $y=mx=(\tan\theta)x$，求 $\overrightarrow{i}=(1,0)$ 與 $\overrightarrow{j}=(0,1)$ 對直線 L 做鏡射所得向量分別為何？

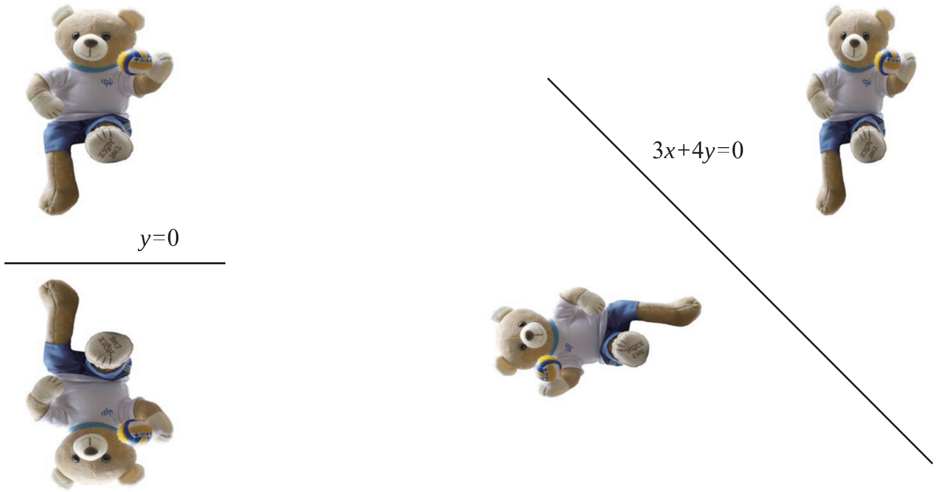




坐標平面上，L 是過原點且與 x 軸正向夾角為 θ 的直線（$y=mx=(\tan\theta)x$），

若點 $P(x,y)$ 對直線 L 鏡射得點 $P'(x',y')$，則 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，

並稱矩陣 $\begin{bmatrix} \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} \end{bmatrix}$ 為鏡射矩陣。

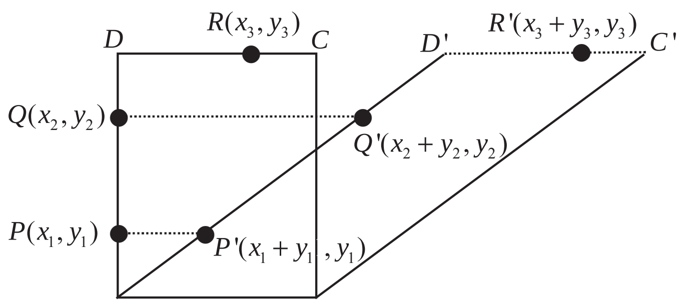


任務 8

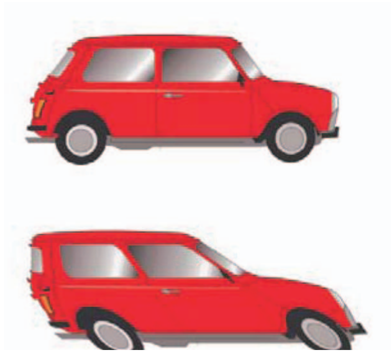
1. 設矩陣 A 表示以直線 $L：x+y=0$ 為對稱軸的鏡射變換，試求矩陣 A。
2. 設矩陣 A 表示以直線 $L：y=2x$ 為對稱軸的鏡射變換，試求矩陣 A，並求點 $P(-2,1)$ 在矩陣 A 變換下的點 P' 為何？

4 推移變換

如圖九，已知 $ABCD$ 為一矩形，將矩形下底 $\overline{AB}$ 固定不動，上底 $\overline{CD}$ 向右平行移動（假設 $\overline{BC}$ 與 $\overline{AD}$ 是具有伸縮彈性的線）得平行四邊形 $ABC'D'$ ，這就是推移的概念。數學語言為將圖形沿 x 軸方向水平推移 y 坐標的 1 倍，所以點的位置愈高，被推移的距離愈大，產生傾斜的效果。



圖九



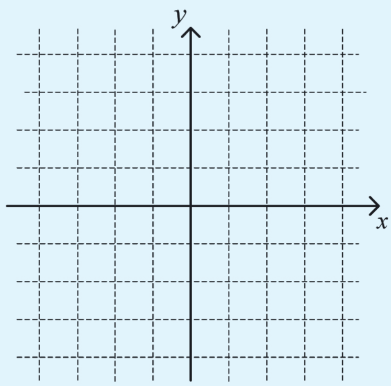
推移

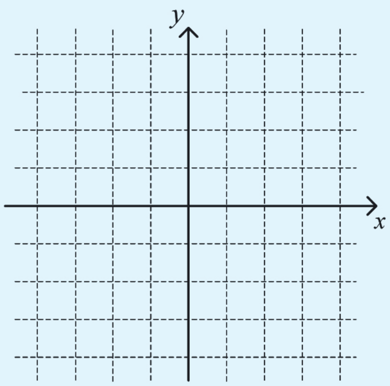
活動 9

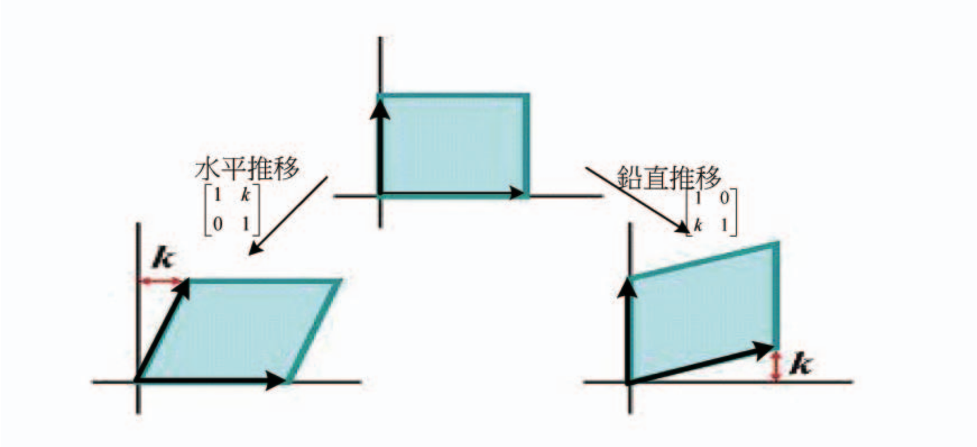
實數 $k>0$，請找出坐標平面上：

(1)將 $\overrightarrow{i}=(1,0)$ 與 $\overrightarrow{j}=(0,1)$ 沿 x 軸方向水平推移 y 坐標的 k 倍，其向量為何？

(2)將 $\overrightarrow{i}=(1,0)$ 與 $\overrightarrow{j}=(0,1)$ 沿 y 軸方向鉛直推移 x 坐標的 k 倍，其向量為何？







坐標平面上，

(1)若將點 $P(x,y)$ 沿 x 軸推移 y 坐標的 k 倍，得點 $P'(x',y')$，

則 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，並稱矩陣 $\begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{bmatrix}$ 為水平推移矩陣。

(2)若將點 $P(x,y)$ 沿 y 軸推移 x 坐標的 k 倍，得點 $P'(x',y')$，

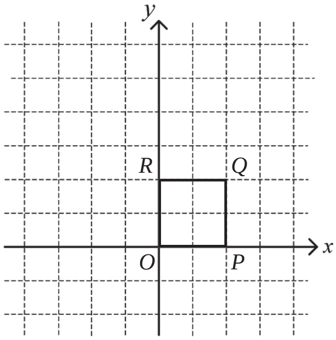
則 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，並稱矩陣 $\begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{bmatrix}$ 為鉛直推移矩陣。

$\xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 1.3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$

$\xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1.2 & 1 \end{bmatrix}}$

任務 9

設坐標平面上一正方形 $OPQR$，其中 $O(0\,,\,0)$，$P(2\,,\,0)$，$Q(2\,,\,2)$，$R(0\,,\,2)$，試作此正方形 $OPQR$ 對 $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ 作推移變換所得之新圖形。



任務 10

請寫出二階方陣表示的平面變換為：先對直線 $x=y$ 作鏡射，再鉛直推移 2 倍，再水平方向伸縮 3 倍，最後對 y 軸作鏡射。

參　線性變換的面積比

線性變換 A 將所有的向量從以 $\overrightarrow{i}=(1,0)$ 和 $\overrightarrow{j}=(0,1)$ 為基底的向量空間（直角坐標系）變換到一個以向量 $\overrightarrow{u}=(a,b)$ 和 $\overrightarrow{v}=(c,d)$ 為基底的向量空間（斜角坐標系），向量 (x,y) 被 A 矩陣變換為向量 $x\overrightarrow{u}+y\overrightarrow{v}$。由活動 5 知，由基底向量所張成的二平行四邊形面積比為 $1:|\det A|$，若是任意二向量張成的平行四邊形與經由線性變換矩陣後所得的二向量張成的平行四邊形，二者面積比是否仍然為 $1:|\det A|$？

令 $\overrightarrow{OP}=(x_1,y_1)$，$\overrightarrow{OQ}=(x_2,y_2)$ 為平面上二點，矩陣 $A=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ 為平面上的線性變換矩陣，A 分別將 $\overrightarrow{OP}$、$\overrightarrow{OQ}$ 變換到 $\overrightarrow{OP'}=(x'_1,y'_1)$，$\overrightarrow{OQ'}=(x'_2,y'_2)$，

則 $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x'_2 \\ y'_2 \end{bmatrix}$，

$\overrightarrow{OP}$ 和 $\overrightarrow{OQ}$ 所決定的平行四邊形面積為 $\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right|$，

變換後，$\overrightarrow{OP}$ 和 $\overrightarrow{OQ}$ 所決定的平行四邊形面積為

$$\begin{aligned}
\left|\begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 \\ x'_2 & y'_2 \end{vmatrix}\right| &= \left|\begin{vmatrix} ax_1+cy_1 & bx_1+dy_1 \\ ax_2+cy_2 & bx_2+dy_2 \end{vmatrix}\right| = \left|\begin{vmatrix} ax_1+cy_1 & bx_1 \\ ax_2+cy_2 & bx_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} ax_1+cy_1 & dy_1 \\ ax_2+cy_2 & dy_2 \end{vmatrix}\right| \\
&= \left|\begin{vmatrix} ax_1 & bx_1 \\ ax_2 & bx_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} cy_1 & bx_1 \\ cy_2 & bx_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} ax_1 & dy_1 \\ ax_2 & dy_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} cy_1 & dy_1 \\ cy_2 & dy_2 \end{vmatrix}\right| \\
&= \left|\begin{vmatrix} cy_1 & bx_1 \\ cy_2 & bx_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} ax_1 & dy_1 \\ ax_2 & dy_2 \end{vmatrix}\right| \\
&= \left|ad\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}-bc\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right| \\
&= \left|(ad-bc)\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right| \\
&= |\det A|\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right|。
\end{aligned}$$

坐標平面上，在矩陣 $A=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ 的線性變換下，$\overrightarrow{OP'}$ 和 $\overrightarrow{OQ'}$ 所決定的平行四邊形面積為 $\overrightarrow{OP'}$ 和 $\overrightarrow{OQ'}$ 所決定的平行四邊形面積的 $\mid det\ A \mid$ 倍。同理，$\triangle ABC$ 經矩陣 A 的線性變換後形成 $\triangle A'B'C'$，其面積關係為 $\triangle A'B'C'$ 面積＝ $\triangle ABC$ 面積 $\times \mid det\ A \mid$。

任務 11

已知 $A(0, 0)$，$B(-2, 4)$，$C(5, 3)$，$\triangle ABC$ 經過矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 推移變換後成 $\triangle A'B'C'$，則 $\triangle A'B'C'$ 之面積為何？

活動 10

請討論 $\triangle ABC$ 經由四種基本變換：伸縮、旋轉、鏡射、推移對應到 $\triangle A'B'C'$，其變換後面積的變化為何？

課後練習

1. 令 $A=[a_{ij}]_{2\times2}$ 將點（1，0）變換至（1，−1），將點（0，1）變換至（−2，1），試求 A。此線性變換 A 將點 $P(-1,1)$ 變換到哪裡？

2. 設 $A=\begin{bmatrix}3&2\\1&-3\end{bmatrix}$，試求一點 P 經過 A 的變換後的像為 $Q(1,-7)$。

3. 試求一矩陣 A，使 A 的變換將 $P(2,3)$ 變為 $Q(10,6)$，將 $P'(-1,2)$ 變為 $Q'(9,4)$。

4. 直線 L：$3x+y=5$ 被 $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$所定義的線性變換變換到直線 L'，試求直線 L' 的方程式。

5. 試描述下列各線性變換的作用。

(1) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ (3) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$

6. 設 $A=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$，若平面上兩點 $P(2,1)$，$Q(3,5)$ 在 A 的變換下對應到 P' 和 Q' 兩點，試求 $\overrightarrow{OP'}$ 和 $\overrightarrow{OQ'}$ 決定的平行四邊形面積。

7. 設直線 L 的方程式為 $y=3x$，二階方陣 A 所對應的線性變換是對直線 L 的鏡射。

(1)試求二階方陣 A。

(2)請計算 A^2。

(3)求點 $P(4,-2)$ 對於直線 L 的對稱點 Q 的坐標為何？

再求點 Q 對於直線 L 的對稱點為何？

8.(1)請寫出旋轉 60° 的旋轉矩陣 A。

(2)請計算 A^2。

(3)求點 $P(4,-2)$ 經過旋轉 60° 的點 Q 坐標為何？

再求點 Q 旋轉 60° 的 R 點為何？

任務參考解答

1. A：$(1,0)$ 與 $(0,-1)$；B：$(3,0)$ 與 $(2,-1)$；C：$(4,2)$ 與 $(-1,3)$

2. $A=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 17 \\ 3 \end{bmatrix}$

3. (1) $O'(0,0)$　(2) $P'(13,22)$　(3) $\overrightarrow{O'P'}=(13,22)$

4. $A=\begin{bmatrix} 8 & 7 \\ -38 & -26 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 8 & 7 \\ -38 & -26 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$

5. 法一：直線上找二點

直線 L：$2x+y-4=0$ 上找二點 $P(2,0)$，$Q(0,4)$，

因為 $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4 \\ -8 \end{bmatrix}$，

由 $P'(6,0)$，$Q'(-4,-8)$ 可得變換後的直線方程式為 $4x-5y-24=0$

法二：利用直線的方向向量與直線上一點

直線 L：$2x+y-4=0$ 上找一點 $P(2,0)$ 及直線方向向量為 $(1,-2)$

因為 $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$，

所以變換後的直線上有一點 $P'(6,0)$ 及方向向量 $(5,4)$，

可得變換後的直線方程式為 $4x-5y-24=0$。

或直線 L 的參數式為 $\begin{cases} x=t \\ y=-2t+4 \end{cases}(t\in R)$，

因為 $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t \\ -2t+4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5t & -4 \\ -4t & +8 \end{bmatrix}$，所以直線 L' 的參數式為 $\begin{cases} x=5t-4 \\ y=-4t+8 \end{cases}(t\in R)$，

故 L' 的方程式為 $4x-5y-24=0$。

法三：以新舊坐標變換

$$\begin{bmatrix}3 & -1\\0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'_1\\y'_1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -1\\0 & -2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=-\frac{1}{6}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}x'-\frac{1}{6}y'\\-\frac{1}{2}y'\end{bmatrix}$$

所以將 $\begin{cases}x=\frac{1}{3}x'-\frac{1}{6}y'\\y=-\frac{1}{2}y'\end{cases}$ 代入 L：$2x+y-4=0$ 得

$2(\frac{1}{3}x'-\frac{1}{6}y')+(-\frac{1}{2}y')-4=0$

整理可得 $4x'-5y'-24=0$，

所以變換後的直線方程式為 $4x-5y-24=0$。

6. B 點坐標為 $(2-\sqrt{3}, 2\sqrt{3}+1)$ 或 $(2+\sqrt{3}, -2\sqrt{3}+1)$

7. B 點坐標為 $(3-4\sqrt{3}, 3\sqrt{3}+4)$

8. (1) $A=\begin{bmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{bmatrix}$ (2) $A=\begin{bmatrix}-\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}$，$P'(2,-1)$

9. 略

10. $\begin{bmatrix}0 & -3\\1 & 2\end{bmatrix}$

11. 13

課後練習參考答案

1. $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$，$(-3,2)$

2. $(-1,2)$

3. $A=\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

4. $2x-3y-5=0$

5. (1)水平向伸縮 3 倍，鉛直向伸縮 4 倍
   (2) y 方向的推移變換
   (3) 旋轉-45°（順時針旋轉 45°）
   (4) 旋轉 30°（逆時針旋轉 30°）

6. 98

7. (1) $\begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (3) $Q\left(-\frac{22}{5},\frac{4}{5}\right)$，$P(4,-2)$

8. (1) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (3) $Q(2+\sqrt{3},2\sqrt{3}-1)$，$R(-2+\sqrt{3},2\sqrt{3}+1)$

深入閱讀

深入閱讀

1.《數學快遞-創刊號 數學與數位圖像》 中央大學 單維彰教授・三民出版社
http://www.sanmin.com.tw/learning/science/highschool/math/%E6%95%B8%E5%AD%B8%E5%BF%AB%E9%81%9E-%E5%89%B5%E5%88%8A%E8%99%9F.pdf

2. 三民書局 (2010) 高級中學數學第四冊。台北市三民出版社。
3. 金華圖書 (2010) 高級中學數學第四冊。台北市金華出版社。
4. 翰林書局 (2010) 高級中學數學第四冊。台北市翰林出版社。
5. Geogebra. (Version 5.0) [Computer soflware]. Retrieved from http://www youtube. com/watch

第七章　技術型高中篇
經驗分享
（一）交流電中的數學

第七章　技術型高中篇

數學素養教材設計發展之經驗分享

（一）交流電中的數學

壹、背景

「學數學有什麼用？」是現今許多中學生在學習數學時常出現的疑問，學生之所以產生這樣的疑問，導因於學生對於數學這門學科的定位，往往僅止於考試科目。本教材透過與物理及電子科教師的對話，設計編寫本教材—「交流電與正弦波」，將電學中所需用到三角函數與平均值、積分概念加以連結，期望為高職數學科教師提供範例，重視專業科目與數學的連結，設法了解專業科目對於數學的需求，以協助學生解決專業科目中數學內容的疑惑，更期望使學生了解「數學的用處」進而欣賞數學。

貳、教材設計理念

強調理論與實務並重的工科學生在學習專業科目，如：基本電學、測量學、工程製圖、力學時，經常面臨「看見數學的式子，卻不知其所以然」的窘境，而專業科目教師在課程進度的壓力下往往也顯得愛莫能助，無法詳細並深入地解說當中的數學意涵。多數高職數學科教師雖然知道學生的學習背景，且願意協助學生解決專業科目中有關數學的疑惑，更期望學生能了解數學的用處，並進而欣賞數學：不過由於缺乏數學科教師與專業科目教師的對話，無法使數學科教師實際了解專業科目對於數學的需求，亦使得數學科教師不知如何從旁協助學生學習。

目前尚無相關教材將數學與專業科目內容結合，本教材首次嘗試，透過數學與專業科目教師的對話，將數學與專業科目教材內容連結。

參、教材架構

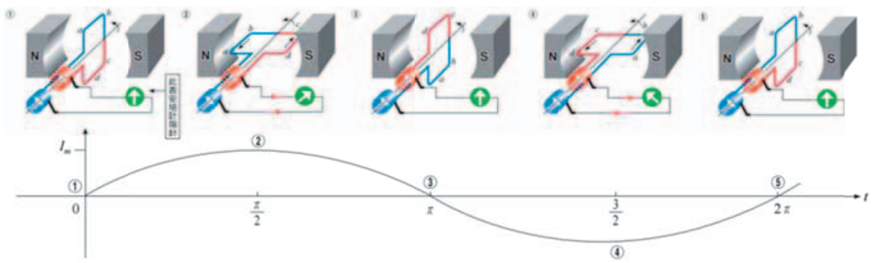
教材分為「正弦函數的圖形與週期」、「平均值、有效值與積分」兩大部分，以下分別敘述之。

一、正弦函數的圖形與週期

（一）經由活動理解正弦函數圖形的變化，如平移、伸縮、週期的改變等

（二）將正弦函數圖形與電學中發電機所產生交流電的波形加以連結，進而由正弦函數圖形的特性，了解電學中有關正弦波電壓、電流…之瞬間值等相關基礎概念，理解相位的超前及滯後、頻率的改變等問題（如圖一所示）。

圖一　交流電示意圖



二、平均值、有效值與積分

（一）由家用電壓值及「Yahoo ！奇摩知識＋」網友的提問作為鋪陳，引發學生認知衝突：為何臺灣家用交流電壓為 110 伏特與實際量測不同？以及「110 伏特」之值意義為何？與前段所學之交流電壓的特性是否違背？

（二）複習基本電學課程焦耳定律，引入電學中交流電所常見波形—正弦波之「平均值」，係以一個週期或半個週期的圖形面積 (定積分) 之值求得。

（三）由於學生尚未學習積分之意義，因此藉由軟體工具 Geogebra 幫助學生理解定積分的概念，並利用 Geogebra 計算面積近似值，說明正弦波形之半週期定積分值為 2 倍峰值 (最大值) 及平均值如何計算之問題。

（四）介紹電學中「有效值」的概念，並複習二倍角公式，藉以推導電流的有效值與峰值的關係，並說明為何臺灣家用交流電壓為 110 伏特。

肆、教學模組試教過程

一、試教時間：103.11.7(2 節課)、103.11.11(2 節課)。

二、試教對象及背景：大安高工綜合高中二年級資訊組學生，非試教老師任課班級。已學過三角函數圖形、二倍角公式，尚未學過微積分，基本電學課程尚未學到交流電。

三、上課地點與環境：資訊科 <EC> 實習工場，備有單槍投影機、實物投影機、電腦 (每位學生一部，並安裝 Geogebra 軟體)、電腦廣播系統、白板⋯。

四、觀課與議課紀錄摘要：透過觀課進行教學檢核與學習歷程性評量，檢視教學流程與學生的學習成效，並關注學生動機與學習投入的情形等。

（一）教材設計

1. 設計問題引發學生思考。
2. 藉由讓學生實際手繪圖形或操作電腦繪圖，持續維持學習動機。
3. 教材適度結合生活應用實例 (如手機充電與待機時間計算)，讓學生體驗數學與生活的結合，激發學生學習動機。
4. 教材設計跨領域結合數學與基本電學、電子學。
5. 教材設計從矩形面積問題計算平均值延伸至正弦波面積問題計算平均值，由學生具體可操作推廣到抽象的積分概念。
6. 教材最後提供回家練習，可讓學生再度統整歸納觀念。

（二）教學實施

1. 教師適時歸納重點。
2. 教師在教學過程中，走道學生周圍，檢視並關心個別學生的學習狀況。
3. 搭配簡報與動畫，提升學生學習興趣與動機。
4. 教師適時複習三角函數、電功率、電能⋯，使學習內容與舊經驗連結。
5. 同學碰到問題，能互相討論、思考、辯證，惟部分同學仍須透過教師教學引導，促進學生討論互動。

（三）評量：實施形成性評量並透過觀課進行學習歷程性評量。

（四）其他

1. 學生對操作 Geogebra 軟體很快上手，且有興趣。
2. 數學繪圖程式需使用電腦，故需搭配電腦軟硬體。
3. 一開始學生有些忘記三角函數，因此老師花了一些時間在複習。未來何時使用本教材，恐怕還需再思考。
4. 基本電學課程尚未學到交流電，在連結上較困難。
5. 每班人數過多，資質不同，要讓每個人都操作會很花時間，進度如何掌控？
6. 學生對於積分的定義與運算感到困難。
7. 本教材是否可再結合物理？

圖二　試教情形

伍、教學模組開發困難及突破

一、 困難之處

（一）本教材實施的時間點：在學生學習三角函數時，還是在學生學習基本電學時較為適當？或是有更適合的時間點？

（二）誰來教：部分教材內容涉及基本電學，對拋開物理多年的數學老師來說有些困難，但如果要專業科目老師來教，可行性如何？

（三）協同教學：目前高職尚無相關的辦法或規定，未來可行性如何？

（四）電腦設備：數學繪圖程式需使用電腦，數學課使用電腦教室的可行性如何？

二、突破之處

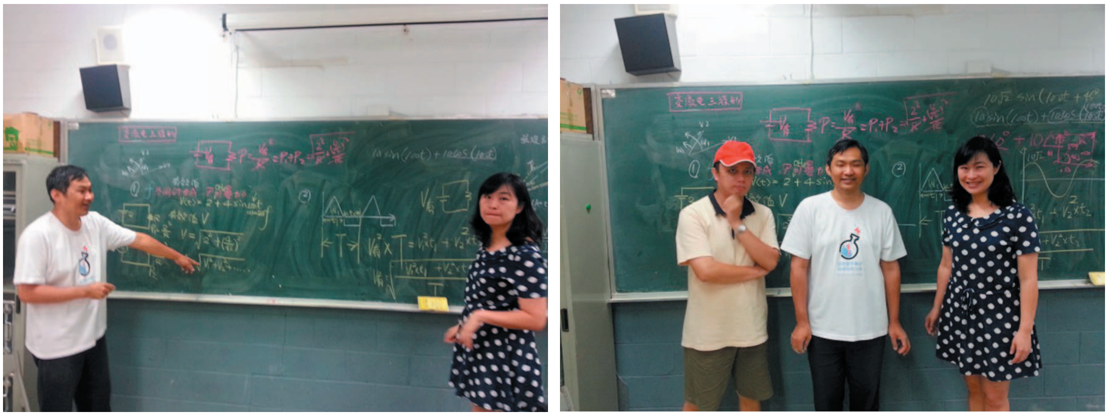
（一）首次將數學與電學教材結合：目前尚無相關教材將數學與專業科目內容結合。

（二）增進數學與專業科目教師的對話：在決定本教材主題及方向之前，筆者曾拜訪不同領域專業科目教師，對於本教學模組開發皆樂觀其成，給予高度肯定，並樂意參與討論。

三、待改進之處

在後續的研發歷程中，可規劃多元的方法評估教學模組，例如透過訪談教師或學生，進一步檢視教學流程與學生的學習成效，或進一步關注學生動機或學習投入的情形等。

圖三　利用暑假期間，請電子科老師為筆者上課



陸、結論與建議

教學模組設計，首次將數學與電學教材結合，大大提昇數學的實用價值，但其中仍有許多尚待探討與解決的問題，期待這些經驗可以作為未來教師在推動時之參考，以及後續相關研究計畫中進一步研討與處理。

柒、參考文獻

傅昭明、陳義裕（2011）。選修物理（再版更新一刷，下冊）。臺南市：南一。
孫瑜（2006）。基本電學（第二冊）。新北市：龍騰文化事業股份有限公司。
李文源、盧正川（2006）。職校基本電學（初版四刷，第二冊）。臺北市：旗立資訊股份有限公司。

第七章　技術型高中篇

經驗分享

（二）力矩與向量外積

第七章　技術型高中篇

數學素養教材設計發展之經驗分享

（二）力矩與向量外積

壹、背景

107 技術型高中數學課程綱要（草案）數學 C 版的規劃中，首度加入空間及空間向量，希望能連結物理、專業科目中的機械力學、材料力學…等課程，以作為學生學習相關學科的基礎概念。

貳、教材設計理念

多年來，技術型高中數學課程綱要一直未將空間及空間向量單元納入，無法讓技術型高中學生將數學連結於電腦數值控制 (Computer Numerical Control；CNC) 工具機、電腦輔助製圖、電腦繪圖、空間設計、3D 列印－等相關課程。而當機械群、動力機械群、土木建築群學生進入下一個學習階段—技專院校時，更發生學習的斷裂，尤其在力學的學習上，毫無空間向量的觀念，更遑論了解向量外積的意義與性質。在 105 技術型高中數學課程綱要（草案）數學 C 版的規劃中，加入空間及空間向量，即是為了彌補此一缺漏。

筆者鑑於教學二十餘年的經驗並參考相關文件，了解多數技術型高中學生在學習向量時，對於向量常感到抽象而不易學習與接受，因此筆者期望藉由本教材為技術型高中數學科教師提供參考範例，嘗試由學生國中理化學過的具象概念「力矩」導入抽象的向量外積的概念，筆者在設計本教材時，曾多次與物理教師、專業科目教師對話，數次修改教材內容以符合學生起點行為並與物理、專業科目教學內容連結；期望使學生藉由已習過的具體概念將向量外積內化，進而善用此一工具在相關專業科目課程中。此設計雖與數學史中向量外積的發展脈絡不同，但卻更貼近學生專業科目中相關的數學內容。

參、教材架構

從「阿基米德的機械研究」談起，探究阿基米德所不知，隱藏於力矩中的數學概念——向量的外積引起學生學習動機。並藉由「物體的轉動」，引發學生討論與思考，期待學生與日常生活經驗連結。

回顧「力矩」，連結國中理化課程，複習舊知識，並讓學生聯想：物理的力矩除了大小外，還包括方向，順勢連結之前學過的向量概念。並以向量表示力矩運算，由力矩導入新的向量運算—外積。

介紹力矩原理，連結向量外積與專業科目內容，並藉此說明向量外積的分配律。並讓學生藉由相互討論「空間基底向量的外積運算」，理解外積符號的意義，精確地預測結果，並藉此導引外積的分量表示法，歸納總結外積運算。

提供連結向量外積與專業科目內容的例題示範，澄清學生觀念，並讓學生了解外積如何實際應用於專業科目。另外提供學習單，讓學生課中或課後練習。

一、單元教學目標

（一）建立空間坐標系及空間向量的概念。

（二）回顧國中理化「力矩」包含大小、方向（右手定則）與向量做連結。

（三）物理力矩轉化為數學外積。

（四）力矩原理（瓦銳蘭原理 Varignon's Theorem 亦即外積的分配律）及外積的運算性質。

1. 利用空間向量的基底單位向量配合三階行列式計算向量的外積。
2. 利用外積解決生活與專業科目實例。
3. 向量外積的應用（平行四邊形面積及平行六面體體積）。

二、教材設計

教材教授的對象為技術型學校學生，學生的特質為實作經驗記憶強於教科書中刻板的硬式解法及證明，為提供並強化長期記憶學習的機會，本教材利用「做中學」達成更有效的學習，以期使物理力矩及數學外積有更強而有

力的連結。

每每與資深物理及數學教師討論及修正教材內容，透過學生起點行為及教材內容的微調，建立學生相關數學概念。設計規劃教學活動，在每節課堂中，透過引導讓學生認識空間坐標系、空間向量、力矩與外積的關係。接著，從數學角度重新出發，深入探討外積的運算性質，進而解決生活與專業科目的問題。最後，導回外積在數學的實用性，引出外積的應用。考量學生先備經驗及教具操作的順暢性，教學活動安排，順序如下：

（一）活動一：阿基米德的機械研究

1. 引起學生學習動機，利用 youtube 影片讓學生了解阿基米德的簡易的生平及簡易螺旋汲水器製作：https://www.youtube.com/watch?v=JujyFDX6p7s。
2. 在課堂中利用開關教室的前門，讓學生迅速回想國中的學習經驗，透過學生分組討論，讓學生回想國中理化學過的力矩概念，並提醒學生：物理的力矩除了大小外，仍包含了方向（順時針力矩、逆時針力矩），進而與數學中的向量做連結，以進入本單元重點—空間向量的外積。

（二）活動二：力矩與向量

利用學生在國中的經驗，力矩不在僅限於平面的操作，導入空間概念，並利用生活實例及學習單，強化學生空間向量、力矩概念，包含力臂的大小 (向量的大小)、力與力臂的夾角 (向量的夾角)、力矩的方向 (右手定則決定力矩的方向)。

1. 由力矩的運算 (包含大小及方向) 聯結外積的定義及運算。

（三）活動三：外積的運算性質

簡易說明力矩原理 (瓦銳蘭定理) 進而導入外積的分配律。

1. 利用學習單引導學生了解外積的運算性質。
2. 介紹空間基底向量「$\overrightarrow{i}$、$\overrightarrow{j}$、$\overrightarrow{k}$」，並複習三階行列式，利用三階行列式計算兩向量的外積。
3. 導入生活與專業科目實例，讓學生輕鬆活用外積運算。

（四）活動四：外積的應用複習所學過的三角形面積公式。

1. 利用外積的大小對應出平行四邊形的面積，進而帶入平行六面體體積。

肆、教學模組試教過程

一、試教時間

104.11.4、103.11.5、103.11.6、103.11.9 各一節課，總共四節課。

二、試教對象及背景

大安高工綜合高中二年級資訊電子學程學生，為試教老師任課班級。已在國中理化學過「力矩」，在高一學過向量，尚未學過空間概念，且在高一物理未深入研究力學。

三、上課地點

普通教室，備有單槍投影機。

四、觀課與議課紀錄摘要

共有數學老師 5 位、物理老師 2 位，共 7 位老師參與觀課及議課。透過觀課進行教學檢核與學習歷程性評量，檢視教學流程與學生的學習成效，並關注學生動機與學習投入的情形等。

圖 1 試教、觀課與議課情形

（一）教材設計

1. 老師利用 youtube 影片讓學生了解阿基米德的簡易的生平及簡易螺旋汲水器成功引發學生學習動機。
2. 舉例適當，由力矩簡單示範操作分析 (旋轉教室門) 慢慢導入數學的觀念，並提到古城門很重，與旋轉教室門相比，可感受的力矩的差異。
   (1) 教材設計非常完整流暢，由平面向量的概念推廣到空間向量的概念、向量夾角的澄清、向量的幾何意義與代數的定義的澄清 ...。讓學生可以理解向量外積在實際生活中，物理概念的應用。

（二）教學實施

1. 對於向量的觀念與符號表徵有清楚的說明，對向量與的方向做深入地介紹。
2. 善用媒體 (影片 、動畫)、實驗、講述、討論進行授課，持續維持學生學習興趣與動機。
3. 教師在上課時，會以眼神關注學生，講述速度會以學生反應進行調整。
4. 教師適時擷問，互動良好。
5. 師生互信基礎良好，教師適當地炒熱學習氛圍。
6. 評量：以提問互動或請學生上台發表的方式展現學生學習成果，即時進行學習評量。

（三）建議

1. 多陳列力矩的簡單例題，讓學生練習 (可利用特殊角)，增加學生對「力到支點的垂直距離 = 力矩」的知識強度。
2. 調整教學速度，一開始引起動機以及力矩物理概念的導入可以再迅速些，儘快聯結數學概念，在下課前 10 分鐘，講述向量外積的定義，讓學生可直接對照力矩之數學應用。
3. 在教材「活動一」中，可改為旋轉門，方便學生進行討論。
4. 學生對於力矩方向的理解較感到困難，或可加入「開掌定則」決定力矩（外積）的方向。

伍、教學模組開發困難及突破

在技術型高中尚未將空間坐標及空間向量納入課綱之時，便讓學生嘗試在平面上模擬三度空間來學習外積，在試教的過程中有著不少的挑戰。因此在試教開始前，教師預先用了一堂課的時間，利用簡單的保麗龍模型介紹空間及空間向量的基本概念，學生對於具體、可觀察的模型，普遍反應良好，且學習保留效果佳。

筆者嘗試由學生國中理化、高一物理或是專業科目力學所學過的具象概念「力矩」導入抽象的向量外積的概念，惟試教班的學生係綜合高中二年級資訊電子學程學生，在高一物理或是專業科目均未涉略力學，對於國中所學過的力矩亦印象薄弱，以至於由力矩導引至向量外積之過程，並不十分順暢，建議日後使用本教材之老師，恐需適當補充相關概念，以方便學生學習遷移。

此外，相較於數學，將向量應用於物理或相關科學，多具有相對的複雜性，筆者在設計教材連結專業科目時，僅處理最基礎而簡單的問題，學生在物理或是專業科目所面對的問題，往往更複雜許多。

陸、參考文獻

單維彰（2010）。從四元數到空間向量（上、下）。科學月刊，【數・生活與學習】專欄。

葉英珍、張敏哲（2010）。基礎物理 CI。新北市：龍騰文化。

傅昭明、陳義裕（2011）。選修物理（再版更新一刷，下冊）。臺南市：南一書局。

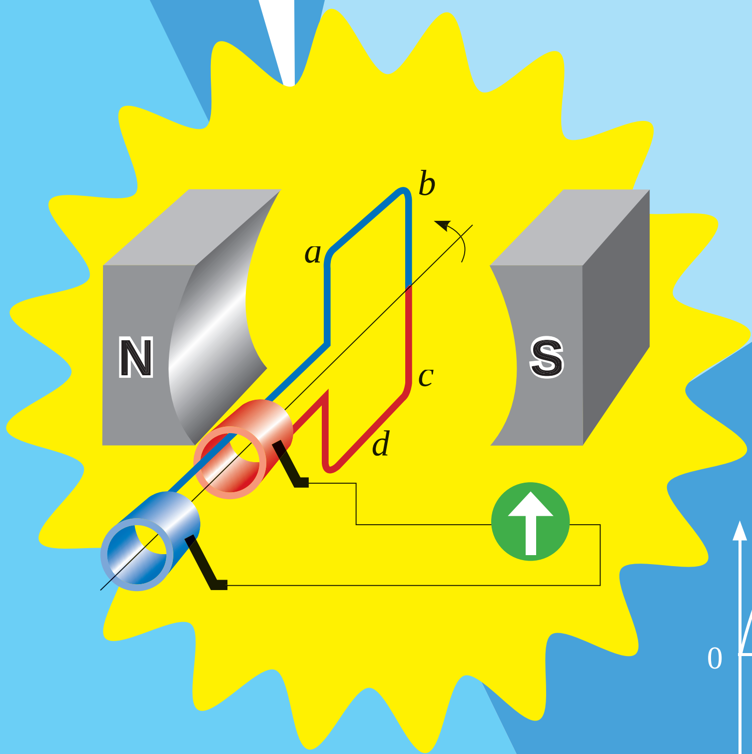
秋雲的科學遊戲 -- 阿基米德螺旋 -3 寶特瓶與水管篇（2014）。取自 https://www.youtube.com/watch?v=JujyFDX6p7s。

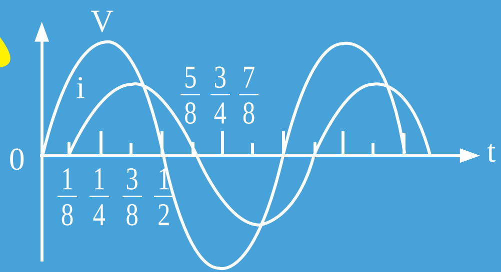
第七章　技術型高中篇

教學單元

（一）交流電中的數學

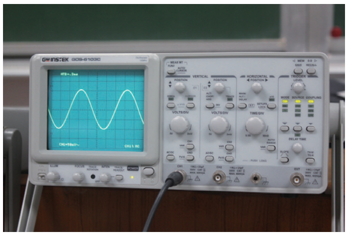
交流電
與正弦波





一、正弦函數的圖形與週期

自然界隨處可見波動現象，例如雨水滴在湖面上產生的漣漪，撥動琴弦產生的聲音振動，以及光的雙狹縫實驗中美麗的干涉條紋…等。而在技術型高中電機電子群的專業實習課程中，正弦波形是機器最容易產生且最為基礎的波形。



法國數學家、物理學家傅立葉（Joseph Fourier，1768－1830）更進一步認為，任何一個週期函數都可以用正（餘）弦函數合成來趨近，這樣的概念被廣泛地應用於現今的電子、電路、通訊系統上，例如手機等。因此本節重點便是要探討如何繪製正弦函數圖形並了解其特性，以及它與專業科目有何關連。

回顧前面的三角函數課程中，我們曾經學習到標準位置角 θ 的六個三角函數，可由 θ 終邊上任意點 $P(x，y)$ 以及 P 點到原點的距離 $r=\overline{OP}=\sqrt{x^2+y^2}$

$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$	$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$
$\tan\theta=\dfrac{y}{x}(x\neq0)$	$\cot\theta=\dfrac{x}{y}(y\neq0)$
$\sec\theta=\dfrac{r}{x}(x\neq0)$	$\csc\theta=\dfrac{r}{y}(y\neq0)$

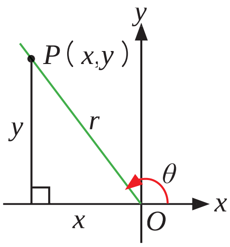


圖 1

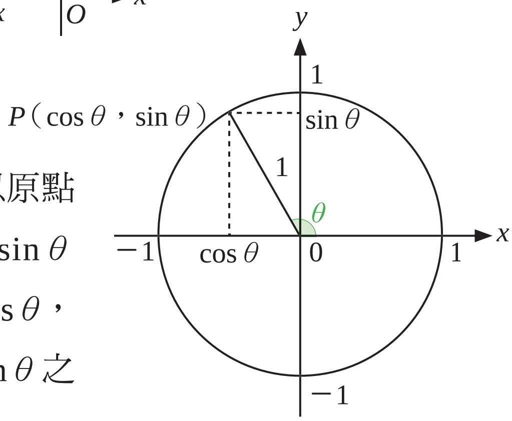


圖 2

所定義（如圖 1）如果當上面的 P 點限制在以原點為圓心，半徑為 1 的單位圓上，則我們發現 $\sin\theta=\dfrac{y}{1}=y$，$\cos\theta=\dfrac{x}{1}=x$。亦即 $P(x，y)=(\cos\theta，\sin\theta)$，也就是說 θ 終邊 P 點的 y 坐標即為 $\sin\theta$ 之值。

活動 1　繪製正弦函數 $y=\sin x$ 的圖形

請同學利用前面的結論以及第 4 頁圖 3 的單位圓，在圖 3 的坐標平面上，找出對應的點，並以平滑曲線連接，描繪正弦函數 $y=\sin x$ 的圖形。

（配合第 4 頁）

想想看 1

如果將第 2 頁圖 2 的單位圓改為以原點為圓心，半徑為 2 的圓（圖 4），且將 θ 終邊 P 點限制在這樣的圓上，則 P 點的 x、y 坐標與 $\sin\theta$、$\cos\theta$ 之值有甚麼關係呢？

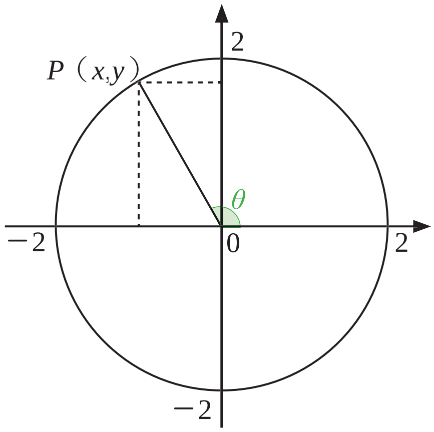


圖 4

想想看 2

如果將第 2 頁圖 2 的單位圓改為以原點為圓心，半徑為 r 的圓，且將 θ 終邊 P 點限制在這樣的圓上，則 P 點的 x、y 坐標與 $\sin\theta$、$\cos\theta$ 之值有甚麼關係呢？

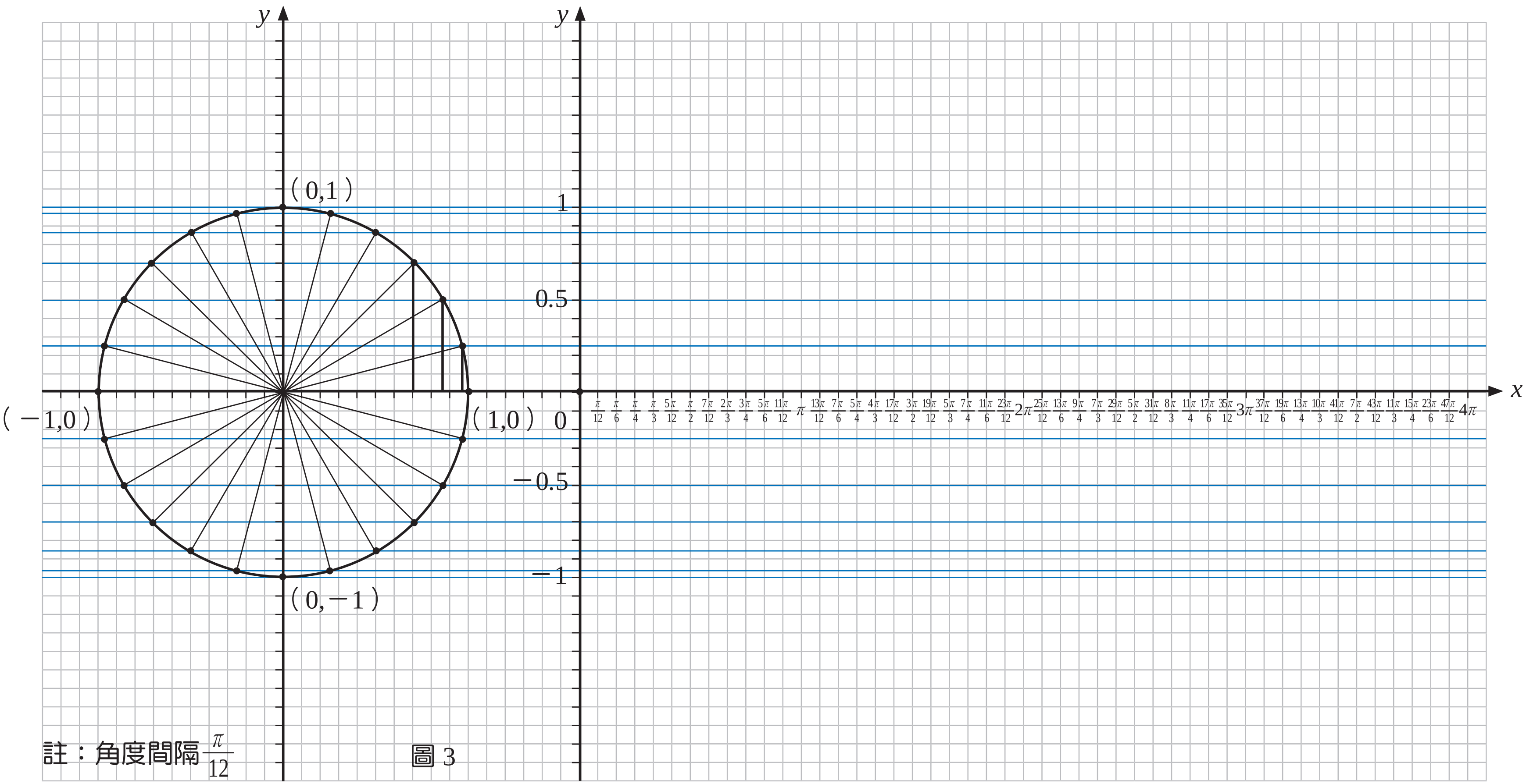


圖 3

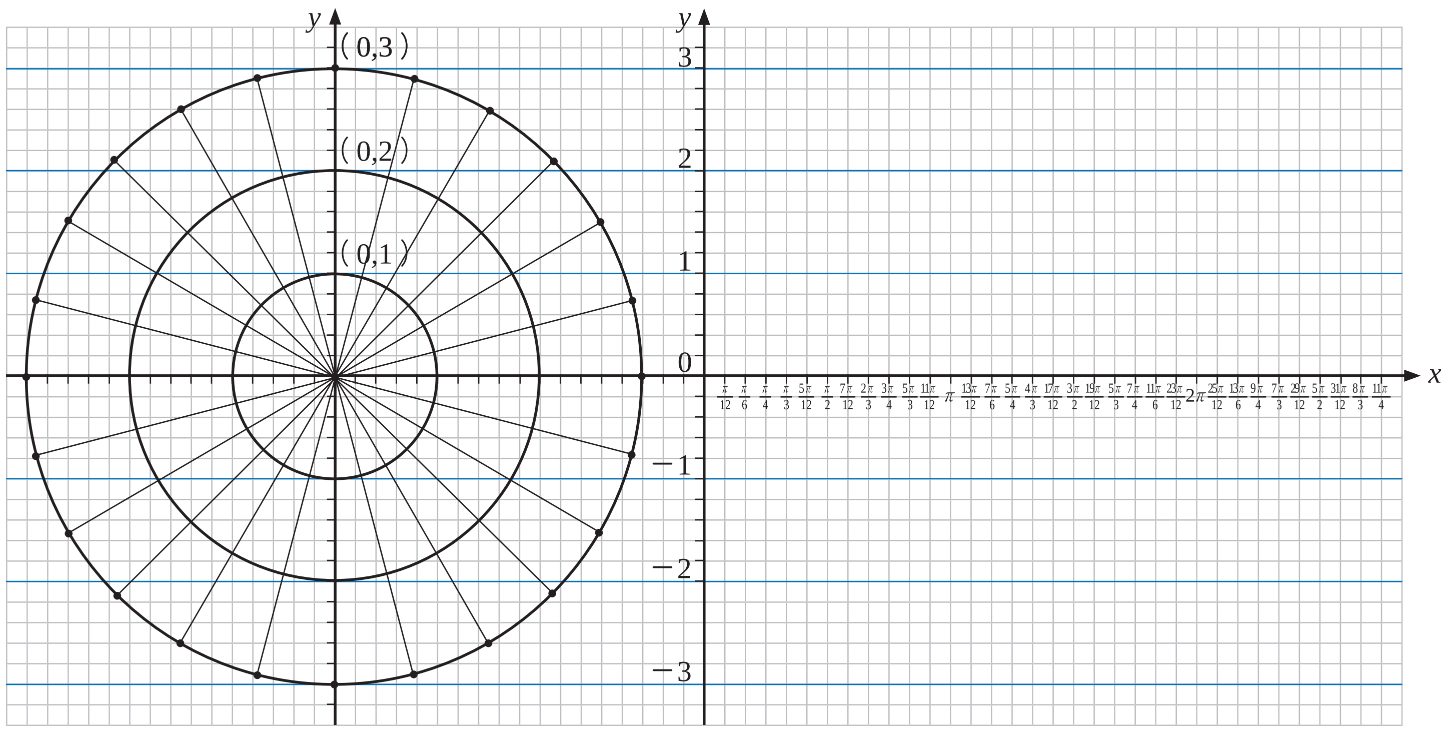
問題：(1) 正弦函數 $y=\sin x$ 的最大值為____________________，最小值為____________________

(2) 當函數圖形每隔一段特定的間隔，便會重複出現時，稱這樣的間隔為函數的**週期**，請問正弦函數 $y=\sin x$ 的週期為________

活動 2-1 繪製正弦函數 $y=a\sin x$ 的圖形

請利用圖 5 的同心圓（半徑分別為 1、2、3），在右圖的座標平面上，找出對應的點，並以平滑曲線連接，描繪

(1) $y=\sin x$ 的圖形。　(2) $y=2\sin x$ 的圖形。　(3) $y=3\sin x$ 的圖形。並請回答下表的問題。



註：角度間隔 $\frac{\pi}{12}$

圖 5

	最大值	最小值	週期
$y=\sin x$			
$y=2\sin x$			
$y=3\sin x$			

想想看 1

在電學中，交流電發電機是將機械能轉換為電能的機器，通常會轉動磁場中的線圈導線，使導線與磁場發生相對運動，切割磁場而在導線中產生感應電動勢（電壓）或感應電流，其電動勢之方向可藉由弗來明右手定則來決定，大姆指表示導線運動的方向（若導線旋轉，則指的是旋轉的切線方向），食指表示磁力線方向（由 N 指向S），中指表示電動勢（電壓）或感應電流方向，如圖 6 所示，若導線逆時針旋轉，磁力線方向由左至右，則在前半圈（圖①~③）產生的電流會由 d 端流出回到 a 端；在後半圈（圖③~⑤），電流會由 a 端流出回到 d 端。

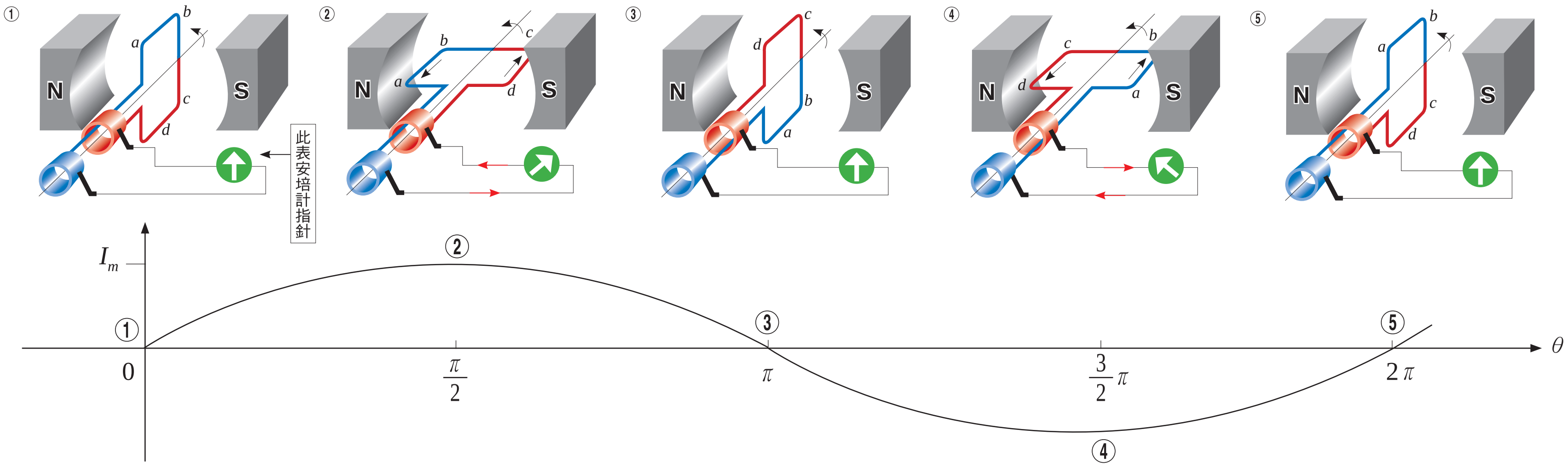


圖 6　交流電發電機電流瞬間值與時間變化的關係圖，其波形為正弦波

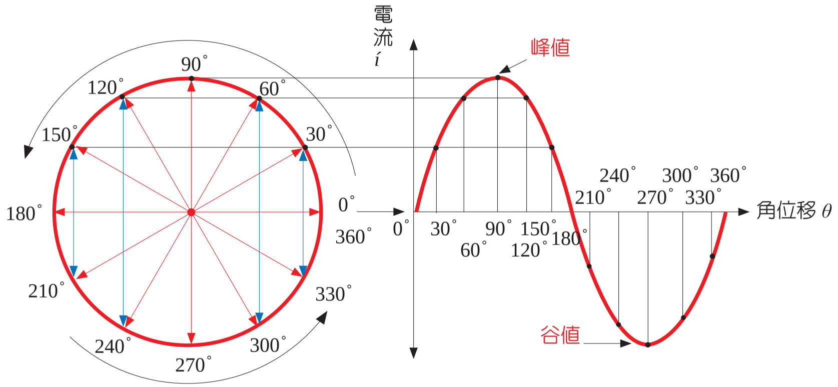


圖 7　線圈角位移與電流瞬間值變化的關係圖

如圖 6 所示，當線圈面與磁力線方向成垂直時（ab 導線或 cd 導線的運動方向與磁力線平行），其電壓為零；當線圈面與磁力線平行時（ab 導線或 cd 導線的運動方向與磁力線垂直），其電壓最大。而產生的交流電，其電壓及電流會隨時間變化而改變，其瞬間的大小，稱為瞬間值，其波形為正弦函數的圖形（稱為正弦波），已知某交流電發電機電流及電壓的瞬間值關係式如下：

電流瞬間值 $i=I_m \sin\theta$

電壓瞬間值 $v=V_m \sin\theta$

（其中 θ 表示線圈瞬間的角位移）

而圖形中的最大值稱為峰值，最小值稱為谷值（電流關係如圖 7）。

請問：電流之峰值（最大值）為________，電壓之峰值（最大值）為________

電流之谷值（最小值）為________，電壓之谷值（最小值）為________

我們也可以利用繪圖軟體 Geogebra 來描繪三角函數圖形。(詳見附錄第 43~57 頁)

(1)先將 x 軸間距改為 $\frac{\pi}{2}$：

如右圖 8，將滑鼠移至「繪圖區」，按滑鼠右鍵，出現下列對話框，以滑鼠左鍵點選「繪圖區」。

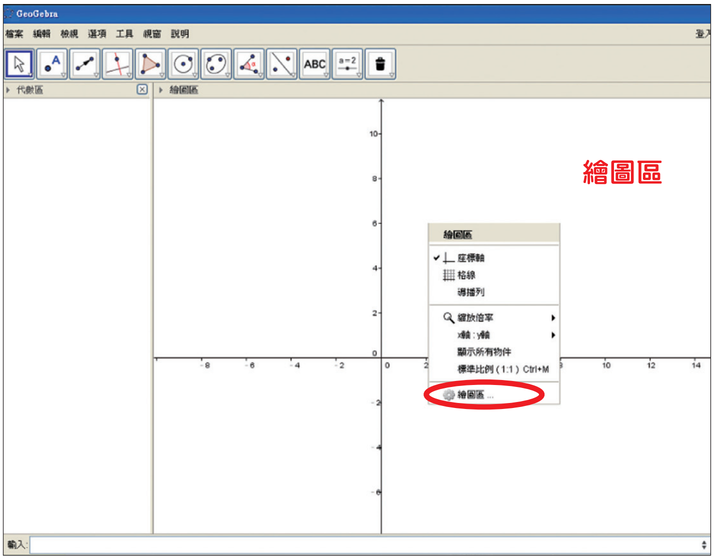


圖 8　點選繪圖區

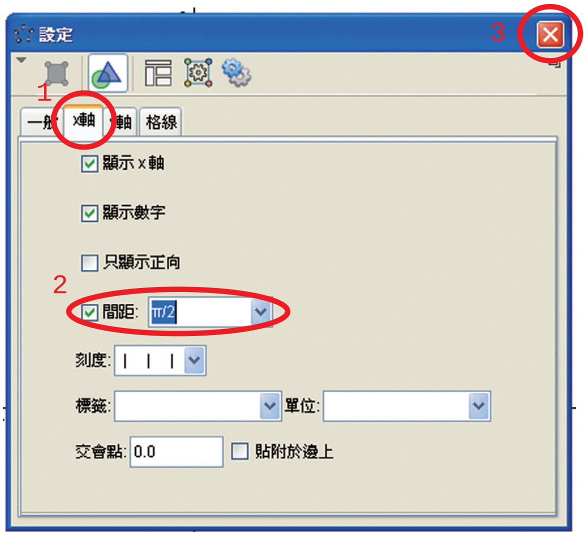


圖 9　調整 x 軸間距

出現左圖 9 之對話框，點選 x 軸，勾選間距 $\frac{\pi}{2}$，關閉對話框，即可將間距改為 $\frac{\pi}{2}$。

(2)描繪 $y=\sin x$ 的圖形：

如下圖 10，在下方指令列輸入「$y=\sin(x)$」。輸入Enter 鍵，即可得 $y=\sin x$ 的函數圖形如圖 11

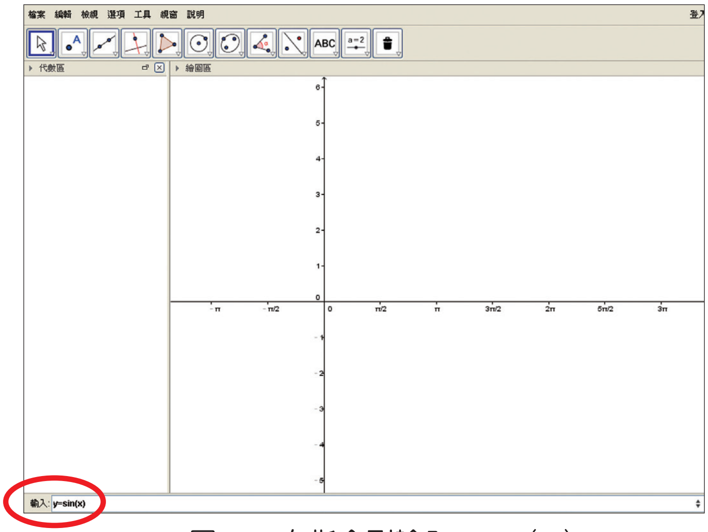


圖 10　在指令列輸入 $y=\sin(x)$

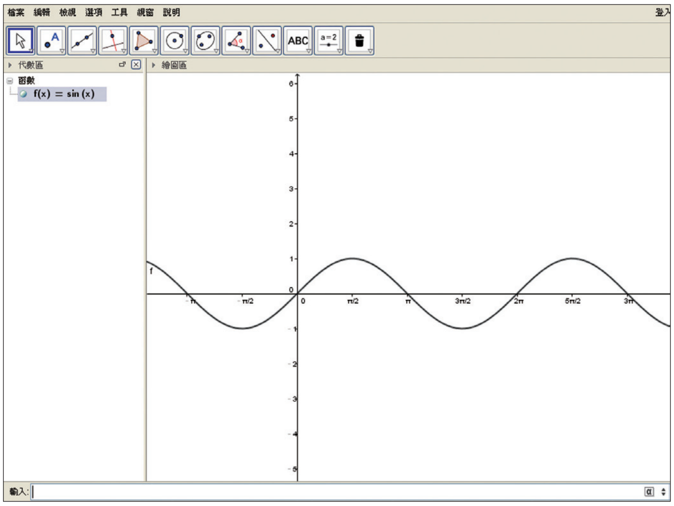


圖 11　繪圖區出現 $y=\sin x$ 的函數圖形

之前學過 $\sin(2\pi+x)=\sin x$，我們發現角度相差2π時，函數值相同，也就是說函數圖形每隔 2π 會重複出現；像這樣滿足 $f(p+x)=f(x)$的函數稱之為週期函數，其中滿足此式的最小正數 p 稱為此函數的週期。由此可知：正弦函數 $y=\sin x$ 為週期函數，且其週期為 2π 。

若要改變圖形的顏色、樣式（粗細、虛線 …），在所想改變的圖形上任一點，按一下右鍵，即會出現圖 12 對話框，此對話框會註明點選的物件，以滑鼠左鍵點選對話框中的「屬性」。

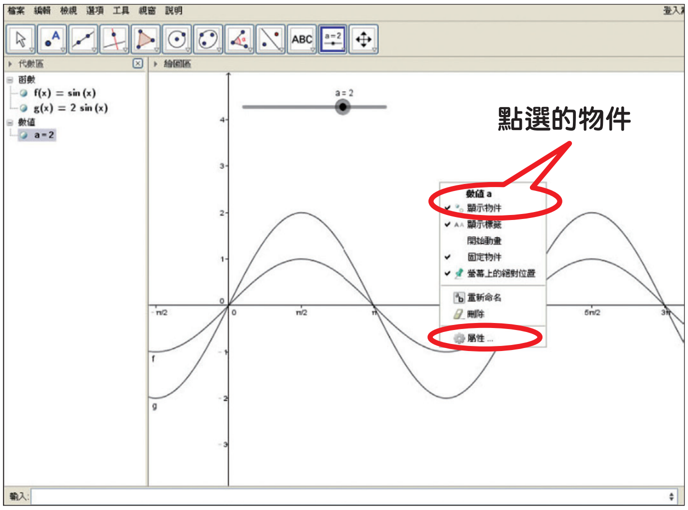


圖 12　點選物件，按滑鼠右鍵以設定屬性

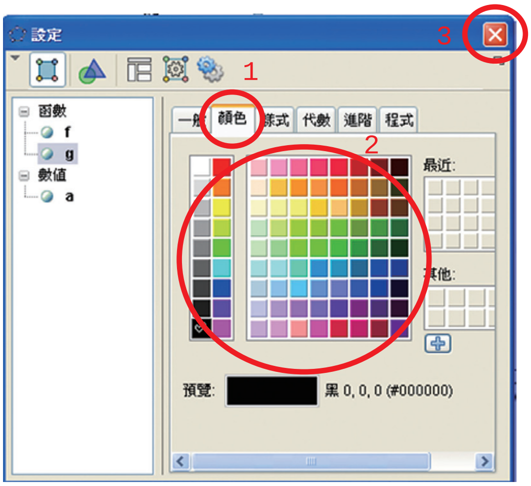


圖 13　出現屬性對話框，點選顏色，設定物件顏色，再關閉對話框

即出現如左圖 13 對話框，點選顏色。再依喜好選取想改變的顏色後，關閉對話框即可完成圖形顏色的改變。

可用相同的方式改變圖形的樣式，如圖 14，若以滑鼠左鍵點選右圖對話框中的「樣式」，即可依喜好選取想改變的線之粗細、或下拉選單選取線的樣式，最後關閉對話框即可。

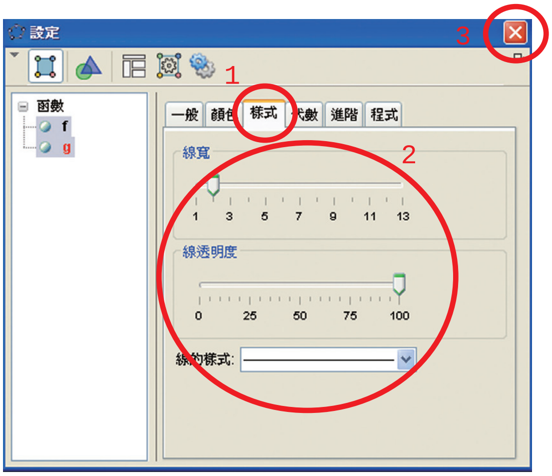


圖 14　在屬性對話框中設定物件（線）樣式，再關閉對話框

活動 2-2 利用繪圖軟體 Geogebra 繪製正弦函數 $y= a$ sin$x$ 的圖形

1. 請利用繪圖軟體 Geogebra，描繪三角函數

(1) $y=\sin x$ 的圖形。　(2) $y=-\sin x$ 的圖形。

(3) $y=2\sin x$ 的圖形。　(4) $y=-2\sin x$ 的圖形。

並將上述(1)(2)(3)(4)圖形，以不同顏色的曲線，輸出列印，回答下表的問題。

	最大值	最小值	週期
$y=\sin x$			
$y=-\sin x$			
$y=2\sin x$			
$y=-2\sin x$			

請將輸出列印的圖形貼於此

2. 請利用繪圖軟體 Geogebra，描繪正弦函數 $y=a\sin x$ 的圖

(1)製作數值滑桿：

以滑鼠左鍵點選下列對話框中的「數值滑桿」，然後在「繪圖區」上按一下，出現左圖 15 對話框，以滑鼠左鍵點選「套用」。

(2)繪製正弦函數 $y=a\sin x$的圖形：在下方指令列輸入「$y=a$*sin（x）」。

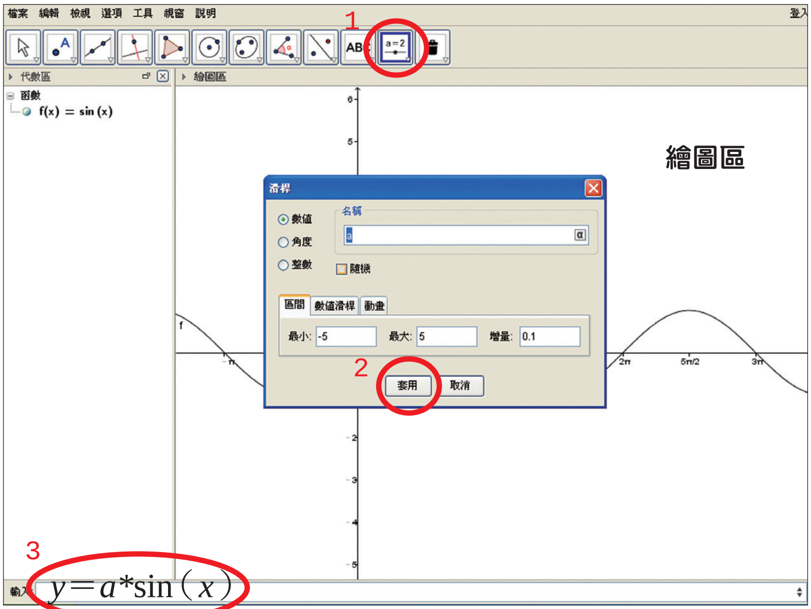


圖 15　設定數值滑桿 a

以滑鼠左鍵拉動滑桿，觀察 $y=a\sin x$ 的圖形變化。

（詳見附錄第 49~53 頁）

問題：(1)正弦函數 $y=a\sin x$ 的最大值為________，最小值為________

(2)正弦函數 $y=a\sin x$ 的週期為________

(3)正弦函數 $y=a\sin x$ 的圖形與 $y=-a\sin x$ 的圖形有何關聯性？

____

(4)正弦函數 $y=a\sin x$ 關係式中的”a ” 究竟影響了什麼？如何影響？

____

想想看 1

在電學中，θ 表示線圈瞬間的角位移，某交流電發電機電流的瞬間值關係式為：電流瞬間值 $i = a\sin\theta$，請問在式子中，”a” 影響了交流電發電機電流瞬間值的哪些東西？（參考圖 16）＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

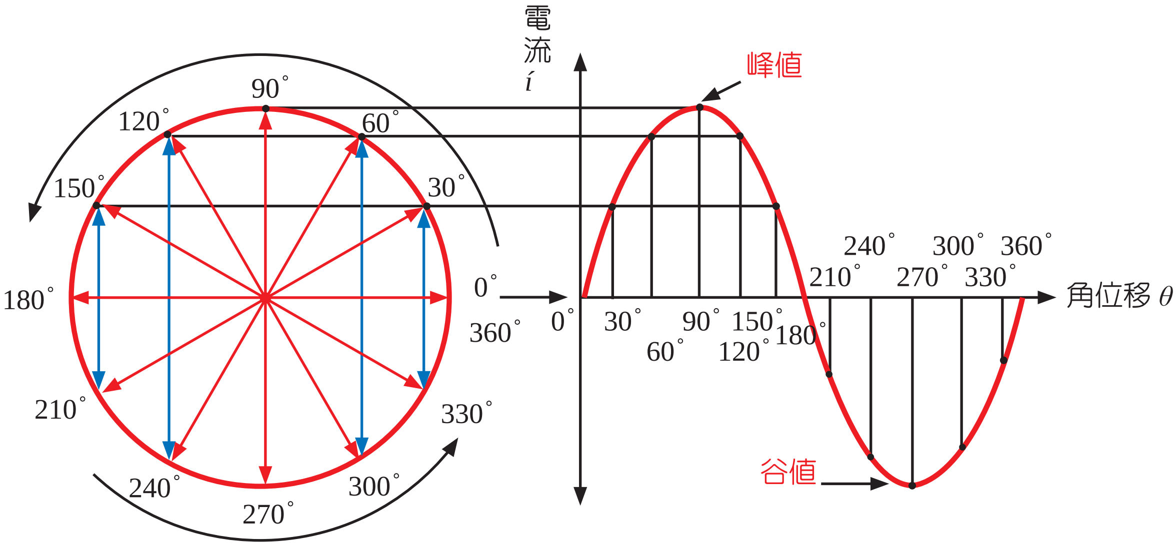


圖16　線圈角位移與電流瞬間值變化的關係

活動 3 利用繪圖軟體 Geogebra 繪製正弦函數 $y=\sin bx$ 的圖形

1. 請利用繪圖軟體 Geogebra，描繪三角函數

(1) $y=\sin x$ 的圖形。　(2) $y=\sin 2x$ 的圖形。

(3) $y=\sin 4x$ 的圖形。　(4) $y=\sin \dfrac{x}{2}$ 的圖形。

並將上述 (1)(2)(3)(4) 圖形，以不同顏色的曲線，輸出列印，回答下表的問題。

	最大值	最小值	週期
$y=\sin x$			
$y=\sin 2x$			
$y=\sin 4x$			
$y=\sin \dfrac{x}{2}$			

請將輸出列印的圖形貼於此

2. 請利用繪圖軟體 Geogebra，描繪正弦函數 $y=\sin bx$ 的圖形

(1)製作數值滑桿 b，選取 $-8\leq b\leq 8$，

(2)繪製正弦函數 $y=\sin bx$ 的圖形，並以滑鼠左鍵拉動滑桿，觀察 $y=\sin bx$ 的圖形變化。（詳見附錄第 53~54 頁）

問題：(1)正弦函數 $y=\sin bx$ 的最大值為__________，最小值為__________

(2)正弦函數 $y=\sin bx$ 的週期為__________

(3)正弦函數 $y=\sin bx$ 的圖形與 $y=\sin(-bx)$的圖形有何關聯性？

____

(4)正弦函數 $y=\sin bx$ 關係式中的”b ”究竟影響了什麼？

____

想想看 1

在物理學中曾經學過，「頻率」指的是週期運動中，每秒出現的週期次數，其單位為赫茲（Hz：次數／秒）。由此可知，頻率與週期互為倒數。

在電學中，「相位」是描述交流電隨時間變化，線圈的不同位置（角度）；對於電流、電壓 … 而言，相位的變化，將導致大小和方向的不同。

例如：有一交流電，其相位角 θ 與時間 t（單位為秒）的關係式為：

相位角 $\theta = 100\pi t + 30^\circ$，而電壓的相位關係式可以寫成

$v_1(t) = 100\sin(100\pi t + 30^\circ)$ 伏特，此電壓的

週期 $T =$ ________________ 秒／次，頻率 $f =$ ______________ Hz

想想看 2

若交流電流的相位關係式可寫成：

交流電流的瞬間值 $i(t) = I_m \sin(2\pi f t + \theta_0)$ 安培

其中 t　：時間（秒）

I_m　：交流電流的最大值

θ_0　：初相角（線圈初始的位置）；$-\pi < \theta_0 \leq \pi$

請問：此電流的週期與頻率各是多少？________________________________

活動 4 利用繪圖軟體 Geogebra 繪製正弦函數 $y=\sin(x+c)$ 的圖形

1. 請利用繪圖軟體 Geogebra，描繪三角函數

(1) $y=\sin x$ 的圖形。　(2) $y=\sin(x-\frac{\pi}{2})$ 的圖形。

(3) $y=\sin(x+\frac{\pi}{2})$ 的圖形。　(4) $y=\sin(x-\pi)$ 的圖形。

並將上述 (1)(2)(3)(4) 圖形，以不同顏色的曲線，輸出列印，回答下表的問題。

	最大值	最小值	週期
$y=\sin x$			
$y=\sin(x-\frac{\pi}{2})$			
$y=\sin(x+\frac{\pi}{2})$			
$y=\sin(x-\pi)$			

請將輸出列印的圖形貼於此

2. 請利用繪圖軟體 Geogebra，描繪正弦函數 $\sin(x+c)$ 的圖形

(1) 製作數值滑桿 c，選取 $-5 \leq c \leq 5$

(2) 繪製正弦函 $y=\sin(x+c)$ 的圖形，並以滑鼠左鍵拉動滑桿，觀察 $y=\sin(x+c)$ 的圖形變化。（詳見附錄第 54~55 頁）

問題：(1) 正弦函數 $y=\sin(x+c)$ 的最大值為________，最小值為________

(2) 正弦函數 $y=\sin(x+c)$ 的週期為__________

(3) 正弦函數 $y=\sin(x+c)$ 的圖形與 $y=\sin x$ 的圖形有何關聯性？

____

(4) 正弦函數 $y=\sin(x+c)$ 關係式中的”c”究竟影響了什麼？

____

想想看 1

前面曾經提到，在電學中，「相位」是描述交流電隨時間變化，線圈的不同位置（角度）。對於電流、電壓…而言，相位的變化，將導致大小和方向的不同。

一般而言，交流電流的相位關係式可寫成：

交流電流的瞬間值 $i(t)=I_m\sin(\omega t+\theta_0)$ 安培

$=I_m\sin(2\pi ft+\theta_0)$；$-\pi<\theta_0\leq\pi$

其中 I_m：交流電流的最大值　　t：時間（秒）

f：頻率（Hz：週期運動的次數／秒）　　θ_0：初相角（線圈初始的位置）

$\omega=2\pi f$：角速度（弧度／秒）　　$2\pi ft+\theta_0$：相位角

而對於兩個週期相同的電壓或電流交流訊號，習慣上自相位角0° 開始繪圖以利觀察，則在圖形上，初始位置較左的訊號稱為相位「**領先**」或「**超前**」，否則就稱為相位「**落後**」或「**滯後**」。根據下圖，

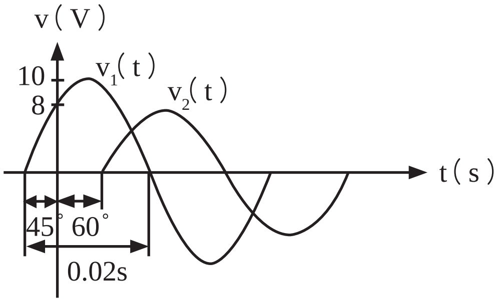
請判斷 $v_1(t)$ 與 $v_2(t)$ 的相位關係為？

(A) $v_1(t)$ 相位領先 $v_2(t)$ 相位 105°

(B) $v_2(t)$ 相位領先 $v_1(t)$ 相位 105°

(C) $v_1(t)$ 相位落後 $v_2(t)$ 相位 105°

(D) $v_2(t)$ 相位落後 $v_1(t)$ 相位 150°



想想看 2

若有兩個交流訊號，分別為 $v(t)=60\sin(377t+30^\circ)$ 伏特和 $i(t)=40\sin(377t-10^\circ)$ 安培，請判斷這兩個交流訊號的相位關係為何？

(A) v 超前 i 20°　(B) v 滯後 i 20°　(C) v 超前 i 40°　(D) v 滯後 i 40°

活動 5 繪製餘弦函數 $y=\cos x$ 的圖形

1. 由第 2 頁的說明可知，在單位圓上，θ 終邊 P 點的 x 座標即為 $\cos\theta$ 之值。請你利用前面的結論以及下面圖 17 的單位圓，在右圖的座標平面上，找出對應的點，並以平滑曲線連接，描繪餘弦函數 $y=\cos x$ 的圖形。

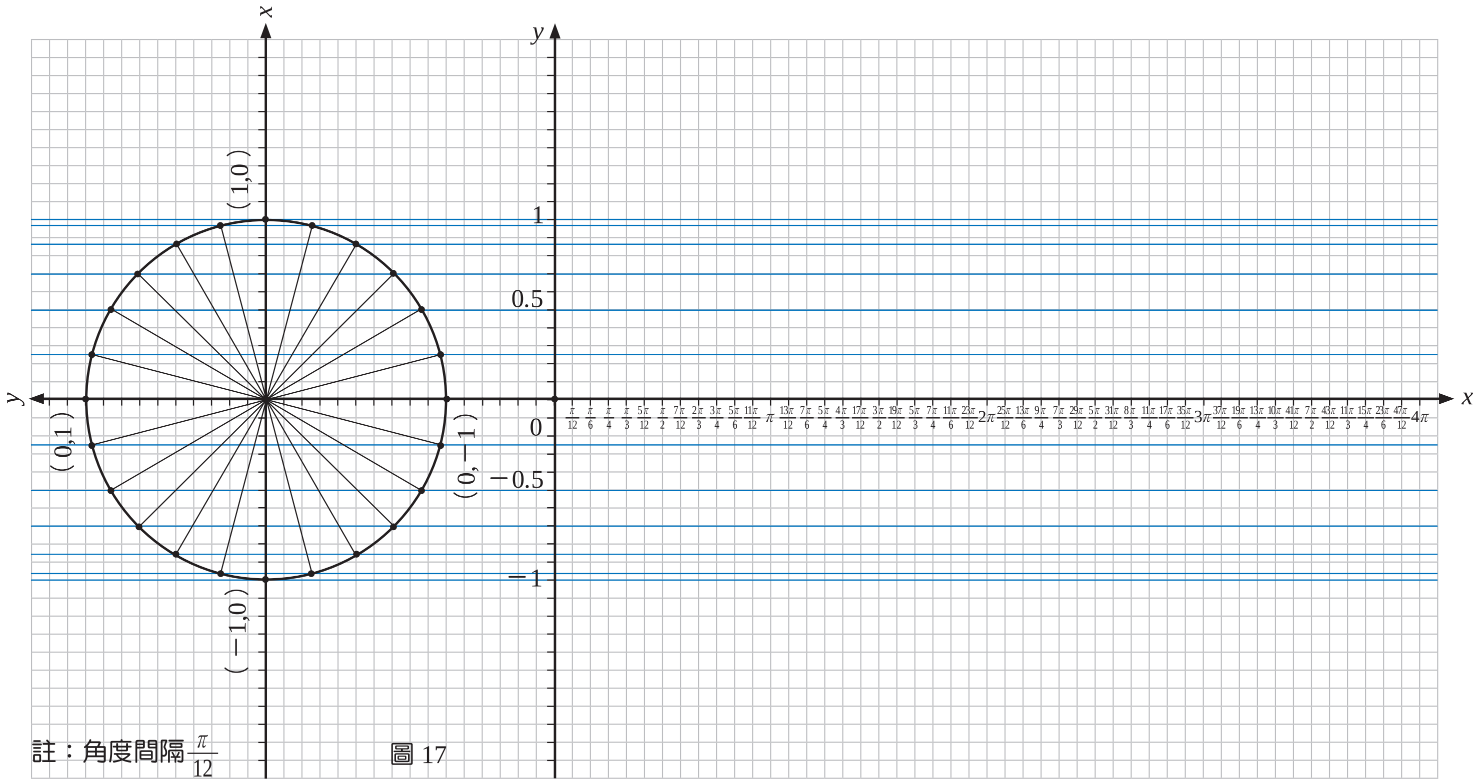


圖 17

問題：(1) 餘弦函數 $y=\cos x$ 的最大值為＿＿＿＿＿＿＿＿＿，最小值為＿＿＿＿＿＿＿＿＿，週期為＿＿＿＿＿＿

(2) 請問餘弦函數 $y=\cos x$ 的圖形與第 16 頁【活動4】的哪一個函數圖形相同？＿＿＿，也就是 $y=\cos x$ 的圖形相當於是將 $y=\sin x$ 的圖形向＿＿＿平移＿＿＿單位

想想看 3

若 $i_1=60\sin(\omega t-30^\circ)$，$i_2=-30\cos(\omega t-30^\circ)$，請判斷這兩個交流訊號的相位關係為何？(A) i_1 與 i_2 同相 (B) i_1 領先 i_2 90° (C) i_1 落後 i_2 90° (D) i_1 落後 i_2 60°

活動 6 利用繪圖軟體 Geogebra 繪製正弦函數 $y=a\sin bx+d$ 的圖形

1. (1)請利用繪圖軟體 Geogebra，描繪三角函數 $y=3\sin x$ 的圖形，並將圖形，輸出列印。（詳見附錄第 55~56 頁）

(2)利用繪圖軟體 Geogebra，描繪三角函數 $y=3\sin x+4$ 的圖形，並將圖形， 輸出列印。

問題：(1)正弦函數 $y=3\sin x$ 的最大值為__________，最小值為__________

正弦函數 $y=3\sin x+4$ 的最大值為__________，最小值為__________

(2)正弦函數 $y=3\sin x$ 的週期為____________________

正弦函數 $y=3\sin x+4$ 的週期為____________________

(3)正弦函數 $y=3\sin x$ 的圖形與 $y=3\sin x+4$ 的圖形有何關聯性？

____

請將輸出列印的圖形貼於此

2. (1)利用繪圖軟體 Geogebra，描繪三角函數 $y=\sin 2x$ 的圖形，並將圖形，輸出列印。

(2)利用繪圖軟體 Geogebra，描繪三角函數 $y=\sin 2x-3$ 的圖形，並將圖形， 輸出列印。

問題：(1)正弦函數 $y=\sin 2x$ 的最大值為 ________，最小值為 ________

正弦函數 $y=\sin 2x-3$ 的最大值為 ________，最小值為 ________

(2)正弦函數 $y=\sin 2x$ 的週期為 ________

正弦函數 $y=\sin 2x-3$ 的週期為 ________

(3)正弦函數 $y=\sin 2x$ 的圖形與 $y=\sin 2x-3$ 的圖形有何關聯性？

____

請將輸出列印的圖形貼於此

【結論】

在正弦函數 $y=a\sin(bx+c)+d$ 的圖形中，a、b、c、d 對於圖形分別有何影響？

____

____

____

想想看 1

前面曾經提過，在電學中，交流電的電壓、電流…等，常可以寫成下面的式子：

$$x(t)=A\sin(\omega t+\theta_0)=A\sin(2\pi ft+\theta_0)\text{，}t\geq 0$$

其中 A ：振幅　　　　　　　　　　f：頻率（Hz：週期運動的次數／秒）

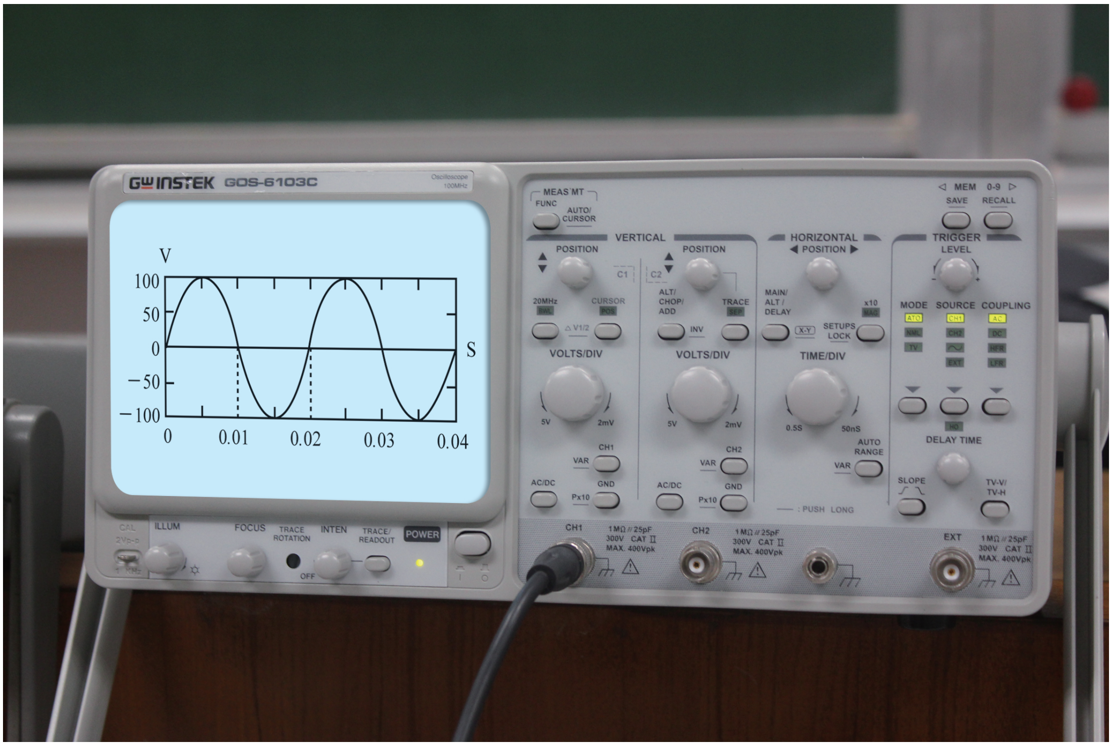
t ：時間（秒）　　　　　　　　$\omega=2\pi f$：角速度（弧度／秒）

θ_0 ：初相角（線圈初始的位置）　$2\pi ft+\theta_0$：相位角

下圖為某電壓的波形，請問以下何者近似此電壓瞬間值 $v(t)$ 的關係式？

(A) $v(t)=100\sin(377t)$　　(B) $v(t)=70.7\sin(377t)$

(C) $v(t)=100\sin(314t)$　　(D) $v(t)=100\sin(377t+60^\circ)$ 伏特。



想想看 2

已知一電壓瞬間值 $v(t)$ 與時間 t（秒）的關係式為 $v(t)=100\sin(10\pi t+\frac{\pi}{3})$ 伏特，若自相位角 0° 開始繪圖，則在時間為多少時，此電壓波形出現第一個峰值（最大值）？(A) $\frac{1}{60}$ (B) $\frac{1}{30}$ (C) $\frac{\pi}{60}$ (D) $\frac{\pi}{30}$ 秒。

想想看 3

有一正弦波電壓瞬間值 $v(t)$ 與時間 t（秒）的關係式為 $v(t)=100\sin(10\pi t+\frac{\pi}{3})$ 伏特，則在以下哪一個時間點，此電壓瞬間值為 0 伏特？
(A) $\frac{1}{30}$ (B) $\frac{1}{15}$ (C) $\frac{\pi}{60}$ (D) $\frac{\pi}{30}$ 秒。

課後作業

1. 試繪出 $y=f(x)=\sin(2x+\pi)$ 的圖形，並求出(1)函數的週期。(2)函數的最大值與最小值。

2. 下圖 1 是三角函數圖形的一部分，請問下列何者可能是它的關係式？
(A) $y=f(x)=\sin(x-\frac{\pi}{2})$　(B) $y=f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{2})$
(C) $y=f(x)=2\sin(x-\pi)$　(D) $y=f(x)=2\sin(2x+\pi)$

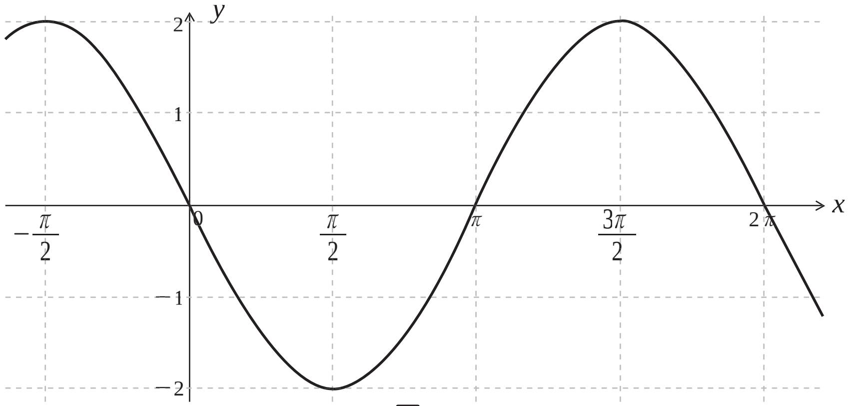


圖1

3. 若有兩個週期皆為 2π 的交流訊號 v 與 i，如圖 2(顯示的數字為週期的幾分之幾)，請判斷 v 與 i 之相位差為多少？
(A) 30°　(B) 45°
(C) 53°　(D) 60°

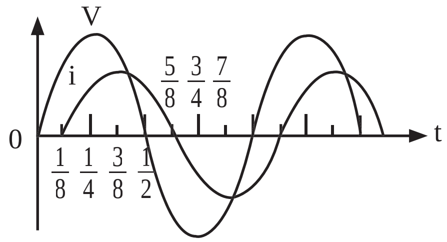


圖2

4. 承上題，若 $v(t)=10\sin(\omega t)$，則 $i(t)$ 最有可能如何表示？
(A) $i(t)=7\sin(\omega t-45^\circ)$　(B) $i(t)=7\sin(\omega t+45^\circ)$
(C) $i(t)=10\sin(\omega t+45^\circ)$　(D) $i(t)=7\sin(2\omega t+60^\circ)$。

5. 前面曾經提過，在電學中，交流電的電壓、電流 ⋯ 等，常可以寫成下面的式子：$x(t)=A\sin(\omega t+\theta_0)=A\sin(2\pi ft+\theta_0)$，$t\geq 0$
其中 A ：振幅　f：頻率(Hz：次數 / 秒)
t ：時間(秒)　$\omega=2\pi f$：角速度(弧度 / 秒)
θ_0：初相角(線圈初始的位置)　$2\pi ft+\theta_0$：相位角

圖 3 為某電壓的波形，請問以下何者為此電壓瞬間值 $v_1(t)$ 的關係式?

(A) $v_1(t)=10\sin(50\pi t-45^\circ)$

(B) $v_1(t)=10\sin(50\pi t+45^\circ)$

(C) $v_1(t)=10\sin(100\pi t-45^\circ)$

(D) $v_1(t)=10\sin(100\pi t+45^\circ)$ 伏特。

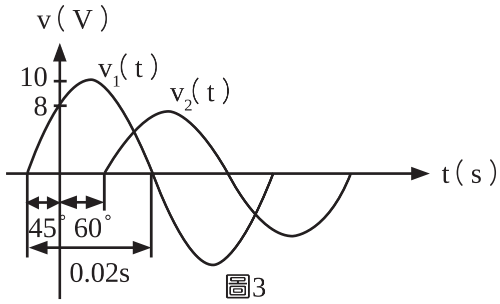


圖3

6. 已知 $e(t)=E_m\sin(\omega t+30^\circ)$，$i(t)=I_m\cos(\omega t-30^\circ)$，則 e 與 i 之相位關係為？

(A) e 超前 i 60°　(B) e 超前 i 150°　(C) i 超前 e 30°　(D) i 超前 e 60°

7. 設有交流電壓 $v(t)$ 與電流 $i(t)$ 瞬間值關係式如下：

$v(t)=110\sqrt{2}\sin(314t+30^\circ)$ 伏特　$i(t)=10\sqrt{2}\sin(314t-80^\circ)$ 安培

請判斷電壓與電流的相位關係為何？

(A) 電壓領先電流90°　(B) 電壓領先電流30°

(C) 電壓落後電流90°　(D) 電流落後電壓110°

8. 設一交流電流瞬間值 $i(t)$ 與時間 t（秒）的關係式為 $i(t)=I_m\sin(\omega t+\frac{\pi}{6})$ 安培，若自相位角 0° 開始繪圖，則在時間為多少時，此電流波形出現第一個正峰值（最大值）?

(A) $t=\frac{\pi}{3\omega}$　(B) $t=\frac{2\pi}{3\omega}$　(C) $t=\frac{\pi}{4\omega}$　(D) $t=\frac{\pi}{\omega}$ 秒。

9. 承上題，在時間為多少時，此電流波形出現第一個負峰值（最小值）?

(A) $t=\frac{\pi}{4\omega}$　(B) $t=\frac{2\pi}{3\omega}$　(C) $t=\frac{\pi}{\omega}$　(D) $t=\frac{4\pi}{3\omega}$ 秒。

10. 圖 4 為某電壓 $e(t)$ 的波形，請問以下何者可能為此電壓瞬間值的關係式？

(A) $e(t)=E_m\sin\omega t$

(B) $e(t)=-E_m\sin\omega t$

(C) $e(t)=E_m\sin(\omega t+90^\circ)$

(D) $e(t)=E_m\sin(\omega t-90^\circ)$

（令 $\omega t=\theta$）

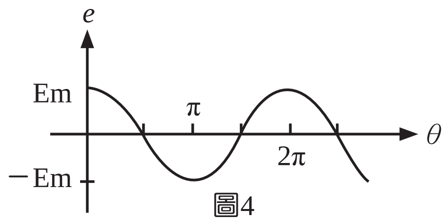


圖4

11. 已知某電路之電壓 $e=100\sin(\omega t+60^\circ)$，電流 $i=10\sin(\omega t+20^\circ)$，請判斷這兩個交流訊號的相位關係為何？

(A) 電壓滯後電流 40°　(B) 電壓超前電流 40°

(C) 電流滯後電壓 80°　(D) 電流超前電壓 80°

12. 若有兩個交流訊號，分別為 $v(t)=100\sin(377t+30^\circ)$ 伏特和 $i(t)=5\sin(377t+60^\circ)$ 安培，請判斷這兩個交流訊號的相位關係為何？
(A) v 超前 i 30°　(B) v 落後 i 30°　(C) v 超前 i 90°　(D) v 落後 i 90°

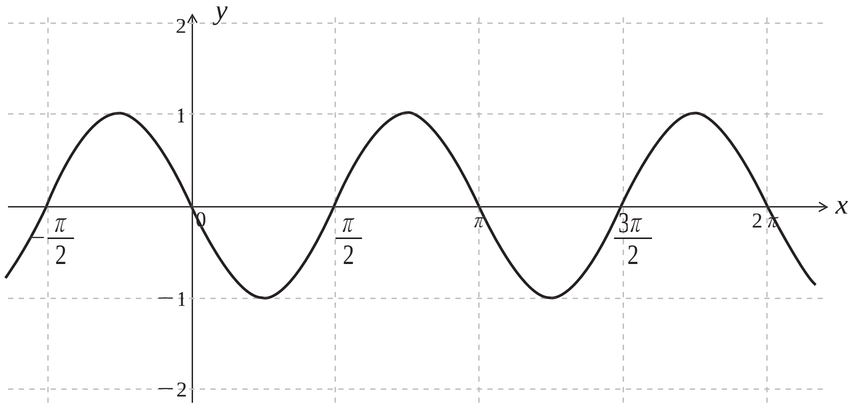
13. 若一個正弦波交流訊號瞬間值與時間 t 的關係式為 $x(t)=10\sin(10\pi t+60^\circ)$，則下列哪一個關係式也可代表此波形？
(A) $x(t)=-10\cos(10\pi t+60^\circ)$　(B) $x(t)=10\cos(10\pi t+150^\circ)$
(C) $x(t)=10\cos(10\pi t-30^\circ)$　(D) $x(t)=10\cos(10\pi t-60^\circ)$

14. 有一電壓瞬間值 $v(t)$ 與時間 t（秒）的關係式為 $v(t)=110\sqrt{2}\sin(377t+30^\circ)$ 伏特，請問此電壓波形的頻率約為多少？(A) 60　(B) 50　(C) 314　(D) $100\sqrt{2}$ Hz。

15. 設一電流瞬間值 $i(t)$ 與時間 t（秒）的關係式為 $i(t)=300\sin(377t-30^\circ)$，請問此電流 $i(t)$ 的週期為多少？(A) $\frac{1}{35}$　(B) $\frac{1}{50}$　(C) $\frac{1}{60}$　(D) $\frac{1}{75}$ 秒/次。

課後作業解答

1. $y=f(x)=\sin(2x+\pi)=\sin 2(x+\frac{\pi}{2})$ 圖形如下。
(1) 函數的週期為 π，(2) 函數的最大值為1，最小值為 -1。



2. (C)	3. (B)	4. (A)	5. (B)
6. (C)	7. (D)	8. (A)	9. (D)
10. (C)	11. (B)	12. (B) 解析：$\theta=\theta_v-\theta_i=30^\circ-60^\circ=-30^\circ$	
13. (C)	14. (A)	15. (C)	

二、交流電的平均值、有效值與積分

購買電器是平常生活中經常發生的事情，民眾在出國旅遊時若要使用自備的電器，或在國外購買電器用品時，都須留意當地使用的電壓是多少伏特、插座與電器插頭的類型等，例如臺灣的家用電壓值是 110 伏特或 220 伏特（空調等高耗電設備使用 220V 的電壓）、常用的插頭是美式 2 接腳或美式 3 接腳的形式；香港的電壓值是 220 伏特、常用的插頭是英式 3 接腳的形式；而國人常去的日本，電壓值是100 伏特，常用的插頭和臺灣相同。


知識問題 | 發問中 交流電電壓

發問者：書妤（初學者 5 級）
發問時間：2005-02-12 14:56:14（還有 1 天發問到期）
解答贈點：5（共有 0 人贊助）
回答：0 意見：0
[檢舉]

問一般人台灣的交流電電壓是多少
回答都一定會是110V或220V
從日常生活中不難看到，適用於台灣的家電也都標明電壓值是110V或220V
可是實際拿三用電表去測量會發現數據不是110V 或220V
為什麼會有不同?

圖 1 「Yahoo！奇摩知識＋」的網友提問

右圖 1 是 2005 年 2 月 12 日在「Yahoo！奇摩知識＋」中一位網友的提問，你能回答他的問題嗎？

此外，廣泛地運用在家庭與工業用電的交流電（Alternating Current，簡稱 AC），其電壓極性、振幅與電流方向會隨時間而改變，下圖 2 是常見的交流電波形「正弦波」，所謂的「電壓 110 伏特」又是怎麼回事呢？

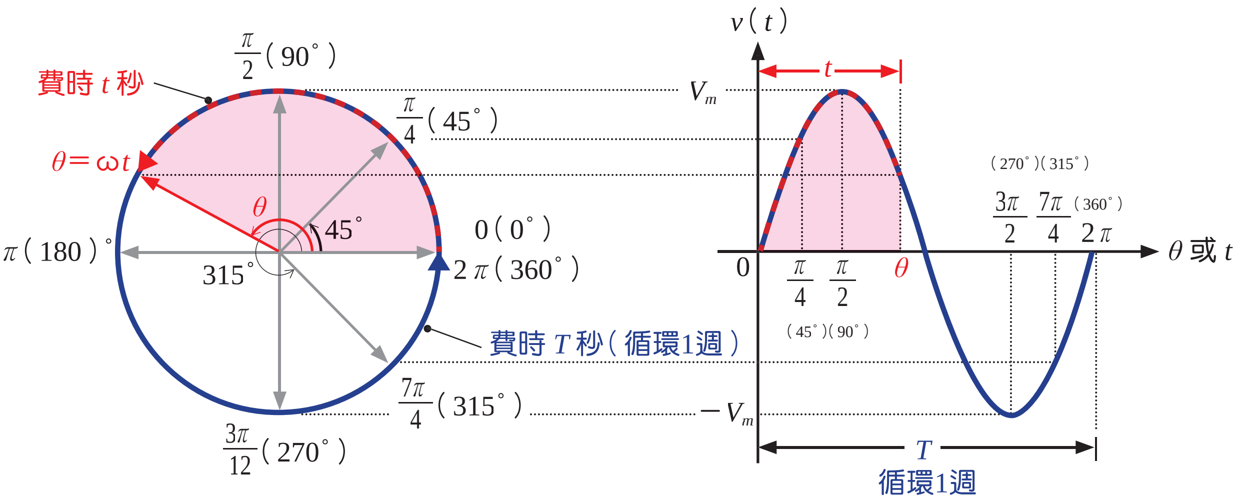


圖 2　常見交流電波形－正弦波

在解決上列問題之前，我們先來複習先前學過的公式：

【焦耳定律】

電功率 P：單位時間所消耗的能量 W，其單位為瓦特。其中「能量」係指移動 Q 庫侖的電荷，產生 V 伏特電壓所需之電能。

$$P=\frac{W}{t}=\frac{Q\times V}{t}=(\qquad\qquad)$$

上面提到能量 $W=Q\times V$，過去我們曾學到電流 I 是指單位時間通過某一截面的電量，即 $I=\dfrac{Q}{t}$，所以 $W=Q\times V=\dfrac{Q}{t}\times V\times t=I\times V\times t$

由歐姆定律—$V=I\times R$ 可以得知，

$$W=I\times V\times t=I\times I\times R\times t=I^2Rt$$

想想看 1

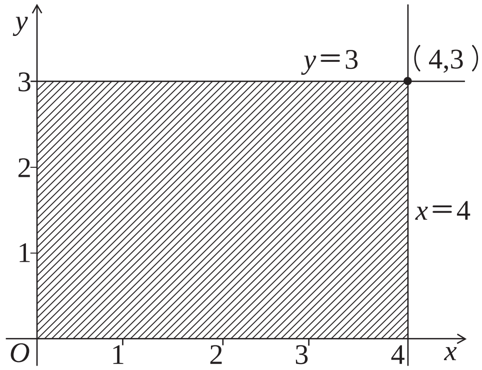
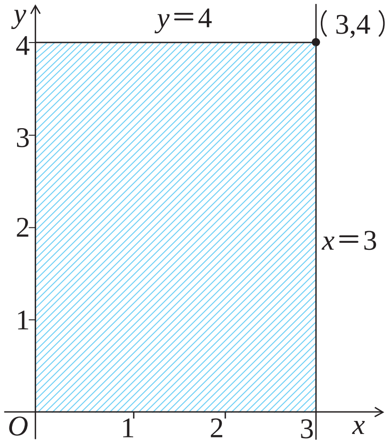
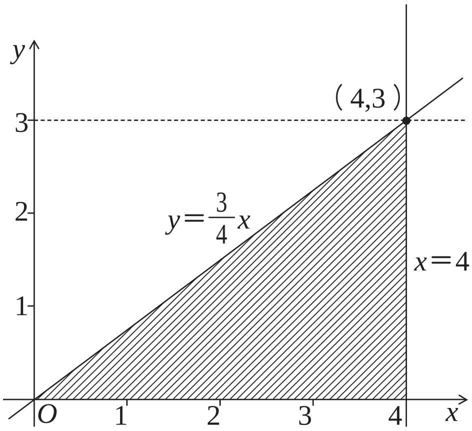
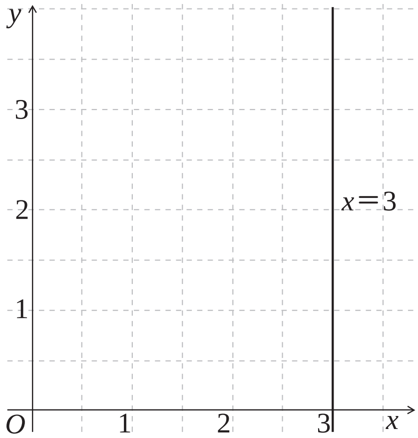
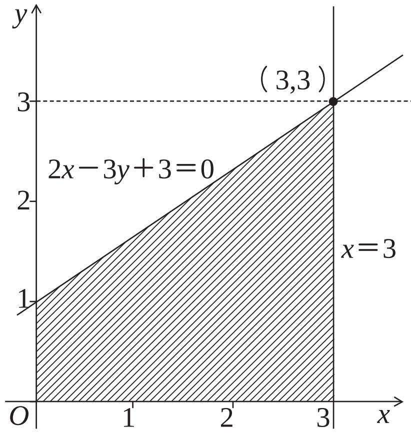
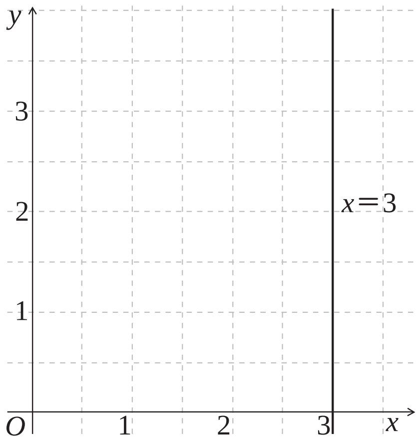
已知某智慧型手機待機時的消耗功率為 0.035 瓦特，若它的電池規格為 3.5 伏特、1000mAh（毫安培・小時），則在理想的待機情況下，充飽電並拔除充電的電源後，約可待機多少小時？

電力公司是以電能（$W=P\times t$，單位是千瓦特×小時）作為計算電費的依據，然而上述的電功率 P 在直流電路的計算較為容易，但交流電路中，電壓與電流會隨時間改變，該如何計算呢？

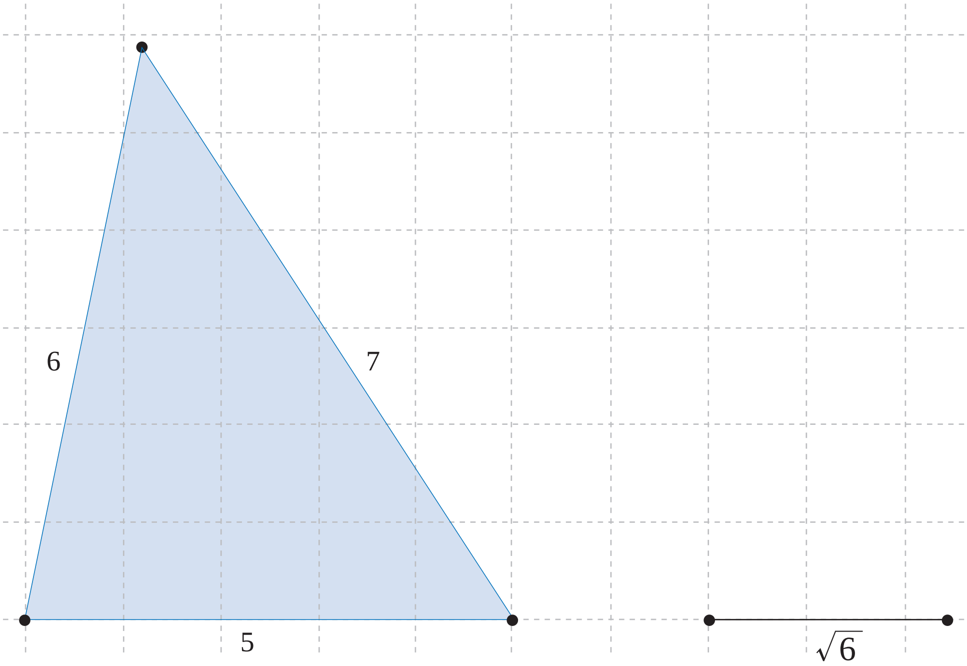
在科學技術的歷程中，人們對於直流電的認識早於交流電許多。故在交流電進入實用的階段以前，對直流電的研究已經相當全面了。因此人們自然容易想到，若能將交流電的一些數值換算成某一直流電的固定數值，在工程計算、解決問題或應用上應可帶來許多便利。

在基本電學「交流電」單元中提到，交流電波形常用的數值包含瞬間值、最大值（正峰值）、最小值（負峰值）、峰對峰值、平均值和有效值，其中平均值和有效值分別與微積分、三角函數的二倍角公式有極大的關聯，我們先藉著以下活動來認識平均值。

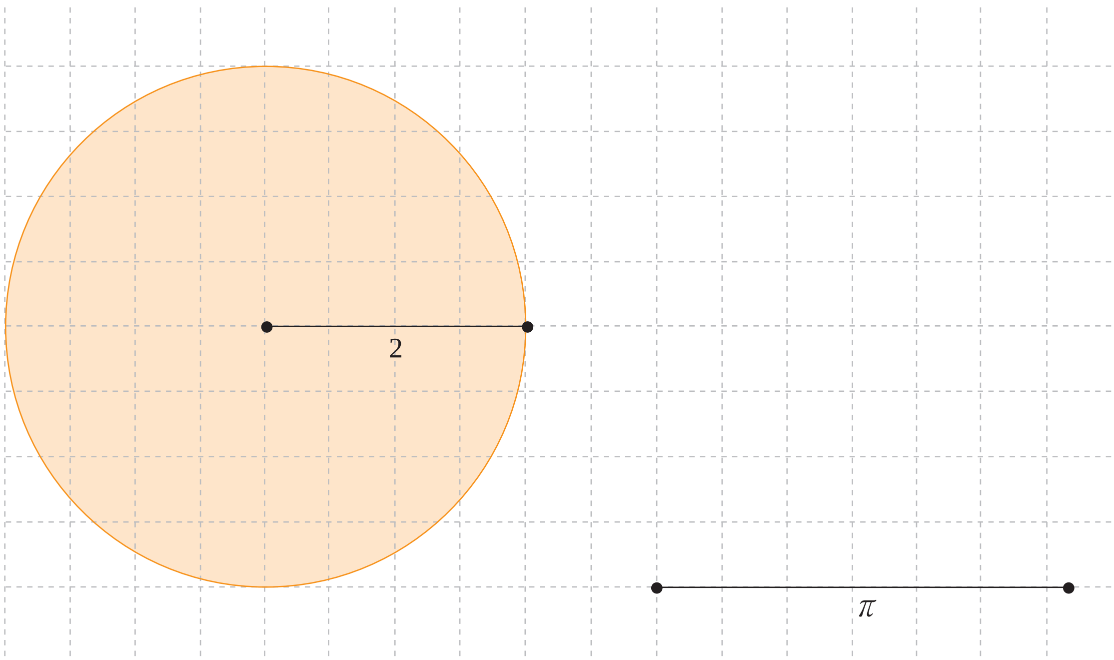
活動 1 請計算下列各小題斜線區域的面積，並於右側繪製與該區域面積相同、水平寬度為 3 單位長的矩形。

1.	 區域面積＝4×3＝12	
2.		
3.		

活動 2 請計算下列著色區域的面積，並在它的右側繪製與著色區域面積相同、水平寬度為 $\sqrt{6}$ 單位長的矩形。



活動 3 請計算下列著色區域的面積，並在它的右側繪製與著色區域面積相同、水平寬度為 π 單位長的矩形。



在上列活動中，我們試著計算出規則圖形的面積，並描繪具有相等面積的矩形。但若遇到其他曲線（如：交流電的常見波形——正弦函數圖形）所圍成的區域，要如何計算它的面積呢？本書第 58 頁附錄三「積分的意義」中提到利用定積分即能計算出曲線所圍的面積之值，同學們可試著詳閱當中的內容。

活動 4 **請利用 Geogebra 軟體，繪製函數 $y=2\sin x$，並求出此函數半週期的曲線與 x 軸所圍成的區域面積與定積分值。**
（可參考本書附錄三第62～64頁）

(1)建議設定「繪圖區」（滑鼠游標在繪圖區後按右鍵）中 x 軸的間距為 $\frac{\pi}{2}$。

(2)函數圖形繪製後，可發現函數最大值為__________，週期為__________。

(3)求取定積分之值需要輸入的指令為：____________________。

(4)定積分所求得的值為____________________。

想想看

當我們嘗試將函數圖形做平移或伸縮等變化，例如函數改為 $y=3\sin x$ 或 $y=\sin 2x$，除了先前就知道最大值、週期必定隨著改變之外，定積分之值有何變化？（請利用 Geogebra 軟體來操作）

活動 5 **請利用 Geogebra 軟體，繪製函數 $y=2\sin x$，並求出此函數一週期的曲線與 x 軸所圍成的區域面積與定積分值。**

(1)同【**活動4**】，建議 x 軸的間距設定為 $\frac{\pi}{2}$。

(2)求取定積分之值需要輸入的指令為：____________________。

(3)定積分所求得的值為____________________。

想想看 1

從【活動4】與【活動5】中我們不難發現，相同的週期函數因為取不同範圍計算定積分，所以會得到不同的結果。定積分與面積的差別為何？

在基本電學教科書中關於「平均值」意義是為了計算單位時間內曲線所圍出的區域面積之值，詳述如下：

【平均值】

電壓與電流的平均值（分別以 V_{av} 與 I_{av} 表示之）是指其週期性的波形曲線與 x 軸所圍成的區域面積與經歷之時間的比值，依照波形是否正負對稱，算法分別有以下兩種：

1. 非對稱波形的平均值＝$\dfrac{\text{一週期的波形曲線的定積分之值}}{\text{一週期的時間}}$

2. 對稱波形的平均值＝$\dfrac{\text{半週期的波形曲線的定積分之值}}{\text{半週期的時間}}$

想想看 2

根據上述定義，計算正弦波的平均值時，應採用哪一種算法呢？

由於正負對稱的波形其正、負兩個半波與 x 軸所圍成的區域面積相同，因此計算定積分時，負半波的定積分值恰與正半波之值會正負相互抵消，致使一個週期的定積分值為0亦導致其平均值為 0，所以對稱波形的平均值是以半個週期來做計算。

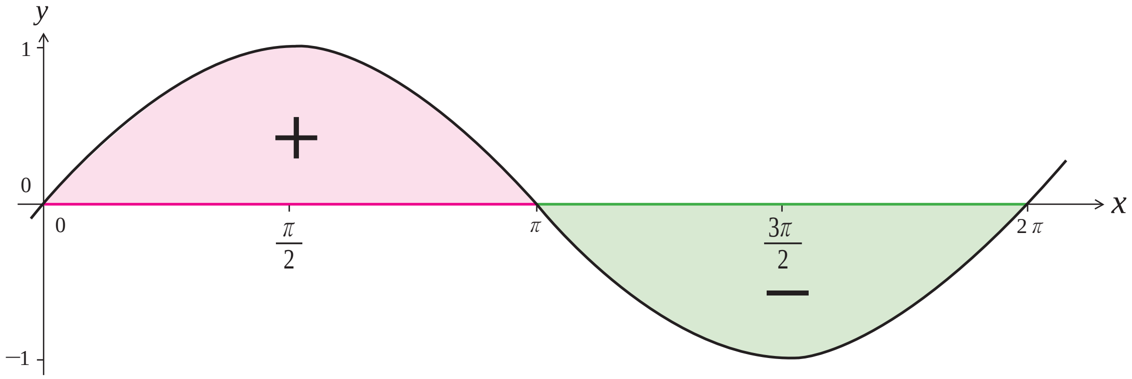


圖 3　兩個半週期與 x 軸所圍成的區域面積是相同的，但曲線若在 x 軸下方，定積分之值為負

半個週期的面積及其平均值，可以利用定積分的運算或 Geogebra 來幫助我們求得。(可參考本書附錄三第 62～64 頁)

我們過去曾學過，函數 $y=\sin x$ 的最大值為 1，又經由上述方法可得知，函數 $y=\sin x$ 在 $x=0$ 到 $x=\pi$ 之間(半個週期)的定積分之值為 2。

因此，當電壓的函數式可用正弦波表示成

$$v(t)=V_m\sin(\omega t)$$

其中 V_m 為電壓的最大值(正峰值)、ω 為線圈在磁場空間等速旋轉時的角速度、t 為時間，如圖 4。面積 A 之值變為 $\boxed{}$

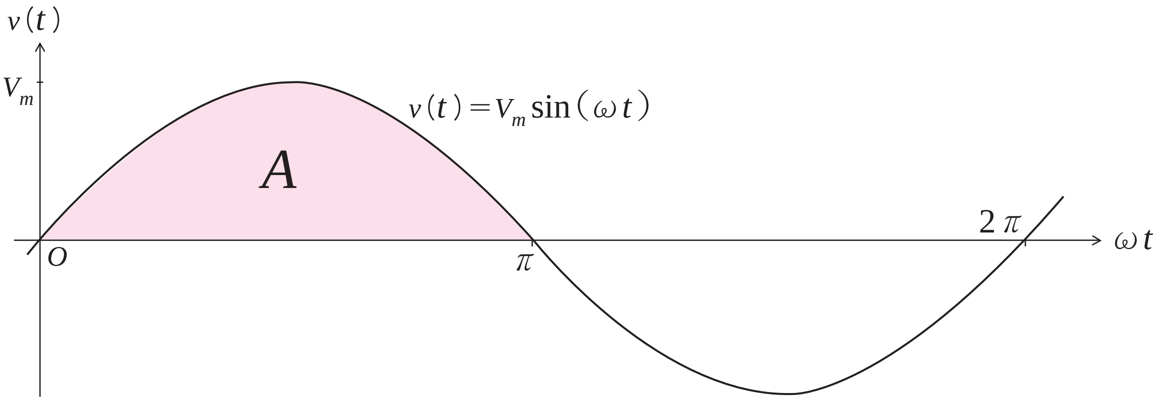


圖 4　半個週期的電壓函數與 x 軸所圍成的區域面積為 A

正弦波電壓的平均值 V_{av}(半週期平均值)為 $\boxed{}$

同理，若正弦波的電流函數式為 $i(t)=I_m\sin(\omega t)$，則其平均值 I_{av}(半週期平均值)為 $\boxed{}$

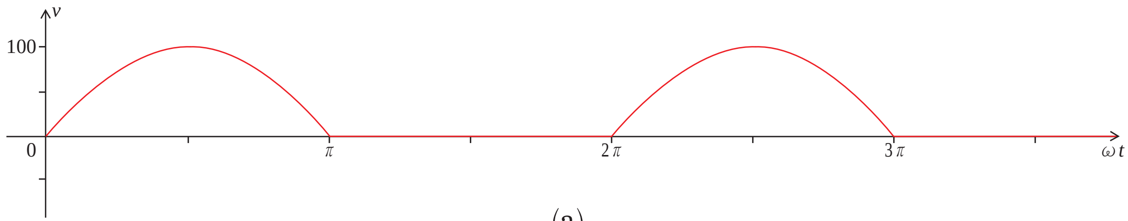
想想看 3

已知有一交流電壓正弦波的方程式為 $v(t)=100\sin(\omega t)$（單位：伏特），試回答下列各小題：

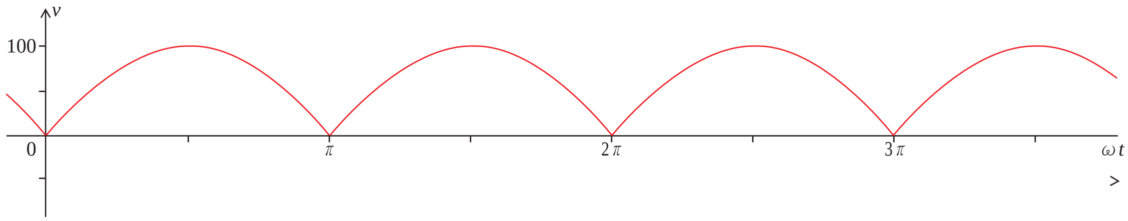
(1)此正弦波的平均值為何？

(2)如圖(a)，當正弦波經半波整流後，其平均值為何？

(3)如圖(b)，當正弦波經全波整流後，其平均值為何？



(a)



(b)

【註】整流是利用二極體（整流器）將交流電轉換為直流電的過程，當交流電經過半波整流器後，波形的正半週期或負半週期之一會被消除，而經過全波整流器會使波形轉變為同一極性輸出。

通常基本電學教科書是如此描述有效值的：

【有效值】

若在一段時間 T 內，一個交流電通過電阻 R 所產生的熱能，和直流電源通過同一電阻 R 所產生的熱能相同時，則稱該直流電壓或電流之值，為此交流電壓或電流的有效值（effective value，以 V_{eff} 或 I_{eff} 表示之）。

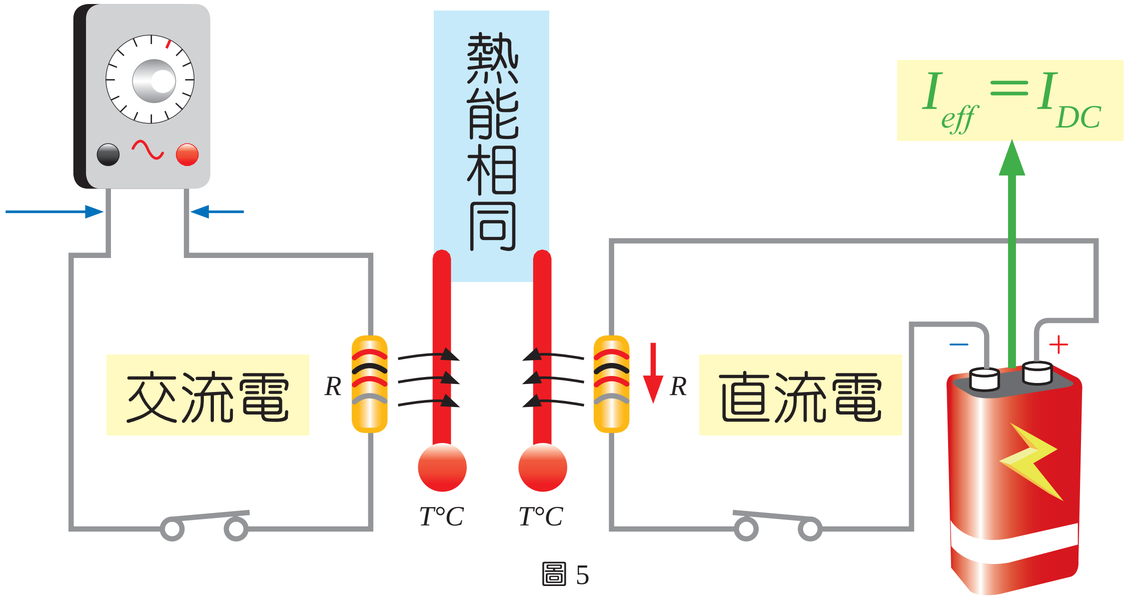


圖 5

第 28 頁曾提到能量 $W=I^2\times R\times t$，而在同一時間交流電的所產生的相同熱能為

$$W=(I_m\sin(\omega t))^2\times R\times t$$

當中的 $I_m\sin(\omega t)$ 是電流的函數式，I_m 為其正弦波的最大值。因此，

$$I^2=I_m^2\sin^2(\omega t)\cdots\cdots(*)$$

三角函數的二倍角公式中有一為 $\cos2\theta=1-2\sin^2\theta$，移項可得

$$\sin^2\theta=\frac{1-\cos2\theta}{2}$$

所以（$*$）式可化成

$$I^2=I_m^2\times\frac{1-\cos(2\omega t)}{2}=\frac{1}{2}\times I_m^2-\frac{\cos(2\omega t)}{2}\times I_m^2$$

如圖 6，利用 Geogebra 繪圖並藉此求取定積分之值時可以發現，經過一個週期後餘弦函數的定積分之值為 0（同時平均值亦為 0），

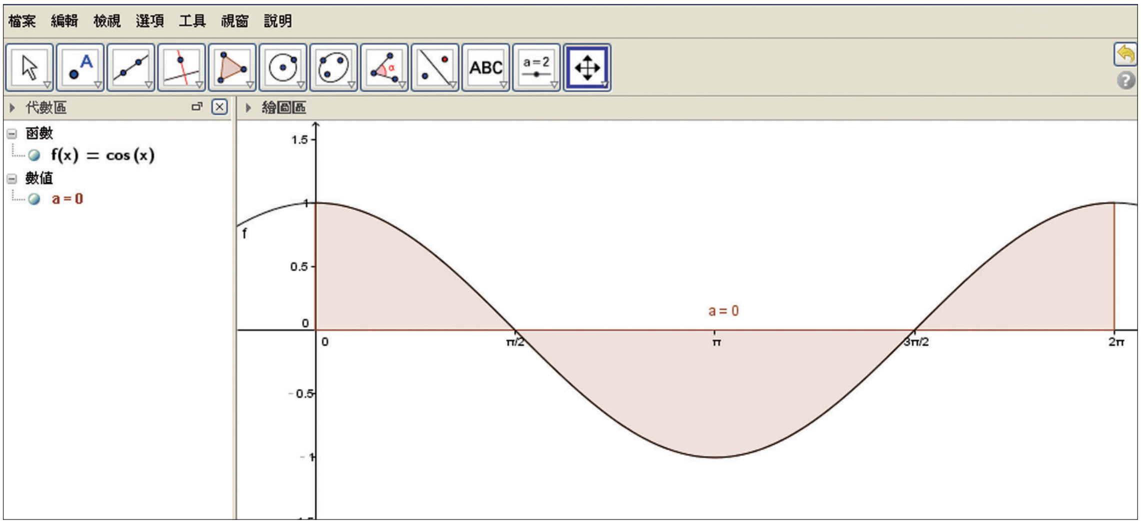


圖 6　使用 Geogebra 求得餘弦函數一個週期的定積分之值為 0

因此，$I^2=\frac{1}{2}\times I_m^{\ 2}-\frac{\cos(2\omega t)}{2}\times I_m^{\ 2}$ 可改寫成 $\boxed{}$

也就是說正弦波的電流有效值 I_{eff} 為 $\boxed{}$

同理，若正弦波的電壓函數式為 $v(t)=V_m\sin(\omega t)$，則其電壓有效值 V_{eff} 為

$\boxed{}$

我們也可利用 Geogebra 求取函數 $I^2=I_m^{\ 2}\sin^2(\omega t)$ 一個週期的定積分之值，藉以求得 I^2 的平均值，即為正弦波電流有效值的平方。

如圖 7，週期為 π 的函數 $y=\sin^2 x$ 在 $x=0$ 至 $x=\pi$ 的定積分之值為 $\frac{\pi}{2}$（圖中 Geogebra 顯示 1.57 為其近似值），故 $y=\sin^2 x$ 的平均值為 $\frac{\pi}{2}\div\pi=\frac{1}{2}$。

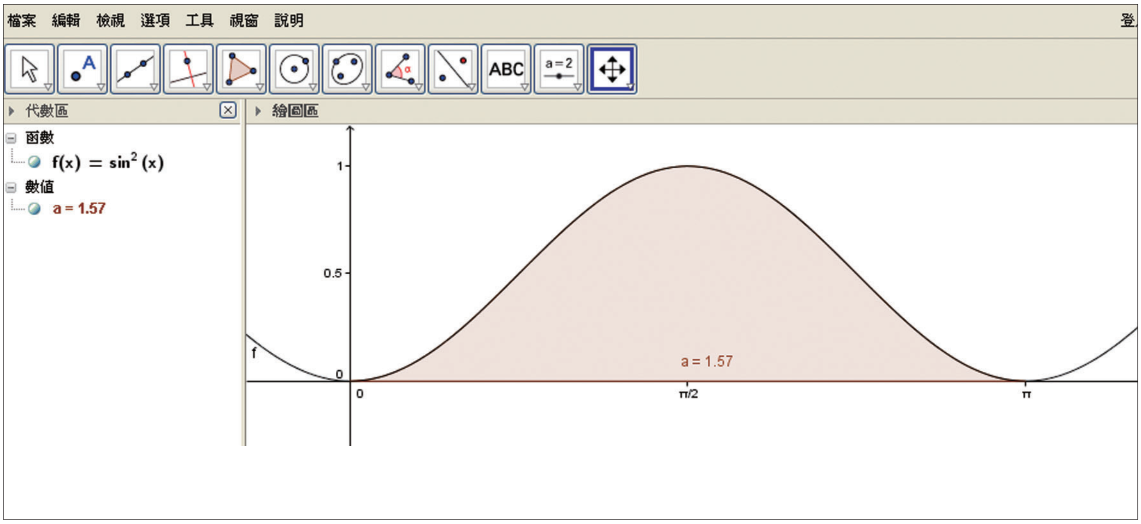


圖 7　使用 Geogebra 求得 $y=\sin^2 x$ 一個週期的定積分之值為 $\frac{\pi}{2}$

因此，$I^2=I_m^2\sin^2(\omega t)$的平均值即為 $\frac{1}{2}\times I_m^2$，取正的平方根後即可得到正弦波電流有效值 I_{eff} 為 $\frac{1}{\sqrt{2}}\times I_m$。

想想看 4

已知有一交流正弦波的方程式為 $v(t)=100\times\sin(2\pi\times60\times t)$(其中電壓 $v(t)$ 單位為伏特、時間 t 的單位為秒)，試回答下列各小題：

(1) $t=0$ 時之瞬間電壓值為何？

(2) 當時間經過 $\frac{1}{60}$ 秒時，電壓的瞬間值為何？

(3) 使用直流電表量測交流電時，所測得的是交流電一個完整週期的正弦波平均值，故測得的值為 0；而利用交流電表(三用電表撥至交流電壓檔)時所測得的是有效值。故當我們利用三用電表的交流電壓檔量測此交流電波時，測得之數值為何？

想想看 5

除了正弦波，交流電常見波形還有三角波、鋸齒波以及方波等。上述波形的平均值及有效值該如何計算呢？

課後作業

(　　) 1. 正弦波的最大值與平均值之比值約為下列何者？

(A) 1　(B) $\frac{\pi}{2}$　(C) $\frac{2}{\pi}$　(D) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(　　) 2. 當我們以三用電表交流電壓檔量測插座時測得電壓為 AC110V，下列何者為此電表所指示之電壓值？

(A) 平均值　(B) 最大值　(C) 有效值　(D) 峰對峰值

(　　) 3. 一個 5V 直流電壓源與 10Ω 電阻串聯，電阻散熱功率為 2.5W，此時將直流電壓源移去，改換一個正弦波交流電壓源，發現電阻散熱功率相同。試問下列何者為上述交流電壓源的有效值？

(A) 5　(B) 10　(C) 12.5　(D) 50　伏特。

(　　) 4. 下列何者為電壓 $v(t)=100\sqrt{2}\sin(120t)$（單位：伏特）之有效值？

(A) 90　(B) 100　(C) 10　(D) 120　伏特。

(　　) 5. 將 110V / 60Hz 的市電電壓以交流電壓瞬間值方程式 $v(t)$ 表示時，下列何者正確（單位：伏特）？

(A) $v(t)=110\sin(60t)$　(B) $v(t)=110\sin(377t)$

(C) $v(t)=156\sin(60t)$　(D) $v(t)=156\sin(377t)$

【100年統測電機與電子群專業科目（一）電子學、基本電學歷屆試題】

課後作業解答

1. (B) 解析：$\frac{V_m}{V_{av}}=\frac{V_m}{\frac{2}{\pi}V_m}=\frac{\pi}{2}$

2. (C)

3. (A) 解析：一交流電壓加於一電阻所產生的熱量與一直流電壓加於該電阻所產生的熱量相等時，上述直流電壓稱為交流電壓的有效值。

4. (B)

5. (D) 解析：$v(t)=V_{eff}\cdot\sqrt{2}\sin\omega t=110\times\sqrt{2}\sin(2\pi\times 60t)\fallingdotseq 156\sin 377t\,(\mathrm{V})$

附錄一　Geogebra 簡介

為求課程更為生動、便利，附錄一將介紹一套免費的數學軟體 —Geogebra，它是由美國亞特蘭大學數學系教授 Markus Hohenwarter 設計的跨平臺動態幾何數學繪圖軟體，目前已有包含繁體(正體)中文在內共五十多種語言版本了。現今高中職所學的數學課程如向量、直線、圓錐曲線(二次曲線)、行列式的運算、三角函數、微積分、統計等單元，都可以利用它來作圖、運算。

Geogebra 這個名稱是由 Geometry(幾何)和 Algebra(代數)兩字組合而成，亦即它是個結合幾何與代數的軟體。使用者在繪圖區描繪某個點或某個幾何圖形時，旁邊的代數區就會顯示出它們所對應的坐標或方程式；相對的只要在指令列輸入一個點的坐標、方程式或函數式，繪圖區就會立刻出現它們的圖形了！

要下載安裝 Geogebra，只需連上 Geogebra 的官網首頁，即可依照電腦的作業系統類型下載並執行安裝。由於 Geogebra 是以 JAVA 語言設計的，若你的電腦從未安裝過 JAVA，在安裝 Geogebra 前會被要求安裝新版本的 JAVA。

第 40 頁圖 1 是開啟 Geogebra 後會顯示的視窗畫面，最上方一列是功能表列，包含開新檔案、另存新檔等功能都可利用滑鼠游標在此點擊執行。功能表列下方按鈕列為工具列，使用者可利用工具列中的工具，在幾何繪圖區中使用滑鼠進行繪圖。每個按鈕圖示的右下角都有個小箭頭，按下它可開啟相似的繪圖工具模組。視窗最下方是指令列，使用者可直接在此輸入代數式，按下 Enter 鍵後，輸入的代數表示式會出現在代數區，而繪圖區內會顯示它的圖形。其他功能同學們不妨自行探索，發掘它的更多妙用！

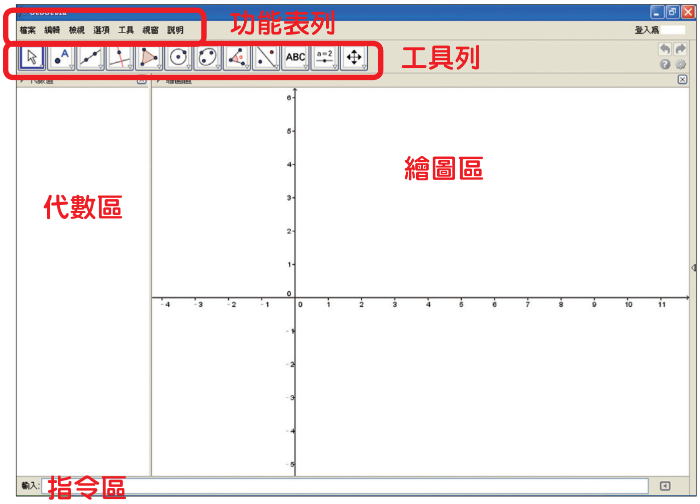


圖 1　開啟 Geogebra 後的畫面

舉例來說，當我們在指令列中輸入「$y=2x+1$」，按下 Enter 鍵後，代數區中會顯示輸入的代數表示式「a：$y=2x+1$」，其中 a 為直線的代號，可在它的屬性中作修改，而繪圖區內會顯示它的圖形—直線 a，如圖 2。

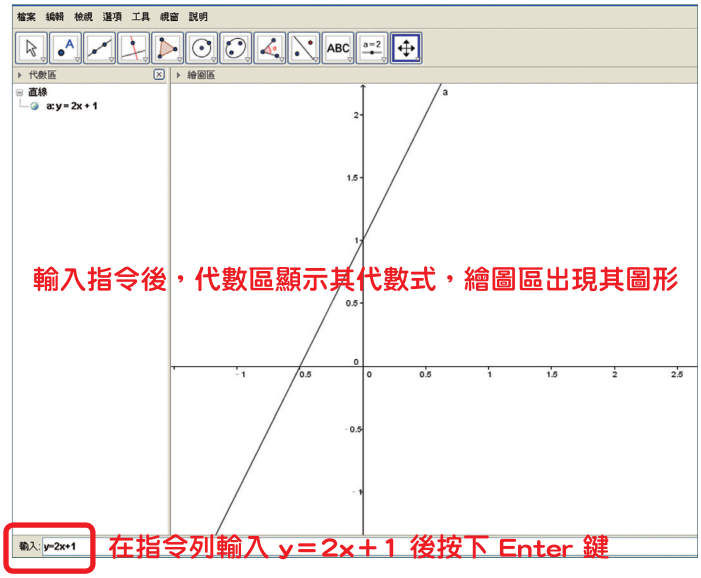


圖 2　Geogebra 輸入指令後出現的畫面

Step 1　滑鼠游標移至指令列點一下，即可利用鍵盤輸入指令在其中。

Step 2　利用鍵盤輸入 $y=2x+1$ 。

Step 3　按下 Enter 鍵。

Step 4　左側代數區顯示「a：$y=2x+1$」，右側繪圖區出現一條斜直線。

以下我們利用 Geogebra 練習描繪幾個過去曾學過的函數圖形：

活動 1-1　**請在 Geogebra 的指令列中輸入適當式子，以顯示下列各圖形。**

物件	Geogebra 指令列輸入	備註
點 $C(3,5)$	$C=(3,5)$	大寫字母表示點
$y=x^2-2x+5$	$y=x$ ^ $2-2x+5$	x^2 用 x ^ 2 表示
$y=\lvert x \rvert$	$y=abs(x)$	abs 為絕對值函數簡寫
$y=\sin x$	$y=\sin(x)$	x 需加括弧
向量 $\vec{a}=(-2,-4)$	$a=(-2,-4)$	小寫字母表示向量

註：符號「 ^ 」是按住 Shift 及數字 6 鍵後即可出現。

當指令輸入正確時括弧是綠色的如圖 3；若指令輸入錯誤時括弧是紅色的如圖 4，強制按下 *Enter* 鍵會出現如圖 5 的對話框提醒指令錯誤的地方。

圖 3　輸入指令正確

圖 4　輸入指令錯誤

圖 5　提醒對話框

活動 1-1 的上列五個物件顯示如第 42 頁 圖 6。其中除了點 C 與向量 a 的代號是輸入時已自行訂定好的之外，二次曲線 $y=x^2-2x+5$ 為 c、絕對值函數 $y=\lvert x \rvert$ 為 $f(x)$，以及三角函數 $y=\sin x$ 被設定為 $g(x)$，都是 Geogebra 預設的，使用者可在圖形上或代數區用滑鼠右鍵點選後按「屬性」重新命名其代號。

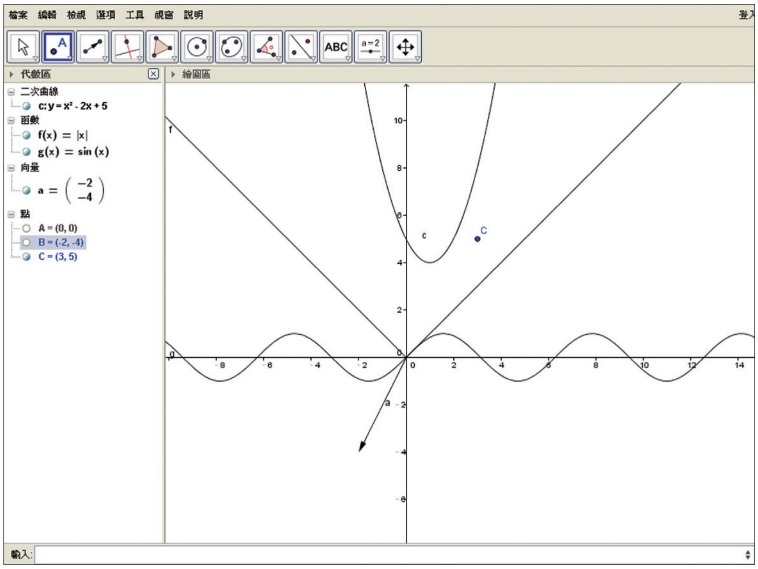


圖 6　例題 1-1 五個物件圖形

活動 1-2 請在 Geogebra 的指令列中輸入適當式子， 以顯示下列各圖形。

物件	Geogebra 指令列輸入
點 $B(-2, \frac{1}{2})$	
$y=3(x-2)^2+1$	
$y=\lvert x\rvert+\lvert x-1\rvert$	
$y=\cos x$	

附錄二　正弦函數的圖形與週期

描繪函數圖形最直觀的方法就是描點法，我們將一些特別角的正弦函數值對應關係，列表如下：

x	…	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{4}$	2π	…
			0.52	0.79	1.05	1.57	2.09	2.36	2.62	3.14	3.67	3.93	4.19	4.71	5.24	5.50	5.76	6.28	
sin$x$	…	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	…
			0.5	0.71	0.87		0.87	0.71	0.5		-0.5	-0.71	-0.87		-0.87	-0.71	-0.5		

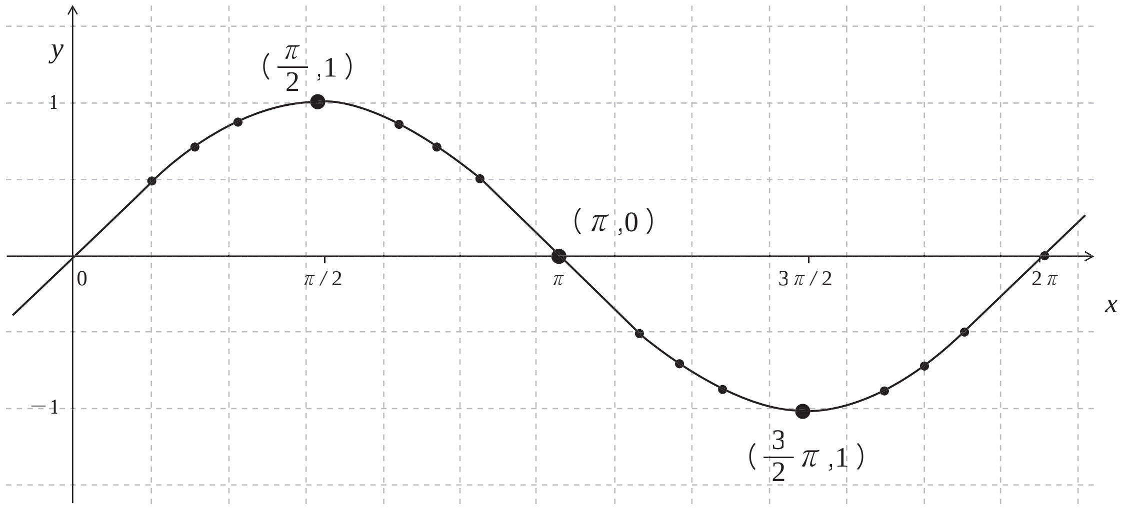


圖 7　以描點法描繪 $y=\sin x$ 的圖形

我們也可以利用繪圖軟體 Geogebra 來描繪三角函數圖形：

(1) 先將 x 軸間距改為 $\dfrac{\pi}{2}$：將滑鼠移至「繪圖區」，按滑鼠右鍵，出現下列對話框，以滑鼠左鍵點選「繪圖區」如圖 8。

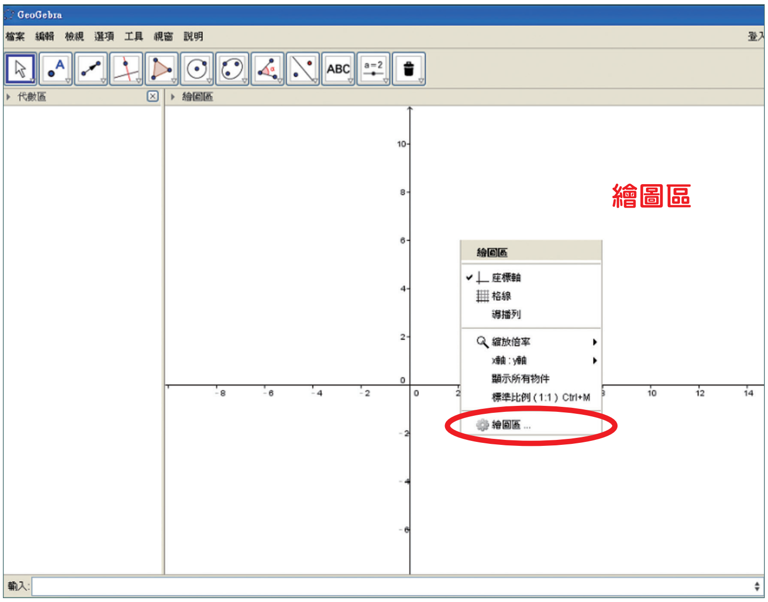


圖 8　按滑鼠右鍵，點選繪圖區

點選 x 軸，勾選間距 $\dfrac{\pi}{2}$，關閉對話框，即可將間距改為 $\dfrac{\pi}{2}$ 如圖 9。

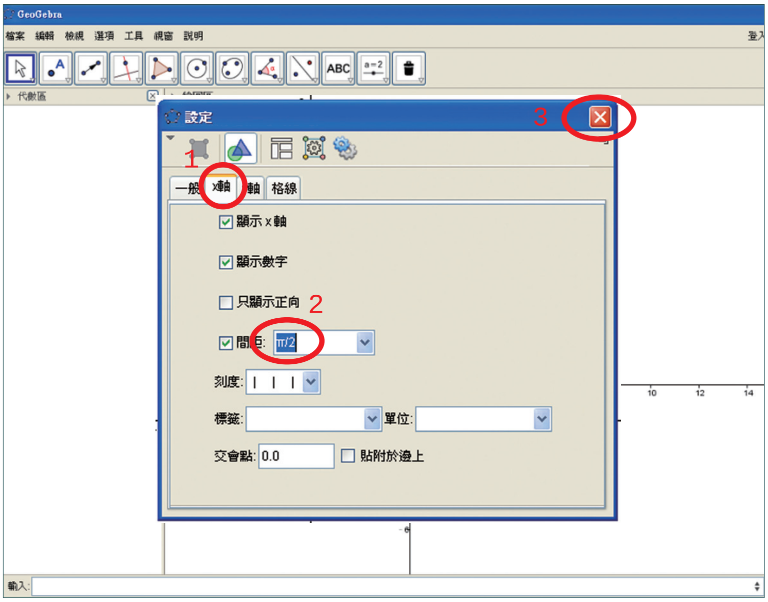


圖 9　調整 x 軸間距

⑵描繪 $y=\sin x$ 的圖形：在下方指令列輸入「$y=\sin(x)$」。如圖 10

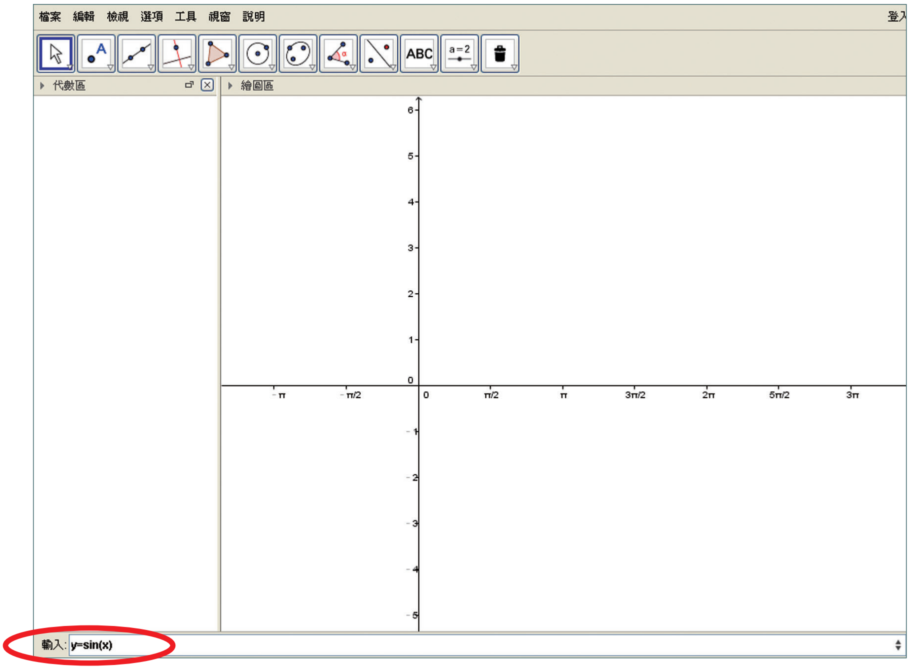


圖 10　在指令列輸入 $y=\sin(x)$

輸入 Enter 鍵，即可得 $y=\sin x$ 的函數圖形如下如圖 11：

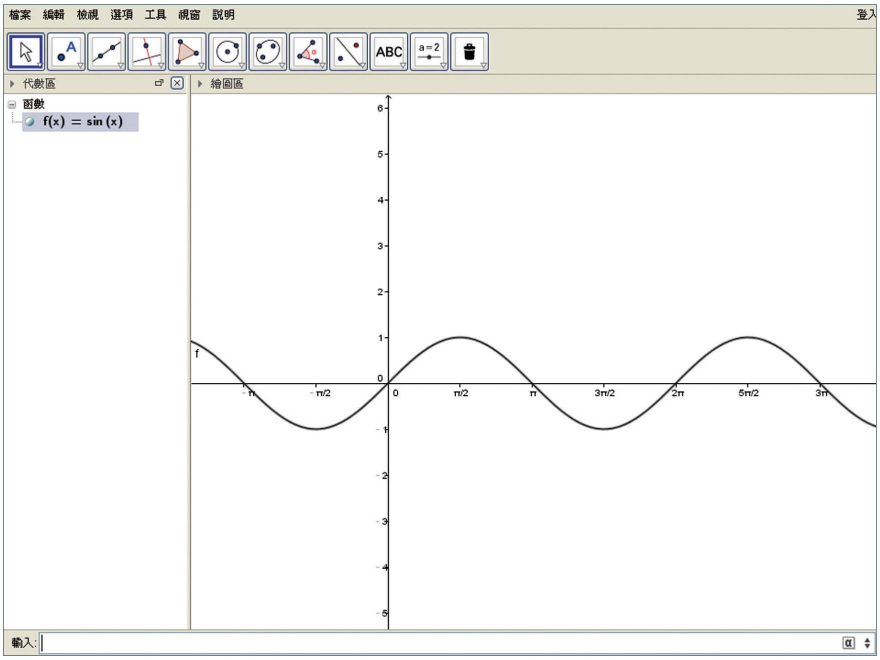


圖 11　繪圖區出現 $y=\sin x$ 的函數圖形

由於之前學過 $\sin(2\pi+x)=\sin x$，我們發現角度相差 2π 時，函數值相同，也就是說函數圖形每隔 2π 會重複出現；像這樣滿足 $f(p+x)=f(x)$的函數稱之為週期函數，其中滿足此式的最小正數 p 稱為此函數的**週期**。由此可知：正弦函數 $y=\sin x$ 為一個**週期函數**，且其週期為 2π。

觀察上述圖形可知：

⑴ $y=\sin x$ 的定義域為 R，週期為 2π。

⑵ $y=\sin x$ 的值域為 $\{y \mid -1\leq y\leq 1\}$，也就是 $y=\sin x$ 的最大值為 1，最小值為 -1。

餘弦函數 $y=\cos x$ 的圖形

首先利用描點法描繪函數圖，我們將特別角的餘弦函數值對應關係，列表如下：

x	…	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	…
			0.52	0.79	1.05	1.57	2.09	2.36	2.62	3.14	3.67	3.93	4.19	4.71	5.24	5.50	5.76	6.28	
$\cos x$	…	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	…
			0.87	0.71	0.5		-0.5	-0.71	-0.87		-0.87	-0.71	-0.5		0.5	0.71	0.87		

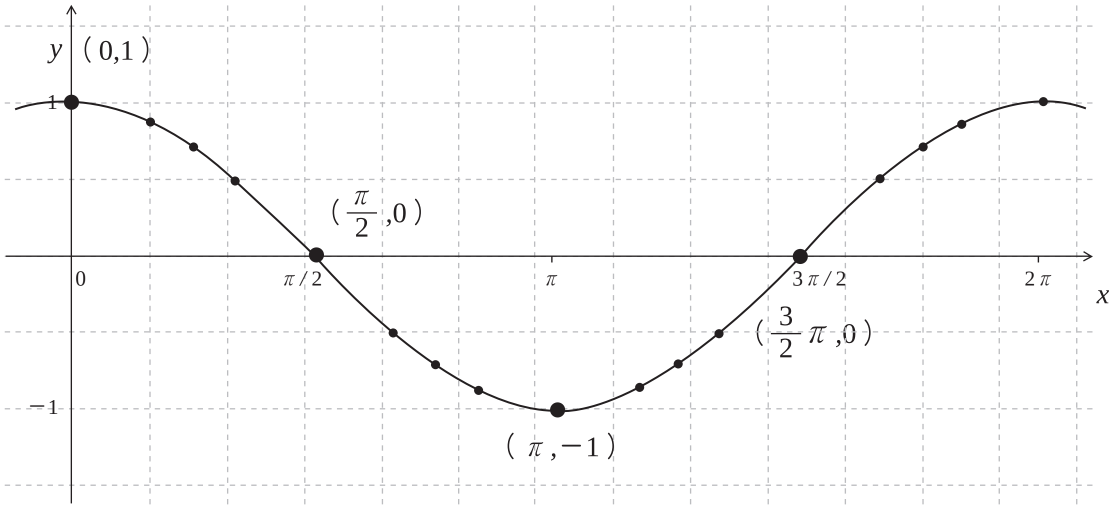


圖 12　以描點法描繪 $y=\cos x$ 的圖形

我們也可以和前面一樣的方法，利用繪圖軟體 Geogebra 來描繪餘弦函數 $y=\cos x$ 圖形。

在下方指令列輸入「$y=\cos(x)$」，輸入 Enter 鍵，即可得 $y=\cos x$ 的函數圖形如下圖 13：

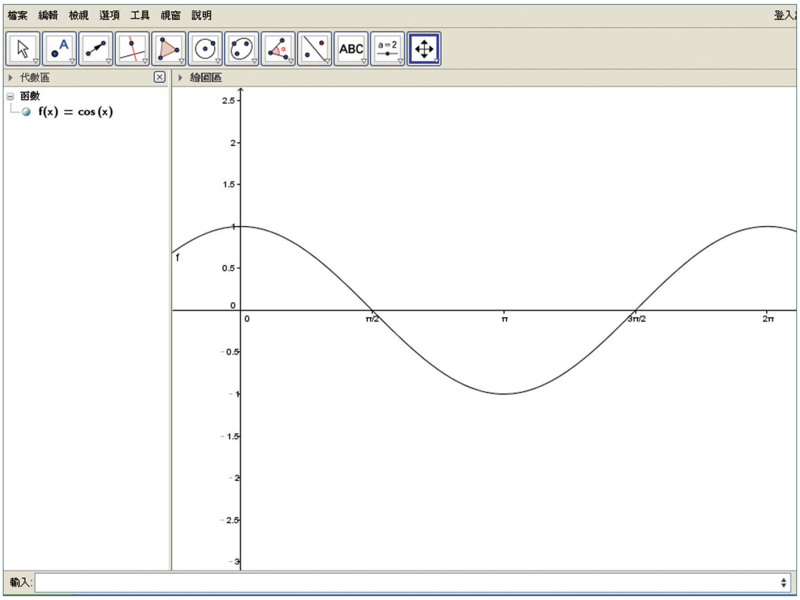


圖 13　輸入指令後，繪圖區出現 $y=\cos x$ 的函數圖形

觀察上述圖形可知：

(1) $y=\cos x$ 的定義域為 R，週期為 2π。

(2) $y=\cos x$ 的值域為 $\{y \mid -1 \le y \le 1\}$，也就是 $y=\cos x$ 的最大值為 1，最小值為 -1。

(3) $y=\cos x$ 的圖形相當於是將前面的 $y=\sin x$ 的圖形向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 單位。

三角函數圖形的平移伸縮

接下來我們將利用繪圖軟體 Geogebra 的數值滑桿觀察三角函數圖形的平移伸縮問題，藉以了解對於三角函數 $y=f(x)$ 與 $y=af(bx+c)+d$ 圖形的關係。

1. $y=a\sin x$ 與 $y=\sin x$ 圖形的關係

利用繪圖軟體 Geogebra 來描繪三角函數 $y=a\sin x$ 與 $y=\sin x$ 的圖形：

(1) 先利用前面的方法繪製 $y=\sin x$ 的圖形。

(2) 製作數值滑桿：在數值滑桿按鍵上按一下，然後在「繪圖區」上按一下，出現下面對話框，以滑鼠左鍵點選「套用」如圖 14。

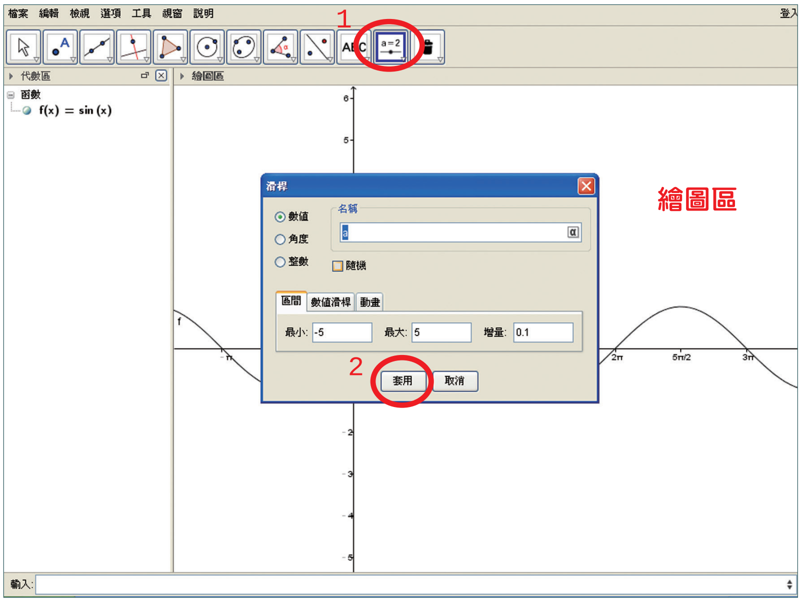


圖 14　設定數值滑桿 a

出現下圖 15 的數值滑桿。

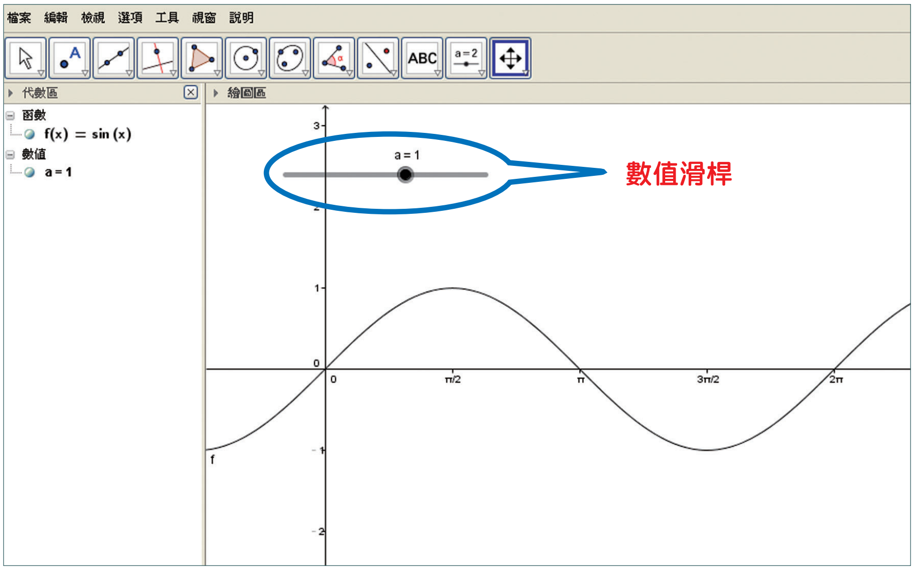


圖 15　數值滑桿出現於繪圖區

⑶ 描繪 $y=a\sin x$ 的圖形：在下方指令列輸入「$y=a*\sin(x)$」，按 Enter 鍵。以滑鼠左鍵點選工具列「移動」的圖示（參見下圖 16），然後以滑鼠左鍵拖曳數值滑桿。

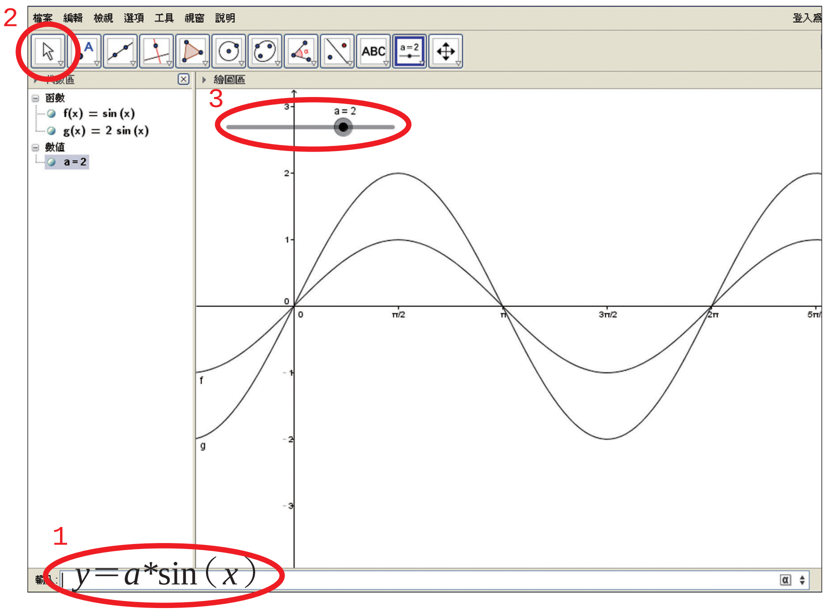


圖 16　拖曳數值滑桿，出現 $y=a\sin x$ 的函數圖形

註：若要改變圖形的顏色、樣式（粗細、虛線 …），可在圖形上任一點，按一下右鍵，即會出現下列對話框，此對話框會註明點選的物件，以滑鼠左鍵點選對話框中的「屬性」如圖 17。

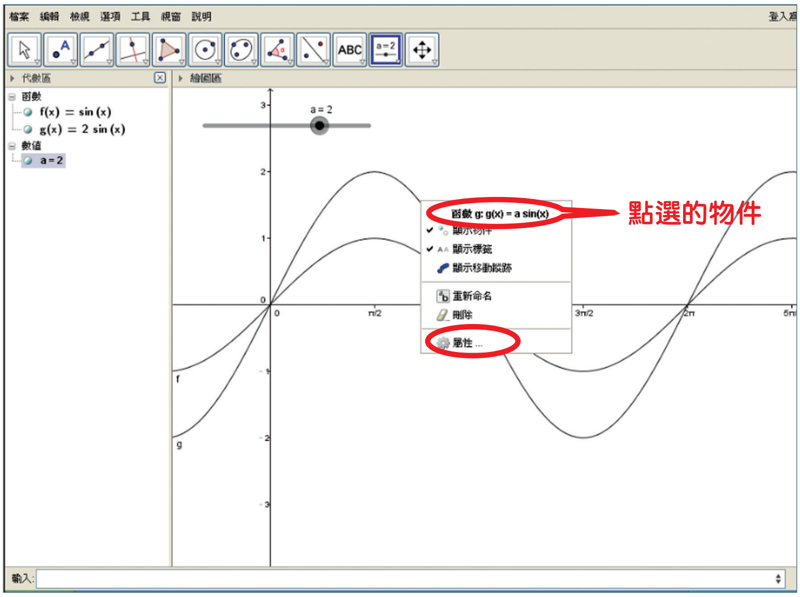


圖 17　點選物件，按滑鼠右鍵以設定屬性

出現下面的對話框，點選顏色如圖 18。

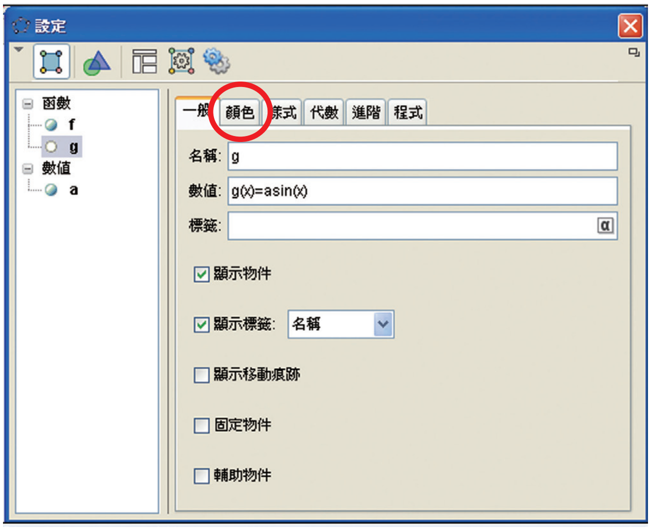


圖 18　出現屬性對話框，點選顏色

如第 51 頁圖 19 依喜好選取想改變的顏色後，關閉對話框即可完成圖形顏色的改變。

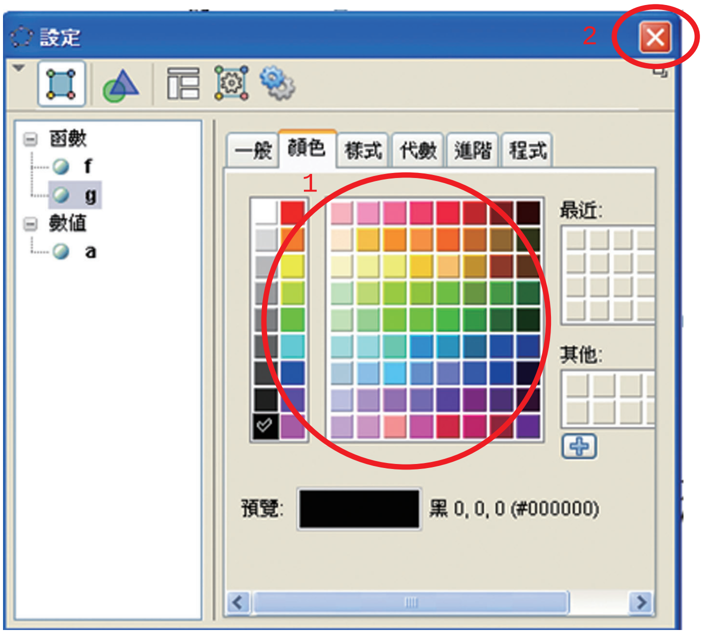


圖 19　在屬性對話框中設定物件顏色，再關閉對話框

可用相同的方式如圖 20，若以滑鼠左鍵點選下列對話框中的「樣式」，即可依喜好選取想改變的線之粗細、或下拉選單選取線的形式，最後關閉對話框即可。

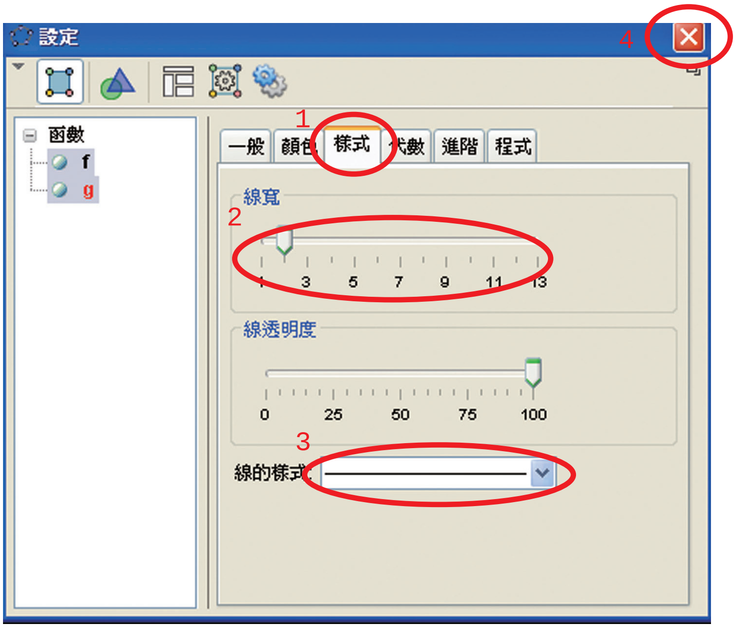


圖 20　在屬性對話框中設定物件（線）樣式，再關閉對話框

拖曳數值滑桿，觀察 $y=a\sin x$ 與 $y=\sin x$ 的圖形關係，將發現數值 a 影響 $y=a\sin x$ 的振幅，換句話說，$y=a\sin x$ 的圖形是將 $y=\sin x$ 的圖形伸縮了a 倍如圖 21。

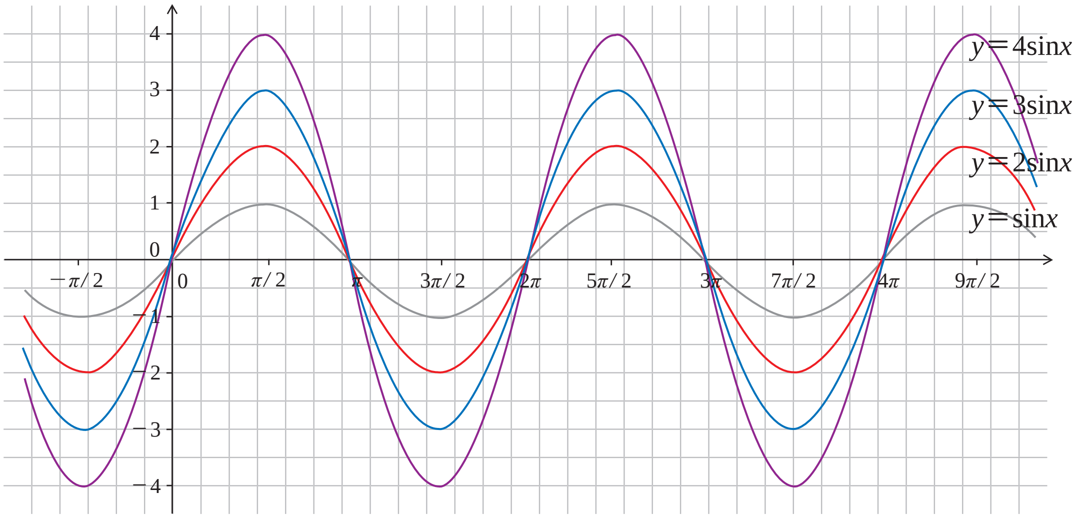


圖 21　$y=a\sin x$ 的圖形

2. $y=\sin bx$ 與 $y=\sin x$ 圖形的關係

⑴ 先利用前面的方法繪製 $y=\sin x$ 的圖形。

⑵ 利用前面的方式，製作數值滑桿，並在名稱的部分改為「b」，最後以滑鼠左鍵點選「套用」，即會出現數值滑桿 b 如第 53 頁圖 22。

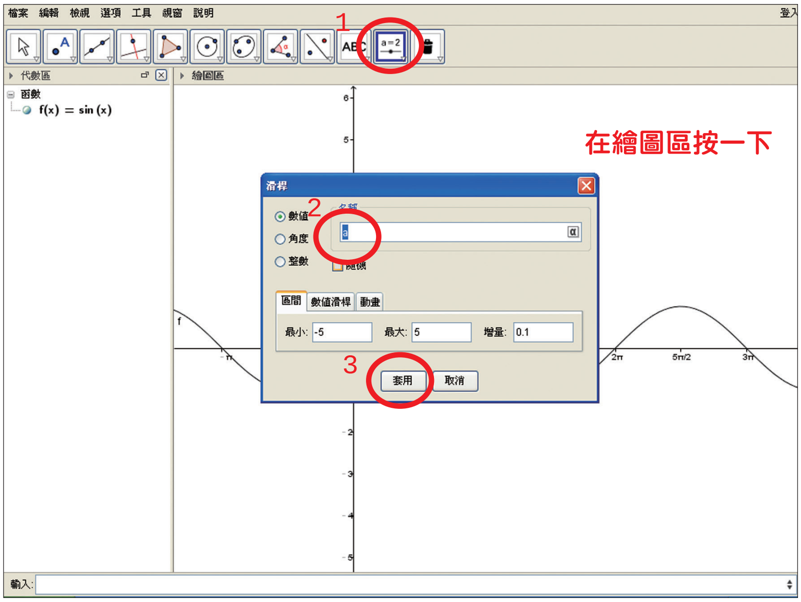


圖 22　設定數值滑桿 b

(3) 描繪 $y=\sin bx$ 的圖形：在下方指令列輸入「$y=\sin(b*x)$」，按 Enter 鍵。以滑鼠左鍵點選工具列" 移動" 的圖示（參見下圖 23），然後拖曳數值滑桿。

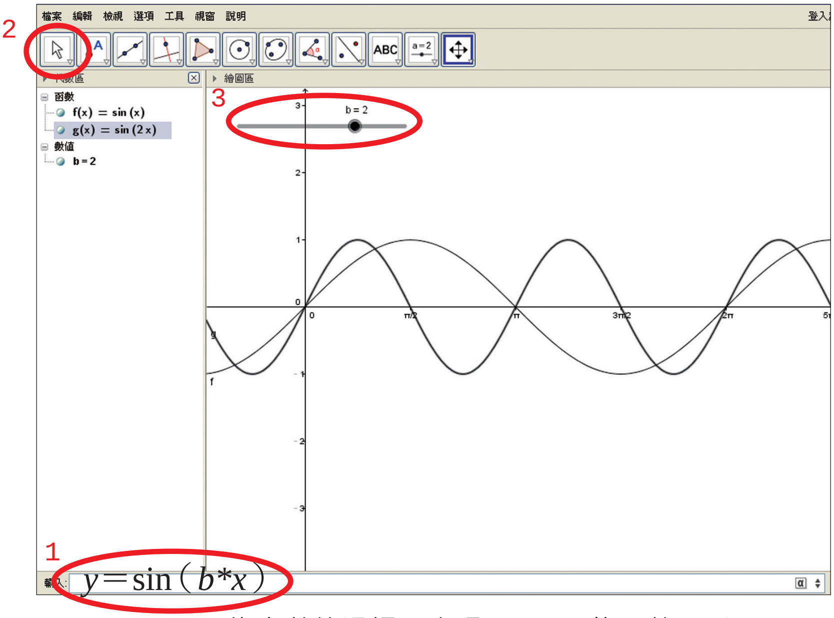


圖 23　拖曳數值滑桿，出現 $y=\sin bx$ 的函數圖形

拖曳數值滑桿，觀察 $y=\sin bx$ 與 $y=\sin x$ 的圖形關係，將發現數值 b 影響 $y=\sin bx$ 的週期，且 $y=\sin bx$ 的週期是 $y=\sin x$ 的週期 2π 的 $\dfrac{1}{|b|}$ 倍。

3. $y=\sin x$ 與 $y=\sin(x+c)$ 圖形的關係

⑴ 先利用前面的方法繪製 $y=\sin x$ 的圖形。

⑵ 利用前面的方式，製作數值滑桿，並在名稱的部分改為「c」，最後以滑鼠左鍵點選「套用」，即會出現數值滑桿 c 如圖 24。

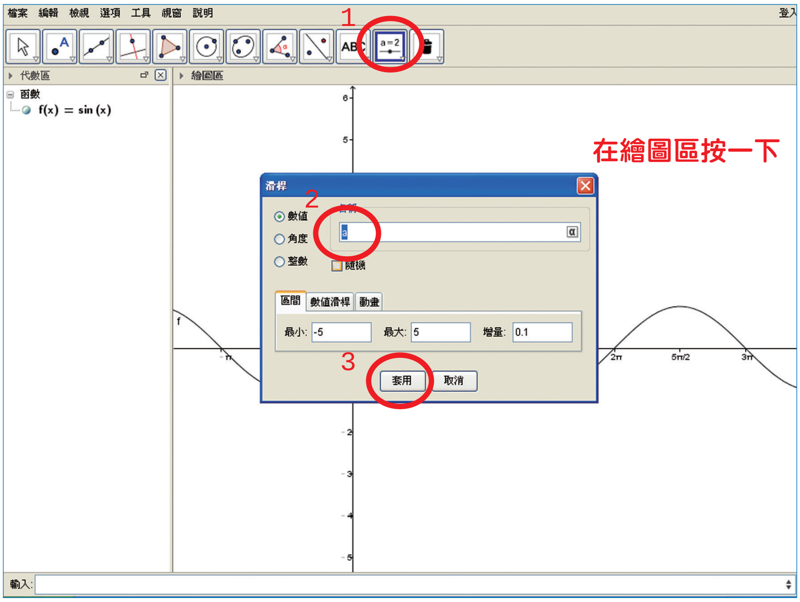


圖 24　設定數值滑桿 c

⑶ 描繪 $y=\sin(x+c)$ 的圖形：在下方指令列輸入「$y=\sin(x+c)$」，按 Enter 鍵。以滑鼠左鍵點選工具列”移動”的圖示（參見第 56 頁圖 25），然後拖曳數值滑桿。

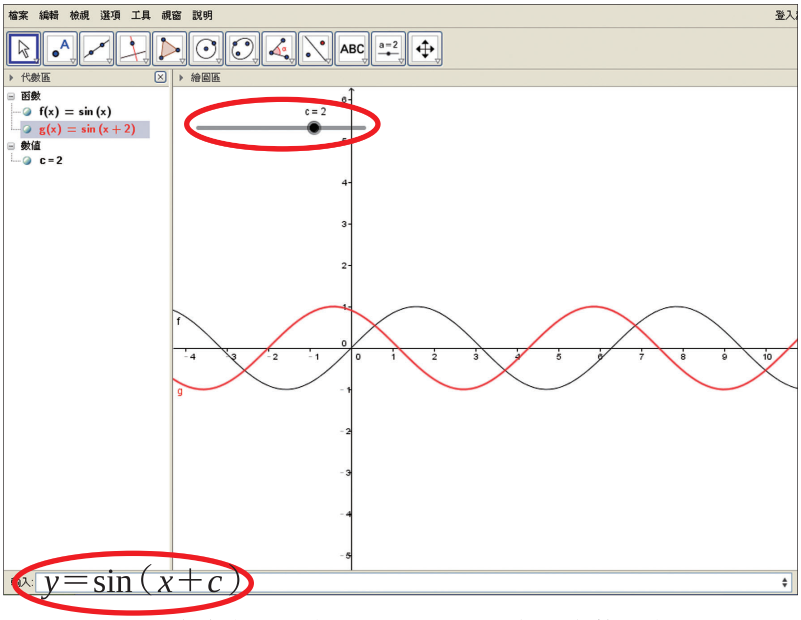


圖 25　拖曳數值滑桿，出現 $y=\sin(x+c)$ 的函數圖形

拖曳數值滑桿，觀察 $y=\sin(x+c)$ 與 $y=\sin x$ 的圖形關係，將發現數值 c 影響 $y=\sin(x+c)$ 的圖形位置，當 $c>0$，$y=\sin(x+c)$ 的位置是 $y=\sin x$ 往左移 c 單位；當 $c<0$，$y=\sin(x+c)$ 的位置是 $y=\sin x$ 往右移 c 單位。

4. $y=\sin x$ 與 $y=\sin x+d$ 圖形的關係

(1) 先利用前面的方法繪製 $y=\sin x$ 的圖形。

(2) 利用前面的方式，製作數值滑桿，並在名稱的部分改為「d」，最後以滑鼠左鍵點選「套用」，即會出現數值滑桿 d 如第 57 頁圖 26。

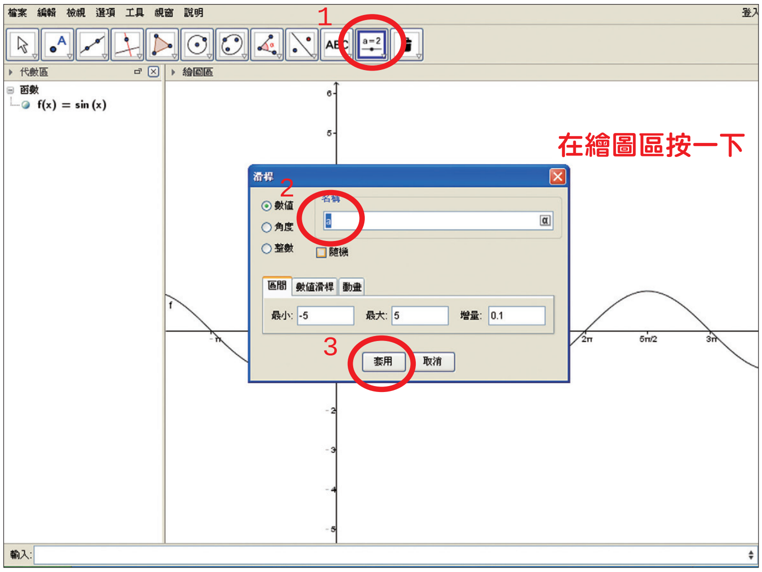


圖 26　設定數值滑桿 d

(3)描繪 $y=\sin x+d$ 的圖形：在下方指令列輸入「$y=\sin x+d$」，按 Enter 鍵。以滑鼠左鍵點選工具列” 移動” 的圖示（參見下圖 27），然後拖曳數值滑桿。

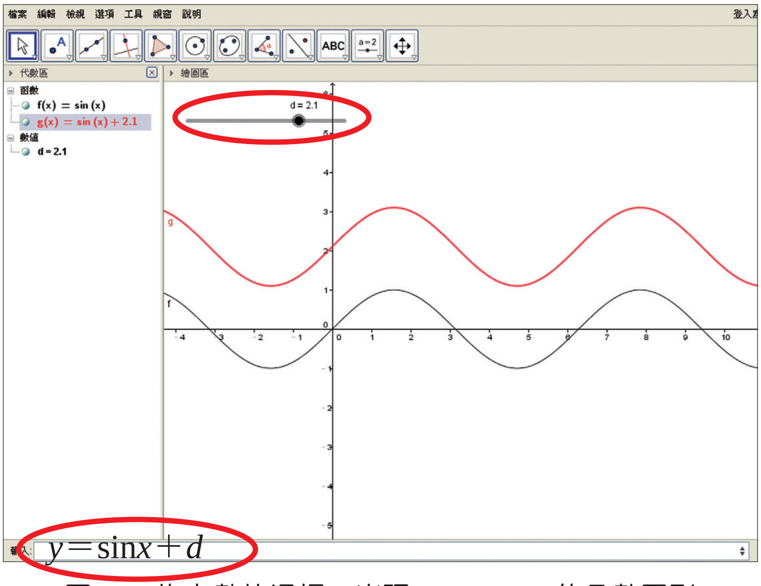


圖 27　拖曳數值滑桿，出現 $y=\sin x+d$ 的函數圖形

拖曳數值滑桿，觀察 $y=\sin x+d$ 與 $y=\sin x$ 的圖形關係，將發現數值 d 影響 $y=\sin x+d$ 的圖形位置，當 $d>0$，$y=\sin x+d$ 的位置是 $y=\sin x$ 往上移 d 單位；當 $d<0$，$y=\sin x+d$ 的位置是 $y=\sin x$ 往下移 d 單位。

附錄三　積分的意義

附錄三將利用 Geogebra 向同學們示範求取正負對稱波形之平均值與有效值的原理及方式（但不涉及微積分的運算）。

我們先利用 Geogebra 描繪 $y=\sin x$ 的圖形，步驟和附錄一的介紹類似，但為求容易理解，我們以 $\frac{\pi}{2}$ 弧度作為 x 軸的間距：

Step 1 將滑鼠游標移至繪圖區並按右鍵，點選「繪圖區」。

Step 2 點選「x 軸」索引標籤，勾選「間距」並於下拉式選單點選 $\frac{\pi}{2}$，關閉對話框，即可將間距改為 $\frac{\pi}{2}$，如圖 28。

Step 3 在指令列輸入「$y=\sin(x)$」，按下 Enter 鍵，即可出現的圖形，如第 59 頁圖 29。

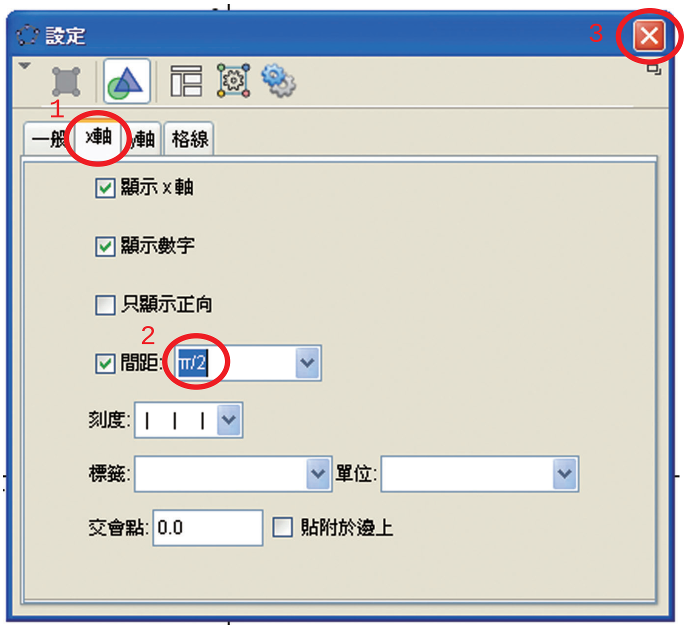


圖 28　變更繪圖區 x 軸的間距

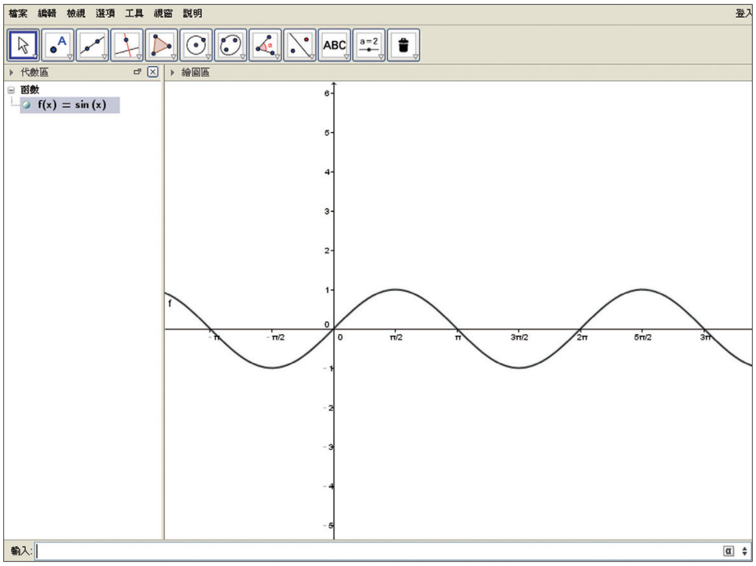


圖 29　Geogebra 繪出 $y=\sin x$ 的圖形

圖 29 中 Geogebra 的繪圖區已經出現了 $y=\sin x$ 的圖形，而代數區中顯示「$f(x)=\sin(x)$」，也就是說 Geogebra 將函數 $y=\sin x$ 的代號預設為 $f(x)$。

接著我們將試著利用在 Geogebra 繪出的圖形來得知它與 x 軸在特定範圍內所圍出的面積。我們先從積分的意義談起。

「積分」的發展源自於人們應用上的需求，例如要計算平面上具有特定規則的曲線（如拋物線、橢圓）或更不規則曲線的區域之面積，或在物理學中要計算位移與施力的累積效果，都可用到積分。

以計算一個平面圖形的面積來說，在國中、國小時我們就已熟知可以利用每邊長為固定單位長的正方形為單位面積來算出規則圖形的面積。如第 60 頁圖 30，矩形的長恰為 7 個單位長、寬恰為 5 個單位長，故面積為 $a\times b=7\times 5=35$ 平方單位，而矩形對角線分割成的兩個三角形面積皆為 $\frac{a\times b}{2}=\frac{35}{2}$ 平方單位。即便是多條線段所圍成的區域，也可分割成多個矩形或三角形，再由這些矩形或三角形的面積和求出區域的面積。

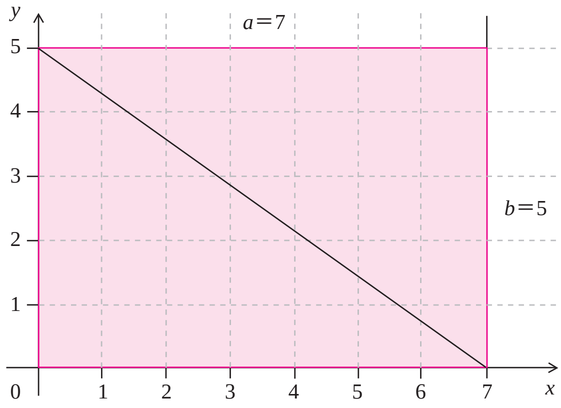


圖 30　利用單位面積的正方形求出矩形或三角形面積

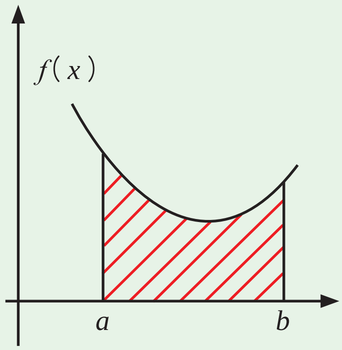
但是當我們面對曲線所包圍的區域時，就可以考慮利用定積分的方式來求得它的面積了。

【定積分的意義】

若 $f(x)$ 是一個在 $a \le x \le b$ 範圍中連續[註1]且函數值非負數的函數，則由 $f(x)$ 的圖形與 x 軸、直線 $x=a$、直線 $x=b$ 所圍成的區域（如下圖斜線區域）面積即為函數 $f(x)$ 由 a 至 b 的定積分[註2]。

註1：有關「連續」的意義，在數學課程中會做詳細介紹，在此暫不多作解釋。

註2：函數 $f(x)$ 由 a 至 b 的定積分可用 $\int_a^b f(x)\,dx$ 表示。



上面提到函數 $f(x)$ 在 $a \le x \le b$ 範圍中函數值非負數，其定積分之值恰為斜線區域的面積，但若函數圖形在 x 軸下方時，其定積分之值變為面積的相反數。

如圖 31，函數 $f(x)$ 在 $a \le x \le b$ 範圍中之值有正有負，當函數圖形在 x 軸上方時（圖中標示『＋』號處），其定積分之值即為該區域的面積；但函數圖形在 x 軸下方時（圖中標示『－』號處），其定積分之值為紅色區域面積的相反數。

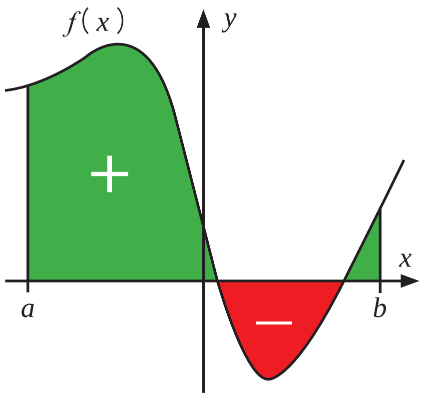


圖 31　函數圖形在x軸下方時，定積分之值與面積互為相反數

以下我們以線性函數的例子來更深刻地認識定積分，並學習利用 Geogebra 求出定積分之值。

如圖 32，函數 $f(x)=\dfrac{1}{2}x+2$ 的圖形與兩軸、直線 $x=4$ 所圍成的區域面積可利用梯形面積公式求得，即函數 $f(x)$ 由 0 至 4 的定積分之值為 $\dfrac{(2+4)\times 4}{2}=12$。

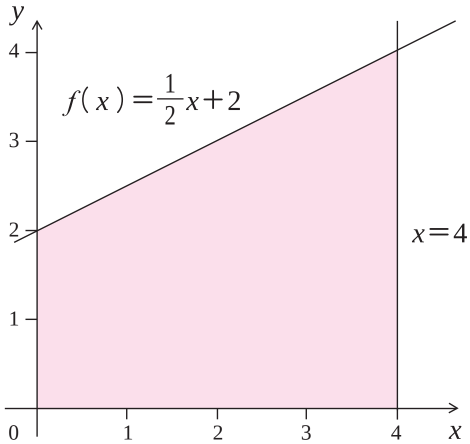


圖 32　函數 $f(x)$ 圖形與兩軸、直線 $x=4$ 所圍面積為 $f(x)$ 由 0 至 4 的定積分

如果要利用 Geogebra 求得上述定積分之值時，方法如下：

在開啟 Geogebra 後，在指令列中輸入「$y=0.5x+2$」並按下 Enter 鍵，即可出現函數圖形，同時代數區中出現直線「$a：y=0.5x+2$」。接著在指令列輸入「Integral [a, 0, 4]」，按下 Enter 鍵。繪圖區中即會顯現出函數圖形與 x 軸、直線 $x=0$（y 軸）、直線 $x=4$ 所圍成的指定區域，同時繪圖區及代數區顯示「$b=12$」，如圖 33，表示定積分的值為 12。

上例的指令「Integral [a, 0, 4]」中 Intergral 就是積分的意思，中括號內的第一個文字 a 即為本例中的函數（即直線 $y=0.5x+2$），第二個數字 0 是指欲求的定積分之起始位置為 $x=0$，第三個文字 4 則是指定積分之結束位置為 $x=4$。

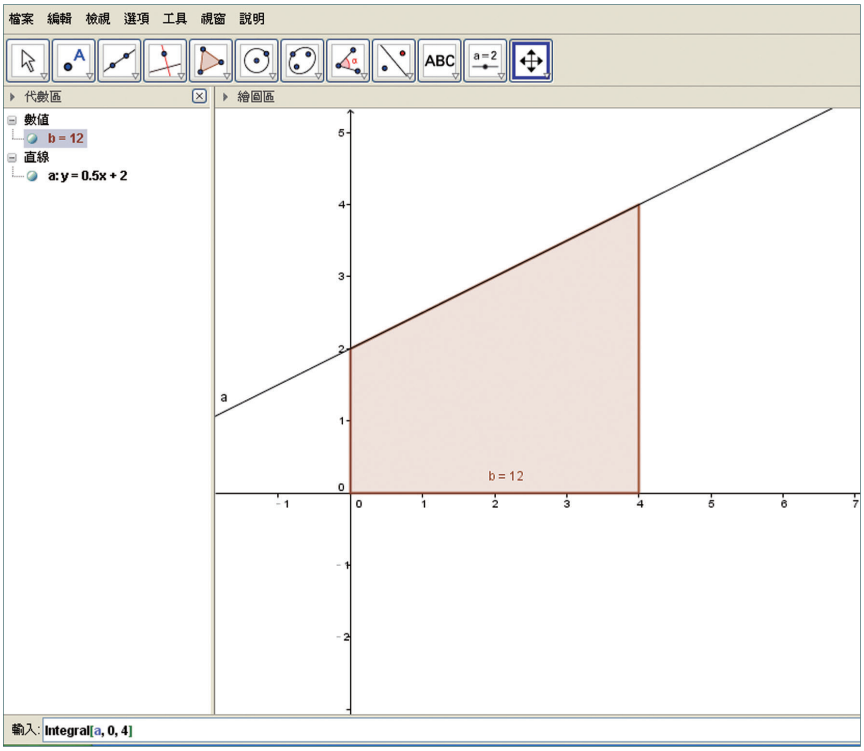


圖 33　用 Geogebra 求函數 $f(x)$ 圖形與兩軸、直線 $x=4$ 所圍的面積

最後我們回到本段落的重點，試著利用 Geogebra 求出正弦函數 $y = \sin x$ 在某段範圍的定積分（或與 x 軸所圍成的區域面積）。

首先開啟 Geogebra，先自行繪出 $y = \sin x$ 的圖形，並設定 x 軸的間距。為 $\frac{\pi}{2}$ 在指令列輸入 Integral [f, 0, pi] ，按下 Enter 鍵。繪圖區中即會顯現出 $y = \sin x$ 與 x 軸所圍成的指定區域，同時繪圖區及代數區顯示「$a = 2$」，如圖 34，表示定積分的值為 2。

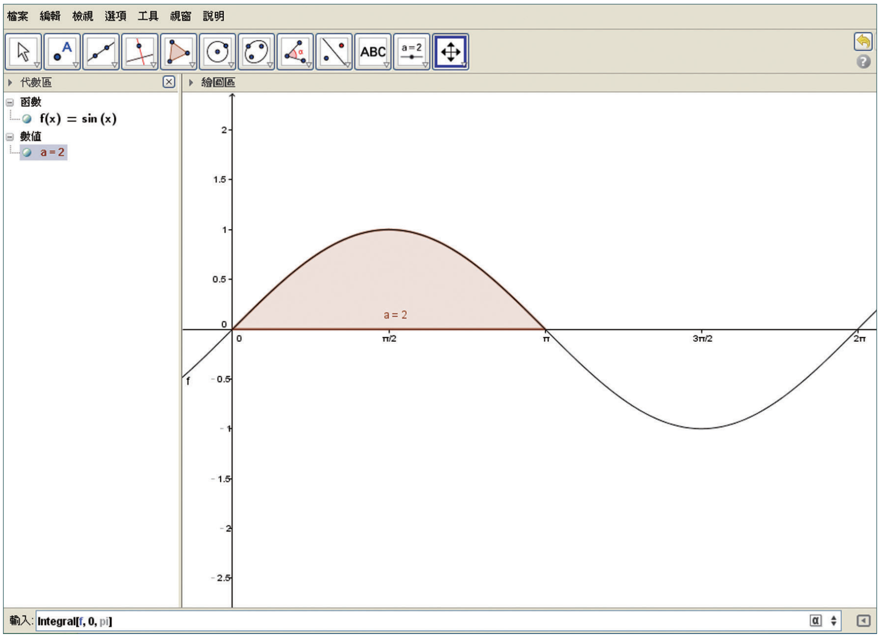


圖 34　函數 $y = \sin x$ 在 $x = 0$ 到 $x = \pi$ 之間的定積分

如同上頁的例子，指令 Integral [f, 0, pi] 中的 Intergral 是積分，中括號內的第一個文字 f 即為函數 $f(x) = \sin x$，第二個數字 0 是指欲求的定積分之起始位置為$x = 0$，第三個文字 pi 則是指定積分之結束位置為 $x = \pi$ 。

我們利用下面的活動及想想看，試著練習使用 Geogebra 求出 $y = \sin x$ 在另一範圍的定積分之值。

活動　利用 Geogebra 求出函數 $y=\sin x$ 在 $x=\pi$ 到 $x=2\pi$ 之間的定積分之值。

我們進行下列步驟以求得定積分之值：

Step 1　先自行繪出 $y=\sin x$ 的圖形，並設定x軸的間距為 $\frac{\pi}{2}$。

Step 2　在指令列輸入 Integral[*f*, *pi*, 2*pi*] ，按下 Enter 鍵。

Step 3　繪圖區中即出現 $y=\sin x$ 與 x 軸所圍成的指定區域，如圖 35。

Step 4　從繪圖區及代數區所顯示的文字「$a=-2$」可知，所求定積分值為-2。

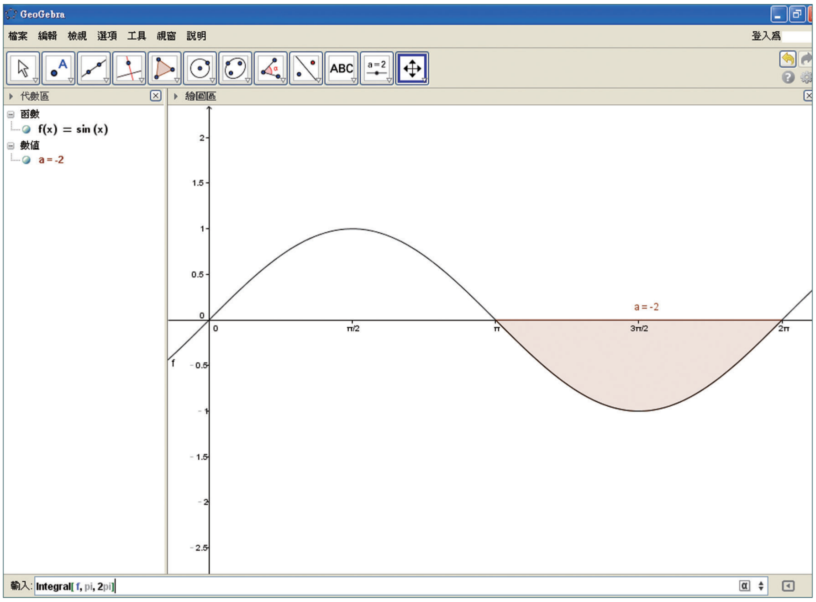


圖 35　函數 $y=\sin x$ 在 $x=\pi$ 到 $x=2\pi$ 之間的定積分

活動　試利用 Geogebra 求函數 $y=\cos x$ 在 $x=0$ 到 $x=\pi$ 間定積分之值。

在認識積分的意義及利用 Geogebra 求取定積分之值後，我們可能更容易理解交流電波形的平均值與有效值是如何求得，請同學參閱本書第二章。

課後作業

1. 試利用 Geogebra 求下列各函數在指定範圍內的定積分之值。

函數	x的範圍	定積分之值
$y=\sin x$	$0\leq x\leq \pi$	2
$y=\sin x$	$\pi\leq x\leq 2\pi$	-2
$y=3x+2$	$0\leq x\leq 2$	
$y=2x^2-1$	$\frac{1}{2}\leq x\leq 2$	
$y=\lvert x\rvert+2$	$-1\leq x\leq 1$	

註：在指令列使用 Integral 指令時，中括號內的第一個文字應依照代數區所顯示的函數代號（如：f、g、h等）輸入。

課後作業解答

1. 10
2. 3.75
3. 5

筆記欄

memo

第七章　技術型高中篇

教學單元

（二）力矩與向量外積

一、阿基米德的機械研究

阿基米德在埃及 亞歷山大城求學時期，有一天在久旱的尼羅河邊散步，看到農民提水澆地十分費力，幾經思考後，他發明了一種利用螺旋作用在水管裡旋轉而把水吸上來的工具，後世的人稱作它為“阿基米德螺旋提水器”（如圖1），埃及一直到二千年後的現在，還有人使用這種器械，這個工具成了後來螺旋推進器的先祖。

圖 1　阿基米德螺旋提水器

當時的歐洲，在工程和日常生活中，經常使用一些簡單機械，譬如：螺絲、滑車、槓桿、齒輪等，阿基米德花了許多時間去研究，發現了「**槓桿原理**」和「**力矩**」的觀念。阿基米德甚至曾說：給他一個支點，他可以舉起整個地球。

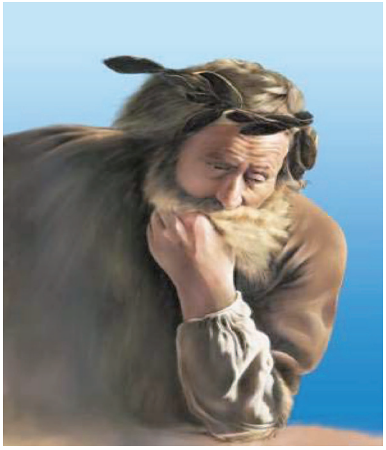


圖 2　沉思的阿基米德

剛好當時的國王希倫二世又遇到了一個棘手的問題，國王替埃及 托勒密王造了一艘船，因為太大太重，船無法放進海裡，國王就對阿基米德說，“你連地球都舉得起來，一艘船放進海裡應該沒問題吧？”於是阿基米德利用「槓桿原理」和「力矩」的概念，立刻巧妙地組合各種機械，造出一架機具，在一切準備妥當後，將牽引機具的繩子交給國王，國王輕輕一拉，大船果然移動下水，國王不得不為這個當時全世界對於機械原理與運用，了解最透徹的阿基米德所懾服。接下來，我們將跟隨著阿基米德的「力矩」的概念，探究阿基米德所不知，隱藏於力矩中的數學概念。

二、物體的轉動

當我們關上房門時，如果以相同的力量及相同角度推門的不同位置，在圖3 中，轉動的效果會相同嗎？

圖 3　以相同的力量及相同角度推門的不同位置

活動 1 【學生分組討論】

⑴在圖 4 中，以同樣力量分別對門 A、B、C、D 不同的四點垂直門面施力，施力在哪一點轉動的效果最為顯著呢？施力在哪一點最不易轉動呢？從最容易轉動到最不容易轉動，依序的施力位置是什麼？

答：

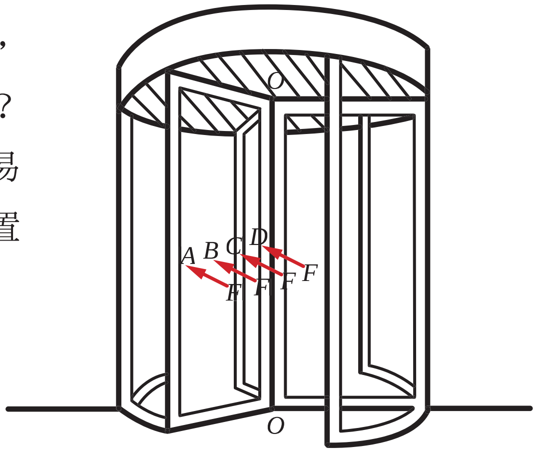


圖 4　不同的施力點對門施相同的力，轉動效果會不同

⑵在圖 4 中，若以不同力量，對 A 點施力時，究竟是力量越大，轉動的效果最為顯著？還是力量越小，效果越顯著呢？

答：

(3)在圖 5 中，若以同樣的力量，不同的方向對 A 點施力時，究竟 a、b、c、d 哪一種情況轉動的效果最為顯著呢？

答：

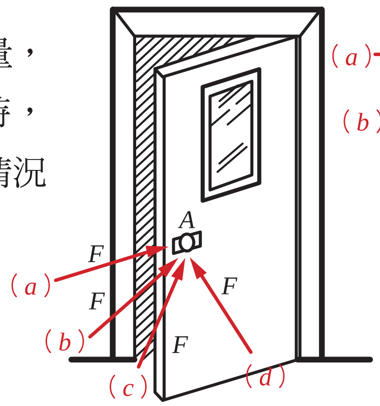


圖 5-1（正面圖）

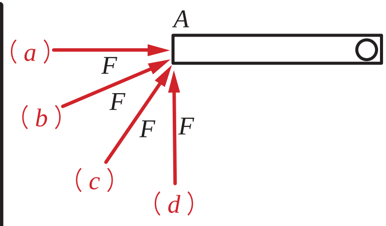


圖 5-2（俯視圖）

以相同的力量，但與門面夾角不同，轉動效果會不同

(4)由前面(1)(2)(3)的討論中，可否整理出影響轉動效果的因素有那些呢？

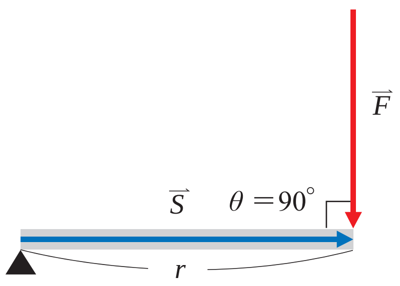
答：

在上面的敘述中，使物體轉動的傾向，在物理上稱為**力矩**(moment，torque)。

三、回顧「力矩」

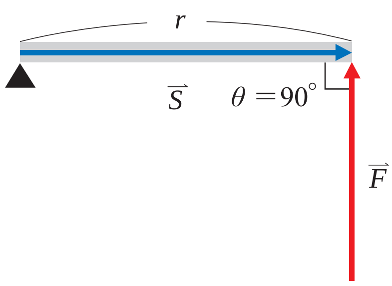
讓我們回憶一下，國中理化學過的力矩。如上一頁圖 5，施力與門面夾角不同，轉動效果會有不同，力矩依轉動方向不同又可分為哪些方向呢？

下圖 6-1 到圖 6-6 是施力與門面夾角不同，所導致轉動效果不同的力矩圖。



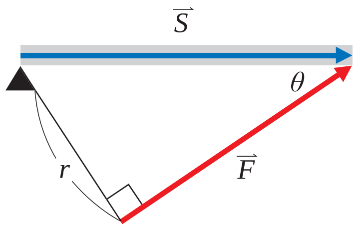
力矩大小（M）＝力臂（r）×力（F）

圖 6-1



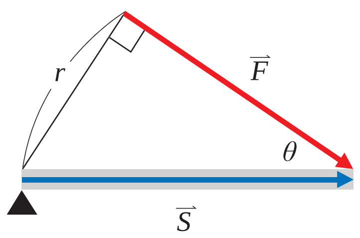
力矩大小（M）＝力臂（r）×力（F）

圖 6-2



力矩大小（M）＝力臂（r）×力（F）

圖 6-3



力矩大小（M）＝力臂（r）×力（F）

圖 6-4

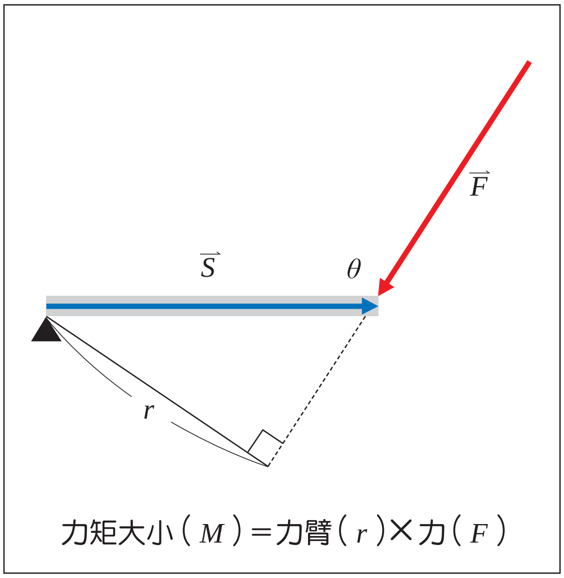


圖 6-5

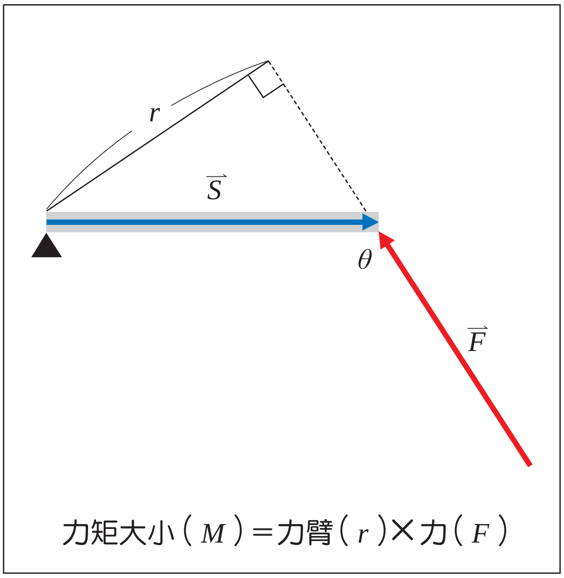


圖 6-6

圖 6 中的力（F）指「施力 $\vec{F}$ 的大小，即 $|\vec{F}|$」，力臂（r）指的是「施力到支點的垂直距離」，$\vec{S}$ 指的是由支點到施力點的向量。由上圖可知，當施力大小相同時，力臂愈大，力矩的大小愈大。

練習 1

試問圖 6-1~圖 6-6 有哪些力矩轉動的方向是順時針旋轉的力矩？哪些是逆時針旋轉的力矩？

答：

練習 2

在圖 6-1~圖 6-6 中，當由支點到施力點的向量 $\vec{S}$ 大小皆相同，而且施力 $\vec{F}$ 的大小相同且施力於同一點時，我們發現力矩的大小與力臂 r 有關，請問力臂 r 的大小又與何者有關呢？

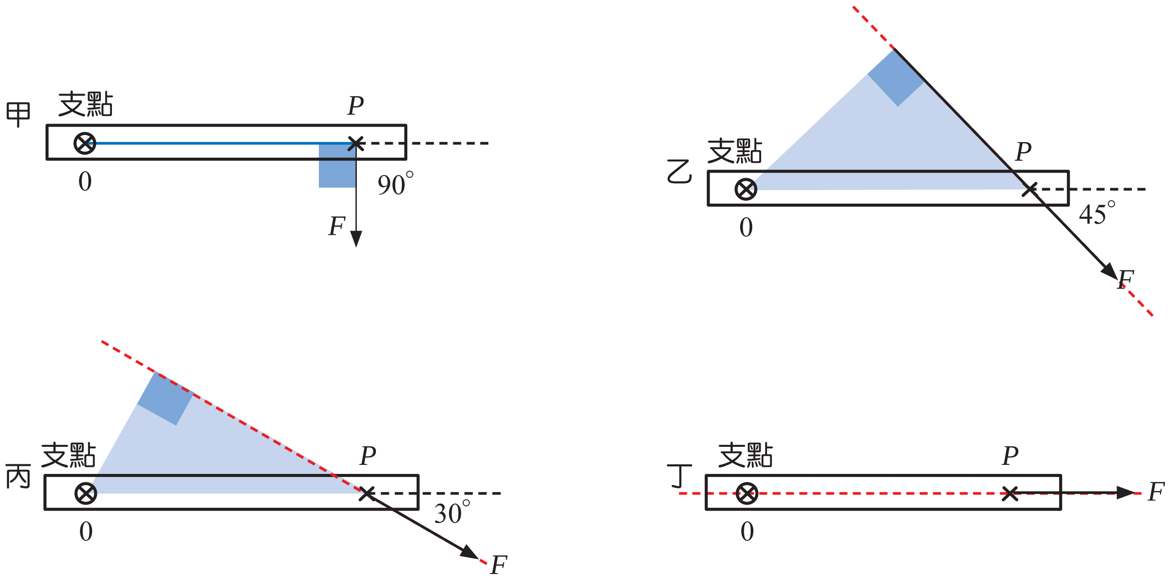
答：

練習 3

在下面甲、乙、丙、丁四個圖中，為同一個槓桿分別以不同方向但相同大小的力 F 作用於 P 點，若 $\overline{OP}=d$ 公尺，請回答下列問題：

(1)請以作圖法，求出甲、乙、丙、丁四個圖中的力臂之大小。

答：甲：__________；乙：__________；丙：__________；丁：__________。



(2)請列出甲、乙、丙、丁四個圖中力矩大小之計算式？

答：甲：__________（　　時針旋轉）；乙：__________（　　時針旋轉）；

丙：__________（　　時針旋轉）；丁：__________。

想一想

由上面的討論得知，力矩包含大小與方向（順時針、逆時針方向）兩個要素，在之前學過的高職數學課程中，哪一個概念可以同時表示「大小」及「方向」？

四、以向量表示力矩

力臂大小

在前面圖 6-1~圖 6-6，由支點到施力點的向量若為 $\vec{S}$，讓我們想一想「$\vec{S}$ 與力臂 r 有何關係？」在圖 7 中，我們不難發現，在以長度 $|\vec{S}|$ 為斜邊的直角三角形中（因為是向量大小，所以以符號 $|\vec{S}|$ 表示），力臂 r 恰為角 α 的對邊，即力臂 $r=|\vec{S}|\sin\alpha=|\vec{S}|\sin(180^\circ-\theta)=|\vec{S}|\sin\theta$

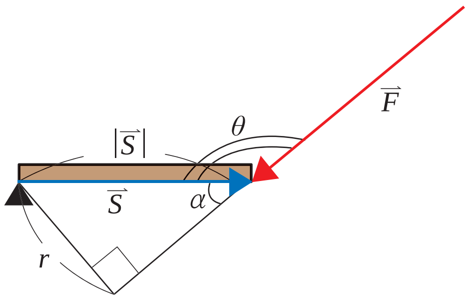


圖 7　支點到施力點的向量 $\vec{S}$ 與力臂 r 的關係

力矩的大小

由前面的討論可知：國中理化學過的力矩需考慮大小與方向，因此它是個向量；並且施力 $\vec{F}$ 是向量，支點到施力點的向量 $\vec{S}$ 也是向量，那麼在數學上該如何表示這兩個向量 $\vec{F}$ 與 $\vec{S}$ 之間的運算關係呢？

上面的討論中，若支點到施力點的向量為 $\vec{S}$，可得力臂 $r=|\vec{S}|\sin\theta$。

因此　**力矩 $\vec{M}$ 的大小** $|\vec{M}|=$**力臂**$(r)\times$**力**$(F)=|\vec{S}|\sin\theta\,|\vec{F}|=|\vec{S}||\vec{F}|\sin\theta$

向量的夾角

空間向量的夾角：對於兩個非零向量 $\overrightarrow{a}$ 和 $\overrightarrow{b}$ ，我們可以將它們平移，使其**始點重合**，此時在兩向量 $\overrightarrow{a}$ 和 $\overrightarrow{b}$ 所張的三角形所在平面中，$\overrightarrow{a}$ 和 $\overrightarrow{b}$ 形成的夾角 θ（$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$），如圖 8，稱為 $\overrightarrow{a}$ 和 $\overrightarrow{b}$ 的夾角．

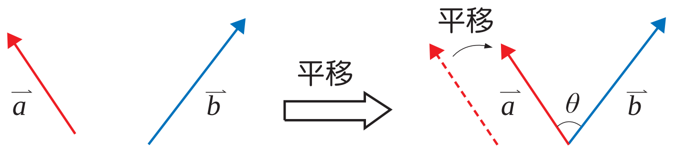


圖 8　向量的夾角

練習

在下圖 9 中，請平移向量後畫出支點到施力點的向量 $\overrightarrow{S}$ 與施力 $\overrightarrow{F_1}$ 、$\overrightarrow{F_2}$ 、$\overrightarrow{F_3}$ 、$\overrightarrow{F_4}$ 的夾角 θ_1、θ_2、θ_3、θ_4 ？

答：

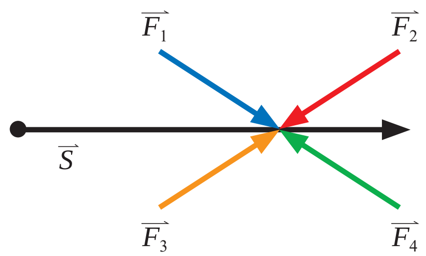


圖 9

力矩的方向

如果以施力 $\overline{F}$ 推動門邊造成轉動時，可能形成逆時針旋轉的力矩（如下圖10-1）或順時針旋轉的力矩（如下圖10-2），為計算施力 $\overline{F}$ 與從支點到施力點向量 $\overline{S}$ 的夾角，我們通常將 $\overline{F}$ 平移，使其與 $\overline{S}$ 的始點重合，此時在兩向量 $\overline{F}$ 和 $\overline{S}$ 所張的三角形所在平面中，可得 $\overline{F}$ 和 $\overline{S}$ 的夾角為 θ 。根據物理的定義，力矩的方向：逆時針旋轉為正，順時針旋轉為負。而我們發現，當右手除了大拇指外的其他四指從向量 $\overline{S}$ 旋轉至向量 $\overline{F}$ 時，大拇指所指的方向若朝上，在物理中稱為「正向」，即為逆時針旋轉；大拇指所指的方向若朝下，在物理中稱為「負向」，即為順時針旋轉。這恰符合力矩的方向，如此利用右手大拇指的方向決定力矩的方向稱為右手定則，如圖10；而且力矩 $\overline{M}$ 的方向與向量 $\overline{F}$ 的方向垂直，也與向量 $\overline{S}$ 的方向垂直。

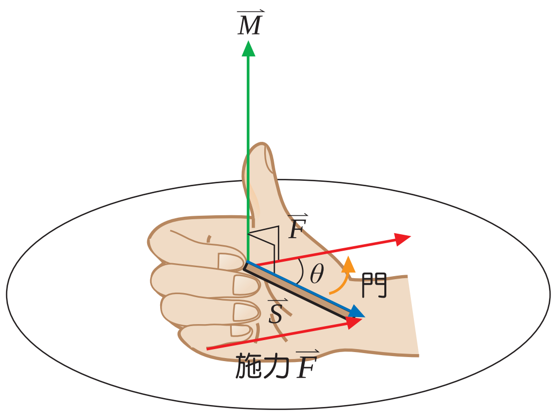


圖 10-1　逆時針轉的力矩為正

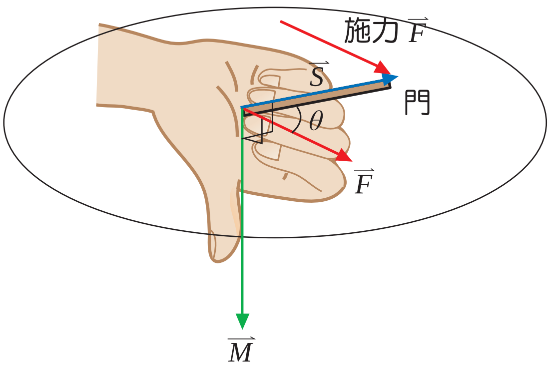


圖 10-2　順時針轉的力矩為負

圖 10-1~10-2　以右手定則決定力矩的方向

【向量表示力矩】

力矩：物體受力後轉動難易程度的物理量，稱為力矩，其具有大小與方向。

力矩 $\overline{M}$ 的大小：$|\overline{M}|$ ＝力臂×力＝ $|\overline{S}||\overline{F}|\sin\theta$

（其中 $\overline{S}$ 為支點到施力點的向量，$\overline{F}$ 為力，$\overline{F}$ 和 $\overline{S}$ 的夾角為 θ ）

力矩的方向：由 $\overline{S}$ 旋轉至 $\overline{F}$，依照右手定則來決定，且力矩 $\overline{M}$ 的方向與 $\overline{S}$、$\overline{F}$ 的方向皆垂直。

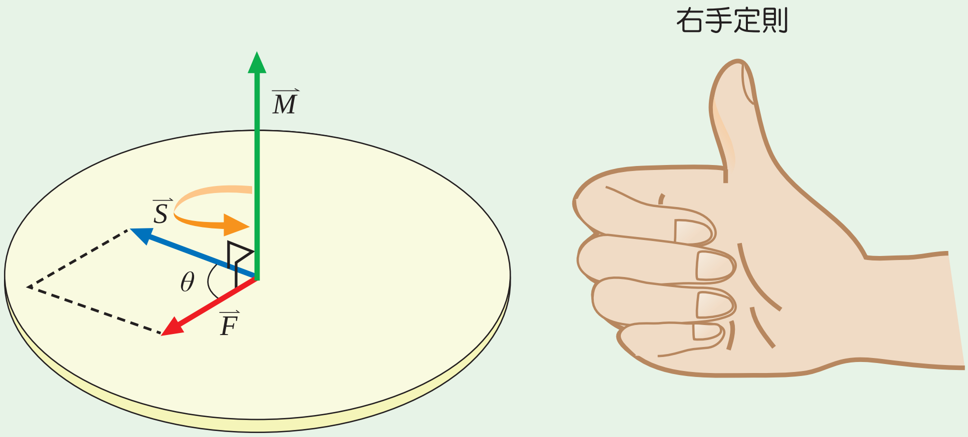


圖 11　利用右手定則決定力矩的方向

力矩是個有大小、有方向的物理量，用數學的語言來說，力矩就是一個向量，它來自於兩個向量 $\overline{S}$ 與 $\overline{F}$ 之間的運算，在數學上，這樣的運算關係記作：力矩 $\overline{M}=\overline{S}\times\overline{F}$ 。

不同於之前所學過的內積運算（功 $W=\overline{S}\cdot\overline{F}=|\overline{S}||\overline{F}|\cos\theta$ ）是只有大小的純量，並沒有方向性；力矩是有大小、有方向的向量，在力矩的運算中我們以符號「×」來區別它與內積運算的不同，並且稱這樣的運算關係 $\overline{S}\times\overline{F}$ 為向量 $\overline{S}$ 與 $\overline{F}$ 的「外積」。

五、兩向量外積的意義

$\overline{S}$ 與 $\overline{F}$ 兩個向量的乘法 $\overline{S}\times\overline{F}$ ，在數學上稱為**外積**。由前面可知外積的結果是一個向量，且比照力矩的運算，定義空間中兩向量的外積運算如下：

【向量的外積】

若空間中兩向量 $\overline{a}$ 與 $\overline{b}$ 的夾角為 θ（$0^\circ \le \theta \le 180^\circ$ ），

則 $\overline{a}$ 與 $\overline{b}$ 的外積記做 $\overline{a}\times\overline{b}$

$\overline{a}\times\overline{b}$ **外積的大小**為 $|\overline{a}\times\overline{b}| = |\overline{a}||\overline{b}|\sin\theta$ ，

$\overline{a}\times\overline{b}$ **外積的方向**由 $\overline{a}$ 旋轉至 $\overline{b}$ ，依照右手定則所決定（請參考圖 11）。

且 $\overline{a}\times\overline{b}$ 的方向與 $\overline{a}$ 、$\overline{b}$ 的方向皆垂直。

活動 2 【 學生分組討論 】

(1) $\overline{a}\times\overline{b}$ 與 $\overline{b}\times\overline{a}$ 是否相等？

答：

(2)若 $\overline{a}$ 與 $\overline{b}$ 是平行的兩向量，外積 $\overline{a}\times\overline{b}$ 的結果是甚麼呢？

答：

【力矩原理】

力矩原理：幾個作用力施加於某位置所產生的力矩的總和，等於這些作用力的合力所產生的力矩。

即：若 $\overrightarrow{F_1}$ 與 $\overrightarrow{F_2}$ 的合力為 $\overrightarrow{F}$（也就是 $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{F}$），點 O 為支點，E 為施力點，支點到施力點的向量為 $\overrightarrow{S}$，

則 $\overrightarrow{S}\times\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{S}\times\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{S}\times\overrightarrow{F}$

說明：如圖 12，若施力 $\overrightarrow{F}$、$\overrightarrow{F_1}$、$\overrightarrow{F_2}$ 與支點到施力點的向量 $\overrightarrow{S}$ 之夾角分別為 θ、θ_1、θ_2；施力 $\overrightarrow{F}$、$\overrightarrow{F_1}$、$\overrightarrow{F_2}$ 的對於點E的垂直距離，也就是力臂，分別為 r、r_1、r_2，

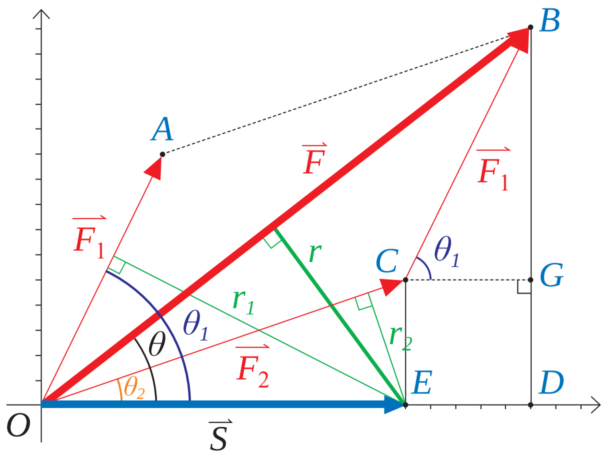


圖 12　力矩原理

由 $\overline{BD}=\overline{BG}+\overline{GD}$，可得 $|\overrightarrow{F}|\sin\theta=|\overrightarrow{F_1}|\sin\theta_1+|\overrightarrow{F_2}|\sin\theta_2$

（等式兩邊同乘以 $|\overrightarrow{S}|$）$|\overrightarrow{S}||\overrightarrow{F}|\sin\theta=|\overrightarrow{S}||\overrightarrow{F_1}|\sin\theta_1+|\overrightarrow{S}||\overrightarrow{F_2}|\sin\theta_2\cdots(1)$

即 $|\overrightarrow{S}\times\overrightarrow{F}|=|\overrightarrow{S}\times\overrightarrow{F_2}|+|\overrightarrow{S}\times\overrightarrow{F_1}|$

由圖中亦可發現 $\overrightarrow{S}$ 對於合力 $\overrightarrow{F}$ 所產生的力矩方向和 $\overrightarrow{S}$ 與分力 $\overrightarrow{F_1}$、$\overrightarrow{F_2}$ 所產生的力矩方向相同。即 $\overrightarrow{S}\times\overrightarrow{F}=\overrightarrow{S}\times\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{S}\times\overrightarrow{F_2}$

同理，將 $\overrightarrow{F}$ 分為多個分力時，亦可得相同之結論；或是將 $\overrightarrow{S}$ 分解為多個支點到施力點的向量之和，亦可得相同之結論。

亦即：對於任意空間向量 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$、$\overrightarrow{d}$ 外積對加法的分配律均成立，即 $\overrightarrow{a}\times(\overrightarrow{c}+\overrightarrow{d})=\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{c}+\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{d}$ 以及 $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\times\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{c}+\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}$。

並可得 $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\times(\overrightarrow{c}+\overrightarrow{d})=\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{c}+\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{d}+\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}+\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{d}$。

六、向量的外積的性質

對於任意空間向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$，若向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 之夾角為 θ，則向量的外積具有以下性質：

(1) $\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$

說明：由外積定義可知。

(2) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$

說明：由力矩原理可知。

(3) $(m\vec{a})\times\vec{b}=m(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\times(m\vec{b})$，其中 m 為任意實數

說明：

①若 $m>0$，$(m\vec{a})\times\vec{b}$ 外積的大小

$=|(m\vec{a})\times\vec{b}|=|m\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$

$=|m||\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=|m||\vec{a}\times\vec{b}|$

外積的方向：由於此時 $m\vec{a}$ 與 $\vec{a}$ 方向相同，故依右手定則，$m\vec{a}\times\vec{b}$ 的方向與 $\vec{a}\times\vec{b}$ 的方向相同（如圖 13），亦與 $m(\vec{a}\times\vec{b})$ 的方向相同。即此時 $m\vec{a}\times\vec{b}=m(\vec{a}\times\vec{b})$

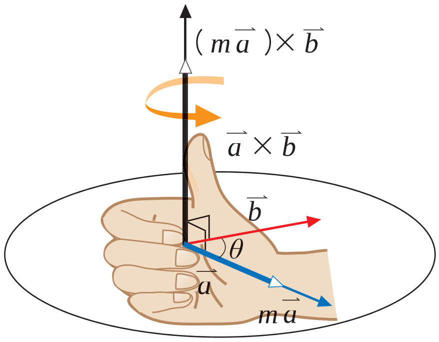


圖 13　$m>0$ 時，$(m\vec{a})\times\vec{b}$ 與 $\vec{a}\times\vec{b}$ 的方向相同

②若 $m<0$，$(m\vec{a})\times\vec{b}$ 外積的大小

$=|(m\vec{a})\times\vec{b}|=|m\vec{a}||\vec{b}|\sin(\pi-\theta)$

$=|m||\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=|m||\vec{a}\times\vec{b}|$

外積的方向：由於此時 $m\vec{a}$ 與 $\vec{a}$ 方向相反，故依右手定則，$(m\vec{a})\times\vec{b}$ 的方向與 $\vec{a}\times\vec{b}$ 的方向相反（如圖 14）；又 $m<0$，故 $m(\vec{a}\times\vec{b})$ 的方向與 $\vec{a}\times\vec{b}$ 的方向亦相反。

也就是說 $m\vec{a}\times\vec{b}$ 的方向與 $m(\vec{a}\times\vec{b})$ 的方向相同。即此時 $m\vec{a}\times\vec{b}=m(\vec{a}\times\vec{b})$

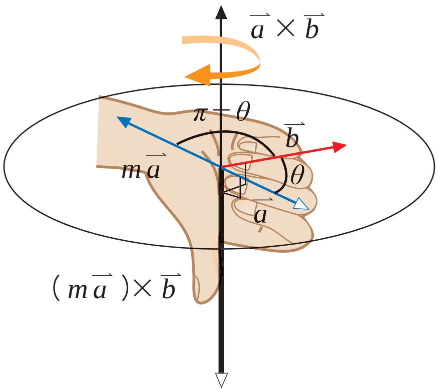


圖 14　$m<0$ 時，$(m\vec{a})\times\vec{b}$ 與 $\vec{a}\times\vec{b}$ 的方向相反

③若 $m=0$，$(m\overrightarrow{a})\times\overrightarrow{b}$ 外積的大小 $=0=|m|\left|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right|$

即 $(m\overrightarrow{a})\times\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0}$ 且 $m(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})=\overrightarrow{0}$。

故 $m\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=m(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})=\overrightarrow{0}$

由①②③可知：若 m 為任意實數，

$m\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=m(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})$。

同理可得 $\overrightarrow{a}\times(m\overrightarrow{b})=m(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})$。

(4)若 $\overrightarrow{a}\,/\!/\,\overrightarrow{b}$，則 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0}$

說明：由外積定義可知。

(5)若 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 為不平行的兩非零向量，$(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\perp\overrightarrow{a}$ 且 $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\perp\overrightarrow{b}$。

即 $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})$ 為 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的公垂向量。

說明：由外積定義可知。

七、外積的分量表示法

在數學及較高深的物理運算時，我們習慣將向量以分量表示法（又稱坐標表示法）來簡化運算，那麼外積又要如何用分量表示法來表示呢？

活動3 【學生分組討論】

我們考慮先前所學到的空間基底單位向量 $\overrightarrow{i}=(1,0,0)$、$\overrightarrow{j}=(0,1,0)$、$\overrightarrow{k}=(0,0,1)$，如圖15，根據外積運算，並且利用右手定則，想想看下面各式的結果？

(1) $\overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j}=$ ______　(2) $\overrightarrow{j}\times\overrightarrow{k}=$ ______　(3) $\overrightarrow{k}\times\overrightarrow{i}=$ ______

(4) $\overrightarrow{j}\times\overrightarrow{i}=$ ______　(5) $\overrightarrow{k}\times\overrightarrow{j}=$ ______　(6) $\overrightarrow{i}\times\overrightarrow{k}=$ ______

(7) $\overrightarrow{i}\times\overrightarrow{i}=$ ______　(8) $\overrightarrow{j}\times\overrightarrow{j}=$ ______　(9) $\overrightarrow{k}\times\overrightarrow{k}=$ ______

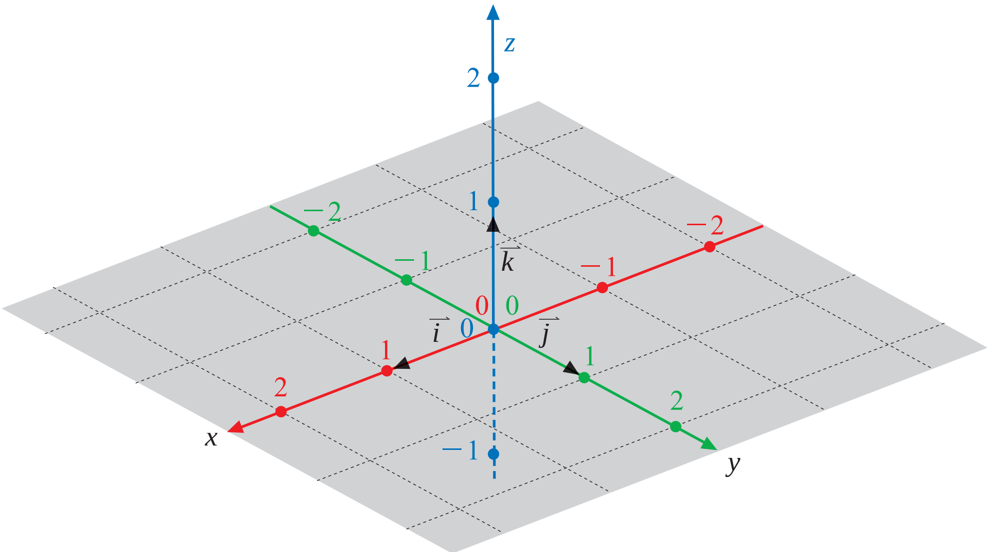


圖 15　空間的基底向量

若有兩向量 $\vec{a}=(a_1，a_2，a_3)$、$\vec{b}=(b_1，b_2，b_3)$，我們將兩向量分別改寫為 $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$、$\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$，若 $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$，配合前面的右手定則及向量外積對加法的分配律。可得

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})\times(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k})$$

$$=\vec{0}+a_1b_2\vec{k}-a_1b_3\vec{j}-a_2b_1\vec{k}+\vec{0}+a_2b_3\vec{i}+a_3b_1\vec{j}-a_3b_2\vec{i}+\vec{0}$$

$$=(a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}$$

$$=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\vec{k}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

$$=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)=(a_2b_3-a_3b_2，a_3b_1-a_1b_3，a_1b_2-a_2b_1)$$

【向量的外積】

若兩向量 $\vec{a}=(a_1，a_2，a_3)$、$\vec{b}=(b_1，b_2，b_3)$ 之夾角為 $\theta(0^\circ\le\theta\le180^\circ)$。

則 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的外積 $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$

$$=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)=(a_2b_3-a_3b_2，a_3b_1-a_1b_3，a_1b_2-a_2b_1)$$

其中 $\vec{i}=(1，0，0)$、$\vec{j}=(0，1，0)$、$\vec{k}=(0，0，1)$ 為空間的基底單位向量

外積 $\vec{a}\times\vec{b}$ 的大小： $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$

外積 $\vec{a}\times\vec{b}$ 的方向： 由 $\vec{a}$ 旋轉至 $\vec{b}$，依照右手定則所決定。

例題 1

已知向量$\overrightarrow{a}=(1，0，1)$，$\overrightarrow{b}=(2，-2，1)$，求$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$與$\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}$之值

答：$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & -2 & 1\end{vmatrix}=2\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-2\overrightarrow{k}=(2，1，-2)$

$\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 2 & -2 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=-2\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}=(-2，-1，2)$

練習 1

已知向量$\overrightarrow{a}=(1，2，-2)$，$\overrightarrow{b}=(2，1，2)$，求

(1)$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$　(2)$\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}$　(3)試問(1)與(2)外積結果有何異同之處？

答：

例題 2

如圖 16，小華使用板手旋轉螺帽，若以螺帽重心的支點作為空間坐標系的原點，可得支點到施力點的向量 $\overline{S}=(-2，4，-4)$，力 $\overline{F}=(2，1，-2)$，求小華使用板手產生的力矩 $\overline{M}$ = ？力矩 $\overline{M}$ 的大小是多少？力矩 $\overline{M}$ 的方向是朝向何處？力矩 $\overline{M}$ 是否會與施力 $\overline{F}$ 或支點到施力點的向量 $\overline{S}$ 垂直？

答：(1) $\overline{M}=\overline{S}\times\overline{F}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ -2 & 4 & -4\\ 2 & 1 & -2\end{vmatrix}=-4\overline{i}-12\overline{j}-10\overline{k}=(-4，-12，-10)$

(2) 力矩大小 $|\overline{M}|=\sqrt{(-4)^2+(-12)^2+(-10)^2}=2\sqrt{65}$

(3) 力矩的方向朝向圖中的左下（順時針旋轉）

(4) 可利用內積判斷力矩 $\overline{M}$ 是否與施力 $\overline{F}$ 或支點到施力點的向量 $\overline{S}$ 垂直：

$\overline{M}\cdot\overline{F}=(-4，-12，-10)\cdot(2，1，-2)$

$=(-8)+(-12)+20=0$

$\overline{M}\cdot\overline{S}=(-4，-12，-10)\cdot(-2，4，-4)$

$=8+(-48)+40=0$

由內積為 0，可判斷力矩 $\overline{M}$ 與施力 $\overline{F}$ 垂直，力矩 $\overline{M}$ 與支點到施力點的向量 $\overline{S}$ 亦垂直。

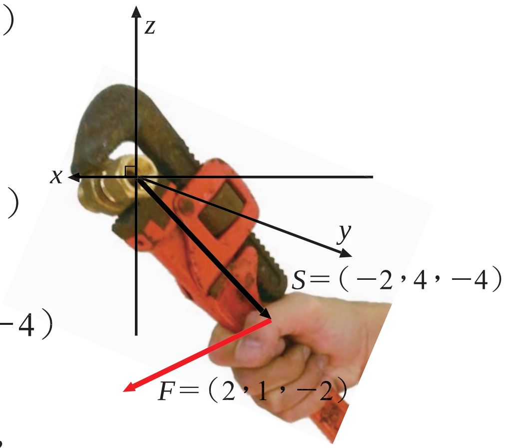


圖 16　板手旋轉螺帽

練習 2

如圖17，小明使用六角板手旋轉螺帽，若以六角板手直角轉彎處支點作為空間坐標系的原點，可得支點到施力點的向量 $\overline{S}=(6，2，-3)$，力 $\overline{F}=(3，4，-1)$，求小明使用板手產生的力矩 $\overline{M}$ = ？又力矩的大小是多少？

答：

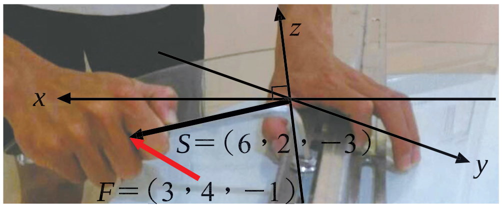


圖 17　六角板手旋轉螺帽

八、平行六面體體積

若兩向量 $\vec{a}=(a_1，a_2，a_3)$、$\vec{b}=(b_1，b_2，b_3)$ 之夾角為 θ，向量 $\vec{c}=(c_1，c_2，c_3)$，可得以下面積與體積的關係：

(1) 由 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 所張之平行四邊形面積為 $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$

說明：

如圖18，外積 $\vec{a}\times\vec{b}$ 的大小 $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\theta$

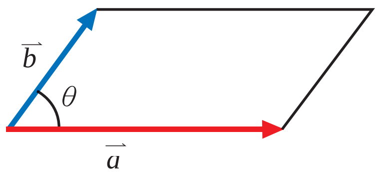


圖 18　由 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 所張之平行四邊形為 $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$

(2) $$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

說明：

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}\cdot\vec{c}$$

$$=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\vec{k}\right)\cdot(c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k})$$

$$=c_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}-c_2\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}+c_3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

(3)由 $\vec{a}$ 、$\vec{b}$ 、$\vec{c}$ 所張之平行六面體體積為 $\left|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\right|=\left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\right|$

由上述(1)，圖 19 中平行六面體底面積為 $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$

設 $\vec{a}\times\vec{b}$ 與 $\vec{c}$ 的夾角為 α ，

則平行六面體的高為 $\left|\vec{c}\right|\left|\cos\alpha\right|$

平行六面體體積為底面積×高 $=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{c}\right|\left|\cos\alpha\right|$

$=\left|\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{c}\right|\cos\alpha\right|=\left|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\right|$

$=\left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\right|$

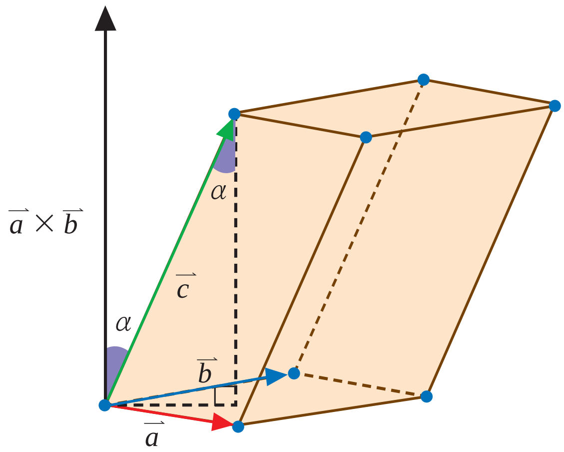


圖 19　由 $\vec{a}$ 、$\vec{b}$ 、$\vec{c}$ 所張之平行六面體

想一想

若以 $\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|$ 或是 $\left|\vec{c}\times\vec{a}\right|$ 為平行六面體底面積，則由 $\vec{a}$ 、$\vec{b}$ 、$\vec{c}$ 所張之平行六面體體積要如何表示？其結果與(3)的計算結果會相同嗎？為什麼？

例題 3

如圖 20，已知 $A(-1，2，2)$、$B(0，1，1)$、$D(-3，-1，4)$、$E(-4，6，8)$，*ABCD-EFGH* 為一平行六面體，請問平行四邊形 *ABCD* 面積為多少？平行六面體 *ABCD-EFGH* 體積為多少？

答：

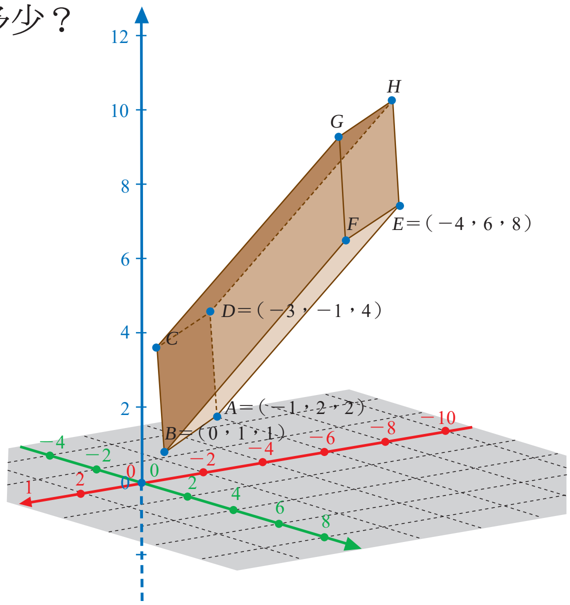


圖 20

(1) $\overrightarrow{AB}=(1，-1，-1)$，

$\overrightarrow{AD}=(-2，-3，2)$

平行四邊形 *ABCD* 面積＝$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|$

$$=\left|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & -1\\ -2 & -3 & 2\end{vmatrix}\right|=\left|-5\vec{i}-5\vec{k}\right|$$

$$=\left|(-5，0，-5)\right|=5\sqrt{2}$$

(2) $\overrightarrow{AE}=(-3，4，6)$

平行六面體 *ABCD-EFGH* 體積＝$\left|\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ -2 & -3 & 2\\ -3 & 4 & 6\end{vmatrix}\right|=15$

練習 3

由向量 $\vec{a}=(1，1，-1)$、$\vec{b}=(1，-1，1)$、$\vec{c}=(-1，1，1)$ 所張之平行六面體體積為多少？由向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 所張之三角形面積為多少？

答：

學 習 單

1. 已知向量 $\vec{a}=(1，2，3)$，$\vec{b}=(2，-1，2)$，求

⑴ $-\vec{a}\times\vec{b}$　⑵ $-\vec{b}\times\vec{a}$　⑶試問⑴與⑵外積結果的有何異同之處？

⑷找出 3 個以上與 $\vec{a}\times\vec{b}$ 大小相同，方向相反的外積運算。

2. 已知向量 $\vec{a}=(1，2，3)$，$\vec{b}=(2，-1，2)$，求

⑴ $2\vec{a}\times\vec{b}$　⑵ $\vec{a}\times(-2\vec{b})$　⑶試問⑴與⑵外積結果的有何異同之處？為什麼？

3. 若 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 為非零向量，且 $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$，則

⑴ $\vec{a}\times\vec{b}$　⑵ $\vec{a}\times\vec{a}$　⑶試由力矩概念解釋前兩小題外積結果。

4. 若$\overrightarrow{a}$為零向量，$\overrightarrow{b}$不為零向量，則(1)$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ (2)試由力矩概念解釋外積結果。

5. 已知向量$\overrightarrow{n}$和$\overrightarrow{a}=(2，-1，0)$，$\overrightarrow{b}=(4，-1，-1)$均垂直，且$\left|\overrightarrow{n}\right|=6$，求$\overrightarrow{n}$。

6. 已知向量$\overrightarrow{n}$和$\overrightarrow{a}=(2，2，1)$與$\overrightarrow{b}=(1，0，1)$均垂直，且$\left|\overrightarrow{n}\right|=3$，求$\overrightarrow{n}$。

7. 設向量$\overrightarrow{u}=(2，1，-1)$，$\overrightarrow{v}=(1，3，3)$，設$\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{v}$，且$\overrightarrow{a}=(6，p，q)$，則數對$(p，q)=$__________。

8. 在空間坐標系上有四點分別為$O(0，0，0)$、$A(3，5，-1)$、$B(2，0，4)$、$C(-1，0，1)$，試問三向量$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$所張之平行六面體體積為多少？以向量$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$為兩邊的三角形面積為多少？

筆記欄

memo

國家圖書館出版品預行編目（CIP）資料

十二年國教數學素養導向課程設計與教學案例 / 十二年國民基本教育數學素養教材研發編輯小組編輯；單維彰, 鄭章華主編. -- 初版. --
新北市：國家教育研究院, 民106.06　面；　公分
ISBN 978-986-05-1807-8(平裝)
1.數學教育 2.課程規劃設計 3.中小學教育
523.32　　　106001229

書　　名：十二年國教數學素養導向課程設計與教學案例
發 行 人：許添明
主 編 者：單維彰、鄭章華
編 輯 者：十二年國民基本教育數學素養教材研發編輯小組
編輯小組：王統新、古欣怡、吳汀菱、吳姈蓉、林美曲
林信安、洪瑞英、馬雅筠、高健維、陳吳煜
曾明德、曾俊雄、蔡佩旻、鄧家駿
（依姓氏筆畫順序排列）
執行編輯：江增成、張淑娟、蔡敏冲
（依姓氏筆畫順序排列）
出版機關：國家教育研究院
地　　址：237新北市三峽區三樹路2號
網　　址：http://www.naer.edu.tw
電　　話：(02)7740-7890
傳　　真：(02)7740-7064
出版年月：106年6月
版　　次：初版
定　　價：400元
ISBN：978-986-05-1807-8
GPN：1010600156
電子全文可至國家教育研究院網站 http://www.naer.edu.tw 免費取用

本書經雙向匿名審查通過

政府出版品展售門市

國家書店松江門市
地址：10485臺北市松江路209號1樓
電話：(02)2518-0207
國家網路書店：http://www.govbooks.com.tw

五南文化廣場
地址：40042臺中市中區中山路6號
電話：(04)2226-0330
網址：http://wunanbooks.com.tw

國家教育研究院
National Academy *for* Educational Research
www.naer.edu.tw

ISBN 978-986-05-1807-8　定價：400元
GPN：1010600156