



十二年國民基本教育課程綱要  
國民中小學暨普通型高級中等學校

# 數學領域

• • • •

# 課程手冊

初稿

中華民國一〇六年十二月 (更新第五版)

※本文件為初步稿件，僅提供參考，研發小組將持續調整，並依教育部課程審議會審議完成之課綱進行更新

# 目錄

緣起.....	1
壹、發展沿革與特色.....	2
一、發展沿革.....	2
二、研修特色.....	3
三、新舊課綱差異比較.....	5
貳、課程架構.....	5
一、課程架構規劃說明.....	6
二、高中加深加廣選修、升學與職涯進路關係.....	7
參、核心素養與學習重點的呼應說明.....	12
一、國民小學教育階段.....	12
二、國民中學教育階段.....	13
三、普通型高級中等學校教育階段.....	15
肆、學習重點解析.....	17
一、國民小學教育階段.....	17
二、國民中學教育階段.....	146
三、普通型高級中等學校教育階段.....	244
伍、素養導向教材編寫原則.....	319
一、素養導向教材編寫原則說明.....	319
二、學習表現與學習內容雙向細目表參考示例.....	320
(一)國民小學教育階段.....	320
(二)國民中學教育階段.....	321
(三)普通型高級中等學校教育階段.....	322
陸、數學領域之議題融入說明.....	324
一、融入議題之選擇.....	324
二、議題融入之做法.....	324
三、議題融入之示例說明.....	324
柒、教學單元案例.....	327
一、國小組—三角形與四邊形面積公式的應用.....	327
二、國中組—直角三角形的三角比.....	332
三、高中組—科學記號與 10 的冪次.....	339
捌、新舊課綱之課程實施銜接分析與建議.....	347

一、新舊課綱之課程實施銜接分析 .....	347
二、新舊課綱之課程實施銜接建議 .....	347
<b>玖、實施要點重點說明 .....</b>	<b>349</b>
一、數學差異化教學 .....	349
二、數學奠基活動 .....	350
<b>拾、課綱 Q&amp;A .....</b>	<b>352</b>
<b>附錄一：十二年國教數學領域課程綱要與九年一貫課程差異對照表 .....</b>	<b>357</b>
一、國民小學學習階段 .....	357
二、國民中學學習階段 .....	359
三、高級中等學校學習階段 .....	360
<b>附錄二：數學名詞解釋（暫放九年一貫資料參考） .....</b>	<b>363</b>
<b>附錄三：計算機規格說明 .....</b>	<b>369</b>

## 緣起

民國 103 年公佈之《十二年國民基本教育課程綱要總綱》(以下簡稱總綱)以三面九項核心素養作為連貫各個教育階段課程發展以及引導跨領域課程規劃，揭櫫「適性揚才—成就每一個孩子」為願景，提出「自發、互動、共好」為基本理念，並以「啟發生命潛能、陶養生活知能、促進生涯發展、涵育公民責任」為課程目標，培養學習者進行終身學習所需之知識、技能和態度。而新修訂之「數學領域課程綱要」(以下簡稱數學領綱)本於核心素養導向，期能達成為所有人創造有品質的生活以及為大學學習和職涯發展做好準備。因此，數學領綱研修小組特研訂發展《數學領域課程綱要課程手冊》，依循總綱的願景和理念以及「數學領綱」的重要內涵，解析「數學領綱」之核心素養與學習重點，期能建立完整的課程架構，落實學生適性學習，勾勒高中升學及職涯進路關係，提出教材編選參考與教學實施案例，分析新舊課綱差異，研擬課程銜接建議，以提供各界了解，達成數學領綱之目標。

本課程手冊內容共分為十章，說明如下：

第壹章與第貳章為總論性質，先從研修背景、研修特色與新舊課綱差異三方面，說明數學領綱的發展沿革與特色。接著，介紹課程整體架構，說明第一至第五學習階段之課程架構與規劃理念，以及升學與職涯進路關係，以表格進行分析說明。

第參章到第伍章，就本次領綱最具特色的核心素養與學習重點進行解析。首先說明核心素養與學習重點的呼應，分成國民小學(簡稱國小)、國民中學(簡稱國中)、普通型高級中等學校(簡稱普高)三個教育階段解析核心素養的重要內涵，闡述其與學習重點的對應關係。其次，針對各個教育階段的學習內容深入說明與分析。接著，則是素養導向教材編寫原則，針對素養導向教材編寫提出重要參考原則，並列舉學習表現與學習內容雙向細目表之參考示例輔以說明。

第陸章到第捌章，是教學實踐的相關建議。首先，就數學教學融入性別、人權、環境、海洋等議題的選擇及作法進行說明；再將議題融入數學學習重點之示例說明，以表格形式呈現。其次，是融入素養導向的教學單元案例，包含國小、國中、高中三個教育階段共三個教學單元案例。案例中對於教學設計理念、核心素養、學習重點、議題融入、教學活動設計與評量等內容皆有清晰表述。接著，是針對新舊課綱之課程實施銜接進行分析，於六升七年級、九升十年級的學習銜接上，提出在學習內容的教學實施配套之建議。

第玖章對於數學領綱實施要點項下之「差異化教學」和「奠基活動」提出解釋和說明，具體轉化新課綱「提供所有學生有感的學習機會」之理念。最後一章則是課綱 Q & A，針對社會各界關心數學領綱研修之重要議題，以問題與解答形式進行說明。附錄一為新、舊課綱差異對照表，附錄二為數學名詞解釋。

數學領綱肩負十二年國教的深化與改革，而「課程手冊」對於課程綱要的闡釋、比較分析與教學示例，有助於中小學教師及教科用書編寫者對於數學課程綱要的理解。數學做為工具學科，在十二年國教佔有相當重要的位置，「數學課程手冊」編纂集結眾人智慧，相信有助

於數學領綱理念與內容的溝通和傳播，為十二年國教願景之達成做出貢獻。

## 壹、發展沿革與特色

### 一、發展沿革

我國自從民國 57 年開始實施九年國民義務教育，本學科的名稱由「算術」改為「數學」，並根據《國民小學數學暫行課程標準(57)》從民國 57 年的一年級開始逐年實施，到民國 69 年的最後一屆六年級學生使用，才全面改成民國 64 年教育部正式頒布的《國民小學數學課程標準(64)》。此課程標準從民國 65 年起逐年實施，直到民國 89 年的最後一屆六年級學生，是目前壽命最長的課程標準。在這段時間內，全國都使用國立編譯館編撰的教科書（俗稱統編本），此課本經過相當大規模的實驗，常稱為「板橋模式」。這段時期的小學數學注重數、量、形的內容學習，並把握三項原則：社會生活的需求，兒童身心的發展、與學習的妥當性。

同時期的國民中學數學課程標準則在民國 57 年制訂之後，歷經民國 61 年、72 年、74 年、83 年多次的修訂，其教學目標從數、量、形的基礎內容，逐漸延伸到重視學生的思考、推理與創造能力，並顧及情意面的學習興趣及數學素養。國民中學的數學課程，在民國 89 年被納入九年一貫課程。

普通高級中學的數學課程則為配合國民中學首屆畢業生而在民國 60 年訂立課程標準，至民國 72 年配合「高級中學法」而修訂高級中學課程標準，在民國 84 年因應社會變遷而再次修訂。高中數學的學習內容增加了「函數」項目，也都強調思考能力和應用於生活的素養，並且均指出數學在其他學科上的重要基礎性。

民國 80 年代，發生了一項重要的數學教育興革。美國數學教師協會（National Council of Teachers of Mathematics，簡稱為 NCTM）於 1989 年出版《學校數學課程與評鑑標準》（Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics）強調數學能力的培養與數學概念的理解，從傳統以「教師為中心」轉向以「學生為中心」，教師不再是知識的「傳遞者」而是學生知識建構的「協助者」。然而其過分著重概念理解卻輕忽計算能力的培養，招致數學家的批評，對於「概念理解」與「計算能力」發展孰輕孰重的爭論，發展成數學教育學者與數學家之間的數學戰爭。

此波風潮及於臺灣，則展現於民國 82 年頒布的《國民小學數學課程標準版課程標準(82)》。這份課程標準強調學生必須自行建構數學的意義，在教學目標中提到「...養成主動地從自己的經驗中，建構與理解數學的概念，...」，因此俗稱「建構式數學」。同年亦開放民間出版社編寫教科書，由四家出版商（南一、翰林、康軒、新學友）以及國立編譯館同時編製國小數學課本。因為開放的時間急迫，幾乎沒有經過實驗就送審，審查通過後即直接實施於小學。此課程從民國 85 年起逐年實施，至民國 92 年全面轉換為《九年一貫課程數學領域暫行綱要(89)》而止。

教育部於民國 89 年宣布實施九年一貫課程，將國小和國中課程做統整的規劃，並於同年頒布「暫行綱要」。自此，數學科改稱為「數學學習領域」。最劇烈的改變是，取消了數學傳統上具有較多授課時數的「主科」概念，而與其他學習領域平分。暫行綱要的數學課程似仍持續建構主義的理念，原本計畫些微調整後即為正式的綱要。然而，建構式數學不要求學生背誦九九乘法表和輕忽直式乘法計算，造成學生計算能力下降的疑慮，引起數學家批評建構式數學，中華民國數學學會便緊急向教育部建議暫緩正式綱要之公布，並另行邀集相關學者與教師，重新審議數學課程的設計，結果就是民國 92 年頒布的《九年一貫數學領域課程綱要(92)》，從民國 94 年起正式逐年實施，並於民國 97 年微調修訂，自民國 100 年起實施迄今。

搭配九年一貫課程的實施，高中先後從民國 95 年、99 年起，實施暫行綱要與新的綱要，並於民國 102 年微調。後期中等學校的數學課程，分成高中（普通高級中學之簡稱）、高職（高級職業中學之簡稱）、和綜合高中（綜合高級中學之簡稱）三類。

## 二、特色

### (一) 規劃十二年一貫的數學課程綱要

數學課程綱要大約每隔十年研修一次，本次研修適逢十二年國民基本教育（以下簡稱十二年國教）開始實施，修訂課程綱要時可以用十二年一貫的架構，整體檢視，規劃出適合現代國民需要的數學課程內容，並希望能避免現行數學課程綱要在國高中之間銜接上的困難。

一方面，要回應世界各國朝向培養數學素養的趨勢，著重學生能將生活中所遇到的問題轉化成數學問題並且解決它，並能欣賞數學的美並對數學有正向的態度。另一方面，要盡力改善我國中小學生的數學評量成績有高成就與高落差、對數學的態度與學習信心不佳的現象，達成十二年國教把每一位學生帶上來、適性揚才的重要理念，實踐數學教育公平受教的原則。

### (二) 提倡培養學生正確使用工具的素養

歷年的數學課程綱要，都在實施要點中提及要教導學生使用計算機，只是計算機教學從未在我國的中小學教育認真實施；甚至有些實用科目，在例題或考題中，都只敢出現特殊規劃好的數據。工具對於數學教學與學習助益極大。然而，我國即使在最基本的計算機教學，都遠遠落後於世界各先進國家。有鑑於此，這次的數學課程綱要研修小組決定，要認真修訂課程綱要內容，讓全國學生真的學到使用計算機的能力。數學教學應從教導使用計算機開始，逐漸引導學生使用各種高階工具。數學課程綱要研修小組檢討發現，我國這個現象可能有下述三種原因。

首先，一些數學教師害怕，學生是否因為使用計算機，反而不好好學習數學原理原則，只一味地胡亂使用機器計算。對於這樣的憂慮，我們強調，要同時教導學生「**使用計算機的正確態度**」。所以定調，國小是學生奠定數學基礎的階段，計算機教學從國中開始，並且強調，學生在熟練計算原理後，為避免繁複計算因而降低學習效率，才適當使用計算機。

其次，歷年來的數學課程綱要，都只在實施要點提及要使用計算機，教科書作者及教師

並不清楚教材的何處要使用，教科書中若無著墨，教師也無暇思索，以至於未能落實計算機教學。本次數學課程綱要，將計算機的使用納入課綱的條文，明白指出何處適合使用計算機。

最後，臺灣的全國性大型考試（全國技術人員考試例外）都不准使用計算機，這有其防止作弊的需求，而且考試本來就應該與教學脫鉤才對。只是，臺灣是一個考試領導教學的國家，考試不考，教師就樂得不教，或是不願意花時間教。進一步說，全國性大型考試的規範，更暗示計算工具的不需要，甚至不正當。希望教育當局能導正此一錯誤的政策。

### (三) 確實規劃從高二開始數學分類教學

數學內容在國中小大致上是所有人都應該要學習的，進入高中之後，學生因為理工商文的性向逐漸顯露，對數學的需求及接受度逐漸因人而異，分類教學勢在必然；世界各國都是如此，只是差異度極大，幾乎沒有範例可以讓我們輕鬆比照。我國歷年來，高中數學內容也變化極多，到了最近的版本，高一時所有學生必修一種共同的數學，高二時的必修數學分 A、B 兩版，但是課程綱要實際上還是一份，只是最後三節標記雙圈，學得少的學生就不學這些部分，到了高三才分成數學甲、乙兩版選修。這樣的做法，在課程綱要訂定、教科書編撰、教學安排、甚至大考內容等各方面都有方便之處，只是苦了那些數學需求性比較少的學生。

十二年國教總綱最初為回應高中生有更多選修的彈性，將原本各科的必修學分扣除四分之一，改成選修，讓學校有更獨立自主的規劃空間，立意甚佳；其實，數學已經領先其他領域，早就已經將高三改為選修，是更積極的將三分之一學分列為選修。總綱在一視同仁的簡單計算（及國文領域的堅持）下，各界視為主科的國文、英文、數學的必修學分數從現行的 24、24、16，被規劃為 20（含中國文化基本教材 2）、18、12，各界譁然，特別是數學超低必修學分，大眾難以接受。

平心而論，如果把 12 學分規劃為所有人最低要修三學期數學，再依照個人對數學的需求，逐漸去選修必要的數學，是可以回應有些人的確是不需要學三年數學這件事。只是，這樣的規劃，對於後續的教學、大考等並未仔細規劃，無人了解此事的可行性。並且對於數學早已先行高三選修一事未被納入考量，各界的反對，層級高達眾多包含人文類的中央研究院院士，這應該是總綱規劃始料未及。經過長時間討論，數學領域課程綱要小組總算說服相關長官及委員會，高中數學的必修學分數回歸 16。在這樣的背景下，小組有義務在高二的必修學分做到確實分類，讓不同程度的學生可以確實學到他們所需要的數學，但不必強迫數學需求少的學生硬要修習過多數學。

### (四) 與高職數學的整合

前一任的高中數學課程綱要研修小組，經過許多研究，並與國際上各種數學課程綱要比較，將本來在高二下修習的排列組合和機率統計移到高一下，原本在高一下比較困難的三角函數的內容往後移。這樣的安排，在先教容易再教困難內容的邏輯上十分實際。一開始大家可能還不習慣，但是後來逐漸也能發現其優點。

只是，當時的高職數學課程綱要小組另有成員，並未討論此事。在沒有溝通管道的情況下，高職數學課程綱要沿用原架構，雙方在高一的課程差異到達半年之多。本來高中和高職各行其是也無不可。只是，臺灣有綜合高中的學制，在這個體制下，每年一萬八千的高一學生，到高二時，有百分之四十五要轉到學術學程、念普通高中的軌道，有百分之五十五要轉到專門學程、念高職的軌道。因此，這些學生在高一的數學要念甚麼內容，引發很大困難，教育部為此做了許多補救措施，但總是不能兼顧。為此，高中（現稱普通型高級中等學校）與高職（現稱技術型高級中等學校）的內容，如何能盡量求同，是一件重要的事情。

### 三、新舊課綱差異比較

十二年國教著重以人為本的全人教育，三大面向的核心素養「自主行動」、「溝通互動」與「社會參與」強調培養有能力、有意願進行終身學習的學習者，能解決生活情境中所遇到的問題，並能因應社會與時代變遷而不斷自我精進。其課程發展的想法為藉由各領域的學習共同成就核心素養的培養，不像九年一貫課程每個學習領域都要承擔十大能力發展的任務。核心素養在十二年國教課程中作為領域或科目課程發展垂直連貫與水平統整的主要組織核心，並具體轉化為領域的「學習表現」與「學習內容」。這與《九年一貫數學學習領域課程綱要》的「能力指標」與《普通高級中學 99 課程綱要》的「子題/內容」的形式有所不同。

《九年一貫數學學習領域課程綱要》的架構是由五大主題能力指標「數與量」、「幾何」、「代數」、「統計與機率」和「連結」所構成；而《高級中學 99 數學課綱》則是由主題所構成，例如：數與式，多項式函數。兩者之間的格式並不一致。《十二年國教數學領域課程綱要》以「數與量」、「空間與形狀」、「坐標幾何」、「關係」、「代數」、「函數」、「資料與不確定性」做為學習重點的主題類別，讓各教育階段的學習表現與學習內容格式一致。其中，學習表現中的  $r$  為國民小學階段專用，至國民中學、普通型高級中等學校後轉換發展為  $a$  和  $f$ ；學習內容的  $R$  為國民小學階段專用，至國民中學、普通型高級中等學校後轉換發展為  $A$  和  $F$ 。

另外，在高級中學階段，《十二年國教數學領域課程綱要》按照總綱的規畫，在 11 年級設計  $A$  與  $B$  兩類差異化課程，讓不同學習需求學生修習；在 12 年級規劃加深加廣選修課程分甲與乙兩類，為學生的往後的大學學習做好銜接與準備。這與以往《高級中學 99 數學課綱》的  $A$ 、 $B$  兩版課程有所不同，其中  $B$  版的內容包含  $A$  版，增加的題材以加註雙圈符號作區隔。新的數學領綱確實做到課程分類，以滿足不同學習需求的學生有機會學到所需要的數學。除上述整體差異比較說明，另提供新、舊課綱差異對照表於附錄一，按學習階段以「新增」、「強化」、「調移」、「減少」、「刪除」進一步說明新、舊課綱學習內容的不同之處。

## 貳、課程架構

依據《總綱》之規定，數學領域之課程架構於國民小學與國民中學教育階段為部定課程，一至九年級皆規劃為四節課。高級中等學校教育階段則分為 16 學分之部定必修課程以及 8



學分之加深加廣選修課程。以下茲依「課程架構規劃」及「高中加深加廣選修、升學與職涯進路關係」二項說明。

## 一、課程架構規劃說明

十二年國教的學制劃分為三個教育階段，分別為國民小學六年、國民中學三年、高級中等學校三年。各教育階段之數學領域課程架構分述如後。

### (一) 國民中小學

國民小學數學領域課程自一年級開始，其中一、二年級為第一學習階段，三、四年級為第二學習階段，五、六年級為第三學習階段，七、八、九年級為第四學習階段。部定課程每週節數為四堂課。國民中小學數學領域課程架構如表 1。

表 1：十二年國教國民中小學數學領域課程架構。

學習階段	階段學習重點	備註
第一學習階段	能初步掌握數、量、形的概念，其重點在自然數及其運算、長度與簡單圖形的認識。	彈性學習課程可規劃數學奠基與探索活動。讓學生探索、討論，培養對數學的喜好，奠立單元學習的先備基礎，進行有意義的學習。
第二學習階段	在數方面，能確實掌握自然數的四則與混合運算，培養流暢的數字感，並初步學習分數與小數的概念。在量方面，以長度為基礎，學習量的常用單位及其計算。在幾何方面，發展以角、邊要素認識幾何圖形的能力，並能以操作認識幾何圖形的性質。	
第三學習階段	確實掌握分數與小數的四則計算。能以常用的數量關係，解決日常生活的問題。能認識簡單平面與立體形體的幾何性質，並理解其面積與體積的計算。能製作簡單的統計圖表。	
第四學習階段	在數方面，能認識負數與根式的概念與計算，並理解坐標表示的意義。在代數方面，要熟悉代數式的運算、解方程式及簡單的函數。在平面幾何方面，各年級分別學習直觀幾何(直觀、辨識與描述)、測量幾何、推理幾何；空間幾何略晚學習。能理解統計與機率的意義，並認識基本的統計方法。	

### (二) 普通型高級中等學校

依據《十二年國民基本教育課程綱要-總綱》及《十二年國民基本教育國民中小學暨普通型高級中等學校數學領域課程綱要》各教育階段領域課程的規劃，普通型高級中等學校為第

五學習階段。在必修部分安排總學分數為 16 學分的數學必修課程，包括兩部分：(1) 高中一年級（10 年級）8 學分，(2) 高中二年級（11 年級）8 學分，分為 A、B 兩類，學生擇一修習。而加深加廣選修部分，則在高中三年級（12 年級）安排 8 學分的數學甲課程，與 8 學分的數學乙課程。數學領域的課程架構與學分數如表 2，而數學從高中二年級起分為三個軌道的學習路徑如圖 2。

表 2：十二年國教普通型高級中等學校數學領域課程架構。

必修		加深加廣選修
高一	高二	高三
8 學分	A 類 8 學分	數學甲 8 學分
	B 類 8 學分	數學乙 8 學分

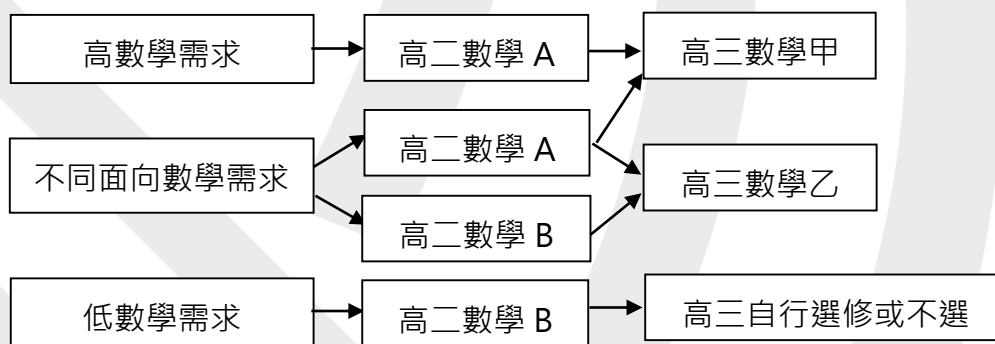


圖 2：高中二年級起數學分為三個軌道的學習路徑。

## 二、高中加深加廣選修、升學與職涯進路關係

《十二年國民基本教育國民中小學暨普通型高級中等學校數學領域課程綱要》的必修課程規劃，提供學生掌握現代各專業領域所需之核心數學語言的學習機會。對於具備興趣、動機、或有志於朝向需要更多數學專業發展的學生，則規劃兩種加深加廣選修課程提供學習機會。必修與選修課程與職涯進路之關係如表 3，其學習成效之歷程檔案有助於學生升學及職涯進路選才參採之用。

下表高中加深加廣選修、升學與職涯進路關係表，係由研修小組參考領綱設計及教育部高等教育司於 105 年 12 月底所進行之「十八學群選才調查報告」綜合評估後研訂提出，惟因領綱尚未審議完成，又大學考招單位仍持續就大學選才及高中育才輔助系統進行建置，故本文件僅先提供學校作為開設選修課程之參考，後續有關「高中加深加廣選修、升學與職涯進路關係表」將以大學入學考試中心公布之內容為準。

表 3：普通型高級中等學校數學領域必選修課程與職涯進路關係。

學 群	選修課程 建議 升學及 職涯進路	必、選修 課程	數學領域課程					備註
			必修			加深加廣 選修		
			高 一	高 二 A	高 二 B	數 學 甲	數 學 乙	
資 訊 學 群	主要 學類	資訊工程、資訊管理、數位設計、圖書 資訊						資工與系 統分析建 議數甲，其 他建議數 乙
	生涯 發展	程式設計師、資訊系統分析師、資訊管 理人員、資訊產品研發人員、網路管理 工程師、電子商務設計師、多媒體設計 師、電腦遊戲設計師等。	●	●		●	●	
工 程 學 群	主要 學類	電機電子、機械工程、土木工程、化學 工程、材料工程、科技管理						
	生涯 發展	電機工程師、電子工程師、光電工程 師、自動化工程師、通訊工程師、儀 表工程師。 動力工程師、航空工程師、汽車工程 師、造船工程師、機械設計工程師、 電整合工程師。 土木工程師、工程監工、大地工程 師、結構工程師、建築師、營建管理 專業人員、工程技術與管理研究員。 化學工程師、環境工程師、分析工程 師、藥劑工程師。 冶金工程師、材料工程師、材料分析 工程師、材料研發人員。 工業工程師、決策分析師、品管工程 師、物料管理工程師、生產管理。	●	●		●		
數 理	主要 學類	數學、物理、化學、統計、科學教育、 自然科學	●	●		●		

化學群	生涯發展	數學研究與教學、物理研究與教學、化學研究與教學、理化技術諮詢服務、保險精算師、統計分析師。						
醫藥衛生學群	主要學類	醫學、牙醫、中醫、營養保健、護理、藥學、公共衛生、職業安全、醫學技術、復健醫學、健康照護、呼吸治療、獸醫、衛生教育、醫務管理、化妝品						醫師與藥師建議數甲其他建議數乙
	生涯發展	醫師、藥師、護理師、公共衛生專業人員、醫事檢驗師、營養師、物理治療師、職能治療師、聽力師、語言治療師、呼吸治療師、病理藥理研究人員。	●	●		●	●	
生命科學學群	主要學類	生態、生命科學、生物科技、植物保護、生化						
	生涯發展	生物教師、生物學研究人員、動植物研究人員、生物科技專業人員、生態保育專業人員、病理藥理研究人員。	●	●			●	
生物資源學群	主要學類	農藝、動物科學、園藝、森林、食品生技、海洋資源、水土保持						
	生涯發展	獸醫師、生態保育專業人員、生物技術研發人員、農藥及肥料研發、景觀設計規劃師、園藝企業經營、牧場經營、畜牧業技師、畜產管理、食品研發品管、動物園技師、環保技師、自然資源保育師、環境保育師。	●	●			●	
地球與環境學群	主要學類	地球科學、地理、地質、大氣、海洋科學、環境科學、防災						
	生涯發展	地理或地球科學教師、天文學研究人員、氣象學研究人員、地質學及地球科學研究人員、地質探測工程師、探勘工程師、地震研究員、大地工程師、採礦工程師、測量師、環境工程師。	●	●		●		

建築與設計學群	主要學類	建築、景觀與空間設計、都市計畫、工業設計、商業設計、織品與服裝設計、造型設計						建築師建議 A 類與數甲，其他僅建議 B 類
	生涯發展	建築師、景觀設計師、室內設計師、美術設計師、商業設計師、工業設計師、多媒體設計師、服裝設計師。	●	●	●	●		
藝術學群	主要學類	美術、音樂、舞蹈、表演藝術、雕塑、藝術與設計						
	生涯發展	美術教師、音樂教師、舞蹈老師、舞蹈家、畫家、音樂家、作家、表演工作者、劇作家、導演、燈光師、舞台設計師。	●		●			
社會與心理學群	主要學類	心理、輔導、社會、社會工作、犯罪防治、兒童與家庭、宗教						
	生涯發展	臨床心理師、輔導教師、社會工作人員、社會學研究人員、心理學研究人員、社會服務經理人員、人力資源師、神職人員。	●	●			●	
大眾傳播學群	主要學類	大眾傳播、新聞、廣播電視、廣告、電影						
	生涯發展	新聞記者、廣告企畫、廣播或電視專業人員、編輯、表演工作者、攝影師、導演、廣告或公關人員、影像處理師、數位內容創作、媒體設計人員、動畫設計。	●		●			
外語學群	主要學類	英語、歐洲語文、日本語文、東方語文、應用語文、英語教育						
	生涯發展	英文教師、外語教師、編譯人員、語言學研究人員、外貿拓展人員、外交人員、旅遊人員。	●		●			
文史	主要學類	中國語文、台灣語文、歷史、哲學、史地、國語文教育	●	●	●		●	語言學、哲學歷史研

哲 學 群	生涯 發展	文史教師、文字編輯、作家或評論家、 文物管理師、哲學歷史研究人員、語言 學研究人員。						究人員建 議 A 類與 數學乙，其 他建議 B 類
	主要 學類	教育、公民教育、幼兒教育、特殊教育、 社會科教育、社會教育						教育研究 人員建議 A 類與數乙， 其他僅建 議 B 類
教 育 學 群	生涯 發展	中學教師、小學教師、學前教育教師、 教育機構專業人員、校長及學校主管 人員、教育研究人員。	●	●	●		●	教育研究 人員建議 A 類與數乙， 其他僅建 議 B 類
	主要 學類	法律、政治、外交、行政管理						律師法官 檢察官建 議 A 類與 數乙，其他 僅建議 B 類
法 政 學 群	生涯 發展	律師、法官、檢察官、書記官、代書、 法律專業人員、民意代表、政府行政人 員、安全人員。	●	●	●		●	律師法官 檢察官建 議 A 類與 數乙，其他 僅建議 B 類
	主要 學類	企業管理、運輸與物流管理、資產管 理、行銷經營、勞工關係						
管 理 學 群	生涯 發展	行政或財務經理人員、證券或財務經 紀人、人事或產業經理人員、市場銷售 經理人員、市場分析人員、工商服務業 經理人員。	●	●			●	
	主要 學類	會計、財務金融、經濟、國際企業、保 險、財稅						
財 經 學 群	生涯 發展	會計師、稅務專業人員、金融專業人 員、財務經理人員、證券或財務經紀 人、商業作業經理人員、保險專業人 員。	●	●			●	
	主要 學類	觀光事業、餐旅管理、休閒管理、體育、 運動管理、體育推廣、運動保健						
遊 憩 與 運 動	生涯 發展	旅館餐飲管理人員、休閒遊憩管理 人員、運動員、體育教練、體育教師、體 育休閒事業經理、運動器材經營者。	●		●			

學 群									
--------	--	--	--	--	--	--	--	--	--

### 參、核心素養與學習重點的呼應說明

本領域各教育階段核心素養具體內涵係依循《總綱》核心素養內涵發展，結合本領域之基本理念與課程目標後的具體展現。各教育階段學習重點皆為例舉呈現，並做共同的原則說明。

#### 一、國民小學教育階段

數學活動領域學習重點		數學領域 核心素養	說明
學習表現	學習內容		
n-I-3 應用加法和減法的計算或估算於日常應用解題。	N-2-5 解題：100元、500元。以操作活動為主兼及計。容許多元策略，協助建立數感。包含已學習之更小幣值。	數-E-A2 具備基本的算術操作能力，並能指認基本的形體與相對關係，在日常生活情境中，用數學表述與解決問題。	學生能運用加減乘除解決日常生活的問題；能識別基本形體的特徵與進行簡單分類。可透過讓學生操作、試驗、互動、蒐集資料與分類達成。
n-II-9 理解長度、角度、面積、容量、重量的常用單位與換算，培養量感與估測能力，並能做計算和應用解題。認識體積。	N-3-15 容量：「公升」、「毫升」。實測、量感、估測與計算。單位換算。	數-E-B1 具備日常語言與數字及算術符號之間的轉換能力，並能熟練操作日常使用之度量衡及時間，認識日常經驗中的幾何形體，並能以符號表示公式。	學生能把日常生活語言轉換成簡單數學語言進行問題解決，並能精熟度量衡與時間單位轉換，能藉由操作與探索建立幾何形體概念並能用數學符號表示公式。
d-II-1 報讀與製作一維表格、二維表格；報讀長條圖與折線圖，並據以做簡單推論。	D-3-1 一維表格與二維表格：以操作活動為主。報讀、說明與製作生活中的表格。二維表格含列聯表。	數-E-B2 具備報讀、製作基本統計圖表之能力。	藉由任務設計讓學生小組合作學習，或是由教師引導學生蒐集與整理資料，並選擇合適的統計圖表對於現實生活問題做推論與決策。

數學活動領域學習重點		數學領域 核心素養	說明
學習表現	學習內容		
s-II-4 在活動中，認識幾何概念的應用，如旋轉角、展開圖與空間形體。	S-3-4 立體形體與展開圖：以操作活動為主。初步體驗展開圖如何黏成立體形體。知道不同之展開圖可能黏合成同一形狀之立體形體。	數-E-B3 具備感受藝術作品中的數學形體或式樣的素養。	可結合日常生活常用的立體形體或藝術作品，讓學生藉由操作、討論，從中培養數學素養。
r-I-1 學習數學語言中的運算符號、關係符號、算式約定。	R-1-1 算式與符號：含加減算式中的數、加號、減號、等號。以說、讀、聽、寫、作檢驗學生的理解。適用於後續階段。	數-E-C3 具備理解與關心多元文化或語言的數學表徵的素養，並與自己的語言文化比較。	鼓勵學生從日常生活語言逐漸進到使用數學符號溝通想法，以數學史或民族數學增進學生對於多元文化的理解。

## 二、國民中學教育階段

數學領域學習重點		數學領域 核心素養	說明
學習表現	學習內容 (例舉)		
a-IV-1 理解並應用符號及文字敘述表達概念、運算、推理及證明。	A-7-1 代數符號：代數符號與運算；以代數符號表徵交換律、分配律、結合律；以符號紀錄生活中的情境問題。	數-J-A2 具備有理數、根式、坐標系之運作能力，並能以符號代表數或幾何物件，執行運算與推論，在生活情境或可理解的想像情境中，分析本質以解決問題。	可讓學生先使用生活化、非形式的語言進行討論與溝通，然後逐步引導他們發現使用數學符號進行運算與推論的方便性與簡潔性，從而使用數學的抽象思維來解決問題。
s-IV-4 理解平面圖形全等的意義，知道圖形經平移、旋轉、鏡射後仍保持全等，並能應用於解決幾何與日常生活的問	S-8-4 全等圖形：全等圖形的意義（兩個圖形經過平移、旋轉或翻轉可以完全疊合）；兩個多邊形全等則其對應邊和對	數-J-B1 具備處理代數與幾何中數學關係的能力，並用以描述情境中的現象。能在經驗範圍內，以數學語言表述平面與空間的基本	帶領學生從動手操作或是相關的活動中，認識幾何與代數中的關係，並鼓勵他們發展精確的數學語言來說明二維平面或三維空間



數學領域學習重點		數學領域 核心素養	說明
學習表現	學習內容 (例舉)		
題。	應角相等 ( 反之亦然 )。	關係和性質。能以基本的統計量與機率，描述生活中不確定性的程度。	的基本性質與關係。培養學生蒐集生活中的統計資料以及藉由實驗操作來處理生活中不確定性的問題。
n-IV-9 使用計算機計算比值、複雜的數式、小數或根式等四則運算與三角比的近似值問題，並能理解計算機可能產生誤差。	N-8-2 二次方根的 <b>近似值</b> ：二次方根的近似值；二次方根的整數部分；十分逼近法。使用計算機 $\sqrt{\quad}$ 鍵。	數-J-B2 具備正確使用計算機以增進學習的素養，包含知道其適用性與限制、認識其與數學知識的輔成價值、並能用以執行數學程序。能認識統計資料的基本特徵。	當進行計算機教學時，教師應視問題情境同時發展學生估算、心算、概算等相關能力；在讓學生體驗計算機在數學計算或是問題解決的益處時，也應引導學生從操作一些例子中察覺到計算機的可能限制。
s-IV-5 理解線對稱的意義和線對稱圖形的幾何性質，並能應用於解決幾何與日常生活的問題。	S-7-4 <b>線對稱的性質</b> ：對稱線段等長；對稱角相等；對稱點的連線段會被對稱軸垂直平分。	數-J-B3 具備辨認藝術作品中的幾何形體或數量關係的素養。並能在數學的推導中，享受數學之美。	可引導學生從欣賞與討論一些藝術作品中，看出背後的幾何形體或是數量關係，並能運用相關的關係或是性質進行問題解決，瞭解數學的美與實用性。
s-IV-7 理解畢氏定理與其逆敘述，並能應用於數學解題與日常生活的問題。	S-8-6 <b>畢氏定理</b> ：畢氏定理（勾股弦定理、商高定理）的意義及其數學史；畢氏定理在生活上的應用；三邊長滿足畢氏定理的三角形必定是直角三角形。	數-J-C3 具備敏察和接納數學發展的全球性歷史與地理背景的素養。	藉由數學史的引進或是相關文化的介紹，讓學生探索與瞭解不同文化、地區脈絡下的數學發展以及特性。

### 三、普通型高級中等學校教育階段

數學領域學習重點		數學領域 核心素養	說明
學習表現	學習內容 (例舉)		
f-V-4 認識指數與對數函數的圖形特徵，理解其特徵的意義，認識以指數函數為數學模型的成長或衰退現象，並能用以溝通和解決問題。	F-11A-4 指數與對數函數：指數函數及其圖形，按比例成長或衰退的數學模型，常用對數函數的圖形，在科學和金融上的應用。	數-S-U-A2 具備數學模型的基本工具，以數學模型解決典型的現實問題。了解數學在觀察歸納之後還須演繹證明的思維特徵及其價值。	運用科學和商業的相關任務營造讓學生進行觀察、探索與有能力建模以解決相關現實問題的課室環境。在歸結與抽象出現象背後的原理或模型之後，學生應有機會瞭解歸納思維的侷限性並能應用演繹思維來論證所得結果之正確性。
f-V-3 認識三角函數的圖形特徵，理解其特徵的意義，認識以正弦函數為數學模型的週期性現象，並能用以溝通和解決問題。	F-11A-2 正餘弦的疊合：同頻波疊合後的頻率、振幅。	數-S-U-B1 具備描述狀態、關係、運算的數學符號的素養，掌握這些符號與日常語言的輔成價值；並能根據此符號執行操作程序，用以陳述情境中的問題，並能用以呈現數學操作或推論的過程。	設計現實情境任務讓學生去操作與討論數學符號以表徵狀態、關係或運算。引導學生能根據問題敘述提取相關數據與條件，將問題中的生活語言轉換成數學符號，並根據問題條件進行操作或推論，最後將得到的結果進行詮釋以解決問題。
d-V-2 能判斷分析數據的時機，能選用適當的統計量作為描述數據的參數，理解數據分析可能產生的例外，並能處理例外。	D-10-2 數據分析：一維數據的平均數、標準差。二維數據的散布圖，最適直線與相關係數，數據的標準化。	數-S-U-B2 具備正確使用計算機和電腦軟體以增進學習的素養，包含知道其適用性與限制、認識其與數學知識的輔成價值，並能用以執行數學程序。能解讀、批判及反思媒體表	在數位學習環境中打造合適的任務，讓學生使用資訊科技工具進行資料蒐集、數據分析與解讀，同時讓學生體驗計算機與電腦軟體對於建立數學模型與解決數學問題的威力

數學領域學習重點		數學領域 核心素養	說明
學習表現	學習內容 (例舉)		
		達的資訊意涵與議題本質。	和限制。設計結合媒體識讀與數學的任務讓學生探討、反思與批判媒體報導以及相關的社會議題。
s-V-2 察覺並理解空間的基本特質，以及空間中的點、直線、與平面的關係。認識空間中的特殊曲線，並能察覺與欣賞生活中的範例。	S-11A-1 空間概念：空間的基本性質，空間中兩直線、兩平面、及直線與平面的位置關係，三垂線定理。	數-S-U-B3 具備掌握數學作為藝術創作原理或人類感知模型的素養，並願意嘗試運用數學原理協助藝術創作。	可從賞析投影幾何或是體現奇妙的悖論、錯覺等美術作品或是探討樂譜拍子、樂聲本質，認識藝術作品背後的數學原理，並進行相關的藝術創作。
n-V-5 能察覺並規律並以一般項或遞迴方式表現，進而熟悉級數的操作。理解數學歸納法的意義，並能用於數學論證。	N-10-6 數列、級數與遞迴關係：有限項遞迴數列，有限項等比級數，常用的求和公式，數學歸納法。	數-S-U-C3 具備欣賞數學觀念或工具跨文化傳承的歷史與地理背景的視野，並了解其促成技術發展或文化差異的範例。	從探討不同文化或地域的所發展出來的民族數學，瞭解數學概念發展的脈絡與環境，以及工具與技術的進步和數學知識的發展交織的關係和影響。

## 肆、學習重點解析

本章分別呈現數學領綱在國小、國中與普高教育階段的學習內容之「具體內涵說明」，其目的在使教學者與教材編輯者能具體掌握數學領綱的學習內容，進而有效提供課程環境及條件，給予學生多元、多樣學習機會，並能體驗學習的樂趣，發揮潛能，實現課程目標。

### 一、國民小學教育階段

#### 國小階段特別說明

- (1) 「基本說明」和「條目範圍」大致相當於課綱之「本文」與「補充說明」之詳細說明，但不完全相同，建議兩者合併閱讀。「基本說明」包含該條目之目標；數學概念之解釋學之合理範圍，避免重複、提前或過度教學。
- (2) 「釋例」為該條目之教學示例與解析，除了數學知識之外，也包含教學該注意的情意面。「釋例」原則上依常見教學順序安排，但並非絕對。若有奠基、複習、鋪陳性質之範例，將置於最前面。
- (3) 「錯誤類型」強調學生容易發生的認知或程序錯誤，以及教師可採取之應對措施。「評量」提供教學評量之主要項目或不宜評量項目，若有\*記號則為相對較不重要，補救教學可忽略之部分。另外「評量」也提供評量時教師宜注意之事項。這兩者若有重要或常見者，也可能先在「基本說明」或「條目範圍」中強調。
- (4) 「先備」、「連結」、「後續」提供條目之間的前後與連結關係，「連結」通常為當年條目，「先備」大多為前一年之條目，但也可能更早，「後續」大多為後一年之條目，但也可能更晚。這些連結關係通常也會在「基本說明」中加以說明。

<b>N-1-1 一百以內的數：</b> 含操作活動。用數表示多少與順序。結合數數、位值表徵、位值表。位值單位「個」和「十」。位值單位換算。認識0的位值意義。 <b>補充說明：</b> 教學可數到最後的「一百」，但不進行超過一百的教學。能點數代表十的積木。連結0的位值意義與二年級直式計算之學習。可觀察百數表模式。	n-1-1
--	-------

**連結：**N-1-2、N-1-4、D-1-1。

**後續：**N-2-1。

#### 基本說明

1. 數（正整數與0）是學習數學的基礎，是一年級的首要數學課程目標。教師應從操作活動入手，讓學生初步但充分理解數的符號、位值結構與日常應用，並支援加減法學習。由於許多學生在入小學前已經多少有數數經驗，教師應注意如何運用與整合學生的這些先備經驗。
2. 學生對「數」最早的經驗來自數數，因此首先應結合聲音、圖像、數字、單位（量），讓學生在具體情境中掌握數詞序列的規律，以說、讀、聽、寫、做各種活動，表示並應用100以內的數。
3. 運用位值積木與位值表，理解數字結構。例如數字「25」是2個「十」和5個「一」，其

中 2 所在的位置是「十位」，其位值單位為「十」，這時的 2 表示 20；5 所在的位置是「個位」，位值單位為「一」，這時的 5 就是 5。配合恰當教具教學，學生學習位值與位值單位轉換來理解數字的意義，其中包括例如 25 個「一」，如何轉化成 2 個「十」和 5 個「一」，以及反向確認 2 個「十」和 5 個「一」就是 25 個「一」。教具應包含位值積木，以及運用花片十個一堆的點數方式。

4. 學生的數數經驗雖然沒有「0」，但必須知道 0 在位值系統中的意義——代表空位。因此學生要學習 0 作為一個數表示「沒有東西」的意義。學生應理解如果沒有「0」，2 個「十」和 2 個「一」的位值記法就會混淆。
5. 數數很難處理大數，學生必須學習位值記法，才能進入更豐富的「數」世界。但這不表示數數不重要，尤其是局部的順數與倒數（例如從 45 開始往後數 5 或倒數 5），在加減法與位值教學有其價值。練習「兩個一數」、「五個一數」、「十個一數」也有助日後乘除法的學習。
6. 比較是數的基本應用，如比較「多少」、「大小」、「順序」、「長短」(N-1-5) 等日常應用。一年級比較活動以初步建立「對應」的比較模型以及其多樣應用為主，並以數數和位值兩種方式來思考解題。不論是數量（基數）或序數的問題，均應結合「單位」來學習，避免做純粹數字比較。
7. 序數初期的表徵方式帶有明顯的方向性，可以和各種相對方向的常用語詞同時教學，如「上下」、「左右」、「前後」。但在教學時，應先與學生約定溝通清楚。例如講清楚從哪裡開始數；「18 前面(或後面)是什麼數？」的「前」「後」的意義。序數是「數線」表徵的先備經驗，建議從一年級開始，就將數的序列圖像化，並和數數活動結合。

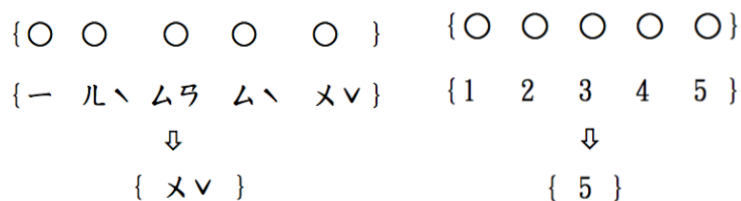
### 條目範圍

1. 教學上數數可數到最後的「100」，但不進行超過一百的教學，也不介紹位值單位「百」(N-2-1)。
2. 能點數「十位積木」，並在記錄成數字時解釋「0」的位值意義。不過一年級的加減法尚未使用直式計算，加減教學上尚不需強調「0」的這個面向。
3. 教學上可觀察百數表中明顯與位值有關的模式。其他有趣的問題則請老師斟酌時間，可擺入探索或留到日後再學習。
4. 一年級的比較問題中不出現「>」、「<」的符號，也不處理比較的遞移性質 (R-2-1)。

### 釋例

1. 教具：國小的數概念教學經常用到四種教具：
  - (1) 花片：1 個、1 疊（10 個）。
  - (2) 積木：白色積木（表示 1）、橘色積木（表示 10）、百格板（表示 100）。
  - (3) 錢幣：一元、十元硬幣（或圖卡），百元鈔票（或圖卡）等。
  - (4) 圖像：畫出圖像①代表 1 個物件、圖像⑩代表 10 個物件.....等。  
這四種教具可以區分成兩類，第一類是成比例的教具，包含花片和積木；第二類是不成比例的教具，包含錢幣及圖像。
2. 布置各種教學情境(包含「可移動或不可移動」、「排列整齊或散置」、「單類或多類物件」，讓學生掌握標準數詞順序及保持數詞與物件的一對一對應關係，完成正確的數數活動。
  - (1) 例 1：數概念與一對一的對應關係：

- 透過點數活動，以聲音對應物件的方式，建立一對一對應的關係，並利用最後一個聲音或數字（例如ㄨˇ 或 5 ），抽象的代表前面念過的那幾個聲音，直接學習抽象出來聲音（例如ㄨˇ）的寫法（例如 5 ）。下圖說明如何利用數詞序列來溝通個數。



- 學生在進行點數活動時，教師必須留意兩件事情：
  - 學生是否能正確按照數詞的順序使用數詞。
  - 點數時，是否能正確的將數詞與物件保持一對一對應的關係。

(2) 例 2：個數的多少和數字的大小：

- 數量的比較有兩種策略，一是基於「數數」，二是進行配對。前者學生有一定的經驗後者讓學生經歷「配對」活動的歷程，蘊含了「一一對應」的概念。
- 體驗數相對大小關係是重要的，但要建立在理解的基礎上。建議一開始在比較物件的個數時，教師應該指導學生使用「5 個蘋果比 2 個蘋果多」或「2 個梨子比 5 個梨子少」的語詞來描述比較的結果。
- 至於像「5 比 2 大」、「2 比 5 小」和利用最後一個聲音抽象代表前面念過的那幾個聲音的概念相同，至少要在學生已經熟練 5 個比 2 個多，2 個比 5 個少，才可以進一步用「5 比 2 大」、或「2 比 5 小」的語詞來描述比較個數的結果。

3. 以各種教學形式(包含「個別、小組、全班」)，進行「物件、數詞、數字」之間互相轉換之說讀聽寫做的活動。「說」是使用數詞（聲音）來描述這堆物件的個數是多少個，「讀」是看懂別人寫出來的數字所代表物件的個數，「聽」是聽懂別人說出的數詞所代表物件的個數，「寫」是使用數字（符號）來描述這堆物件的個數是多少個。做數（表現數）指的是聽到數詞或看到數字，能拿出相對應個數的物件。例如聽到數詞「ㄨˇ」，或看到數字「5」，能拿出 5 個梨子的圖卡、5 個花片等來表示。

4. 「0」 認識，有兩種教學方式：

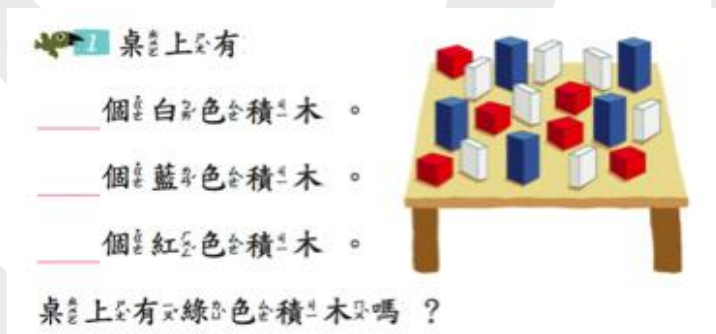
- (1) 透過「由有到無」連續的情境，引入 0 的需求，例如在魚缸原來有 3 條魚，要求學童說出「ムㄋ」條魚，或記成「3」條魚，再依序撈走 1 條魚，進行相同的活動，當魚缸裡沒有魚時，教師宣告沒有魚可以記成「0」條魚，讀作「ㄌㄨㄛˊ」條魚。  
 例如：數一數，下圖有幾條魚，請你寫寫看。

2 數一數，有幾條魚？



(《部》第一冊課本 P.11，《部》即《部編本國小數學》)

- (2) 例如：桌上擺放各種白、藍、紅三種顏色的積木，問桌上有綠色積木嗎？當學童回答沒有綠色積木時，再宣告沒有綠色積木可以記成「0」個綠色積木，「0」讀作「ㄐㄨㄛˊ」。



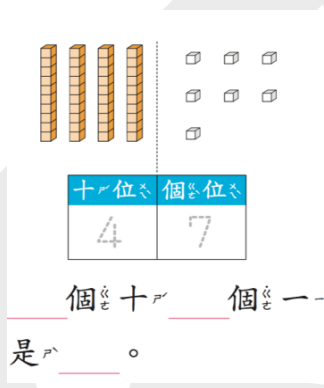
(《部》第一冊課本 P.11))

5. 理解數的位值結構和「位值表」的教學(含「0」代表空位)。

- (1) 認識 11~20 的各數是幫助學生建立位值概念的重要知識點之一，從這裡開始，學生對數的認識不僅僅是單獨的一個一個數，而是以十個為一群進行數數，這是建立十進制位值概念的重要階段。
- (2) 數量範圍從 20 擴展到 100 時，除了指導學生用不同的方法點數物件外，也要幫助學生從中抽象出 100 以內的數。在點數較多物件時，讓學生體會按 10 個、10 個分堆數數的便利性，並在位值表記錄數字表示物件的數目，進一步讓學生體會位值的意義。
- (3) 進行位值教學時，可以使用教具來說明，像是數學積木、圖像①、⑩...等來說明 1 和 10 的關係。

● 例 1：使用積木表示 100 以內的數量

- 請學生拿出 47 個白色積木，並說明 10 個白色積木換一條橘色積木，問 47 個白色積木可以換成幾條橘色積木和幾個白色積木？並將數值記在位值表上，再問「4」和「7」所代表的意義分別為何？請學生拿出 47 個白色積木，並說明 10 個白色積木換一條橘色積木，問 47 個白色積木可以換成幾條橘色積木和幾個白色積木？並將數值記在位值表上，再問「4」和「7」所代表的意義分別為何？



(《部》第二冊課本 P.8)

■ 請學生拿出 60 個白色積木，並說明 10 個白色積木換一條橘色積木，問 60 個白色積木可以換成幾條橘色積木和幾個白色積木？並將數值記在位值表上，再問「6」和「0」所代表的意義分別為何？

● 例 2：使用代表①、⑩的圖像表示 100 以內的數詞。

■ 請學生用畫 10 元和 1 元的方式表示出 74 元，並問「7」和「4」在哪裡看得出來？它們所代表的意義為何？

■ 請學生用畫 10 元和 1 元的方式表示出 80 元，並問「8」和「0」在哪裡看得出來？它們所代表的意義為何？

● 例 3：區分相同數字在不同位值上的差別。(配合白色積木和橘色積木)

■ 請學生說明「22」中兩個「2」的異同在哪裡？

6. 進行各種數數活動，加強數感的練習。

(1) 二個(五個或十個)一數的數數活動：多個一數的方式在生活中也常用到，二個一數、五個一數和十個一數的數詞序列，聲音的節奏有規律，學童可以比較容易掌握且快速的唱數。同時，「二個一數」和「五個一數」也是二年級學習 2 的乘法、5 的乘法的基礎。

● 例如：二個一數：「2、4、6、...」；五個一數：「5、10、15、...」；十個一數：「10、20、30、...」讓學生透過多個一數的方式，點數各種不同物件。

(2) 局部數數(順數或倒數)活動：建議順數和倒數的活動都要兼顧，這對日後透過點數策略解決加法或減法問題，會有很大的幫助。

● 例如：順數：「1、2、3、4、5」；「88、89、90、91、92」；倒數：「5、4、3、2、1」；「92、91、90、89、88」讓學生局部數數的方式，點數各種不同物件。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100



(3)「多十或少十」一數的數數活動，學生應察覺十位的變化：

- 例如：利用百數表進行十個一數的的順數及倒數，順數：「10、20、30、40、50」、「58、68、78、88、98」；倒數：「50、40、30、20、10」、「98、88、78、68、58」。

(4) 面對零散排列積木(以 24 個白色積木為例)，如何有效運用數數的策略：

- 例如：可以透過「一個一數」的數數活動，由 1 開始數到 24，算出共有 24 個。也可以利用「又十及又一數數活動」，例如：10、20、21、22、23、24 或 1、2、3、4、14、24 來點數，算出共有 24 個，比較有效率。

(5) 序數的教學：序數是「數線」表徵的先備經驗，建議從一年級起就開始將數的序列圖像化，並和數數活動結合。初期的序數表徵方式通常是有明顯的方向性，因此可以和各種相對方向的常用語詞同時教學，如「上下」、「左右」、「前後」，但在教學應先與學生溝通清楚。

- 例 1：看圖回答問題



(《部》課本第二冊 P.17)

- 例 2：動物園遊會有 8 個攤位，第幾個攤位在賣草莓呢？



(《部》第二冊課本 P.16~17)

- 例 3：用十二生肖的排行說明「前後」的約定(見下圖)，第 1 個動物是老鼠，往後數 2 個是老虎，老虎排行第 3；排行第 6 的動物是蛇，往前數 2 個是兔子，兔子排行第 4。



(《部》第二冊課本 P.14~15)

1. 學生進行數數活動時，發生重複或漏數的狀況。

物件：● ● ● ● ● ...

數數：1 2 3 4 5 6 ...

物件：● ● ● ● ● ...

數數：1 2 4 5 6 ...

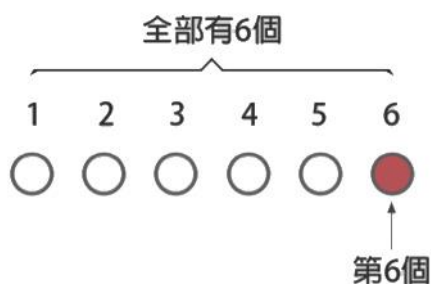
建議：針對不能流暢唱數的學生，可用分布練習之方式加強。若原因出自點數不可移動且排列不整齊之物品，可用標記或分類來協助。

2. 學生在數數時無法正確或流暢「過十」。如「...、68、69、40(錯誤)、41、...」或「...、28、29...(停頓)30、31...」。

觀察「過十」時十位數的變化，如 69 後是 70，因為十位數 6 後是 7。

3. 學生混淆「基數(總量)」與「序數(第幾個)」的問題情境。

(1) 例：有 6 個圓圈，問「全部有幾個圓圈？」學生點數後誤以為「第 6 個」是全部；問「第 6 個在哪裡？」，學生點數後誤以為全部圓圈是「第 6 個」。



建議：利用生活情境溝通如「排隊隊伍中的第 6 個同學」以及「需要 6 個同學幫忙」的「6」意義不同，協助釐清語言的混淆。

4. 位值表徵的錯誤：

(1) 例 1：未能掌握位值表上，每一位值位置只能出現一個數字。

(2) 例 2：不會使用 0。混淆如 2 個「十」和 2 個「一」的記法。

(3) 例 3：學生不能正確讀出指定數字，或不能正確寫出老師所讀的數字。如 32 讀成「三二」；將所讀的「三十二」記成「302」。

建議：加強位值表教學，教導學生數字正確的讀法與記法。

## 評量

1. 能透過一對一對應數數，掌握 1 至 100 的數詞序列。
2. 能以說、讀、聽、寫、做各種活動，表現 100 以內的數。
3. 能理解「十」和「一」代表的位值。
4. 能做位值單位「十」和「一」的轉換，理解數字的位值結構。
5. 能認識「0」表示沒有，及「0」在位值系統中的意義。
6. 能做 2、5、10 個一數。局部順數與倒數。「多 10 或少 10」。
7. 能在生活情境中正確使用「基數」與「序數」。

## 注意事項

1. 教師宜在教學中同時評量學生學習進展，讓學生多練習、表現或判斷。教師逐漸增加或減少物件數量，全班進行數數；也可兩個學生分成一組，一位先數，另一位確認，然後互換角色。
2. 小一文字能力不足，紙筆評量題目不宜過長，但應題意完整或搭配圖示，避免誤解題意。不然會誤導學生或教師，錯估教學效果或學生能力。
3. 不宜用紙筆評量學生「讀」數，例如：「25 讀做( )」，應用口語讀出。

**N-1-2：加法和減法的意義與應用。**含「添加型」、「併加型」、「拿走型」、「比較型」等應用問題。加法和減法算式。

**補充說明：**強調「併加」以理解加法交換律。處理「0」。含加減法並陳之單元，使學生察覺加法和減法問題的差異。一年級不做加數、被加數、減數、被減數未知題型。

n-1-2

**連結：**N-1-1、N-1-3、N-1-4、N-1-5、R-1-1、R-1-2、D-1-1。

**後續：**N-2-2、N-2-3、N-2-4。

## 基本說明

1. 加減法是最基本的數學運算，有最廣泛的日常應用。以數數與位值概念為基礎（N-1-1），一年級加減法的學習有三個重點：在應用中理解加減法的意義，並由數數過渡到合成分解模型（本條目與 R-1-2）；初步認識算式（橫式）與符號（本條目與 R-1-1）；熟練基本加減法（N-1-3）。
2. 一年級學習解加減應用時，無論如何分析問題（如使用花片、畫圈等），都要把想法記成加減法的橫式，並建立將計算結果記在等號後的習慣。例如：6 顆葡萄和 8 顆葡萄合起來是 14 顆葡萄，記成  $6+8=14$ ；15 顆芭樂吃掉 2 顆剩下 13 顆芭樂，記成  $15-2=13$ 。為了檢查學生是否理解加減算式的意義，可讓學生擬出對應的生活應用情境（R-1-1）。學生也應理解「被減數」比「減數」大的約定（R-1-1）。
3. 「添加型」：先固定一數，再「加入」一數之「加」法。例如「教室中有 8 個人，又進來 4 個人，教室中有多少人？」這也相當於從一數開始順數的能力。
4. 「拿走型」：先固定一數，再「移走」一數之「減」法。例如「教室中有 12 個人，出去 7 個人，教室中還有多少人？」這也相當於從一數開始倒數的能力。
5. 「併加型」和「分解型」：將分開兩數量，合起來是多少（「加」）；將一數量分拆，移走一部分，還剩多少（「減」）。例如「左手有 4 顆糖果，右手有 7 顆，合起來是多少顆？」一般不區分「分解型」和「拿走型」問題。
6. 加減法的合成分解模型：「併加與分解」就是學習加減法最基本的合成分解模型，教師應清楚引導學生熟悉這個模型，學習用合成分解模型（或應用表徵）去思考一般加減法算式。其基本應用例如做較大數的加減法（如  $24+38$ 、 $49-15$  是多少？能以幾個「十」、幾個「一」的合成分解來思考解題）；以及加法交換律的說明（R-1-2）。
7. 「比較型」：以 N-1-1 建立之「對應」比較模型，回答「多幾個」、「少幾個」的減法問題。「比較型」問題相對比較困難（因為用數數易生混淆），須結合新學的思考方式來理解，建議放在一年級下學期教學。
8. 學習加減法的意義與應用情境時，數量不需過大。較大數加減法教學的困難不在加減法的意義，而是擁有確實的位值觀念（尤其有「進位」「退位」需求時）、橫式記錄的經驗、基本加減法的熟練，故宜在一年級下學期教學。

9. 學習加減法的意義時，數量雖不需過大，但在學習加減法時，仍應將數量範圍依一定教學策略循序擴大，首先是基本加減法（N-1-3），一年級下學期則進行到兩位數加減法學習。學生應充分結合位值積木點數、單位轉換，以及加減法的合成分解，學習兩位數的加減法。其重點在於了解在位值系統中做加減法的意義（因此需含少數進位與退位的例子）。
10. 一年級加減法教學，以日常應用為重心。但教學要保留一定時間，練習無應用情境的「計算題」，例如  $16+8=24$ 、 $23-8=15$ ，在不用直式計算的情況下，學習用比較抽象的數數、表徵（如花片的合成分解）或位值經驗來思考解題。

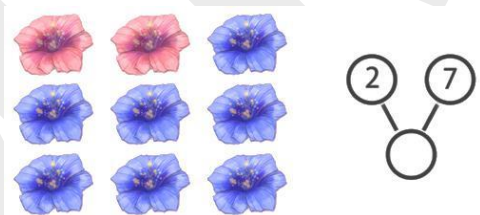
### 條目範圍

1. 一年級不處理直式記錄（N-2-2），不做加數、被加數、減數、被減數未知的應用題（N-2-3），只做「和」或「差」未知的應用解題。此皆和《九年一貫課綱》不同。
2. 在加減法中也要處理「0」。學習0的運算，最自然的情境是減法。例如「教室中有8個學生，他們都離開後，教室還剩多少人？」用減法算式記錄時，必須寫成  $8-8=0$ ，表示「沒有人」。再以此為基礎，理解「某數+0」「0+某數」或「某數-0」其結果都不變。「0」的加減處理，是日後直式計算基礎的一部份。由於這個約定很自然，不需過份評量。
3. 課本或教學應含加減法應用解題並陳之單元，使學生能主動理解問題，察覺加法和減法問題的差異。
4. 一年級雖不處理加減互逆關係（R-2-4），也無對應的解題活動（N-2-3）。但仍應透過某些活動如「基本加減法」（N-1-3），讓學生感受加減關係，作為二年級學習的先備經驗。
5. 在一年級先不處理「相差多少」的問題，在二年級才進行這類型問題的教學（N-2-2）。

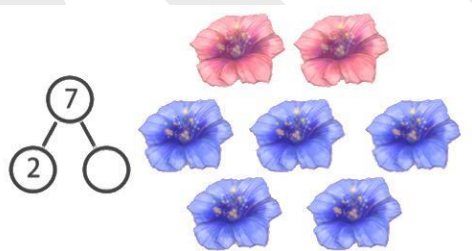
### 釋例

1. 數的合成分解經驗是加減法的先備經驗：

(1) 例 1：合成的例子：2 和 7 合起來是多少？可以用下列圖示記錄：



(2) 例 2：分解的例子：7 可以分成 2 和多少？可以用下列圖示記錄：



2. 透過不同情境(如併加、添加、拿走、比較型)，理解加法和減法的意義。

(1) 例 1：加法問題的題型：

加法的情境可以區分為併加型問題和添加型問題兩類。其中併加型問題比較簡單，可視為理解加法算式的原型（即「合成」），建議教師首次引入加法算式，必須是併加型問題。

● 併加型問題：池塘裡有 5 隻小鴨，岸上有 2 隻小鴨，一共有幾隻小鴨？

● 添加型問題：弟弟有 3 個蘋果，媽媽再給他 3 個蘋果，現在弟弟有幾個蘋果？

就解題活動而言，併加型和添加型是加法問題（將兩堆物件合起來點數確定數量），就解題記錄而言，這兩類問題都要用加法算式記錄。

(2) 例 2：減法問題的題型：

加法的情境可以區分為拿走型（即分解型）問題和比較型問題兩類。其中拿走型問題比較容易理解，可視為理解減法算式的原型（即「分解」），建議教師首次引入減法算式，必須是拿走型問題。

- 拿走型問題：池塘裡有 8 隻小鴨，其中 3 隻走上岸，池塘裡剩下多少隻小鴨？
- 比較型問題可再分為兩類：
  - 比較型問題（原型）：王老先生養了 8 隻白羊，5 隻黑羊，白羊比黑羊多幾隻？
  - 不同單位的比較型問題：有 8 個小朋友和 5 頂帽子，一人戴一頂帽子，帽子多還是人多？多多少？

就解題活動而言，上述三個題型很不相同，如下列解題圖示：

- 拿走型問題之解題圖示。教室裡有 5 位小朋友，走了 3 位，剩下幾位？



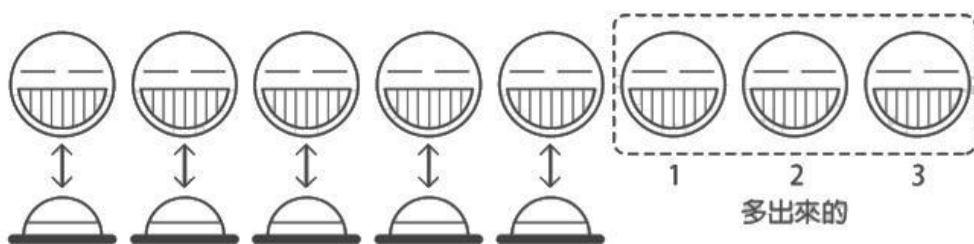
$$5 - 3 = \underline{\quad}$$

（《部》第一冊課本 P.61）

- 比較型問題（原型）之解題圖示：7 隻瓢蟲比 3 隻金龜子多幾隻？



- 不同單位的比較型問題解題圖：8 個小朋友，5 頂帽子，一人戴一頂帽子，帽子多還是人多？多多少？



(3) 例 3：其他題型，也參考 N-2-3。

除了以上常見問題類型外，透過序數結合加減的問題也會出現在日常應用，舉例如下。

- 爬樓梯比賽，王先生到了 10 樓，又向上走了 1 樓，現在他在第幾樓？
- 李小姐從百貨公司的 11 樓向下走 2 樓到童裝部，童裝部在幾樓？
- 阿姨排隊買票，她的前面排了 17 個人，阿姨排在第幾個？
- 排隊結帳，林叔叔排在第 12 個，媽媽排在林叔叔前面第 3 個，媽媽排在第幾個？
- 多多少、少多少和相差多少？同一個比較型的情境，常有三種不同的問法：
  - 例：農場裡面有 10 隻白羊和 7 隻黑羊，問：

誰多？多幾隻？誰比誰多幾隻？（易）

誰少？少幾隻？誰比誰少幾隻？（稍難）

白羊和黑羊相差幾隻？（二年級再出現）

上述第 3 種問法中的「相差幾隻」是絕對值的概念，「白羊比黑羊多 3 隻」、「黑羊比白羊少 3 隻」，都是「相差 3 隻」，小一學生不易理解。建議一年級先布「多幾隻」的問題，再布「少幾隻」的問題，二年級才處理「相差幾隻」的問題。

### 3. 初步認識橫式算式與符號（參見 R-1-1）：

(1) 例 1：「哥哥有 7 顆彈珠，弟弟有 6 顆彈珠，兩人合起來共有多少顆彈珠？」

首先學生從題意判斷這是加法問題，當學生透過數數算出「7 顆彈珠和 6 顆彈珠合起來是 13 顆彈珠」後，要求學生將解題活動和結果記成「 $7+6=13$ 」。學生應充分理解這個算式記錄了「這個問題是什麼類型的問題(加法)」、「問題是什麼(7+6)」、「答案是什麼(13)」這三個重點。

(2) 例 2：「盤子裡有 8 片餅乾，弟弟吃了 3 片，盤子裡剩下幾片餅乾？」

學生先從題意判斷這是減法問題，當學生能透過數數算出「8 片餅乾，吃了 3 片，剩下 5 片」後，要求學生將解題活動和結果記成「 $8-3=5$ 」。學生應充分理解這個算式記錄了「這個問題是什麼類型的問題(減法)」、「問題是什麼(8-3)」、「答案是什麼(5)」這三個重點。

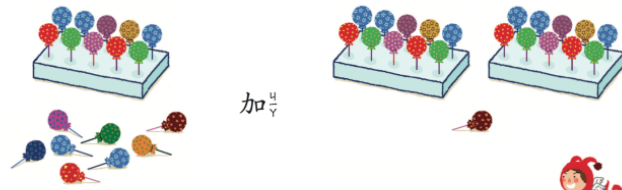
(3) 擬題活動：

為了加強學生理解加、減法算式的意義，可以透過擬題活動來協助。例如教師先列出加法算式「 $5+3=8$ 」或「 $8-3=5$ 」，再要求學生擬出符合該算式的相關文字題，檢查學生是否掌握加、減法算式的意義。

擬題活動的進行須注意：

- 須在學生已能順利進行加、減法應用問題的解題、列式，並對加、減法算式的意義和紀錄格式熟練後才進行。
  - 進行擬題時，學生以口語表達即可，不宜要求以文字描述。
  - 學生的擬題只要是併加型、添加型或拿走型的情境即可。
- (4) 加減法計算的學習過程有很多方式，最根本的基本加減法範圍內的學習，請見 N-1-3 釋例的說明。其後的二位數加減法，應從數數能力、位值概念、合成分解模型入手。
- 二位數的加減法而其加數或減數為一位數或整十的情形：
    - 加一位數：運用 N-1-1 釋例（6）從一數開始順數的能力解題。
    - 減一位數：運用 N-1-1 釋例（6）中從一數開始倒數的能力解題。
    - 加幾十：運用 N-1-1 釋例（6）從一數開始「多十」順數的能力解題。
    - 減幾十：運用 N-1-1 釋例（6）從一數開始「少十」倒數的能力解題。
  - 一般二位數加減法：透過具體物（位值積木、花片）的操作來理解二位數加或減二位數的方法。一年級的二位數加減法不以計算的熟練為目的，教師應將重點放在學習「如何在位值系統中進行加減法」。
    - 二位數加二位數（不進位）：這是合成分解模型的簡單應用。

2 18加21等於多少？



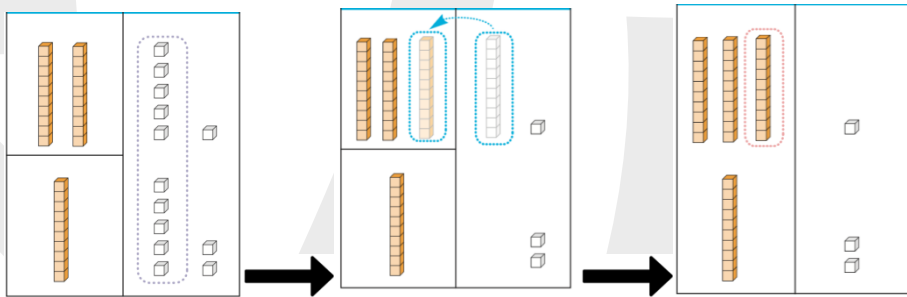
加

算式： $18 + 21 =$  \_\_\_\_\_

先算  $8 + 1 = 9$ ，  
再算  $10 + 20 = 30$ ，  
最後把  $9$  和  $30$  相加。

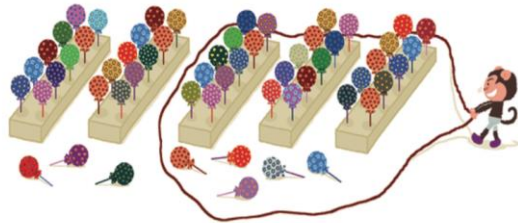
(《部》第二冊課本 P51)

- 二位數加二位數（進位）：進位時要用到 10 個 1，可換成 1 個 10。  
例： $26 + 17 = 43$ 。



- 二位數減二位數（不退位）：這也是合成分解模型的簡單應用。

4 58減35等於多少？

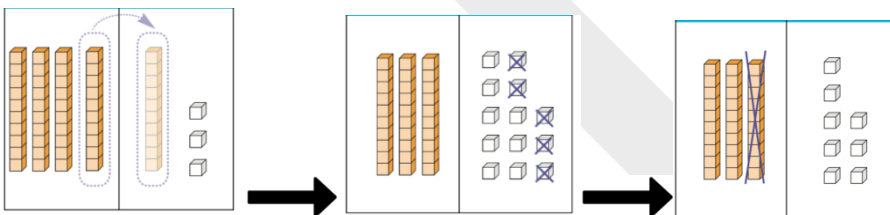


先算  $8 - 5$ ，再算  $50 - 30$ ，  
把前面兩個算式的答案相加。

算式： $58 - 35 =$  \_\_\_\_\_

(《部》第二冊課本 P78)

- 二位數減二位數（退位）：退位時要用到 1 個 10，換成 10 個 1。



錯誤類型

誤將不同類量作加減計算。

- (1) 例 1：1 枝鉛筆 5 元，小明買 2 枝鉛筆，共要花多少元？學生誤列「 $1+5=6$ 」、「 $5+2=7$ 」或「 $1+2=3$ 」等錯誤算式。
- (2) 例 2：一條船上有 35 頭牛，14 頭羊，問船長幾歲？學生逕行列出「 $35+14=49$ 」或「 $35-14=21$ 」得出荒謬解答。
  - 建議：教師請學生說明或解釋算式，以澄清觀念之錯誤處。
- (3) 以題幹先出現的數為被減數，列出錯誤減法算式。（另一原因見 R-1-2）  
例：小明有 3 元，小華有 5 元，小華比小明多幾元？學生列成「 $3-5=2$ 」。
  - 建議：除確認學生了解題意外，應重申「被減數」比「減數」大的約定。
- (4) 學生做減法問題，知道答案是「沒有」，但未寫成 0。如「 $8-8=$ 」
  - 建議：強調「沒有」記成「0」的約定。

## 評量

### 1. 評量重點：

- (1) 能解決「添加」、「併加」、「拿走」、「比較」各型應用問題。
- (2) 能針對應用問題，列出正確橫式算式，並說明問題與算式的關係。
- (3) 能計算加法與減法的算式問題，進而協助解決應用問題。
- (4) 能從加法與減法算式擬出對應的生活應用情境問題（參考釋例(4)）。

### 2. 注意事項：

- (1) 本條目在一年課程中宜分成多個單元進行，要注意數量範圍的合理性與題目類型是否適宜，如較大數加減法或「比較型」問題宜在一年級下學期。
- (2) 解題的想法可能有多種，只要合理即可。
- (3) 解題的計算方法要符合學生能力，但也應在學生理解且有能力時，要求以較簡潔的方式解題，化繁為簡讓學生逐步提升解題能力。
- (4) 應用問題的解題，應列成橫式算式並應寫「答」，「答」中的答案要含單位（除非特定問題無單位），養成完整的答題習慣。

**N-1-3 基本加減法：**以操作活動為主。以熟練為目標。指 1 到 10 之數與 1 到 10 之數的加法，及反向的減法計算。

**補充說明：**在過程中可能用到兩步驟加減混合數算，這是自然延伸之計算策略與數感，應予以鼓勵。

n-1-2

**連結：**N-1-2、N-1-4。

**後續：**N-2-2。

## 基本說明

基本加減法主要是類似「十十乘法」的「十十加法」（及相應減法），其中尤其強調「合十」的重要性。藉由熟練小數字的加減法，可以增強學生的簡單心算能力與信心，除了協助一年級較大數字之加減法計算，更是二年級之後直式計算的基礎（四則直式計算都會用到基本加減法）。

(1) 基本加減法的教學必須注意下列事項：

- 在操作活動中進行，直到學生熟練，而不是強行背誦。
- 鼓勵學生獨立思考，算法容許多樣化。
- 注重與生活的連結，培養學生應用基本加減法的意識。
- 採用多種練習方式，激發學生學習興趣。



- (2) 熟練的意思是，能夠完全不用數數就知道答案。教師應配合各種活動或遊戲，寓教於樂，讓學生自然熟習（見底下釋例），不要單純死背。
- (3) 基本加減法包括：「合 10」與「拆 10」；其他十十加法與對應之減法。另外也可將加 1 與減 1；加 10 與減 10；視為基本加減法。
- (4) 由於這是操作活動，在過程中若「遊戲」布題自然用到多步驟加減混合計算（「7 加 8 是多少？再減 5 呢？」、「三個 4 加在一起是多少？」），或學生計算時運用「合 10」與「拆 10」於加減問題，應視為自然延伸之計算策略與數感，予以鼓勵，而非抑制。

### 條目範圍

基本加減法的練習，應該從學習加減法之後開始，遍及一年級的數學教學。（猶如二年級的十十乘法）。

### 釋例

1. 「基本加法」指的是一位數加一位數的加法（如下圖），「基本減法」指的是一位數減一位數及十幾減一位數的減法。透過簡單的分與合活動，學生在基本加減法的範圍，應透過基本加減法熟知加法和減法的關係。



1+1=2	2+1=3	3+1=4	4+1=5	5+1=6	6+1=7	7+1=8	8+1=9	9+1=10
1+2=3	2+2=4	3+2=5	4+2=6	5+2=7	6+2=8	7+2=9	8+2=10	9+2=11
1+3=4	2+3=5	3+3=6	4+3=7	5+3=8	6+3=9	7+3=10	8+3=11	9+3=12
1+4=5	2+4=6	3+4=7	4+4=8	5+4=9	6+4=10	7+4=11	8+4=12	9+4=13
1+5=6	2+5=7	3+5=8	4+5=9	5+5=10	6+5=11	7+5=12	8+5=13	9+5=14
1+6=7	2+6=8	3+6=9	4+6=10	5+6=11	6+6=12	7+6=13	8+6=14	9+6=15
1+7=8	2+7=9	3+7=10	4+7=11	5+7=12	6+7=13	7+7=14	8+7=15	9+7=16
1+8=9	2+8=10	3+8=11	4+8=12	5+8=13	6+8=14	7+8=15	8+8=16	9+8=17
1+9=10	2+9=11	3+9=12	4+9=13	5+9=14	6+9=15	7+9=16	8+9=17	9+9=18


此圖不見得要出現在教科書。

- (1) 建議讓學生透過多樣的活動熟練基本加減法，底下是一些可能的活動：

- 全部點數：這是最基本也是最初的加減法活動，運用數數的能力。

- 以 3+5 為例，分別拿出 3 個花片、5 個花片，從頭由 1 開始點數全部的花片（一次點數），得到 8 的答案。

 3 隻小鴨在池塘裡， 5 隻小鴨在草地上，一共有幾隻小鴨？

用  表示小鴨。



算式： $3 + 5 = \underline{\quad}$


一共有      隻小鴨。



（《部》第一冊課本 P.41）

- 以 5-3 為例，先畫出 7 個圓圈，再由原先畫出的 7 個圓圈中，畫掉要拿走的 3 個

圓圈。最後點數剩下的圓圈，得到剩下 0 的答案。

 2 圖書館裡有 7 個小朋友，走了 7 個，剩下幾個？

用 ○ 表示小朋友。



算式： $7 - 7 = 0$


剩下 0 個。



剩下 0 個，表示小朋友都走光了。

(《部》第一冊課本 P.60)

■ 向上數：以  $7+3$  為例，口中唸「7」，伸出 3 根手指，從 7 開始順數 3 得「8、9、10」，得到 10 的答案。

 1 王先生從百貨公司的 7 樓向上走 1 樓到書店，書店在幾樓？


算式： $7 + 1 =$  \_\_\_\_\_

書店在 \_\_\_\_\_ 樓。



(《部》第一冊課本 P.42)

■ 向下數：以  $8-3$  為例，口中唸「8」，伸出 3 根手指，從 8 開始倒數 3「7、6、5」，得到 5 的答案。

 1 王先生從百貨公司的 8 樓向下走 1 樓到書店，書店在幾樓？

算式： $8 - 1 =$  \_\_\_\_\_

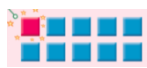
書店在 \_\_\_\_\_ 樓。



(《部》第一冊課本 P.62)

● 合 10：

■ 探索哪兩個數合起來是 10 的活動。透過圖形觀察算式的變化規律。在和 10 活動中學生應十分熟悉 10 的合成與分解。

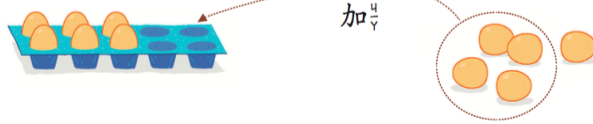


$1+9=10, 10-1=9, 10-9=1$



$2+8=10, 10-2=8, 10-8=2$

■ 以  $6+5$  為例，透過「合 10」的經驗來找出答案。例如：

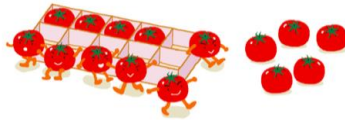


算式： $6+5=$  \_\_\_\_\_

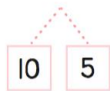
(《部》第一冊課本 P.28)

■ 以 15-6 為例，透過「合 10」的經驗來找出答案。例如：

1 15 個番茄吃了 6 個，還剩下幾個？



算式： $15-6=$  \_\_\_\_\_



把 15 分成 10 和 5，  
5 不夠減 6，  
先算  $10-6=4$ ，  
再算  $5+4$ 。



剩下 \_\_\_\_\_ 個。

(《部》第一冊課本 P.30)

● 同數相加：

■ 被加數和加數是相同的數，讓學生運用模型進行兩數相加的活動，觀察模型和數字的變化規律。例如：

1		$1 + 1 = 2$	6		$6 + 1 = 7$
2		$2 + 2 = 4$	7		$7 + 1 = 8$
3		$3 + 3 = 6$	8		$8 + 1 = 9$
4		$4 + 4 = 8$	9		$9 + 1 = 10$
5		$5 + 5 = 10$	10		$10 + 1 = 11$

(《部》第一冊課本 P.78)

■ 利用同數相加的事實來做加法。例如：

2  $7+7=14$ ，那麼  $7+8$  是多多少呢？

$7+7=14$

$7+8$  比  $7+7$  多 1。



$7+8=$  \_\_\_\_\_

(《部》第一冊課本 P.79)

2. 基本加減法中的加減關係：當學生用以上方法熟悉基本加減法後，再透過恰當的「遊

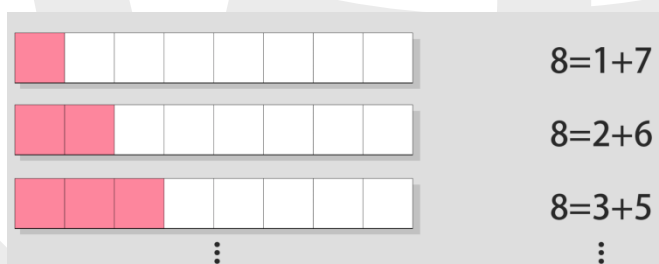
戲」，就可以熟練基本加減法中的加減關係，作為二年級加減互逆的前置經驗。

例：下圖黃框中的數加起來是紅框中的數，在空的位置填入恰當的數字。



(1) 在恰當教學單元中，可讓學生初步體會「等號」兩邊相等的意義。

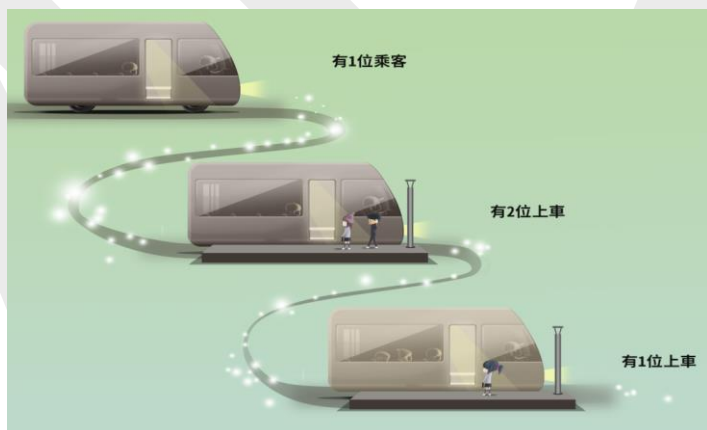
例如：哪兩個數合起來是 8？可以藉由下列圖示搭配算式紀錄來表示：



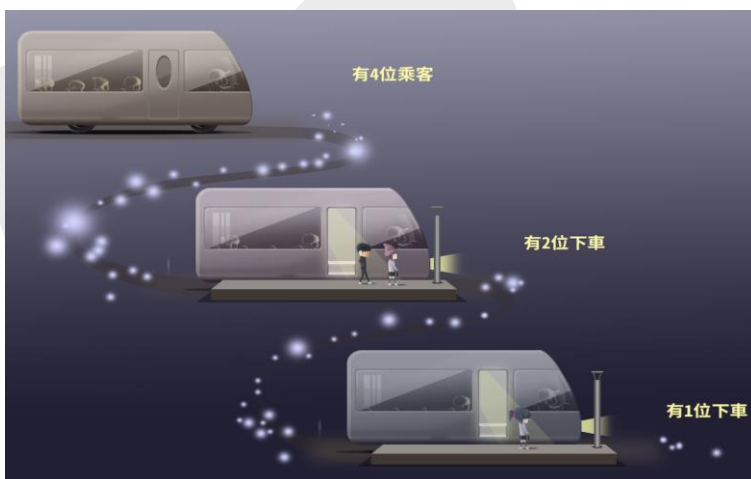
這樣的紀錄格式，建議在學生已經熟悉  $1+7=8$ 、 $2+6=8$ 、 $3+5=8$  的格式及計算之後才引入，通常安排在下學期的課程。

(2) 透過操作活動，可以用遊戲或故事情境的方式進行多步驟的加減混合計算。引導學生用心算、花片、畫圈等方式模擬真實情境，達到熟練基本加減法的目標，但不出現算式紀錄。

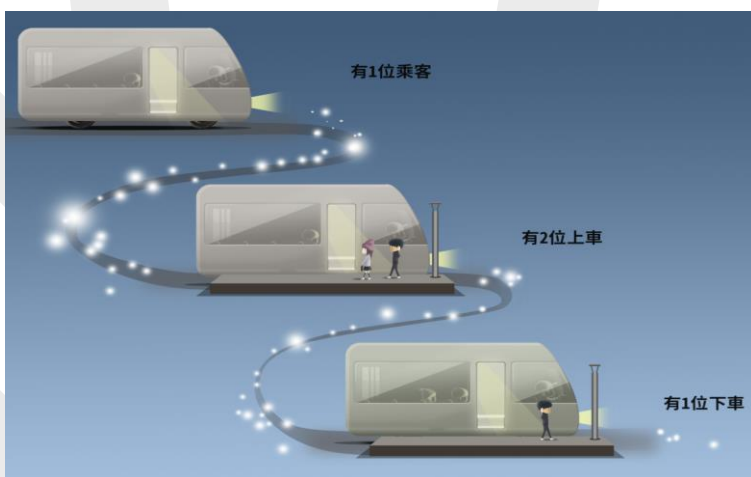
● 例：用上下公車的情境問各種混合計算的問題。



連加情境



連減情境



加減混合情境

- 例：將學生兩兩分組，進行類似如下的挑戰遊戲。  
 「3 加 7 是多少？再減 4 是多少？」  
 「4 個 3 加在一起是多少？」  
 「1 加 2，再加 3，再加 4 是多少？」

(3) 底下是一些可以用來做心算練習的活動。

- 十格板：利用十格板和花片做基本加減法。



- 心算卡遊戲

■ 例：從心算卡中找出和為 9 的心算卡，並找出被減數為 11 的心算卡，排排看，可以看到什麼規律。

- 用撲克牌遊戲玩「合十」。

### 錯誤類型

學生執著使用某些計算方式（如「數手指頭」「全部點數」），計算繁複可能發生錯誤。

(1) 例：計算  $3+7$ 。先數 3 個花片，再數 7 個花片，從頭再數一次得到答案 10。

- 建議：教師在數的教學一開頭就要鼓勵學生要多元思考與練習，才能因應不同問題，選擇恰當的計算方式。如果直接強迫學生背誦對學生並沒有利。
- (2) 減法需退位時，發生「大數減小數」的錯誤。例如：12-7 算成 17-2。
- 建議：回到具體操作或表徵解決原來問題。

## 評量

### 1. 評量重點：

- (1) 能透過操作活動等逐步熟練加 1 與減 1；加 10 與減 10；「合 10」與「拆 10」最後能不透過數數，就流利得到答案。
- (2) 能透過操作活動等逐步熟練十十加法與反向之減法。

### 2. 注意事項：

- (1) 在熟練的過程中，依照學生能力評量應從給予物件、圖示、遊戲或提示，到最後只出現算式。
- (2) 熟練後可以算式、填空題、九宮格、心智圖、樹枝圖等多元方式，要求在限定時間讓學生完成計算。

<p><b>N-1-4 解題：</b>1 元、5 元、10 元、50 元、100 元。以操作活動為主。數錢、換錢、找錢。</p> <p><b>補充說明：</b>容許多元策略，建立數感。</p>	<p>n-1-3</p>
--	--------------

連結：N-1-1、N-1-2、N-1-3。

後續：N-2-5。

## 基本說明

1. 「用錢」是數學基本的日常生活應用，若配合位值概念的教學，能收相互強化之效。「用錢」的各種活動如數錢、換錢、找錢，通常都有多元的解題策略，讓學生發展自己的想法並彼此溝通，協助建立數感，是本條目的目標。
2. 用錢所牽涉的數學，如果變成單純的課堂教學，往往顯得過於形式或瑣碎，其中所牽涉到的數感訓練，應以實際情境的操作活動來進行，若能連結一年級其他條目整合進行更佳。例如簡單的買賣活動，學生輪流扮演買方或賣方，可以提高學生的學習興趣。
3. 可進行的活動包括：「數錢」——結合數數、位值、加法，甚至針對 5 元的「五個一數」；「換錢」——除了最重要，與「一」與「十」類似的 1 元和 10 元間的轉換之外，也包括 5 元和 10 元間的轉換（10 元相當於 2 個 5 元）、10 元和 50 元間的轉換（50 元相當於 5 個 10 元）；「找錢」——除了練習換錢（以 50 元找錢、10 元找錢）之外，也可以練習如何付錢（例如買定價 42 元的東西，可以付 52 元，找 10 元）。

## 條目範圍

1. 如前所述，讓學生發展多元的解答策略，是本條目的目標，因此切忌由教師灌輸單一解題策略，多引導讓學生發展其合理解題策略。
2. 可介紹 100 元鈔票，但只做 100 元與 50 元、10 元、1 元之間的兌換。（N-2-5）
3. 本條目重點是活動，目的在加強位值認識，不是加減法教學，教師不可要求學生將問題轉換成加減計算問題。例如在本條目活動中可解決相當於進位或退位的問題，但在一年

級，除了基本加減法（N-1-3），並不作其他進退位的加減教學。

4. 本條目若做紙筆評量應注意到和加減問題作區隔，不要求學生列加減算式。

### 釋例

1. 錢幣與位值：錢幣是比較特別的教具，數學積木和數量是成比例的教具，但錢幣不是，例如 10 元硬幣的面積、體積或重量，都不是 1 元硬幣的 10 倍，有時會造成學生理解的困擾。學生應理解 1 枚十元硬幣和 10 枚一元硬幣等值是社會的約定，其他幣值的錢幣也一樣。

2. 錢幣的幣值介紹：

(1) 基本幣值（1 元、5 元、10 元、50 元和 100 元）介紹和兌換，包括：

- 5 元、10 元、50 元和 100 元錢幣分別和 1 元錢幣的兌換。
- 10 元錢幣和 5 元錢幣的兌換。
- 50 元錢幣、100 元錢幣和 10 元錢幣的兌換。
- 100 元錢幣和 50 元錢幣的兌換。

3. 數錢：結合 5 個一數、10 個一數的方式，可以快速點數多枚以 5 元或 10 元為單位的元數。當錢幣數量較多時，引導學生有策略的數，先從幣值較大的錢幣數起，也可和加法向上數的策略結合。

(2) 例 1：皮包內有多少錢？用 10 個一數數 10 元硬幣；用 5 個一數數 5 元硬幣。



(3) 例 3：2 種錢幣的組合：



● 例 4：多種錢幣的組合：



4. 透過買賣活動，引起學習動機：例如上市場、去便利商店或文具店買東西的情境。碰到需要找錢或錢不足的狀況，避免變成用加減法算式來算，而是用實際換錢、數錢的操作讓學生有更多經驗。

(1) 例 1：「想買東西，錢夠嗎？」用點數來解決問題。

2 圓圓想買手錶，她的錢夠嗎？



圓圓的錢（夠，不夠）。

(2) 例 2：「可以怎麼付錢？」

4 圓圓想要買一個水壺，她要付幾個才夠呢？



圓圓要付      個。

4個 10 不夠，要幾個才夠？

(3) 例 3：買定價 42 元的東西，可以付 52 元，找 10 元。

(4) 例 8：用到換錢來買東西，拿 5 個十元去買 38 元的東西，先將 1 個十元硬幣換成 10 個一元硬幣再去買。

### 錯誤類型

混淆幣值單位(元、錢或個)

例：(加上圖示)錢包裡有 1 個 5 元和 3 個 1 元，總是多少錢(元)？學生誤答成 4 個錢或 8 錢。

建議教師教學時避免問多少錢？宜改問多少「元」？學生若錢幣之單位「元」時「個」時，建議透過買賣活動安排數錢、換錢、找錢等「用錢」之生活應用，再配合位值概念的教學，以收相互強化之效。

(1) 混用錢幣圖示與位值表徵：

例：要將 5 個十元表徵在位值表上。

● 建議教師與學生溝通，位值表上要記錄一個數字，而且每一格上都只能記一位數字，而非記錄...

(2) 錢幣屬非等比例視覺型換算，不宜用於位值表中的表徵，易造成進退位造成混淆。

### 評量

1. 評量重點：

- (1) 能認識 1 元、5 元、10 元、50 元、100 元的硬幣或鈔票。
- (2) 能透過操作，結合數數、位值、加法等進行數錢。
- (3) 能透過操作，結合幣值間的等值關係進行換錢活動。
- (4) 能透過操作，進行「付錢」和「找錢」等「用錢」的活動。

2. 注意事項：



- (1) 本條目以操作為主，評量需配合相關的教具，採用紙筆評量時題目應包含錢幣圖示，讓學生透過畫記或圈選等方式回答用錢的問題。
- (2) 「用錢」的活動不列加法（減法）算式，除「數錢」外「換錢」、「付錢」、「找錢」的答案呈現方式常常不只一種。
- (3) 不做超過 100 元以上的「用錢」活動。
- (4) 不宜評量：用 10 元 1 元做位值表表徵，參考錯誤類(3)。

<p><b>N-1-5 長度（同 S-1-1）：</b>以操作活動為主。初步認識、直接比較、間接比較（含個別單位）。</p> <p><b>補充說明：</b>含直線與曲線。無常用單位。</p>	<p>n-l-7</p>
---	--------------

連結：N-1-1、N-1-2。

後續：N-2-11。

### 基本說明

1. 「數」透過「量」應用到日常生活。離散量五花八門，這些單位為「個」、「顆」、「隻」等等的數量與數數密切相關，通常融合在「（整）數」課程中教學。連續量包含和視覺相關的幾何量——「長度」、「角度」、「面積」、「體積」、「容量」，以及其他量如「重量」與「時間」，將會分散於各年級教學，循序漸進，其中尤以長度最為基礎和直觀易學。一年級學習的量為「長度」（本條目）與「時間」（N-1-6）。
2. 長度是學生最早學習的連續量，具有指標作用，又是數線與小數概念的入口，教師應完整處理此細目，以利後續相關學習之流暢。由於連續量除了日常應用，也與自然科學應用相關，必須藉由實際觀察與操作活動，認識長度的意義（「長短」、「高矮」等），再學習如何比較物體長短的各種方法，其活動應包含「認識長度」、「直接比較」、「長度複製」、「間接比較」、「個別單位」。較困難的長度基本概念活動，見 N-2-11。
3. 直接比較：把兩（細長狀）物，固定一端，再比較另一端的位置（這和數的比較方式一致）。透過繩索等曲線類物體，學習在比較長度時，必須先拉直後才做比較。透過直接比較，理解「複製長度」的長度相等意涵。
4. 間接比較：甲、乙兩物不（能）直接比較，透過先將甲長度複製，再拿去與乙比較。
5. 個別單位與比較：學習如何透過身邊的「個別單位」（如：手臂長、掌幅、步幅、紙條、筆、橡皮擦、書長、迴紋針等），測量一物的長度。並以此方法測量兩物長度，再結合數的比較來比較兩物的長短。我們強調學生要在實際操作中，確定這個方法適用。
6. 利用「單位」做測量而得到「長度」的量，讓「長度」與「數」的教學產生密切連結。除了比較之外，本條目也應處理長度的合成分解活動（加減法），作為長度加減（N-2-11）與數線加減（N-3-11）的先備經驗。例如討論兩繩接起來的「長度」和各別的「長度」的關係，或討論一繩剪斷後，繩子原長度，和部分長度的關係。
7. 學生應知道測量長度時，應該找方便而恰當的「單位」。例如測量教室的長度，用步幅為單位比用迴紋針恰當。讓學生討論為什麼某些「單位」比較方便或恰當。
8. 從操作活動的教學中，建立「距離」的認知，以利日後的溝通。從操作活動的教學中，察覺兩點之間的線（繩子），以直線為最短；兩點之間以直線距離最短。

### 條目範圍

1. 教學中要包含直線物與曲線物，以方便學生處理為原則。
2. 不做常用單位如「公分」、「公尺」的教學。（N-2-11）
3. 運用「個別單位」測量時，經常會出現無法剛好的情況，只需要運用「長一點」、「短一點」、「大約」等口語即可。
4. 在基本說明（5）的活動中，可能會觸及較長的「單位」量出來的「長度」會比較小的議

題。但這不是一年級學生必要學習的內容，教師斟酌現場情況處理即可。(見 N-2-11)

5. 留意長度保留認知尚未充分發展的學生，在多次經驗後，讓學生知道同一物長度在各種時空移動中不會改變。

### 釋例

1. 長度的初步認識與直接比較：「長短」、「高低」等長度用詞需透過直接比較才能真正理解，教師也比較容易說明「長度」的意思。

(1) 初步介紹長度：教師引導學生認識長度教學經常使用的工具，如鉛筆、繩子、黑板的邊緣、長方體盒子的邊緣等。教師以指尖沿物品一端徐徐移動至另一端，強調直線段「長度」之認識。

(2) 直接比較：不透過媒介物而將兩個(或多個)個物直接作比較。

- 物品兩端未對齊，但有包含關係。這是最直接而直觀的比較。

例：下面兩輛車子，哪一輛比較長？



- 典型的長度直接比較：先對齊比較物的一端，再比較另一端位置的遠近，直接比較二物的長短。

■ 例 1：比較左圖三條紙條的長度？（圖示物品靠右對齊）



■ 例 2：誰比較高？



- 曲線物的長度比較：教師引導學生先將曲線物體拉直後才比較。

■ 例：讓學生進行二條彎曲繩子的長度比較？

藉由各種行度直接比較的討論，豐富與「長度」相關的語彙如長短、遠近、高矮、厚薄、粗細。

2. 長度的複製：將一物長度仿製到另一物上，藉由直接比較，知道其等長相等。複製是長度教學的重要操作與工具。

(1) 完整複製：這是最基本的長度複製。

- 例 1：以繩子剪出和書桌指定邊等長的段落。

- 例 2：在木條或繩子上做記號，使一端至記號處和原物等長。

(2) 長度的合成與分解：將一繩子剪斷成兩段，則兩小段繩子前後相接的長度，會等於原繩的長度，表示「兩小段繩子長度可合成原繩長度」或「原繩長度可分解成兩小段繩子長」。長度的合成與分解是長度的基本性質，和個別單位測量、長度加減法都有關。

(3) 累積複製：利用長度的合成性質，用不同物件頭尾相接成一線，此線長度和被複製物等長。其中最重要的特殊情況，是使用許多全等物件（如迴紋針、鉛筆，等長繩段）的

累積複製。這種以同一物件的累積複製是個別單位比較的基礎。



(4) 彎曲物的長度：

彎曲物如水桶的把手、圓罐的周界、身體的腰圍、樹圍等，都可以利用柔軟的繩子去複製，拉直後做為彎曲物的長度。

(5) 長度的間接比較：當要比較的兩物無法使用直接比較時，可複製其中一物的長度，再將複製物與另一物作直接比較，這種比較稱為「間接比較」。間接比較是使用器械測量長度的基礎。

例：「學校 A、B 兩棟大樓的裡的教室黑板是不是一樣長？」

因為無法將 A 大樓教室的黑板搬到 B 大樓去直接比較，所以先拿一條繩子把 A 大樓教室黑板的長邊複製下來，再拿去 B 大樓和那邊的黑板的直接比較。

3. 長度的個別單位測量：

(1) 個別單位測量：藉由釋例 (2) 中以同一物件累積複製的想法，選定一個物件甲作為測量的 (個別) 單位，進行累積複製再點數所需的物件數目，就是該物體以此物件甲為單位的長度。例如釋例 (2) 中藍色長方形的一邊是「7 個迴紋針長」。

(2) 使用個別單位測量長度時，經常無法剛好量完。基於學生數學經驗不足，對於多一點或少一點的情況，可用「大約」一詞帶過。

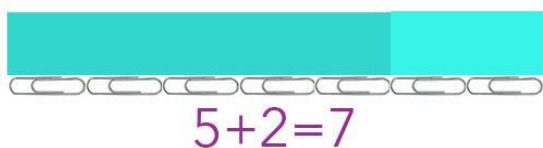
(3) 為了避免用太小的單位量太大的東西 (或反過來)，如何選擇恰當的個別單位，是學習長度的重要課題，也是學生長度量感的一部份。鼓勵學生從身邊常見物選用恰當單位，如指幅、手叉、步幅、二手張開之長、迴紋針、小白積木、橘色積木等。

4. 長度的個別單位比較：以選定的個別單位，測量兩比較物，再以所得兩物長度做比較。透過個別單位的測量，把長度量轉化為數，把長度比較轉化為數的比較 (N-1-1)，建立了數和量的密切關係。

例：續釋例 (3) 「A、B 兩棟大樓教室的黑板長度比較」。

準備長度相同的繩子當做個別單位，測量後 A 大樓黑板為 6 段長，B 大樓黑板為 8 段長，8 比 6 大，所以 B 大樓教室黑板比較長。

5. 長度的加減：利用個別單位的測量，可以將長度的合成和分解，轉化成數的加減問題 (如下圖)。一年級只做最基本的討論活動即可。



例：將一繩 A 剪成兩段 B 和 C，若用指幅作為個別單位測量，得 A 長為「13 指幅長」，B 長為「8 指幅長」，則 B 的長度為  $13 - 8 = 5$ ，是「5 指幅長」。

6. 關於長度保留概念的小叮嚀：所有以上的長度概念，都奠基於一個長度保留的假設：「長度是不變的」，如此長度概念才有意義，長度的複製、以複製做間接比較、長度的合成分解、以個別單位測量等等才都有意義。長度保留是人類認知發展的一部份，因此教師不需強行教導，只要長度單元的教學充份而多元，許多學生都不會有問題。但教師仍應觀察在長度學習上較遲緩的學生，注意學生是否有這方面的問題。認知較遲緩不是錯誤，也不是學習力有問題，只要教師能寬容等待，大多數學生最後會自然跟上。

### 錯誤類型

1. 直接比較時 (除了包含的情況)，一端未對齊，逕行比較另一端位置。  
建議：用生活化的例子 (如佔不同台階比較身高) 提醒學生。

- 曲線未拉直，以為曲線的長度比直線短。  
建議：比較拉直的繩子，將較長繩彎曲「變短」，讓學生領會其錯誤。
- 許多學生犯錯是因為「保留概念」未成熟，見釋例（7）

### 評量

- 評量重點：
  - 能從日常生活情境初步認識長度。
  - 能透過操作進行長度的直接比較。
  - 能透過操作進行長度的間接。較（含個別單位）。
  - 能運用方便而恰當的長度「個別單位」進行測量和比較。
- 注意事項：
  - 在做比較時，要將比較物件（如繩子）擺直比較，有彈性的物件可暫不在此處處理。
  - 直接比較時提供至少一個可移動的長度物件。
  - 間接比較需透過複製再比較，若要採用紙筆評量，評量時除題目中的圖示外，應提供適宜做長度複製的物件，以供操作解題。

<p><b>N-1-6 日常時間用語：</b>以操作活動為主。簡單日期報讀「幾月幾日」；「明天」、「今天」、「昨天」；「上午」、「中午」、「下午」、「晚上」。簡單時刻報讀「整點」與「半點」。</p> <p><b>補充說明：</b>以教師和學生在教室中溝通之時間用語為原則。非時間單位結構之教學。簡單日期指日曆之「幾月幾日」，不含曆法結構。時刻以鐘面教學。簡單鐘面時刻限「整點」與「半點」。</p>	n-I-9
--	-------

連結：N-1-1。

後續：N-2-13、N-2-14。

### 基本說明

- 時間是另一種常用量，但是在學習上比較抽象，更因為時間的應用情境與時間單位換算都比較複雜，因此時間量的學習將遍及整個小學階段。
- 由於時間無法重來，許多在幾何量常用的認識與比較方法（見 N-1-5），受到很大限制，學生也不易體會。因此時間教學與計時工具的使用密切相關。另外，一年級時間教學，首重日常時間用語的學習，以利教師日後在各科教學之溝通。
- 在可以比較的情況（同時開始的事件如賽跑、計時競賽），學習「時間比較長」、「時間比較短」的用法。利用故事與日常經驗結合，讓學生分辨事件發生的「先」、「後」。這些比較用語，前者和事件時間長短（時間量）有關，後者和事件發生的時刻有關，這是兩種時間應用的原型。另外，建立一定時間量感後，可討論如「刷牙時間比吃一頓飯時間短」之類的比較。
- 由學生的活動與睡眠起居經驗，學習使用「明天」、「今天」、「昨天」等時間用語，知道其先後順序。接著擴展其理解，以月曆或日曆讓學生簡單報讀「今天」、「昨天」、「明天」是「幾月幾日」或「星期幾」。
- 以各種生活經驗（太陽起落、天空亮暗、吃飯時機等），學習「上午」、「中午」、「下午」、「晚上」等時間用語。
- 用鐘面學習簡單時刻報讀，以「整點」與「半點」為限。再連結（5），學習使用「上午 9 時」、「晚上 7 點半」的用法。
- 以上（5）和（6）的學習中，可用鐘面工具問學生指定時刻的前（或後）1（或 2）小時

的時刻。若溝通清楚，也不妨用日曆、月曆等問學生「前 1 天是幾月幾日」之類的問題。

## 條目範圍

1. 一年級的教學重點，以師生在教室溝通之時間用語為主要原則。不做時間單位結構之教學。(大單位見 N-2-14、小單位見 N-3-17。)
2. 簡單日期指日曆之「幾月幾日」，不含曆法結構教學，也不處理月曆或年曆上的模式 (N-2-14)。簡單時刻指「整點」與「半點」，不處理其他時刻 (N-2-13)，也不處理 24 小時制 (N-4-13)。
3. 基本說明 (7) 的教學只限於很簡單的情況，讓學生知道時刻和「數」之間的連結即可，前或後之數字以 2 為限，尤其不可碰觸週期性約定的邊緣 (如「3 月 31 日下一天是幾月幾日」、「晚上 11 點睡覺，1 小時後是幾點。」)。(N-2-14、N-4-13)
4. 依照師生溝通的原則，「中午」、「晚上」一詞在此不需有嚴格定義。
5. 「上午 12 點 vs. 下午 12 點」之溝通：對於端點時刻牽涉到溝通約定，於此階段，建議暫不碰觸。
6. 電子鐘：若學校使用電子鐘，建議盡量調成非 24 小時制。教師可告知「幾時幾分」的溝通約定，但不做其他教學。

## 釋例

1. 從日常經驗，學習「先」、「後」，「長 (久)」、「短」的日常用語。
  - (1) 例 1：運用學生熟悉的生活情境，讓學生討論並比較生活事件 (「起床」「吃早餐」「上學」「吃中餐」等) 發生的先後。確定學生會正確使用「先」「後」的語詞。
  - (2) 例 2：運用學生熟悉的生活情境，讓學生討論並生活事件所花時間的長短。教師應選擇容易分辨時間長短的事件，如「刷牙和洗澡」、「戴帽子和穿外套」。
2. 認識「明天」、「今天」、「昨天」、「幾月幾日」或「星期幾」等時間用語
  - (1) 從學生的日常生活入手，討論學校或家裡「明天」、「今天」、「昨天」的活動。
  - (2) 以月曆或日曆為工具，報讀「明天」、「今天」、「昨天」是「幾月幾日」以及「星期幾」。
  - (3) 以月曆報讀請學生回答一些簡單的日期問題 (如假期、生日)，但不牽涉到月曆的結構。
  - (4) 學生應認識「明天」、「今天」、「昨天」是相對於今天的時間用語，但日期則是「絕對的」。
  - (5) 教室中應佈置月曆，作為日常溝通之用，並鼓勵學生觀察和探索。
3. 認識「上午」、「中午」、「下午」、「晚上」等時間用語：從學生的日常生活經驗入手，知道太陽高掛頭時是「中午」，之前是「上午」，之後是「下午」，天黑睡覺時間是「晚上」。
4. 簡單時刻報讀。
  - (1) 老師教導學生如何看鐘面，學生能從長針和短針的位置讀出「幾點」或「幾點半」。



1 點

2 點

3 點半

- (2) 配合鐘面知道中午 12 點之前是「上午」，之後是「下午」。也能結合釋例(3)，使用「上午 9 點」、「下午 4 點」、「晚上 7 點半」的時間用語。
- (3) 不必強調「中午」的嚴格定義，尤其不要說中午就是 12 點。
- (4) 由於缺乏精確的鐘面教具，為避免誤導學生的學習，建議若想進行撥鐘教學應只限於教師示範。事實上一年級的時刻教學，撥鐘並非必要。而且教室若已有真正掛鐘，學生能真正結合時刻與實際生活，遠比撥鐘來得更重要。若學生想嘗試撥鐘，提醒學生應順時鐘撥轉。
- (5) 電子鐘並非標準教具，也比較看不出時間結構，但因為使用者日多，為師生溝通方便，若有必要也可進行基本教學，以能溝通為原則。

### 錯誤類型

1. 混淆時間量與時刻的概念，亦即混淆「先後」和「長短」。以為先發生的事件比較長，但事實上事件已經結束。

### 評量

#### 1. 評量重點：

- (1) 能依照日常生活情境排出事件發生的先後順序。
- (2) 能依照生活經驗比較事件所花時間的長短。
- (3) 能在日常生活或情境中正確使用簡單時間用語，如「明天」、「今天」、「昨天」、「上午」、「中午」、「下午」、「晚上」。
- (4) 能使用月曆或日曆報讀「幾月幾日星期幾」。
- (5) 能報讀鐘面時間（「整點」與「半點」）。

#### 2. 注意事項：

時間的評量須提供相關的計時工具或情境，紙筆評量受比較多的限制，題目中應包含相關計時工具（鐘面、月曆等）。

<b>S-1-1 長度（同 N-1-5）：</b> 以操作活動為主。初步認識、直接比較、間接比較（含個別單位）	n-l-7
---	-------

**補充說明：**含直線與曲線。無常用單位。

各項說明請參見 N-1-5。

<b>S-1-2 形體的操作：</b> 以操作活動為主。描繪、複製、拼貼、堆疊。	s-l-1
--	-------

**補充說明：**拼貼可做簡單拼圖、鑲嵌（壁磚）活動。堆疊為立體圖形。

**連結：**D-1-1。

**後續：**S-2-1、S-2-2。

### 基本說明

1. 本條目目標是透過各種形體的操作活動，讓學生體驗基本的幾何操作。例如移動物品或複製圖形時，可能會做平移、旋轉、翻轉、比對、疊合等操作，也可能察覺到全等或對稱的現象，這些都是日後幾何學習的先備經驗。
2. 描繪：如依照老師給定的圖形，進行塗色。

複製：如利用透明紙描繪，複製一全等圖形。

拼貼：如簡單的平面圖形拼圖；幾何造型製作或仿製；簡單幾何圖形鑲嵌。

堆疊：依照圖片指示，做簡單立體圖形的堆疊（堆積木）。

前三者是平面活動，後者是空間活動。由於簡單幾何形體容易掌握與判斷，可在這些活動中運用，作為 S-2-2 的前置經驗。

3. 活動重點在啟動或刺激學童的幾何直覺，不做構成要素的教學。做溝通時，也可以讓學童隨意發揮，啟發學童自己對形體結構的體驗。

### 條目範圍

1. 本條目重點在幾何體驗，而非幾何圖形與概念的教學。學生在入學前，可能已經知道一些簡單圖形名稱，若有教學需要，可使用這些名稱，但僅限於溝通。至於圖形構成要素、嚴格定義，甚至「全等」、「對稱」等名詞都不該出現在一年級教學現場（見 S-2-1 和 S-2-2）。一年級不做形體命名活動。
2. 依照一年級認知程度，本條目的相關拼圖教學活動和坊間拼圖應有明顯區別。拼圖活動所使用的幾何元件，應簡單且容易區分（除非全等）；若牽涉相似圖形的放大或縮小，其大小應有明顯區別（例如不同大小的正方形）。
3. 活動的難度，須考量學生的年齡。低年級學生肌肉還不能做細密協調，教師不宜做太過精確的要求。
4. 本條目不適合做紙筆評量。

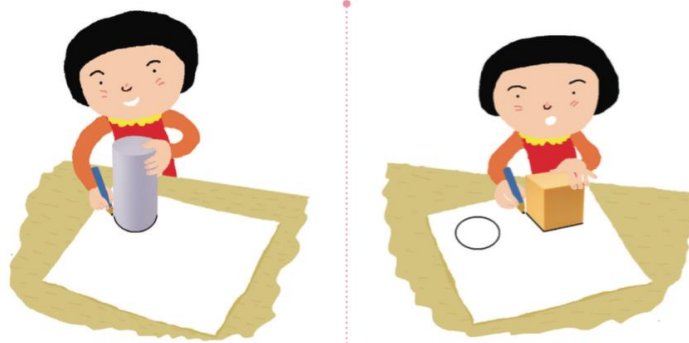
### 釋例

1. 描繪與複製：

- (1) 例 1：師生準備造形圖樣（如圖卡或積木），讓學生沿著造形的其中一個面之外緣作描繪，並描述其形狀。



《部》課本第一冊 P.56)



（《部》課本第二冊 P.70）

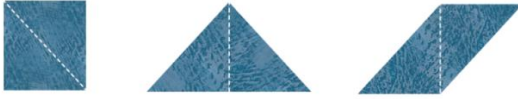
- (2) 例 2：拓印活動（將上述活動改為塗色再拓印或以蓋印章的方式進行）。
- (3) 例 3：教師給定圖形或圖卡，讓學生沿外緣描繪或利用透明紙複製。

以上教學應與 S-2-1 和 S-2-2 區別。(見條目範圍(1)之說明)。

2. 拼貼：幾何造型、看圖拼貼、拼圖等活動可讓學生進行平移、旋轉、翻轉(鏡射)等全等運動，以及比對、疊合等全等操作，又能學習辨認簡單平面圖形，是進行本條目的重要活動。

(1) 例 1：看圖拼貼。

② 用兩塊拼出下面的圖形。

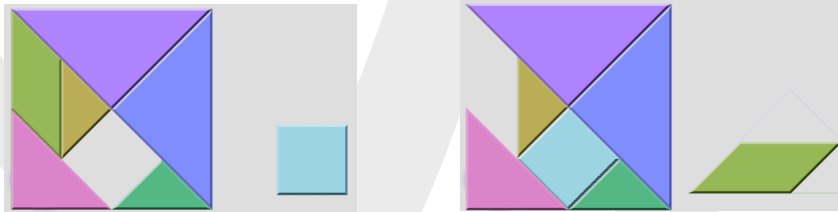


④ 用兩塊拼出下面的圖形。



(《部》課本第一冊 P.57)

(2) 例 2：幾何圖案的造形活動(含鑲嵌)。將下面圖形板放入拼圖中。



3. 堆疊：透過積木或實物組合等造形活動，經驗空間幾何活動。

(1) 例 1：師生準備空瓶、空盒、空罐、造形積木等，讓學生進行造形活動。

用你帶來的東西做做看，可以組合成什麼呢？



(《部》課本第二冊 P.66 改製)

(2) 例 2：教師準備實物(或圖片)和方塊，請學生依圖作造形活動。



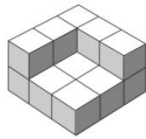
3 拿出積木來排出下面的立體形體。每個立體形體用了幾個積木？

①



有    個積木。

②



有    個積木。

(《部》課本第二冊 P.69)

### 錯誤類型

1. 學生不知道可做旋轉或翻轉，建議多做拼圖活動，理解其必要性。如下圖做七巧板拼圖，若學生只會將綠色平行四邊形做旋轉，就無法拼成正方形。



2. 空間圖示只有一個方向，學生剛開始可能無法完成，教師應鼓勵學生多做嘗試，從錯誤和觀摩中學習。

### 評量

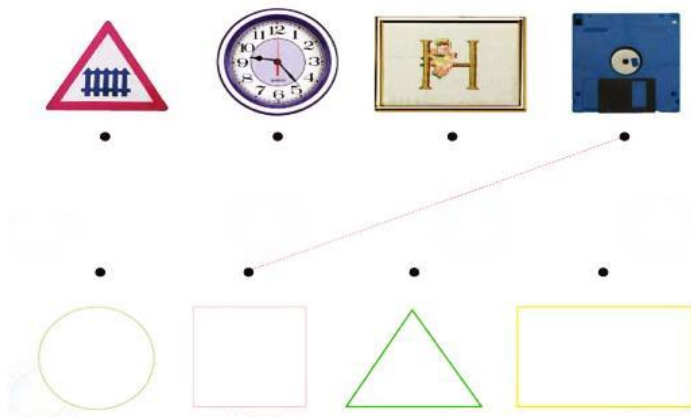
1. 評量重點：

- (1) 能透過操作，完成圖形的描繪、複製、拼貼與形體的堆疊。
- (2) 能在操作過程中體驗形體的平移、旋轉、翻轉、比對、疊合等操作。

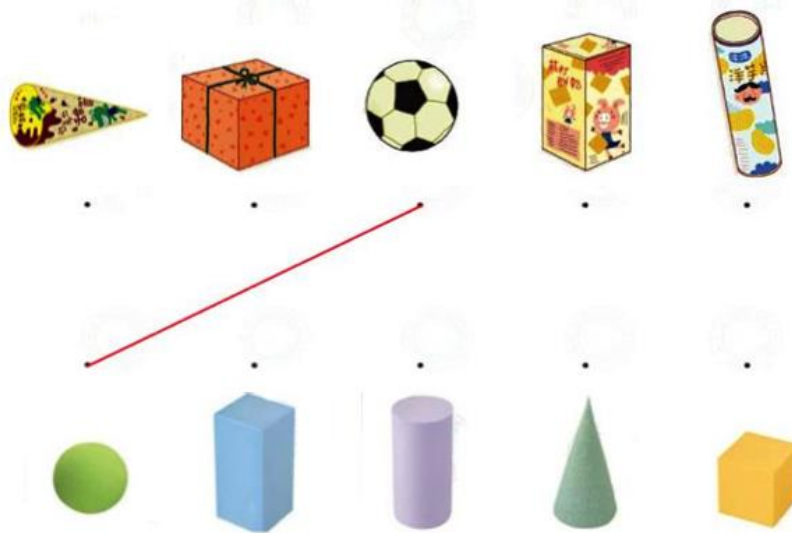
2. 注意事項：

- (3) 本條目以多元評量為主，若採紙筆評量則須提供相關物品（如複製、拼貼需提供物件或膠水），或限制評量目標（如立體堆疊不適合紙筆評量）。
- (4) 紙筆評量可用連連看題型，提供充分的視覺線索。讓學生將很像的形體。

- 例 1：把看起來和很像的圖形連起來。



- 例 2：把看起來和立體積木很像的東西連起來。



**R-1-1 算式與符號**：含加減算式中的數、加號、減號、等號。以說、讀、聽、寫、做檢驗學生的理解。適用於後續階段。

**補充說明**：此條目包括小學之後的學習，不再另列條目。本階段應在加減法單元中完成，不需獨立單元教學。

r-1-1

**連結**：N-1-2。

**後續**：N-2-6、N-2-10、R-2-1。

### 基本說明

1. 恰當運用算式與符號，有利於學生對數學的理解、思考與分析，增進學生間與師生間之溝通。確實使用各種數學符號，也能讓學生體會數學的嚴格性與普適性。
2. 算式與符號的使用基於約定，就像學習新語言一樣，必須有練習使用與確認的過程。因此和學習「數」類似（N-1-1），教師必須以說、讀、聽、寫、做的教學，讓學生多加練習，確認學生使用算式與符號的正確性，以利後續師生溝通，並納入學生日常使用的語言。其中「做」，包括在加減法教學時能列出正確的算式，以及能針對給定算式擬題（N-1-2）。
3. 一年級所學習的算式與符號，主要是阿拉伯數字和加減法的算式（包含「加號」、「減號」、「等號」）。為了建立正確的格式，教師可使用「被加數+加數=和」與「被減數-減數=差」的表示法來協助教學（但不放入評量）。
4. 在恰當教學單元（如 N-1-3），可讓學生初步體會「等號」兩邊相等的意義。例如「合十」活動中，問題「10 可以寫成誰的和？」，教師可以將學生提議的結果記錄成  $10=1+9$ 、 $10=2+8$  等，作為後續學習的前置經驗。

### 條目範圍

1. 本條目雖只出現在一年級，但其立意與教學過程應包含在後續數學課程中。
2. 此條目應在 N-1-1、N-1-2、N-1-3 的教學中一起完成，不需另立單元教學。
3. 在小學時，減法算式裡「被減數」比「減數」大的要求是一種約定。在減法解題時，教師要注意學生不可寫錯被減數與減數的位置（N-1-2）。
4. 學生初期常將「等號」視為「紀錄計算結果」的符號，建議基本說明（4）的「等號」記

錄方式應等到一年級下學期，加減法計算的學習穩固後才施行，而且只作為活動結果的紀錄之用。

除了基本說明(4)，等號的其他使用方式在一年級不宜介紹：如在 N-1-3「基本加減法」中混合加減練習的活動結果，不宜寫成算式；不用等號連接算式，如「 $2+3=1+4$ 」「 $2+5=5+2$ 」；不使用連續的等號連結算式，例如「 $6+7=6+4+3=10+3=13$ 」。

**釋例(參見 N-1-2、N-1-3)**

**錯誤類型(參見 N-1-2)**

**評量(也可參見 N-1-2)**

1. 評量重點：

- (1) 能正確執行算式與符號的說、讀、聽、寫、做。
- (2) 能正確列出加法和減法算式，說明算式中符號或數量在題目中的意義。

2. 注意事項：

- (1) 在教學中就要邊做評量，檢查列出算式需與題意相符(數字順序合理、使用符號正確)，並能做正確計算。若有疑義應請學生說明。
- (2) 若要學生圈選正確算式，選項應避免「 $1=7-6$ 」這類不熟卻正確的算式。

**R-1-2 兩數相加的順序不影響其和**：加法交換律。可併入其他教學活動。

**補充說明**：先用「併加型」(合成型)情境說明，再應用於其他情境。不出現「加法交換律」一詞。

d-I-1

**連結**：N-1-2、N-1-3。

**後續**：R-2-2。

**基本說明**

1. 「計算規律」的學習，應先透過最合理的情境，讓學生自然接受規律「顯然」的正確性；其次，恰當安排練習，讓學生體會運用規律的好處；最後在其他情境中運用「計算規律」。
2. 本條目學習目標為熟悉「兩數相加的順序不影響其結果(和)」。教師從合成分解模型相關情境進行教學，最容易解釋。
3. 當學生理解這個規則後，就可以應用在各種加法問題上，不應受限於情境。
4. 應併入 N-1-2 的教學中一起完成，不需另立單元教學。

**條目範圍**

1. 課本或上課時不出現「加法交換律」一詞。
2. 在一年級，學生只要能靈活運用此規律即可。教師教學時不應列出底下的算式，也不可如此評量：「 $3+48=48+3$ 」、「 $3+48=48+3=51$ 」。

**釋例**

1. 透過併加型的情境，經驗「兩數相加的順序不影響其和」。
  - (1) 例 1：「小明左手有 5 顆彈珠，右手有 7 顆彈珠，一共是多少顆？」
  - (2) 例 2：「池塘裡有 5 隻小鴨，岸上有 2 隻小鴨，一共有幾隻小鴨？」合成(併加)型問題是理解「加法交換律」的自然情境。
2. 恰當安排練習，讓學生產生運用「加法交換律」的需求。

例：計算  $1+69=()$ 、 $2+59=()$  等，問括號裡的答案是多少？

讓學生體會轉換成  $69+1$ 、 $59+2$ ，可大量減少計算負擔，而樂於使用。

3. 在其他類型情境，體會如何理解這個規則，更進而運用這個規則。

(1) 例 1：「動物園管理員每天餵食美猴王，早上給牠 3 根香蕉，傍晚再給牠 4 根，美猴王一天共吃多少根香蕉？」

(2) 例 2：「小明有 3 元，媽媽再給他 49 元，小明有多少元？」

簡單的例 1 可供學生思考為何加法交換律成立。例 2 更強調學生列成算式  $3+49$  之後，運用釋例 (2) 的經驗，交換順序用  $49+3$  來計算比較簡單。

### 錯誤類型

學生將加法交換律錯誤類推至減法問題，列出錯誤之減法算式（同一錯誤現象之另一原因見 N-1-2）。

例：「小明有 3 元，小華有 5 元，小明比小華少多少元？」學生以為可交換，故不注意「被減數」和「減數」的位置，列成錯誤的  $3-5=2$ 。

建議：教師應確實理解學生錯誤的成因，回到 N-1-2 或 R-1-1，加強學生理解減法的意義與減法算式的正確記錄方式。

### 評量

1. 評量重點：

能理解「兩數相加的順序不影響其和」，並能活用。

2. 注意事項：

雖然加法交換律很簡單且常用，但在學習加法初期，依照不同情境，教師仍應評估學生對此規則的熟悉度，彈性處理加數與被加數在列式時互換的狀況，讓學生說明算式的合理性。

3. 評量示例：

(1) 例 1：下列哪一個選項算出來的答案最大？**圈圈看**  
( 45+3      3+45      45+6      2+45 )

(2) 例 2：下列選項中，哪一組算出來的答案是一樣的？

①  $14+53$  、  $14+35$  。

②  $38+69$  、  $69+38$  。

③  $5+78$  、  $78+4$  。

④  $29+37$  、  $38+29$  。

<b>D-1-1 簡單分類</b> ：以操作活動為主。能蒐集、分類、紀錄、呈現日常生活物品，能報讀、說明已處理好之分類。觀察分類的模式，知道同一組資料可有不同的分類方式。	d-l-1
<b>補充說明</b> ：非正式表格與統計圖表。	

連結：N-1-1、N-1-2、S-1-2。

後續：D-2-1。

### 基本說明

1. 低年級資料條目 D-1-1 和 D-2-1 的重點不在介紹正式表格或統計圖，而是從操作活動，初步學習資料的報讀、說明、蒐集、分類、記錄、分析、溝通。一年級處理日常生活或

學校常見物品；二年級則更強調和數學相關的物件如幾何形體，以及更深入的分類概念。低年級的圖表是跟學生比較容易溝通的非正式圖表，記錄物件數目的符號也不見得是數字，可以發揮學生的創意。




2. 本條目的重點，是學生能模仿給定的範例，學習蒐集、分類、製作出自己的分類圖表，同時也能理解老師或其他同學的分類紀錄。
3. 知道圖表中的數目符號或數字與實際資料的對應關係（點數）；知道圖表分項基於某種分類，並能察覺與說明分類根據的模式或特徵；能回答老師根據圖表所提出的問題；能製作自己喜歡的圖表，將資料整理、呈現並說明。
4. 認識因特徵不同，同一組資料可有不同的分類方式。例如一群同學可分成不同性別、不同血型、不同星座、不同街區、不同姓氏、.....。
5. 學生學習分類可能有很多不成熟的想法，老師可強調兩個重點並多做溝通：第一，分類所依據的是同一個概念下的不同分組；第二，同一物體出現在兩個類別中，反映分類可能不妥當。

### 條目範圍

1. 本條目只處理非正式、適合低年級學生的圖表。正式統計圖表教學見 D-3-1、D-4-1、D-5-1、D-6-1。
2. 一年級處理分類只需要簡單明確、言之有物。教師需要恰當安排教學活動，達成本條目「同一組資料可有不同的分類方式」的目標。(更難分類見 D-2-1)

### 釋例

1. 報讀、說明生活情境的「非正式圖表」，說明其意義  
例：小強做了一張圖記錄桌上的東西。說說看，這個圖表記錄了什麼？

		
下	-	正

學生學習理解「圖表」中各種記號的意思，並能說明「圖表」中分類的依據、數字或數量劃記的意義。教師可視情況以問題引導。可告訴學生諸如「正」這類邊點數邊畫記的常用方式，同時強化「五個一數」或「十個一數」的能力。

2. 蒐集、分類、記錄生活中常見的資料。  
可先學習分類的範例，再學習分類。分類只談合不合理，沒有一定正確的分類方式。教師教學應注意所選擇的物件具有多種分類可能。

(1) 例 1：回收的瓶罐怎麼分類。



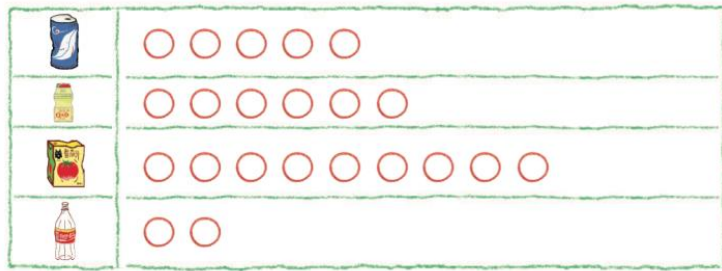
(《部編本國小數學》第一冊課本 P.50)

● 教師詢問學生下列問題，必要時加以指導。

- 有沒有幫忙做過資源回收？
- 這些回收物品可以怎麼分類？
- 拿出一張紙，依照你的分類方法，做一張你自己的分類圖表。

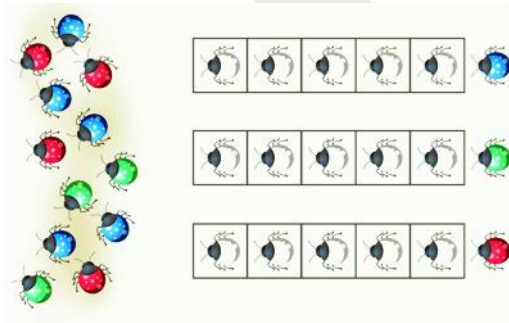
(2) 例 2. 學生的紀錄方式為非正式圖表，不要求格式一致。以下為圖表示例：

● 一個圓圈代表一個回收物品，用畫圈表示資源回收物品的數量。



(《部編本國小數學》第一冊課本 P.50)

● 用塗色表示不同顏色瓢蟲的數量。



(3) 例 3: 給學生一堆動物圖卡，學生可討論要怎麼分類(如腳數、有無翅膀、有無尾巴、...)，可和自然課程統整學習。

### 錯誤類型

1. 學生的點數錯誤，請參考 N-1-1。

2. 教師應謹慎處理所謂「分類錯誤」的問題。原則上，學生只是發展自己的分類想法，教師應請學生盡量發表自己的想法，並依據他的想法來指出其數據是否有缺失、分類是否有疏忽、在同一分類原則下出現一物多類等等問題，而非斷然判斷其對錯。

例：學生可能同時將「出生月」與「年齡」混在同一個分類中。

## 評量

### 1. 評量重點：

- (1) 能透過蒐集日常生活或學校常見的物品，以合理特徵，做簡單分類。
- (2) 能將簡單的分類資料（結果），製作出合理、簡易的分類圖表紀錄。
- (3) 能報讀簡易的分類圖表記錄，並說明分類的方式或依據。
- (4) 能透過觀察分類的模式或特徵，知道同一組資料可有不同的分類方式。

### 2. 注意事項：

- (1) 本條目適合多元（操作）評量，在紙筆評量上需考慮操作為主的特性與多種分類的可能。依據評量目標，題目中宜呈現相關資料的圖示或圖表。
- (2) 紙筆評量只適合根據題意給定的分類問問題，不適合用來檢驗學生的分類方式。

<p><b>N-2-1 一千以內的數：</b>含位值積木操作活動。結合點數、位值表徵、位值表。位值單位「百」。位值單位換算。</p> <p><b>補充說明：</b>能局部前後數數。點數位值積木，並熟練「十個一數」「百個一數」的模式。</p>	<p>n-l-1</p>
--	--------------

先備：N-1-1

連結：N-2-2, N-2-5, R-2-1

後續：N-3-1

## 基本說明

1. 在二年級，以點數具體物件認識數不再是主要方法，應結合點數、位值積木、位值表來認識新的數與應用。學生應知道如何以所學規則類推新的數。
2. 新增位值單位為「百位」。學生應理解三位數的位值意義，並能以說、讀、聽、寫、做，表示並應用三位數。
3. 能運用位值做數的大小比較，知道比較時先比高位數的道理。
4. 認識 100、10 和 1 的關係，其中新單位換算關係為「1 個百是 10 個十」、「1 個百是 100 個一」。並能運用這些關係，進行數的化聚活動，尤其著重和加減法「進位」與「退位」相關部分的學習。
5. 能做局部數數（含順數與倒數），並多練習較困難的數詞序列，如「過百」(199→200→201；601→600→599)；三位數「過十」(如 349→350→351；251→250→249)；從 1000 局部倒數如 1000→999→998。
6. 能結合位值與局部數數，完成「199+2」「301-3」等「加減計算」。
7. 能結合位值（含點數位值積木）與數數的學習，熟練「十個一數」、「百個一數」的模式。先從最簡單的整十、整百開始，如 280→290→300→310；400→500→600。再做「連續加 10」、「連續加 100」的數數活動，如 298→308→318；125→225→325。倒數較難，教師應斟酌現

場狀況處理。

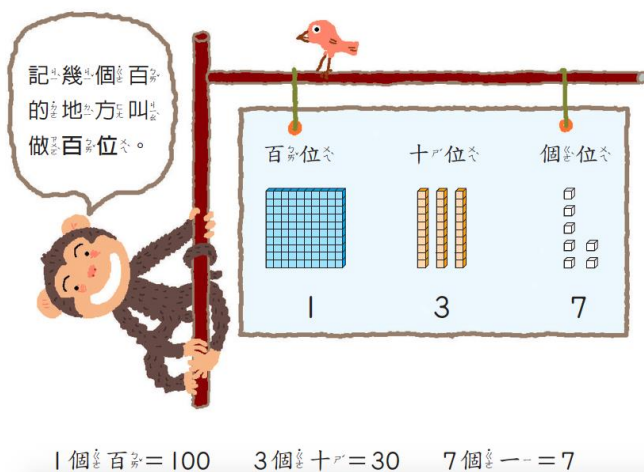
### 條目範圍

1. 教學可數到最後的「1000」，但不進行超過一千的教學。(N-3-1)
2. 能局部前後數數即可，並運用於簡單加減法，此時被加數和被減數限個位數。二年級不再練習冗長的數數，尤其是倒數。
3. 熟習「十個一數」、「百個一數」時，倒數部分較難，不列入評量
4. 數的比較參見 R-2-1。


### 釋例

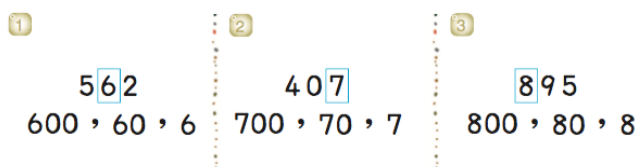
1. 透過位值表認識「百位」的位名，及百位數、十位數、個位數的意義。

 1 用位值表來記 137。



(《部》第三冊課本 P.9)

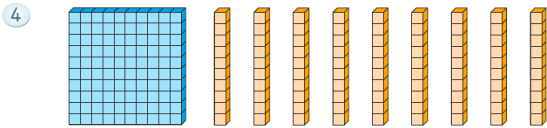
 5  內的數字表示多少？圈出圈看。



(《部》第四冊習作 P.17)

2. 1000 以內數的說讀聽寫做，宜分成兩部分：
  - (1) 101~200 的數：因為 101~200、...、901~1000 命名結構類似，教師應先幫助學生掌握 101 到 200 的學習，再引導學生類比到 201 到 1000 的學習。
    - 十個一數，如下圖所示，向上數。





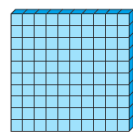
1個百9個十是190。

讀做「一百九十九」。

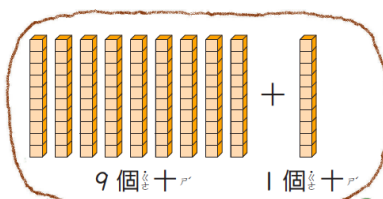
從100向上數9個十。  
110、120、130、140、150  
160、170、180、190

從190向上數1個十是多少？可以藉由積木的轉換，讓學生理解10個十換成1個百，2個百讀做「二百」。

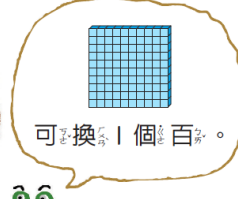
2 1個百9個十加1個十是多多少？



1個百



9個十 + 1個十



可換1個百。

2個百是200。

讀做「二百」。

(《部》第三冊課本 P.4)

● 一個一數，如下圖所示，向上數。

■ 從101數到109，引導時要強調十位數字是0，讀法上要將十位的「零」讀出來。

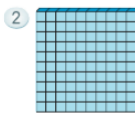
1 有多少？數數看。



1個百 1個一是101。

讀做「一百零一」。

從100向上數1個一。  
101



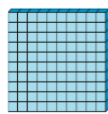
1個百 9個一是109。

讀做「一百零九」。

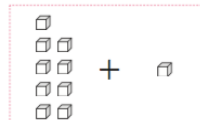
從100向上數9個一。  
101、102、103、104、105  
106、107、108、109

■ 從109向上數1個一是多少？可藉由積木轉換，讓學生理解10個一換成1個十，1個百1個十是110，讀做「一百一十」。

2 1個百 9個一 加 1個一 是多多少？

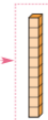


1個百



9個一 加 1個一

可換

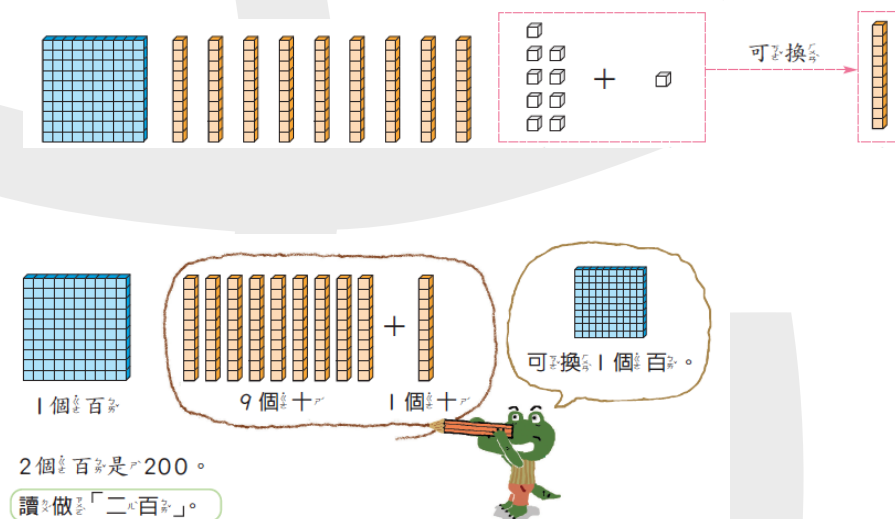


1個十

1個百 1個十是 \_\_\_\_\_。

(《部》第三冊課本 P.5)

- 同樣的，從 110 數到 119，要注意十位數是 1，讀時要讀出十位的「一」。如 111 讀做「一百一十一」，而非「一百十一」。
- 最後，從 199 向上數 1 個一是多少？可以藉由積木的轉換，讓學生理解換成 10 個一換成 1 個十，10 個十換 1 個百，2 個百是 200，讀做「二百」。



(《部》第三冊課本 P.6)

- (2) 201~1000 的數：透過對 101~200 數詞的掌握，引導學生類比到 201 至 1000，教師應從檢查的角度，進行 200 至 1000 之間的一個一數、十個一數的數數活動。此外還要進行「百個一數」的數數活動，含 10 個百是 1000。

1 有多少？數數看。

① 1 個百 = 100      2 個百 = 200

② 3 個百是 300，讀做「三百」。

③ 4 個百是 400，讀做「四百」。

(《部》第四冊課本 P.15)

### 3. 數序填空。

- (1) 百個一數的順數和倒數。

500 → 600 →  →  ; 800 → 700 →  →

319 → 419 →  →  (《部》四冊習作 P.12)

(2) 過十和過百的填空，可以分別讓學生練習順數和倒數。

●順數：

2 依-照數字の順序填填看。

1 198 199   202

2 207 208    212

3 270 280   310

4 179 189   219

(《部》第四冊習作 P20)

995 996   999

●倒數：

4 依-照數字の順序填填看。

1 202 201   198

2 242 241   238

3 220 210   180

4 215 205   175

(《部》第四冊習作 P.21)

4. 以數數完成加數、減數是較小的數字的加減法。


(1) 剛開始可以利用百數表協助學生數數做加減法 (參見《部》第三冊習作 P13)。

(2) 不用百數表也能用數數做加減法：


●199 加 2，可以從 199 開始向上數 2 個一，200、201。

●301 減 3，可以從 301 開始向下數 3 個一，300、299、298。


5. 比較問題：引入「>」和「<」符號表示大小比較的結果（R-2-1）。比較時從高位開始比起。

 1 比比看，用「<」或「>」表示結果。

① 315和248，那一個數比較大？



百位	十位	個位
3	1	5




百位	十位	個位
2	4	8

先比較百位的數字， $3 > 2$


$315 > 248$  怎麼讀呢？

---

② 219和248，那一個數比較小？



百位	十位	個位
2	1	9



百位	十位	個位
2	4	8

百位的數字一樣，比較十位的數字， $1 < 4$

$219 < 248$  怎麼讀呢？

（《部》第四冊課本 P23）

### 錯誤類型

1. 學生填寫位值表，容易發生十位或個位漏寫「0」的情形。教學時，宜說明十位格填0，表示0個十，個位格填0，表示0個一。如果不填0，會混淆208和28；350和35；甚至300和3。
2. 反過來，若學生過份類化（1），當沒有百位數會認為要補上0，如將53寫成053（甚至2記成002），教師教學時應告知整數左邊位值的0不用寫。
3. 學生容易數錯109到110、119到120、199到200等，宜多讓學生練習。
4. 學生常弄混一百零幾和一百幾十的讀法和數字記法（如105和150），教師宜透過積木和位值表的操作比對，說明兩者的差異。

### 評量

1. 評量重點：

- (1) 能說、讀、聽、寫、做 1000 以內的數。
- (2) 能做 1000 以內的位值單位換算，但限於一階單位換算。
- (3) 能運用位值概念比較 1000 以內數的大小，並用「>」、「=」和「<」的符號表示大小比較的結果。
- (4) 能以數數解決多一、少一的過十、過百問題；多十、少十的過百問題。

2. 注意事項：

- (1) 做看圖寫數字的評量，若表徵物不是積木，須明示「百」和「十」。
- (2) 評量 24 個十要換成幾個百幾個十這類型的題目，若是為了練習進位加法，就要換成 2 個百 4 個十，不宜要求學生寫出 1 個百 14 個十。
- (3) 評量 3 個百 4 個十要換成幾個百幾個十這類型的題目，若是為了練習退位減法，就要換成 2 個百 14 個十，不宜要求學生寫出 1 個百 24 個十或 34 個十。

評量單位換算時，不宜出現「26 個『十』18 個『一』可換成多少？」這類雙重進位的題目。

<p><b>N-2-2 加減算式與直式計算：</b>用位值理解多位數加減計算的原理與方法。初期可操作、橫式、直式等方法並陳，二年級最後歸結於直式計算，做為後續更大位數計算之基礎。直式計算的基礎為位值概念與基本加減法，教師須說明直式計算的合理性。</p> <p><b>補充說明：</b>直式計算：加法含二次進位，減法限一次退位。特別處理數字中有 0 的題型。先在有位值的表格中學習計算。</p>	n-l-2
--	-------

**先備：** N-1-2, N-1-3

**連結：** N-2-1, N-2-3, N-2-4

**後續：** N-3-2

### 基本說明

1. 由於位數增加，加減計算更加複雜。二年級起，學生應以位值概念理解多位數加減計算的原理，一方面，結合基本加減法（N-1-3），熟悉基本直式計算的算則；另一方面，也要能掌握計算的彈性（N-2-4）。日常生活的加減應用解題請參看 N-2-3。
2. 延續一年級經驗（N-1-2），學生學習加減計算時，初期可透過具體操作、橫式計算、直式計算等方法進行，重點在以位值概念理解加減計算的原理。為接續未來多位數加減計算學習（如 N-3-2），二年級後期應能以直式計算解決一般加減問題。
3. 直式計算的教學不宜直接告知形式算則，教師應整合之前加減活動的位值原理與合成分解模型，以位值積木的合成、分解、化聚說明直式計算的道理，理解進位、退位的意義。直式計算的熟練應善用基本加減法。
4. 學生學習直式計算的順序應有恰當佈局，由淺入深。例如先熟悉二位數，再進到三位數；從無進位、無退位的簡單情況開始，再到一次進位、一次退位，直到加法的二次進位；進退位發生的位置應遍及個、十、百位，理解其位值原理的一致性。
5. 學習直式計算應避免僵化。教師應提供恰當範例，提醒學生彈性應用其他方法，例如  $198+3$ 、 $71-4$  這類問題，數數、心算、合成分解都可以順利解題，並非只能使用直式計算。若直式計算的要求過份僵硬，將影響 N-2-4、N-2-5 的教學，教師應謹慎。

### 條目範圍

1. 二年級直式計算的範圍，加法可做二次進位，減法限一次退位。（N-3-2）
2. 直式計算教學應特別處理數字中有 0 的加減題型。
3. 學習直式計算，應先在有位值記號的算式表格中學習，養成位值對齊的習慣，再做無位值記號的練習。

### 釋例

1. 初期透過具體操作、橫式計算（參考 N-1-2 釋例）、直式計算等方法並陳，利用位值表說明加減直式計算的原理，強調直式中的各個位置上的數字要對齊。  
先複習一年級二位數加減法的經驗，透過具體操作、橫式計算。建議從二位數不進位加法開始，例如： $23+14$ ，將積木放在位值表中點算，同時配合橫式紀錄操作結果。

1 把積木拿出來做做看。

2 先算有幾個一。  
 $3 + 4 = 7$

3 再算有幾個十。  
 $20 + 10 = 30$

十位	個位

十位	個位

十位	個位

(《部》第三冊課本 P16)

接著在位值表上引入直式紀錄的方式，教師應說明直式紀錄中十位數字和個位數字代表的數值意義。初始學習直式計算時，直式列式可在個位與十位間增加一條虛線，養成對齊和一個位值只寫一個數字的好習慣。

直式中的個位數字要對齊，十位數字也要對齊。

十位	個位
2	3
+	14
<hr/>	
3	7

2. 各種加減法直式計算題型：引入新題型時，可以引導學生利用積木操作、位值表紀錄的方式來協助解題。

(1) 不進位加法

- 二位數不進位加法，參見釋例 1。
- 三位數不進位加法

1

百位	十位	個位
2	3	5
+	1	2
<hr/>		
3	5	8

• 先算個位： $5 + 3 = 8$   
• 再算十位： $3 + 2 = 5$   
• 後算百位： $2 + 1 = 3$

(《部》第四冊課本 P41)

(2) 進位加法（含一次、二次進位）：

- 二位數加法，一次進位，教師可以引導學生在直式紀錄上，個位滿十進一，可以在十位數字上方寫「1」。(標記方式不是制式規定，評量不宜強求)

1  $26 + 17$  用直式計算看看。

1 先算個位。  $6 + 7 = 13$

2 10個一換成1個十。

3 再算十位。  $1 + 2 + 1 = 4$

在個位寫3，進1到十位。

(《部》第三冊課本 P21)

●三位數加法，一次進位：

1  $145 + 382$  用直式計算看看。

1 先算個位： $5 + 2 = 7$ ，個位寫7。

2 再算十位： $4 + 8 = 12$ ，十位寫2，進1到百位。

3 後算百位： $1 + 1 + 3 = 5$ ，百位寫5。

(《部》第四冊課本 P43)

●三位數加法，二次進位：



2 加加看。

百位	十位	個位
□	□	
2	3	9
+	1	6
4	0	8

- 先算個位： $9+9=18$   
個位寫8，進1到十位。
- 再算十位： $1+3+6=10$   
十位寫0，進1到百位。
- 後算百位： $1+2+1=4$



(《部》第四冊課本 P46)

(3) 不退位減法

● 二位數減法

1 39-14 用直式算算看。

1 拿出積木來做做看。

十位	個位

3	9
-	1
	4

2 先算剩下幾個一。

十位	個位

3	9
-	1
	4
	5

3 再算剩下幾個十。

十位	個位

3	9
-	1
	4
2	5

(《部》第三冊課本 P29)

● 三位數減法

2

百位	十位	個位
2	3	5
-	1	2
1	1	2

- 先算個位： $5-3=2$
- 再算十位： $3-2=1$
- 後算百位： $2-1=1$



(《部》第四冊課本 P41)

(4) 一次退位減法

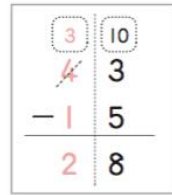
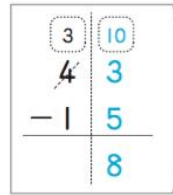
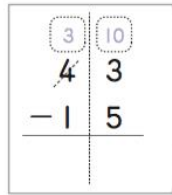
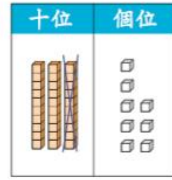
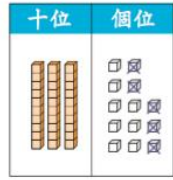
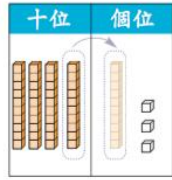
● 二位數減法

1 43 - 15 用直式計算看看。

3 不夠減 5。  
十位退 1 個十到  
個位，剩下 3 個  
十。

個位  
有 13 個一。  
 $13 - 5 = 8$

十位  
有 3 個十。  
 $3 - 1 = 2$



(《部》第三冊課本 P34)

●三位數減法

2 減減看看。



先算個位：8 - 7 = 1  
十位的 0 < 5，退 1 個百到  
十位，剩下 4 個百。  
再算十位：10 - 5 = 5  
後算百位：4 - 1 = 3

(《部》第四冊課本 P49)

3. 不使用直式計算，利用數數（參見 N-2-1 釋例）、心算、合成分解的方式完成加數或減數為較小數字的加減計算：

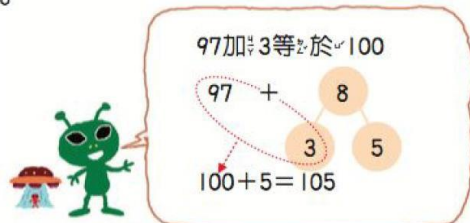
1 完成以下列算式。

①  $99 + \underline{\quad} = 100$   
 $94 + \underline{\quad} = 100$

②  $93 + 7 = 100$   
 $\underline{\quad} + 8 = 100$

2 加加看看。

①  $97 + 8 = \underline{105}$



3 完成下列算式。

①  $98 + 2 = 100$

$100 - 2 = \underline{\quad}$

②  $96 + 4 = 100$

$100 - 4 = \underline{\quad}$

4 減減看。

$100 - 4 = \underline{\quad}$

$101 - 4 = \underline{\quad}$

101-4 可以用

100 減 4 再加 1 來做。



(節選自《部》第四冊課本 P50、51)

4. 學習加減直式計算要特別注意數字有 0 的情形，教師需能用位值原理來說明。其中尤其要留意答案中有 0 但漏寫的情形，以及被減數有 0 的情形（一次退位）。

### 錯誤類型

1. 做減法直式計算時，遇到某位數不夠減時，學生常出現下面的錯誤：例如在左邊直式中 3 不夠減 5，學生會倒過來用 5 減 3，右邊直式也有類似的錯誤：

$$\begin{array}{r} (1) \quad 13 \\ - \quad 5 \\ \hline 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (2) \quad 582 \\ - \quad 178 \\ \hline 416 \end{array}$$

建議教師用下面的教學策略來補救：

- (1) 透過操作數學積木或轉換位值，搭配直式紀錄，讓學生真正理解減法的意義。
- (2) 造成孩子的認知衝突：例如從上例學生誤以為 13-5 答案是 12，但做 17-5 答案也是 12，兩者都是減 5，答案都是 12，引導學生討論合理性。
2. 剛開始學生常會漏掉進退位，教師可以引導學生進退位時，可以在被加數或被減數的上方以較小數字標記，較能發揮提醒的作用。
3. 學生剛學直式計算時，常發生各個位數不對齊或一個位值記兩個數字的現象。教師可引導學生列式時，在相鄰位值間畫一條虛線，養成對齊和一個位值只寫一個數字的習慣。
4. 位值相減結果是 0 時，記錄答案時，要提醒學生寫 0 的重要性，否則如 107 會變成 17。
5. 學生寫加減直式時，會將被加（減）數、加（減）數靠左對齊，尤其是三位數加減二位數，提醒學生注意各數的位值。

### 評量

1. 評量重點：

- (1) 能熟練和為 1000 以內的加法直式計算（含二次進位）及被減數為 1000 以內的減法直式計算（含一次退位）。
- (2) 能運用數數、心算、合成分解而非直式計算做如  $198+3$ 、 $71-4$  這類問題。

(3) 能運用加、減法解決生活中的問題。

## 2. 注意事項：

- (1) 初期評量，教師可以提供位值表，協助學生對齊位數，提醒一個位置只能記一個數字。
- (2) 初學進（退）位直式計算，在評量時可以拿出積木操作「做做看」的題型。
- (3) 學生的進、退位標記方式，不屬於直式計算評量的範圍。
- (4) 心算評量以課堂中的形成性評量為宜，且限定類似釋例 3 的題型，勿過度評量，學生若用其他算法，也應予以肯定。

<b>N-2-3 解題：加減應用問題。</b> 加數、被加數、減數、被減數未知之應用解題。連結加與減的關係。(R-2-4) <b>補充說明：</b> 教師使用解題策略協助學生理解與轉化問題（花片模型、線段圖、算式填充題或加減互逆等），但不發展成學生答題之固定格式。不需另立單元教學。	n-l-3
--	-------

**先備：** N-1-2, N-1-3

**連結：** N-2-2, R-2-4

**後續：**

### 基本說明

1. 學習加減法的應用解題，學生會逐漸注意到問題關鍵詞和解題方式的關連。在初期這是正面而無可厚非的學習過程，讓學生能理解加減法和生活應用的密切關係。重要的是，只要調整問題的問法，可以讓學生更深入理解加法和減法的密切關係（參見 R-2-4），也能破除學生只憑關鍵詞做形式的無意義解題。
2. 加數或被加數未知形同減法問題；被減數未知形同加法問題；減數未知形同另一減法問題，再加上加法和減法的應用情境，足可產生各式各樣的應用問題。教師應依學習流暢和情境難易來安排學習順序，教導學生分析問題的方法。二年級最後目標，是在碰到較大數字問題時，能順利列出正確加減橫式，再用直式計算或其他方法解題。
3. 學習加減問題時，合成分解模型是最容易理解與操作的解題情境，因此在布題上，首先應在較小數字的情況下討論這類問題。例如「車上有 15 人，再來多少人，可以坐滿 40 個座位？」「參加校外教學的學生中，扣掉已經到校的 29 位同學，還有 8 位還沒到，參加的學生有多少人？」「小明本來有 9 雙襪子，媽媽把髒襪子拿去洗，衣櫃中還剩下 4 雙，媽媽拿幾雙去洗？」這類問題都可以用花片來協助說明與思考。
4. 教師可依學生的學習經驗，發展分析問題的工具，例如花片操作、線段圖、待填充的算式、初步加減互逆經驗（如 N-1-3 基本加減法的活動）。重點在於學生能從如何填入未知數字的思考中，確實理解並應用加法和減法的密切關係。

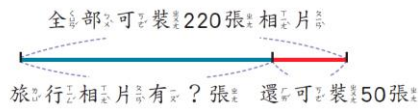
### 條目範圍

1. 為避免過度干擾學生建立加減互逆思考，當教師以特定工具（尤其是線段圖與待填充的算式）教導學生如何分析問題時，應站在輔助思考的立場，不宜變成固定的答題格式，評量布題時也應斟酌題目難易提供輔助提示。
2. 本條目的進行不需另立單元教學，可和加減法教學一起進行。

## 釋例

- 在 N-1-2 中曾列出加減應用問題的基本類型，如「添加型」、「併加型」、「拿走型」、「比較型」，就問題語意來說，前二者是加法題型，「拿走型」是減法題型，「比較型」則依題意有加、減兩種題型。學生會注意到題目中的關鍵詞和解題的策略有關，這是合理的學習過程。例如
  - 添加型：公車上有 25 人，靠站後上來 4 人，公車上一共有幾人？
  - 併加型：罐子裡有綠珠子 27 顆，紅珠子 16 顆，兩種顏色的珠子一共有幾顆？  
→(1)及(2)的題目中均出現「一共」，學生會採用「加法」策略。
  - 拿走型：小威有 60 元，買了一本 55 元的筆記本後，剩下幾元？  
→學生看到題目中的「剩下」二字，會採用「減」的解題策略。
  - 比較型 1：小可有 37 元，小威比小可多 6 元，小威有幾元？  
→學生看到題目中的「比...多...元」，會採用「加」的解題策略。
  - 比較型 2：小可有 37 元，小威比小可少 6 元，小威有幾元？  
→學生看到題目中的「比...少...元」，會採用「減」的解題策略。
- 調整釋例 1 中五類問題的問法，不僅可以讓學生深入理解加法和減法的密切關係，這樣的解題經驗，也可以破除學生只憑關鍵詞就決定解題策略的迷思。
  - 公車上有 25 人，到站後上來一些人，現在公車上一共有 29 人，到站後上來幾人？
  - 罐子裡一共有 43 顆紅、綠珠子，綠珠子有 27 顆，請問紅珠子有幾顆？  
→1 及 2 的題目中均出現「一共」，但不能用「加法」策略。
  - 小威買了一本 55 元的筆記本後，剩下 5 元，小威原來有多少元？  
→題目中出現「剩下」，但不能用「減法」策略。
  - 小可有 37 元，小可比東東多 6 元，東東有幾元？  
→題目中出現「比...多...元」，但不能用「加法」策略。
  - 小可有 37 元，小可比小威少 6 元，小威有幾元？  
→題目中出現「比...少...元」，但不能用「減法」策略。
- 建議在解題布題上，應以**合成分解模型的解題情境**加上較小的數字最優先。例如下面這些問題，都可以用花片、數學積木，錢幣圖卡來協助說明與思考。
  - 「魚缸裡原來有一些魚，撈起 8 條後，還剩下 1 條魚，魚缸裡原來有幾條魚？」
  - 「一盒餅乾有 32 片，弟弟吃了一些，剩下 21 片，弟弟吃了幾片？」
  - 「圓圓想買一個 50 元的鉛筆盒，她只有 45 元，還不夠多少元？」
- 二年級在「比較型」的問題上，可以開始處理「相差」的情境問題，例如「農場裡面有 7 隻白羊和 10 隻黑羊，白羊和黑羊相差幾隻？」
- 本條目之要點與目標參見基本說明 2。發展分析問題工具的要旨見基本說明 3。當老師教學發現學生不容易理解題意時，可利用花片的操作、線段圖、待填充的算式來分析題目中數量的關係，協助學生釐清題意，順利解題。底下以線段圖為例說明。教師不宜要求學生畫線段圖，布題時應提供線段圖或示意圖，協助解題。亦可參看 R-2-4。
  - 被加數未知的問題用減法解題：

一本相簿可裝220張相片，把旅行的相片裝進去後，還可裝50張，旅行的相片有幾張？



(《部》第四冊習作 P44)

(2) 加數未知的問題用減法解題：

3 一個盒子可以裝200顆彈珠，已經裝了160顆，再放幾顆就可以裝滿？



(《部》第四冊習作 P43)

(3) 被減數未知的加法解題：

6 圓圓做綵帶花，已經用掉60公分的綵帶，還剩下30公分，原來有的綵帶有多長？

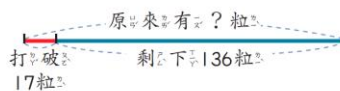


$$60 + \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

答：          公分

7 雜貨店原來有一些雞蛋，不小心打破17粒，還剩下136粒，雜貨店原來有幾粒雞蛋？

$$17 + 136 = \underline{\quad}$$



答：          粒

(4) 減數未知的問題用減法解題：

2 麵包店上午共做了250個甜甜圈，中午時還有70個沒有賣完，麵包店上午賣了幾個甜甜圈？

$$250 - 70 = \underline{\quad}$$

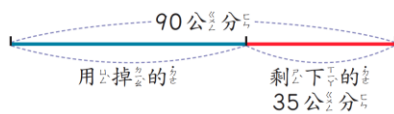


答：          個

(《部》第四冊課本 P53)

5 一條緞帶長 90 公分，做緞帶花用掉一些，剩下 35 公分，做緞帶花用了幾公分？

90 - \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_



答：\_\_\_\_\_ 公分

(5) 比較型的問題，可用線段圖表示題目中兩量的比較關係。

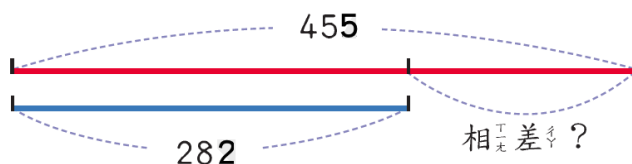
● 紅繩長 13 公分，藍繩長 9 公分，紅繩比藍繩長多少公分？



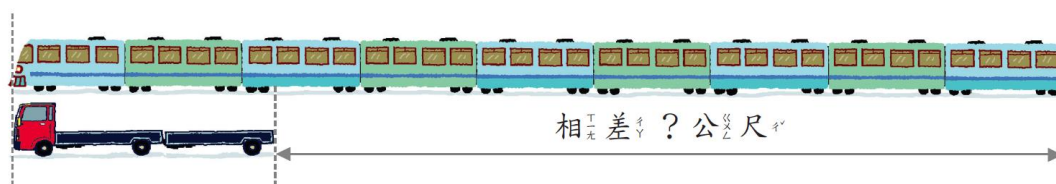
● 紅繩長 45 公分，紅繩比藍繩短 15 公分，藍繩長多少公分？



● 遊樂園中，排隊搭雲霄飛車的有 455 人，排隊搭旋轉木馬的有 282 人，兩邊排隊人數相差幾人？



● 火車長 120 公尺，聯結車長 30 公尺，兩輛車相差多少公尺？



### 錯誤類型

詮釋 1 中提到的幾個類型，例如：「桌上原來有幾顆蘋果，媽媽又買了 5 顆，總共有 12 顆蘋果，問桌上原來有幾顆蘋果？」之類的問題，對於初學習而言，這個問題情境與「桌上有 5 顆蘋果，媽媽又買了 5 顆，總共有幾顆蘋果？」的問題相似，學生會困惑於兩個問題中都有「總共」，是不是兩個問題都是用加法來算呢？建議教師教學時依據學生的學習經驗，運用恰當的分析問題的工具，例如：花片、線段圖...等，協助學生理解題意，列出恰

當的算式。

## 評量

1. 評量重點：  
能透過花片操作、線段圖、待填充的算式、加減互逆關係等理解生活中的加減問題，並運用加法或減法來解題。
2. 注意事項：
  - (1) 初學本條目且數字較小時，評量建議可讓學生操作相關的花片或積木。
  - (2) 無論是線段圖或待填充的算式，都不宜格式化，不納入評量要點。建議教師或教科書評量此類問題時，應提供線段圖、待填充的算式；或其他輔助工具，協助學生解題。

<b>N-2-4 解題：簡單加減估算。</b> 具體生活情境。以百位數估算為主。 補充說明：布題以合理自然為原則。	n-I-3
--	-------

連結：N-2-1, N-2-2, N-2-5

後續：N-3-8

## 基本說明

1. 在許多日常生活應用情境中，有時並不需要精確答案，只需要知道「大概」數字便能解決問題。因此學生應學習如何辨識這類情境，以及如何進行適當估算。
2. 估算和初學加法的嘗試活動不同。估算是比較高層的數學能力，必須相當能掌握「確算」之後才進行。除了必要的估計練習，估算教學應盡量在具體有用的情境中進行，在合理自然的布題中，學生才能理解估算的動機，知道估算的好處，並判斷估算結果是否恰當。例如 N-2-5 的用錢活動或某些驗算活動便能提供恰當的估算情境。
3. 加減估算的目的，是以雖然不精確但簡單的替代加減計算快速解決問題，通常只要簡單的心算就能完成。例如「鳳梨 199 元、火龍果 215 元，媽媽身上帶 500 元夠不夠？」由於 199 很接近 200，所以  $199 + 215$  的和與  $200 + 215$  的和很接近，但後者用心算就知道是 415，因此很快得知媽媽帶的錢是夠的。
4. 二年級的「大」數是三位數，除了初期教學，學生的加減估算最後宜以百位數估算為主。基於可以簡單心算的原則，二位被估數所接近的數是整十，三位被估數所接近的數是整百。不做三位數估整十的問題。
5. 可以在教學中使用「大概」「大約」的用詞。
6. 在學生已經熟悉加減確算的意義和方法之後，教師可以用位值積木來說明為何接近的數相加減的結果也會接近，也可以讓學生進行討論。

## 條目範圍

1. 估算布題以合理、自然、能引起動機為原則。為了讓學生先掌握確算的意義與能力，建議「估算」在二下後段再進行教學。
2. 由於本年度重點為估算的初步學習，因此只進行整十和整百的估算，其範圍建議為 18、19 或 21、22 估為 20（其餘類推），190 到 210 估為 200（其餘類推）。
3. 加減估算可以應用於加減計算的驗算與檢查（請參考釋例），但教學時請勿採用易和直式計算混淆的「計算題式估算」（例如計算  $238 + 595$  大概是多少）。



4. 估算教學應小心評量的方式，宜鼓勵學生說明想法，避免直接要求標準答案與制式過程，尤其不可認定使用「確算」的學童是「錯誤的」。老師可以藉「確算」驗證估算結果的合理與否，同時讓學生理解針對問題的目標，為何速度較快的估算方式已經足以取代確算。

### 釋例

1. 某數接近「整十」、「整百」的練習，用來練習估計整十、整百的數字，須依照條目範圍(2)的限制。

例 1：38 比較接近 30 還是 40？可以進行下列的練習：

列出 30 至 40 的數列：30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40，讓學生觀察 36 接近哪一個整十。

例 2：290 比較接近 200 還是 300？可以進行下列的練習：

列出 200 至 300 的數列（十個一數）：

200 210 220 230 240 250 260 270 280 290 300

讓學生觀察 290 接近哪一個整百。

例 3：媽媽在水果攤買鳳梨，老闆秤重後，跟媽媽說：「71 元，算妳 70 元就好。」

例 4：王先生坐計程車，下車時，司機說車資是 295 元，王先生付了 300 元，跟司機說不用找錢了。

例 5：哪個小朋友剪的紙條最接近 70 公分？

小明



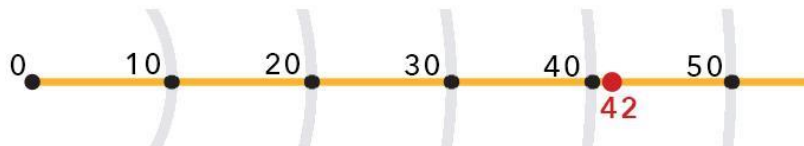
小華



珍珍



例 6：壘球擲遠，珍珍最好的成績是擲出 42 公尺的紀錄，42 公尺比較接近 40 公尺還是 50 公尺？



2. 由於二年級的「大」數是三位數，學生的加減估算宜以百位數估算為主，建議結合 N-2-5 的用錢活動，更能貼近學生的日常生活。

例 1：小杰帶了 705 元，買了一雙 599 元的鞋子後，剩下的錢大概是多少元？

下列哪一個數最接近「705-599」的結果？



701 大概是 700，  
599 大概是 600，  
700 - 600 是 100，  
所以 701 - 599 大概是 100。



例 2：媽媽買二件衣服，分別是 605 元、898 元，她總共付了大概多少元？  
下列哪一個數最接近「605+898」的結果？



例 3：小鐘買外套花了 595 元，剩下大約 200 元，小鐘原來的錢大約是多少元？

• 900元

• 800元

• 700元

• 395元

• 300元

例 4：姊姊要買一個 195 元的鉛筆盒和一盒 292 元的水彩，只用百元鈔票付錢，最少要幾張百元鈔票？



例 5：小華計算時，不小心讓百位數字沾到墨汁，請你幫忙把百位數字寫出來。

$$299 + 404 = \text{☀}03$$

怎樣算得比較快呢？  
299 大概是 300，  
404 大概是 400，  
299 + 404 大概是 700，  
所以百位數字是 7。



例 6：小可在  $698 - ( ) = 299$  的  $( )$  中填入 499，小可算的答案對不對？

因為 698 大概是 700，299 大概是 300，問題接近  $700 - ( ) = 300$ ，由心算知  $( )$  中的數字大概是 400，和 499 相差很遠，小可的答案是錯的。

### 錯誤類型

部分學生可能有強烈傾向想用確算完成答案。教師不宜說這樣的計算錯誤。但是可以從簡化的觀點，鼓勵學生發現估算問題基本上只需要簡單的心算。

### 評量

1. 評量重點：

- (1) 能進行簡單的二、三位數的估算，學生基本上可以用心算解題。
- (2) 能用估算檢驗答案的合理性。

## 2. 注意事項：

- (1) 估算的評量範圍詳見條目範圍(3)，課堂上的評量鼓勵學生說明原因，紙筆評量可以考慮用「選選看」的方式，提示解題的方向。
- (2) 「用心算解題」提醒教師要如何合宜進行估算評量的布題。學生是否真正用心算解題，反而不是重點。

<p><b>N-2-5 解題：100 元、500 元、1000 元。</b>以操作活動為主兼及計算。容許多元策略，協助建立數感。包含已學習之更小幣值。</p> <p><b>補充說明：</b>避免要求學生自備大鈔。可與估算連結。</p>	n-l-3
---	-------

先備：N-1-4

連結：N-2-1, N-2-2, N-2-4

後續：

### 基本說明

1. 本條目是 N-1-4 之後續延伸，請參考該處的說明。謹記在操作活動中容許多元策略，協助加強並融合新舊數感。
2. 新增加的錢幣為「500 元」與「1000 元」。在 N-1-4 中，「100 元」是只有兌換功能的最大幣值，和本條目的「1000 元」地位相當。
3. 除了能做新幣值的轉換之外，在活動中也應充分包含 N-1-4 中的較小幣值，加強整體位值系統的熟悉感。
4. 運用錢幣，最能知道為什麼較大的數在加減估算時比較「重要」，應和 N-2-4「估算」的學習相互連結加強。

### 條目範圍

1. 避免要求學生自備大鈔。
2. 用錢活動不可和直式計算混淆。例如進行「1000 元」用錢活動時，可以進行換錢、找錢活動，這和 N-2-2 直式計算不做二次退位的限制並不違反。例如：拿 1000 元鈔票買 65 元物品，可找回多少錢？

### 釋例

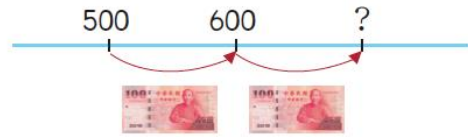
1. 基本幣值的介紹和兌換。包括：
  - (1) 100 元錢幣分別和 1 元、10 元、50 元錢幣的兌換。
  - (2) 500 元錢幣和 1 元、100 元錢幣的兌換。
  - (3) 1000 元和 1 元、100 元、500 元錢幣的兌換。
2. 數錢：延續一年級點數錢幣的策略，5 個一數、10 個一數，到了二年級再加上 100 個一數。
 

例：小豬撲滿裡有多少錢？數數看。

結合 100 個一數的方式，並利用向上數的策略，協助點算出幣值。



從500向上數2個100。



當錢幣金額越大、幣值種類愈多時，教師可以指導學生以位值表的概念來整理錢幣，點數時從較大幣值的錢幣開始向上數。

3. 解決日常生活中用錢的問題，鼓勵多元的解題策略，可以讓學生討論有幾種不同的付錢方式，進行錢幣的實作活動。

例 1：「一隻趴趴鼠賣 315 元，小可買一隻，要怎麼付錢才會剛剛好？」



例 2：「一隻小兔子賣 650 元，小玉想買一隻，可以怎麼付錢呢？」

這個問題包含多種付錢的方式，可以進一步追問「小玉還剩下多少元？」。



例 3：「哥哥請兩位朋友到餐廳吃飯，每人花費 199 元。結帳時，哥哥可以怎麼付錢？」

這個問題可以引導學生結合估算來解題，199 接近 200，因此因此問題可以想成「每人花費 200 元，一共有三人，最少要付幾百元？」來解題。透過用錢情境，進行加減估算活動，可參見 N-2-4。



例 4：媽媽皮包裡有一些錢，她想買一頂 540 元的帽子，她可以怎麼付錢？



4. 換錢：可以安排讓學生進行各種硬幣（1 元、5 元、10 元、50 元）和百元鈔票的換錢活動，以及百元鈔票、十元硬幣及一元硬幣和千元鈔票的換錢活動。

(1) 幾個十元換成幾張一百元：

30 個 可換成幾張 ？是 多 少 元 ？

10 個 堆成 1 疊，  
30 個 可以堆成 3 疊。

(2) 幾張一百元換成幾個十元：

4 張 可換成幾個 ？

1 張 = 10 個   
2 張 = 20 個   
4 張 = ? 個

- (3) 一張一百元可以換幾個十元和幾個一元？例如：一張一百元鈔票可以換 9 個十元硬幣和幾個一元硬幣？
- (4) 一張一千元的鈔票可以怎麼換成零錢呢？例如：
  - 一張一千元鈔票可以換 9 張一百元和幾個十元硬幣？
  - 一張一千元鈔票可以換 9 張一百元、9 個十元硬幣和幾個一元硬幣？
- (5) 姊姊拿了一張 1000 元的鈔票，去文具店買一本 65 元的筆記本，店員會找她多少錢呢？教師應引導學生以換錢方式解決問題，而不是用減法計算來解題。
- (6) 小威有 28 個十元硬幣和 82 個一元硬幣，他想跟爸爸換錢，怎麼換可以讓紙鈔最多、

硬幣最少？

## 錯誤類型

學生初期可能對硬幣或紙幣的幣值不熟悉，宜多讓學生從模擬用錢、找錢、換錢的情境中逐漸熟悉幣值。

## 評量

### 1. 評量重點：

- (1) 能透過錢幣（圖卡）的操作，認識 100 元、500 元及 1000 元。
- (2) 能做各種幣值的換算，並解決日常用錢的問題。

### 2. 注意事項：

- (1) 有需要時，在評量時需提供相關教具以供操作解題。
- (2) 評量題目可包含錢幣圖像提供學生圈選。
- (3) 用錢活動不是加減法教學。「我們在實際用錢時，不會當場使用直式計算。」教師應秉持這個原則來布題、推動活動與評量。學生若使用直式計算，教師不能認定其為錯，而是從使用情境著手，讓學生理解。

<p><b>N-2-6 乘法：乘法的意義與應用。</b>在學習乘法過程，逐步發展「倍」的概念，做為統整乘法應用情境的語言。 <b>補充說明：</b>在乘法解題脈絡中，自然使用連加算式，不限步驟。最後能以行列模型理解乘法交換律（R-2-3）。</p>	n-1-4
--	-------

先備：N-1-2

連結：N-2-7, N-2-8, N-2-9, R-2-3

後續：N-3-3, N-3-4

## 基本說明

1. 乘法是小學數學數與量教學的重點與基礎，二年級的教學重點是學習乘法的意義與日常應用，熟練十十乘法（N-2-7），並認識乘法交換律（R-2-3）。
2. 乘法的初步意義是同一數的連加，此數稱為「被乘數」，連加的次數稱為「乘數」，相乘結果稱為「積」。教師可自然引導學生做連加計算，也可運用「幾個一數」。整體二年級乘法教學應注意三個原則：(a) 由於多次加法過程瑣碎，藉此鼓勵學生學習「十十乘法」；(b) 在分析乘法應用問題時，發展「倍」的語言；(c) 乘法教學的圖示應自然呈現「行列模型」，利用該模型認識乘法交換律。
3. 「倍」的概念（即乘數）可以統一的乘法意義，是分析乘法情境的抽象概念。例如「一顆糖果 8 元，5 顆多少錢？」所問的問題是 8 元連加 5 次，可以轉換成倍的語言，即是「8 元的 5 倍」，可以列式成「 $8 \times 5 = 40$ 」。「倍」的概念較抽象，在二年級只是初步認識，但在後續乘法學習可以協助分析問題。
4. 「行列模型」比「倍」的概念更抽象，是整合更豐富乘法情境（例如面積、乘法原理）的

核心模型，足以打破被乘數與乘數的不對稱性，進而理解乘法交換律，日後探討乘法和除法的關係時也很重要。

- 雖然二年級乘法重點是「十十乘法」範圍，但可不限於此。如「一杯豆漿 15 元，3 杯多少元？」學生理解能用 15 連加 3 次解題。在理解乘法交換律之後，學生對於「同樂會跳舞分組，每組 2 人，18 組多少人？」，學生理解「 $2 \times 18$ 」的算式，可以轉成「 $18 \times 2$ 」來做，並得到  $18 + 18 = 36$  的答案。教師不可放任學生把 2 連加 18 次。

### 條目範圍

- 在乘法的脈絡中，初期老師和學生可以約定並使用連加算式，當然「乘數」不宜過大。這只是算式的約定，和併式的學習無關。
- 二年級不處理乘法直式計算。
- 在初期乘法應用解題裡，「被乘數」與「乘數」的位置並不對稱，教師可用此來檢查學生是否理解乘法的意義。但是在學習「乘法交換律」之後，教師在評量中不可遽然以此判斷學生的對錯，應讓學生說明其計算的意義。
- 處理以 0 作為被乘數或乘數時，應有恰當引導，尤其是後者。
- 二年級乘法的範圍主要是「十十乘法」。若基於基本說明（5），想以更高位數探索乘法意義，建議只做「十幾 $\times$ 個位數」或「個位數 $\times$ 十幾」，且個位數不大於 3。

### 釋例

- 進行乘法教學前，教師可複習二個一數、五個一數或十個一數，作為本條目的基礎。

例 1：二個一數(複習活動)

有幾顆？數數看。

從 22 開始，兩個一個，圖圖看。

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

2

(《部》第一冊課本 P.12)

例 2：五個一數(複習活動)

有幾片花瓣？數數看。

一朵有幾片花瓣？

從 55 開始，五個一個，圖圖看。

51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

一共幾片花瓣？

(《部》第一冊課本 P.13)

- 乘法的初步意義：透過同數連加引入乘法算式，認識「乘號」、「被乘數」、「乘數」、「積」、和「倍」等名詞，以作為乘法運算的基礎。

(1) 在同數連加的情境下引入乘法算式。

例 1：下圖中有多少花瓣？

一朵花有5片花瓣。



(《部》第一冊課本 P.13)

學生可透過「五個一數」的舊經驗，得出共有 20 個花瓣。教師應協助學生理解「五個一數」數了 4 次，表示共有 4 個 5。因此相當於把 5 連加 4 次，於是得到

$$\text{加法：} 5+5+5+5=20$$

然後再引導學生將「5 有 4 個」(也就是 4 個 5) 記成乘法算式：

$$\text{乘法：} 5 \times 4 = 20$$

學生應理解連加算式如何轉化成乘法算式，也要知道乘法算式與問題的關係。告知學生  $\times$  是「乘號」，5 是「被乘數」，4 是「乘數」，20 是「積」。

- (2) 乘法學習重點之一是透過同數連加之瑣碎不便，強化乘法算式與十十乘法之需求。十十乘法見 N-2-7。

例 2：在例 1 之後追問，如下問題有多少花瓣？

一朵花有5片花瓣。



$$\text{加法：} 5+5+5+5+5+5=30$$

$$\text{乘法：} 5 \times 6 = 30$$

讓學生體會加法的計算太繁瑣，容易造成錯誤，乘法的算式要簡潔很多。

- (3) 乘法學習重點之二是認識「倍」的意義與使用。

例 3：透過例 1 和例 2 的例子，引入倍的語言和用法。

在例 1 中，5 有 4 個，乘法算式  $5 \times 4 = 20$ ， $5 \times 4$  表示 5 的 4 倍，5 的 4 倍是 20。

在例 2 中，5 有 6 個，乘法算式  $5 \times 6 = 30$ ， $5 \times 6$  表示 5 的 6 倍，5 的 6 倍是 30。

### 3. 理解倍的語言，深化乘法的意義

例 1：引導學生觀察多 1 排即多 1 倍的變化和結構，並培養數感。

手球比賽，每隊 7 人，4 隊共有多少人？

$$7 \times 4 = ?$$

$$7 \times 4 = 28$$

7 的 4 倍是 28。

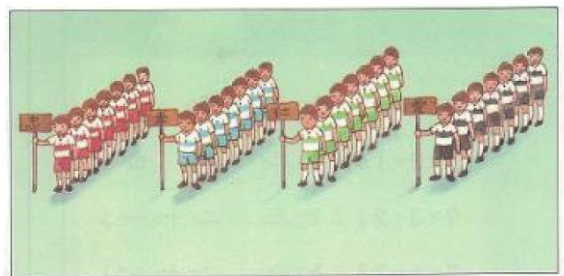
每隊 7 人，5 隊共有多少人？

$$7 \times 5 = ?$$

$$7 \times 5 = 35$$

7 的 5 倍是 35。

$$7 \times 5 = 28 + 7 = 35$$



(《64 國》第四冊課本 P63)



例 2：倍的深化和運用。

6 3 的 5 倍 加 3 的 2 倍 是 3 的 幾 倍 ？



$$5 + 2 = \underline{\quad}$$

答：      倍

(《部》第四冊課本 P14)

4. 引導學生分析乘法問題，經驗乘法交換律。

例 1：盒子裡有幾顆糖？

先算相同的顏色，  
可以一用

$$4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20$$

$$4 \times 5 = 20$$

先算相同的形狀，  
可以一用

$$5 + 5 + 5 + 5 = 20$$

$$5 \times 4 = 20$$

用  $4 \times 5$  和用  $5 \times 4$  算出來 的 答 案 一 樣 嗎 ？

(《部》第四冊課本 P96)

5. 被乘數或乘數為 0 的問題。

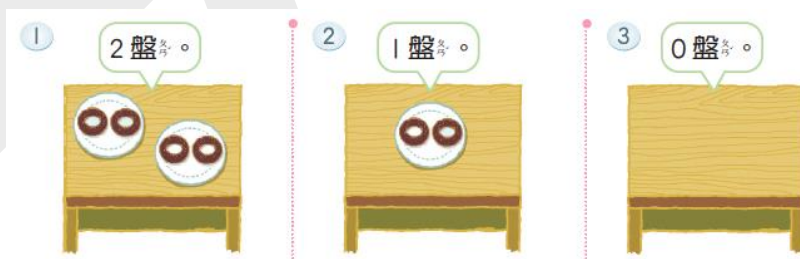
例 1：小明和小華玩射飛標遊戲時，小明 3 次都射中 5 分，小華 3 次都射中 0 分，他們分別得到幾分？用乘法怎麼記錄？

小明的分數是  $5+5+5=15$ ，用乘法記錄就是  $5 \times 3=15$ 。

小華的分數是  $0+0+0=0$ ，用乘法記錄就是  $0 \times 3=0$ 。

例 2：一盤裝 2 個甜甜圈，2 盤有幾個甜甜圈？用乘法怎麼記？拿走 1 盤後，剩下幾盤？盤子裡共有幾個甜甜圈？用乘法怎麼記？如果再拿走 1 盤，剩下幾盤？盤子裡有幾個甜甜

圈？用乘法怎麼記。



(《部》第三冊課本 P.95)

$2 \times 2 = 4$	每盤 2 個，原有 2 盤；
$2 \times 1 = 2$	每盤 2 個，剩下 1 盤；
$2 \times 0 = 0$	每盤 2 個，剩下 0 盤。

### 錯誤類型

1. 當學生答案的乘法算式，其「被乘數」與「乘數」的位置與原問題情境看似不相對應時，並不能判斷其為錯誤。學生有可能是亂寫或不理解題意而弄錯，但也有可能是學生完全清楚題意而有自己的解釋或直接運用乘法交換律。以「5 輛汽車，每輛汽車有 4 個輪胎，共有幾個輪胎？」為例。一般列式為

$$4 \times 5 = 20 \quad (\text{4 的 5 倍是 20})$$

若學生知道乘法交換律，則可能寫成

$$5 \times 4 = 20$$

也有可能學生將問題解釋成左前輪有 5 個、右前輪有 5 個...，由於輪子有 4 個位置，共有 4 組，因此寫成

$$5 \times 4 = 20 \quad (\text{5 的 4 倍是 20})$$

教師可詢問學生列式的理由再處理（參見評量注意事項）。

2. 在理解倍的關係時，有時學生會混淆計數單位發生錯誤。例如「5 輛汽車，每輛汽車有 4 個輪胎，共有幾個輪胎？開走 1 輛後，現在共有幾個輪胎？」學生可能先正確算出  $4 \times 5 = 20$  個輪胎後，接著卻算成  $20 - 1 = 19$  個輪胎。建議教師讓學生將解題出現的數字，對應原題目情境，並說明其意義，讓學生理解錯誤的原因，建立正確的想法。

### 評量

1. 評量重點：

- (1) 從連加情境活動中，理解乘法的意義，並改用乘法算式記錄連加活動的結果，認識乘號、被乘數、乘數、積。
- (2) 認識倍的意義並能運用於理解及解決乘法問題。
- (3) 能用乘法解決生活中的問題。

2. 注意事項：

- (1) 評量被乘數（單位量）與乘數（單位數）的區別，須避免同數相乘的問題。
- (2) 乘法交換律的評量經常造成教師和家長的衝突，主因在於學生所列算式之「被乘數」與「乘數」的位置與原問題情境看似不相對應時，有可能是學生完全不理解題意而弄

錯，也有可能是學生完全清楚題意，但有自己的解釋或直接運用乘法交換律。教師評量應以學生是否理解為考量，不能只是光從算式來判斷。教師可追問學生列式的原由，看看學生是否誤會題意、隨意列式、有意義轉換題意、已明瞭交換律等等，再作評量之判斷。

- (3) 教師設計問題時，宜考量可能之合理回答。例如：「3 的 5 倍和 3 的 2 倍，合起來是多少？」回答「3 的 7 倍」或「21」均合理。或許用分段布題，如「3 的 5 倍和 3 的 2 倍，合起來是 3 的幾倍？合起來是多少？」，可更完整達成評量目標。

<b>N-2-7 十十乘法</b> ：乘除直式計算的基礎，以熟練為目標。 補充說明：和乘法教學同時進行。協助在除法中發現乘與除的關係。	n-l-4
--	-------

先備：

連結：N-2-6

後續：N-3-3, N-3-4, N-3-5

### 基本說明

1. 「十十乘法」是乘法和除法直式計算的基礎，在二年級結束時應熟練。教學時應考慮學生已有的先備經驗（如 2 個一數、5 個一數、10 個一數），依熟悉度或難度分階段教學。除了分別觀察個別乘數的乘法模式，最後也應觀察十十乘法表的整體模式（包括乘法交換律）。
2. 「十十乘法」的教學應如「基本加減法」，不只是單純的背誦乘法表，也包含熟悉乘法數感的各種活動，例如心算卡、幾個一數、熟悉兩數交換其積相同的結果。靈活的「十十乘法」教學可協助日後的除法與乘除互逆教學。例如教學可用口頭多問類似「多少乘以 3 等於 15？」、「7 乘以多少等於 56？」的問題。
3. 「十十乘法」加強了「10」的部分，尤其是熟悉以 10 為乘數的部分，讓學生能直覺熟練「 $7 \times 10 = 70$ 」的結果，這有益於理解日後的直式計算（N-3-3）。











### 條目範圍

1. 「十十乘法」不宜另立單元單獨教學，應與乘法教學(N-2-6)同時進行。
2. 十十乘法雖可協助發現乘與除的關係，但二年級不進行除法教學（參見 N-2-9）。

### 釋例

1. 「十十乘法」的學習，宜依學生的熟悉度並考量乘法事實的難易度，分散於上下學期完成個別乘法表。例如：2、5、10 可先於 7、8、9。教師也可透過十十乘法表，熟悉個別乘法構成整體乘法表的模式，讓學生精熟十十乘法。
2. 十十乘法表的教學方式舉例  
例 1：完成個別乘法表（提供具體物，讓學生可以點數，並觀察其結構變化）

2 這是 2 的乘法表，讀讀看看。

 一串 2 個。	$2 \times 1 = 2$
	$2 \times 2 = 4$
	$2 \times 3 = 6$
	$2 \times 4 = 8$
	$2 \times 5 = 10$
	$2 \times 6 = 12$
	$2 \times 7 =$
	$2 \times 8 =$
	$2 \times 9 =$
	$2 \times 10 =$

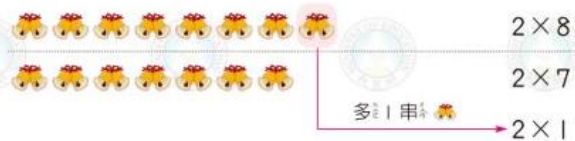
(《部》第三冊課本 P.78)

例 2：個別乘法表中的規律探索

- 乘數差 1 倍的探索

3 填填看看。

$2 \times 8$  比  $2 \times 7$  多 \_\_\_\_\_ 個 2。



(《部》第三冊課本 P.78)

- 個別乘法表的探索

2 這是一張10的乘法表，讀一讀，看一看。

	一 堆 10 個 。	$10 \times 1 = 10$
		$10 \times 2 = 20$
		$10 \times 3 = 30$
		$10 \times 4 = 40$
		$10 \times 5 = 50$
		$10 \times 6 = 60$
		$10 \times 7 = \underline{\quad}$
		$10 \times 8 = \underline{\quad}$
		$10 \times 9 = \underline{\quad}$
		$10 \times 10 = \underline{\quad}$

說說看，從上面的表格中，你的發現是什麼？

(《部》第三冊課本 P.84)

### 3. 熟悉整體乘法表的一些方法釋例。

例 1：引導學生發現乘法表上的對稱性，發現具有「交換律」性質，而減半記憶。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

例 2：觀察個別乘法事實，探討其規律。

(1) 「2 乘以幾」或「幾乘以 2」(2 的倍數)，積的序列即兩個一數的唱數。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

- (2) 「5 乘以幾」或「幾乘以 5」(5 的倍數)：積的個位數字不是 5 就是 0。
- (3) 「10 乘以幾」或「幾乘以 10」(10 的倍數)：積的十位數與原數相同，而個位數都是 0。(100 要小心)
- (4) 「9 乘以幾」或「幾乘以 9」(9 的倍數)：積的十位加上個位等於 9，而且依序變化有一定的規律。
- (5) 其他規律(例如下圖)

我們也可以這樣算：



(六四年《部》第四冊課本 P.60)

錯誤類型

學生不理解個別乘法表的規律，只會死背很容易記錯，導致乘法未能精熟，甚至出現固定錯誤（如混淆  $7 \times 8 = 54$  或  $56$ ）。建議教師教學時應強調個別乘法表的規律（如：多一倍即多多少？）以及透過交換律簡記憶等方式協助學生。

## 評量

### 1. 評量重點：

- (1) 能透過乘法意義和應用倍的關係，熟練十十乘法。
- (2) 能發現十十乘法表中的一些規律。

### 2. 注意事項：

- (1) 教師宜在教學中同時評量學生學習進展，讓學生多練習、表現或判斷。

評量方式宜多元，不要局限於紙筆評量，以增加學生之學習興趣。

<p><b>N-2-8 解題：兩步驟應用問題（加、減、乘）。</b>加減混合、加與乘、減與乘之應用解題。不含併式。不含連乘。 補充說明：連乘在三年級。</p>	<p>n-I-5</p>
---	--------------

先備：

連結：N-2-2, N-2-6, R-2-2

後續：N-3-7

## 基本說明

1. 本條目進行結合加、減、乘的日常應用問題。兩步驟指的是在解題時需要列出兩道橫式再計算，包括連加、連減、加減、減加、加乘、乘加、乘減、減乘之應用解題。
2. 學生解決兩步驟問題時，應先判斷題意，並將各步驟分開列式。學生第一次學習兩步驟問題，由於題目中文字較多，數字線索也較多，容易混亂，因此二年級的兩步驟解題應從簡單而直接的問題開始，其類型應較易理解，尤其數字也不用太大。
3. 兩步驟問題有時有不同的列式方式，若學生出現不同作法，教師應鼓勵學生討論，這是發現計算規律的前置經驗。處理 R-2-2 時也宜採這種多元解題，發現規律的模式。
4. 不含將兩步驟併成一算式的併式教學。（見 R-4-1）

## 條目範圍

1. 兩步驟加、減、乘，不包含連乘。其他兩步驟運算在 N-3-7、N-4-3。
2. 若兩步驟問題容許多元作法，可以進行討論，教師不宜統一固定的作法。但多元作法暗含的規律，由於無併式紀錄，不易敘述，且就二年級學生的認知還太複雜，因此除了 R-2-2 之外，均不宜做出計算規律的結論，更不宜直接告知結論，要求死記。
3. 涉及分配律的問題（如「一盒糖果，草莓口味有 2 顆，奶油口味有 4 顆，小明買 5 盒，總共有幾顆糖果？」）應容許學生採用較直接的三步驟來列式，但老師應詳細說明為何也可用兩步驟列式解題。

## 釋例

1. 進行兩步驟應用問題之教學，應連結 N-1-3、N-2-6、N-2-9 及 R-2-2 的學習經驗。例如基本加減法 (N-1-3) 活動中即可進行加減混合計算；乘法 (N-2-6) 中自然使用連加算式；分裝與平分 (N-2-9) 可透過連減策略解題；三數相加順序不影響其和 (R-2-2)。
2. 引導學生分析兩步驟應用問題的解題策略，需先讓學生理解問題情境，再透過列式進行解題。通常可以依「順向思考」：先算什麼？再算什麼？；或「逆向思考」：要算什麼？已經知道什麼？不知道什麼？協助學生分析問題。遇到較複雜的問題情境，建議提供線段圖或圖示，協助學生思考與解題。
3. 兩步驟「連加」應用問題示例。

例 1：快樂國小二年甲班有 25 人，乙班有 26 人，丙班有 27 人，三個班級共有多少人？

解：先算甲乙兩班人數： $25+26=51$ ，再算三班人數： $51+27=78$ 。當然運用 R-2-2 可能有許多不同列式方式。

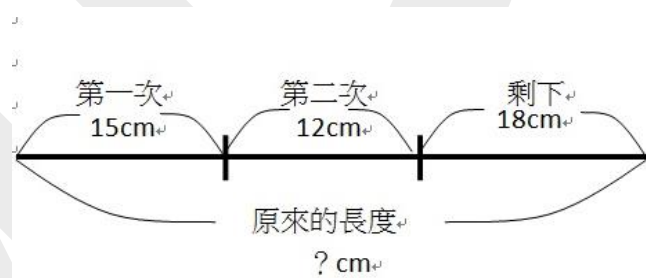
例 2：小明原有 15 元，爸爸給他 12 元，媽媽又給他 8 元，現在他有多少元？

解一：先算小明原有和爸爸給的錢之和  $15+12=27$ ，再算加入媽媽的部分： $27+8=35$ 。

解二：先算爸媽給的錢： $12+8=20$ ，再算與原有錢的和： $15+20=35$  或  $20+15=35$ 。

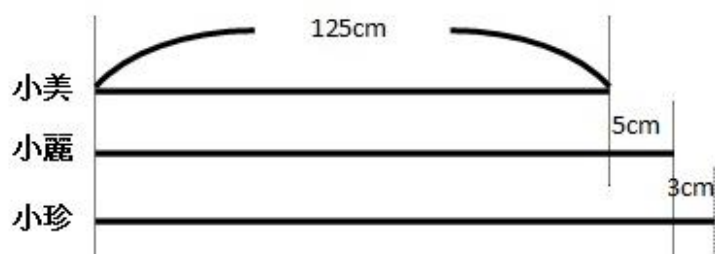
例 3：一條緞帶，第一次用了 15 公分，第二次用了 12 公分，最後剩下 18 公分，請問緞帶原來是多長？

解：分析線段圖，再透過二步驟逐次列式解題： $15+12=27$ 、 $27+18=45$ 。



例 4：小美身高 125 公分，小麗比小美高 5 公分，小珍又比小麗高 3 公分，請問小珍身高是多少？

解一：透過線段圖協助學生理解比較型問題的分析方式，先算小麗有多高： $125+5=130$ ，再算小珍有多高： $130+3=133$ 。



解二：先算小珍比小美高  $5+3=8$  公分，再算小珍多高： $125+8=133$ 。

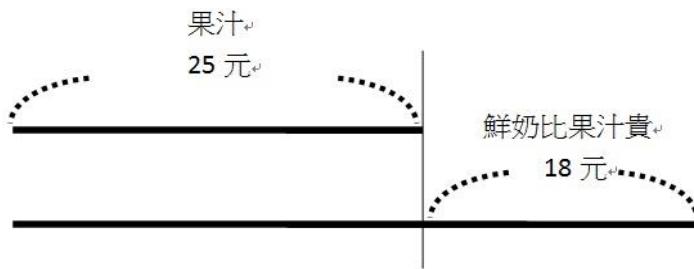
比較型問題相對較困難（參見 N-2-3），因此比較型兩步驟問題通常需以線段圖輔助。另外比較型兩步驟問題，雖然可運用 R-2-2，但因為比較抽象，在二年級時並不推薦（參見 R-2-2）。

例 5：果汁一瓶 25 元，一瓶鮮奶比一瓶果汁貴 18 元，媽媽買了一瓶果汁和一瓶豆漿，總



共要付多少錢？

解：先透過線段圖分析題意，再透過二步驟逐次列式解題（如下）



算法很多種： $25+18=43$ 、 $43+25=68$

$25+25=50$ 、 $50+18=68$

$25\times 2=50$ 、 $50+18=68$

4. 兩步驟「連減」應用問題示例。

例 1：便利商店裡原有 50 顆茶葉蛋，早上賣出 15 顆，下午賣出 25 顆，剩下多少顆？

解一：先算早上剩幾顆： $50-15=35$ ，再算最後剩幾顆： $35-25=10$ 。

解二：先算共賣出幾顆： $15+25=40$ ，再算剩下多少顆： $50-40=10$ 。

例 2：小美帶 50 元到商店，買了 18 元的麵包，又買了果汁，剩下 20 元。果汁多少元？

解：先算買麵包剩下錢數： $50-18=32$ ，再算果汁價錢： $32-12=20$ 。

例 3：胖虎、小夫和大雄三人參加校外教學，胖虎花了 250 元，小夫說：「我比胖虎少花 25 元」，大雄說：「我比小夫少花 15 元」。請問大雄花了多少錢？

解一：先算小夫花的錢： $250-25=225$ ，再算大雄花的錢： $225-15=210$ 。

解二：先算大雄比胖虎少花  $25+15=40$  元，再算大雄花的錢： $250-40=210$ 。

例 4：籃子裏的蘋果和梨子共 37 個，蘋果有 18 個，請問籃子裏的梨子比蘋果多多少？

解：透過線段圖，先算梨子顆數： $37-18=19$ ，再算相差幾顆： $19-18=1$ 。

5. 兩步驟「加減、減加」應用問題示例。

例 1：小明有 24 張貼紙，哥哥給他 15 張後，小明分給弟弟 17 張，小明剩下幾張？

解：先算哥哥給完的張數： $24+15=39$ ，再算給弟弟剩下張數： $39-17=22$

例 2：小華有 125 元，哥哥有 147 元，他們想合買 298 元的指尖陀螺後，不夠多少錢？

解：先算兩人共有錢數： $125+147=272$ ，再算不夠幾元： $298-272=26$ 。

例 3：紅繩長 43 公分，綠繩 38 公分，黃繩 89 公分，紅繩和綠繩合起來比黃繩長多少？

解：先算紅繩綠繩合起來的長度： $43+38=81$ ，再算比黃繩多多少： $91-89=2$ 。

例 4：公車上面原來有 30 名乘客，到了正義站，前門上來了 8 位乘客，後門下去 9 位乘客，公車上還剩下多少乘客？

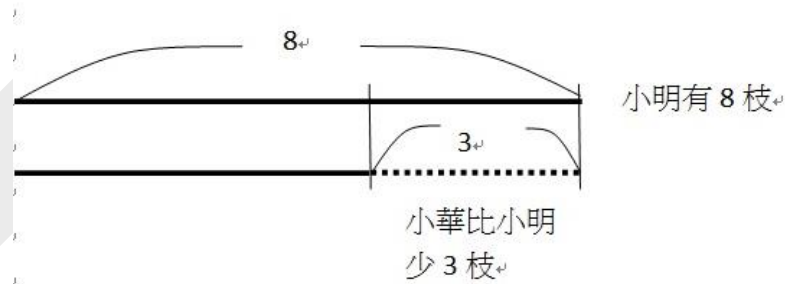
解一： $30+8=38$ ， $38-9=29$ 。

解二： $30-9=21$ ， $21+8=29$ 。

例 5：小明有 8 枝筆，小華比小明少 3 枝筆，兩人共有多少枝筆？

解：先透過線段圖分析題意，再透過二步驟逐次列式解題：

$8-3=5$ ， $8+5=13$ ；或  $8+8=16$ ， $16-3=13$



6. 兩步驟「先乘再（加、減）」應用問題示例。

例 1：運動會趣味競賽，將現場報名人數每 8 人分成一隊，共有 5 隊，另外還有 3 人沒有組隊，請問報名人數是多少？

解：先算 5 隊多少人： $8 \times 5 = 40$ ，再算全部多少人： $40 + 3 = 43$ 。

例 2：小明今年 13 歲，叔叔的年齡是小明的 3 倍又多 7 歲，請問叔叔今年幾歲？

解：先算 3 倍是幾歲： $13 \times 3 = 39$ ，再算叔叔幾歲： $39 + 7 = 46$ 。

例 3：一枝鉛筆 10 元，老師買了 9 枝，付了 100 元，可以找回多少元？

解：先算錢幣共幾元： $10 \times 9 = 90$ ，再算找回幾元  $100 - 90 = 10$ 。

例 4：全班同學乘坐摩天輪，每 4 人一個車廂，共坐了 8 個車廂，但有一個車廂離坐滿還差 1 人，問全班有多少人？

解：先算 8 車廂做滿的人數： $4 \times 8 = 32$ ，再算實際人數： $32 - 3 = 29$ 。

例 5：把一些糖果平分給 8 位小朋友，每人分 5 顆，不夠 4 顆，糖果原來有幾顆？

解：先算理想中的糖果數： $5 \times 8 = 40$ ，再算實際糖果數： $40 - 4 = 36$ 。

7. 兩步驟「先（加、減）再乘」應用問題示例。

例 1：一盒麻糬中，花生口味有 6 粒，芝麻口味有 4 粒。爸爸買 9 盒，共有多少麻糬？

解一：先算一盒有幾粒： $6 + 4 = 10$ ，再算共有幾粒： $10 \times 9 = 90$ 。

解二：先算花生共幾粒： $6 \times 9 = 54$ ，再算芝麻有幾粒： $4 \times 9 = 36$ ，最後算共有幾粒： $54 + 36 = 90$ 。

雖然是三步驟，但教師不要禁止，應鼓勵學生討論。

例 2：一盒布丁有 3 個，媽媽買 5 盒，阿姨買 6 盒，總共買了幾個？

解一：先算共買了幾盒： $5 + 6 = 11$ ，再算共買幾個： $3 \times 11 = 33$ 。

解二：先算媽媽買幾個： $3 \times 5 = 15$ ，再算阿姨買幾個： $3 \times 6 = 18$ ，最後算共買幾個： $15 + 18 = 33$ 。

例 3：巧克力糖一顆原來賣 10 元，今日特價賣 8 元，小平買了 6 顆，省了多少元？

解一：先算每顆省幾元： $10 - 8 = 2$ ，再算共省幾元： $2 \times 6 = 12$ 。

解二：先算本來共幾元： $10 \times 6 = 60$ ，再算特價後共幾元： $8 \times 6 = 48$ ，最後算共省幾元： $60 - 48 = 12$ 。

例 4：一盒布丁有 3 個，媽媽買 8 盒，阿姨買 4 盒，媽媽比阿姨多買幾個？

解一：先算相差的盒數： $8 - 4 = 4$ ，再算差幾個： $3 \times 4 = 12$ 。

解二：先算媽媽買幾個： $3 \times 8 = 24$ ，再算阿姨買幾個： $3 \times 4 = 12$ ，最後算差幾個： $24 - 12 = 12$ 。

錯誤類型

1. 當學生解題，將問題情境中出現的數字，列出似乎不合宜的算式，卻得到正確的答案。和

處理乘法交換律相同 (R-2-3)，教師宜追問其策略和想法加以釐清。

2. 兩步驟問題有些較複雜，學生未理解題意，僅透過關鍵字與數字解題，例如釋例(3)例 5，只有兩個數字，可能誤算成  $25-18=7$  或  $25+18=43$ 。

## 評量

1. 評量重點：  
能解決結合加、減、乘的日常兩步驟應用問題（排除連乘）。
  2. 注意事項：
    - (1) 當學生以少見的方式列式，並得到正確答案，教師不宜認定其為錯。應請學生說明其想法。
    - (2) 兩步驟問題有時有不同的列式方式，若課堂上出現不同作法，教師應鼓勵學生討論。
- 由於兩步驟問題較複雜，布題中的數字不宜太大，以免錯置評量的重點。

<b>N-2-9 解題：分裝與平分。</b> 以操作活動為主。除法前置經驗。理解分裝與平分之意義與方法。引導學生在解題過程，發現問題和乘法模式的關連。 <b>補充說明：</b> 不列除式，不用「除」的名稱。限整除問題。在「十十乘法」範圍中進行。可用幾個一數或連減協助，但不可成為答題格式。	n-l-4
---	-------

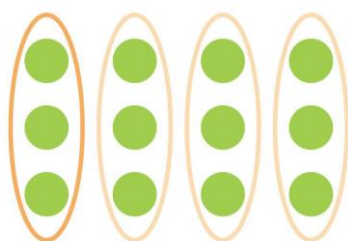
先備：

連結：N-2-6, N-2-7

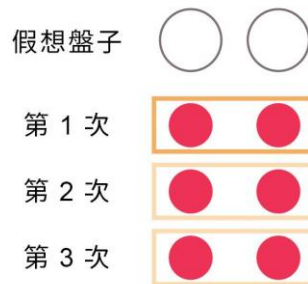
後續：N-3-4

## 基本說明

1. 分裝與平分是除法的前置經驗。以操作活動學習分裝與平分的意義與常用思考方法。
2. 學童可以透過操作、畫記、點數、連減或乘法等多元策略來解題，但最後仍應透過圖示讓學生認識分裝和平分問題都和乘法有密切的關連。
3. 「分裝」問題較簡單，例如「12 個玻璃杯，3 個杯子裝一盒，可裝幾盒？」學生可以透過花片的分堆，學習分裝的方法。教師可提供左下圖的「行列模型」擺法，讓學生發現這個問題和乘法的關係，更可以連結「十十乘法」中的問題：「3 乘以多少是 12？」（即「1 盒 3 杯，幾盒是 12 杯？」）



4. 「平分」問題必須處理分配的步驟，才能和「分裝」的操作結合。如「將 6 顆李子，平分給 2 人，每人一樣多，每人分幾顆？」學生可透過花片學習，其操作步驟如下：想像一個人用一個盤子代表，第一次各盤各分一顆李子，共放 2 顆；第二次再各放一顆李子，再放 2 顆，以此類推第 3 次再放 2 顆，分完（如圖）。



然後發現次數其實就是每人分得的顆數。在次過程中也可發現此問題和乘法的關係，更可以連結「十十乘法」中的問題：「多少乘以 2 是 6？」（即「1 人（盤）幾顆，2 人會是 6 顆？」）

### 條目範圍

1. 本條目的教學是操作活動，雖然是除法的問題，但不列除式，不用「除法」的名詞。
2. 限整除問題(全部分完)，並應在「十十乘法」的數量範圍中進行。
3. 由於本條目是學習分裝與平分的活動教學，因此不論使用幾個一數、連減、十十乘法做為解題活動的策略，學生可以只回答答案，但不需要記錄成特定答題格式。

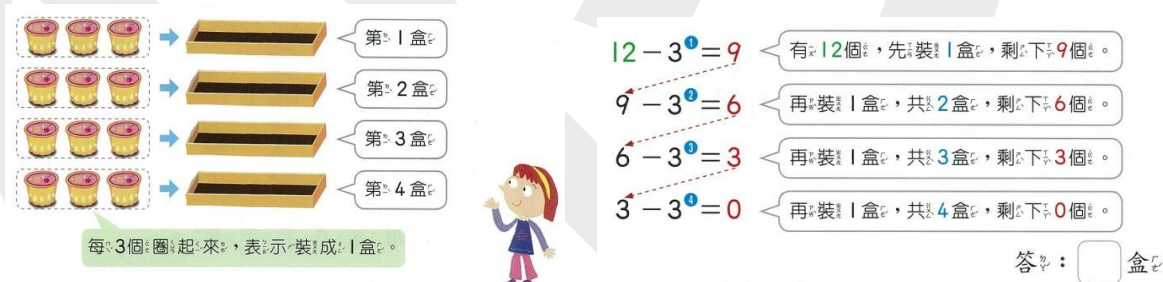
### 釋例

1. 平分活動和分裝活動，雖然都是除法的前置經驗，但意義不同，思考方式也不同，兩者的教學都應讓學生有實際操作的經驗。

2. 分裝活動及過程：

例：「12 個布丁，3 個裝一盒，可以裝幾盒？」底下是可能的作法，但無論如何最後要歸結到與乘法的連結，才能建立日後乘法與除法的密切關係。

- (1) 透過「分裝」操作過程圖示，連結「連減」



第 1 盒

第 2 盒

第 3 盒

第 4 盒

每 3 個圈起來，表示裝成 1 盒。

$12 - 3^1 = 9$  有 12 個，先裝 1 盒，剩下 9 個。

$9 - 3^2 = 6$  再裝 1 盒，共 2 盒，剩下 6 個。

$6 - 3^3 = 3$  再裝 1 盒，共 3 盒，剩下 3 個。

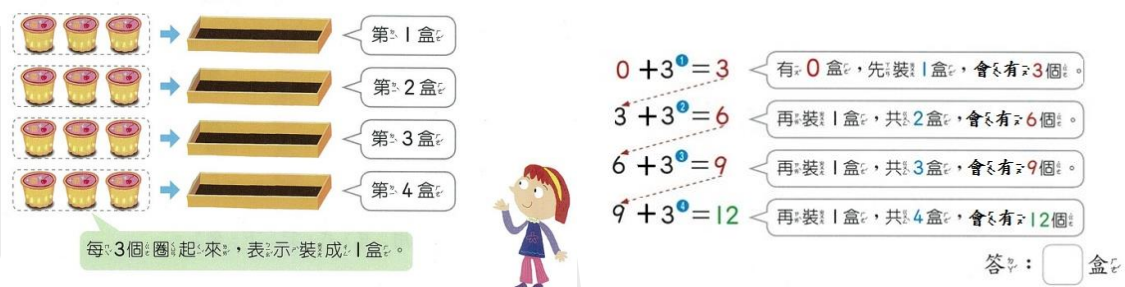
$3 - 3^4 = 0$  再裝 1 盒，共 4 盒，剩下 0 個。

答：  盒

- 請學生觀察上圖左邊 12 個布丁，在分裝過程中，每多裝 1 盒，左邊的布丁數會減少 3 個。

- 當 12 個布丁分裝完畢時，左邊的布丁會剩下 0 個，觀察裝滿的盒數會有 4 盒。

- (2) 透過「分裝」操作過程圖示，連結「連加」。



每3個圈起來，表示裝成1盒。

$0 + 3 = 3$  有0盒，先裝1盒，會有3個。  
 $3 + 3 = 6$  再裝1盒，共2盒，會有6個。  
 $6 + 3 = 9$  再裝1盒，共3盒，會有9個。  
 $9 + 3 = 12$  再裝1盒，共4盒，會有12個。

答：□ 盒

- 請學生觀察上圖右邊的布丁盒，在分裝過程中，每裝 1 盒，布丁盒中的布丁數會增加 3 個。
- 當 4 盒布丁都分裝完成時，會有 12 個布丁。

(3) 透過「分裝」操作過程圖示，連結「乘法」。(分裝圖示同前)

- 請學生觀察分裝過程中，每分裝 1 盒，盒子總數和布丁數目。
- 其過程可以如下：

$3 \times 1 = 3$  裝 1 盒，共裝 3 個布丁。  
 $3 \times 2 = 6$  裝 2 盒，共裝 6 個布丁。  
 $3 \times 3 = 9$  裝 3 盒，共裝 9 個布丁。  
 $3 \times 4 = 12$  裝 4 盒，共裝 12 個布丁。

- 當學生解題後，教師可追問：「3 乘以多少會等於 12？」讓學生察覺分裝活動和乘法問題的連結和關係。

1 盒布丁裝 3 個，幾盒布丁共有 12 個？

$$3 \quad \times \quad ( \quad ) \quad = \quad 12$$

1 盒 3 個                      4 盒                      全部 12 個

- 教師重新整合詢問：說說看：從「12 個布丁，3 個布丁裝一盒，可以裝幾盒？」與「一盒布丁有 3 個，裝了 4 盒，全部有幾個？」可以發現什麼？

3. 平分活動的注意事項：

- (1) 以「將 6 顆蘋果平分成 3 盤，每盤可以分幾顆？」為例，為了達到「公平」，常用的策略是「一輪一次分一顆」，當每分一輪時，雖然是分到 3 個盤子上，但觀察蘋果數量的變化，其數量正是每輪移出 3 個，這個經驗和「分裝」類似，因此可用上述「分裝」的策略進行。
- (2) 最後要能夠理解，分完之後盤中的蘋果數，正是平分到各盤的蘋果數。
- (3) 由於「一輪一次分一顆」的想法比較困難，教師應特別花時間解釋為何這麼做是公平的。

4. 平分活動及記錄方式：

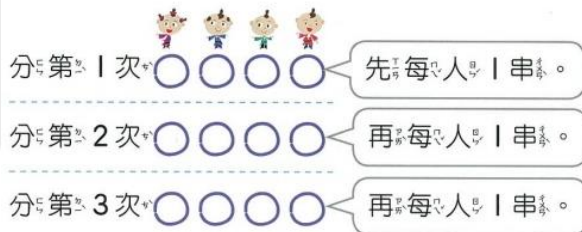
- (1) 教師布題，並請學生畫記(表徵)和說明做法：

有 12 串糖葫蘆要平分給 4 人，每人可以分到幾串？



用 1 個○表示 1 串，畫○分分看。

- (2) 「一輪一次分一顆」的「平分」操作過程  
在教師提示「一輪一次分一顆」是公平的分法之後進行活動：



接著要描述學生可能的說明方式，但無論如何最後要歸結到與乘法的連結，才能建立日後乘法與除法的密切關係。

- (3) 學生連結「連減」來說明平分的過程和結果。



- (4) 學生連結「連加」來說明平分的過程和結果。其方式和「分裝」類似，這裡不多做說明。
- (5) 學生連結「乘法」來說明平分的過程和結果。

- 請學生觀察平分過程中，每分 1 輪，每人分得的串數。
- 其過程如下：

第一輪： $1 \times 4 = 4$  每人 1 串，共分了 4 串。

第一輪： $2 \times 4 = 8$  每人 2 串，共分了 8 串。

第一輪： $3 \times 4 = 12$  每人 3 串，共分了 12 串。

- 當學生解題後，教師可追問：「多少乘以 4 會等於 12？」讓學生察覺平分活動和乘法問題的連結和關係。

每人分幾串，4 人合起來共有 12 串？

$$\begin{array}{r} ( \quad ) \quad \times \quad 4 \quad = \quad 12 \\ \text{每人 3 串} \quad \quad \quad 4 \text{ 人} \quad \text{全部 12 串} \end{array}$$

- 教師重新整合詢問：說說看：從「12 串糖葫蘆，平分給 4 人，每人分幾串？」與

「每人分 4 串，3 人全部有幾串？」可以發現什麼？

5. 在十十乘法的範圍內，練習分裝和平分，與乘法算式的關係，讓學生能逆轉十十乘法的記法。

例 1：「24 個橘子，8 個裝一袋，可以裝幾袋？」相當於問「8 個裝一袋，幾袋會是 24 個？」，再轉化成  $8x(\quad)=24$  的算式，讓學生從 8 的乘法，很快找出答案 3。

例 2：「18 支鉛筆，平分給 9 位小朋友，每人分幾支？」相當於問「每人分幾支，9 人合起來是 18 支？」，再轉化成  $(\quad)x9=18$  的算式，讓學生從 9 的乘法（家加上交換律），很快找出答案是 2。

### 錯誤類型

1. 平分時未將全部分完。學童的生活經驗，只要每組(人)分得的物品數量相同，雖未將物品全部分完，但學生亦可能視為平分。老師應強調全部都要分完。
2. 平分活動的記錄中，以釋例(3)為例，可能出現 6 個蘋果減去 3 盤的錯誤，這是學生尚未掌握問題以轉化成 6 個蘋果減去 3 個蘋果的想法。

### 評量

1. 評量重點：
  - (1) 能進行分裝活動，並理解分裝的意義和方法。
  - (2) 能進行平分活動，並理解平分的意義和方法。
2. 注意事項：
  - (1) 本條目係以操作活動為主，其評量方式宜多元，不可侷限於紙筆評量，以增加學生之興趣。
  - (2) 進行平分活動，學童若以連減的方式當作記錄時，宜注意各數量之單位是否相同。參見錯誤類型(2)
  - (3) 活動與評量均應以十十乘法為範圍。

<p><b>N-2-10 單位分數的認識：</b>從等分配的活動（如摺紙）認識單部分為全部的「幾分之一」。知道日常語言「的一半」、「的二分之一」、「的四分之一」的溝通意義。在已等分割之格圖中，能說明一格為全部的「幾分之一」。</p> <p><b>補充說明：</b>學生應知道等分配活動之目的。二年級之分數活動與教學限連續量，不處理離散量，避免和 N-2-9 混淆。摺紙限「摺半」操作：用長方形摺出分母 2、4、8 的單位分數；用圓摺出分母 2 或 4 之單位分數。已等分割之格圖，應呼應等分割活動，以長方形或圓形為主。在操作活動中做特定單位分數之比較。「的幾分之幾」僅限活動與溝通，不是乘法問題。</p>	n-l-6
--	-------

連結：N-2-9

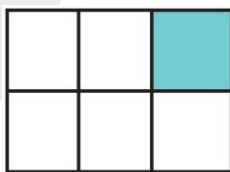
後續：N-3-9

## 基本說明

1. 本條目是小學第一次的分數教學，重點在於認識單位分數及其記錄方式。由於學生尚未學習面積之操作或公式，因此應以基於「公平」的等分活動來進行。
2. 本條目教學分兩部分：摺紙分數活動和單位分數教學。為避免學生認知尚無法區分不同的單位量，第二部份教學僅限於和摺紙活動相關的已等分割連續量模型（如長方形和圓），不處理離散量。
3. 從等分配的操作活動（如摺紙）中，認識單一部分為全部的「幾分之一」，並展開原紙，將「幾分之一」的部分上色。在活動中認識日常語言「的一半」、「的二分之一」、「的四分之一」的溝通意義。操作原則上以最容易的「取一半」來進行，也可嘗試「取三分之一」。
4. 在上述活動之後，進行在已等分割之格圖中，說明塗色之格為全部的「幾分之一」。並記錄成分數符號。完成對簡單單位分數之說、讀、聽、寫、作的學習。
5. 教師要進行「在明顯不公平的分割情況下，說明其不能稱為『幾分之一』的活動」，並檢查學生是否理解。

## 條目範圍

1. 應從正面態度處理已等分割格圖。評量時切勿使用或測試學生等積異形的分割（見錯誤類型），也不用差異微小的分割格圖來做為教學反例（如下圖，問是否為 $\frac{1}{6}$ ）。

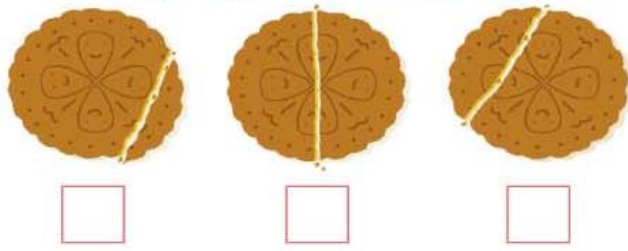


2. 本條目所有活動與教學，僅限於連續量之等分配活動。切勿與 N-2-9 的離散量活動混淆。離散量之分數活動應等三年級再進行。
3. 摺紙原則上限「摺半」操作：用長方形或圓形紙摺出分母 2、4、8 的單位分數。若嘗試等分成三份，僅限於長方形紙，且不納入評量。
4. 摺紙的方式很多，但必須包含類似摺繩單方向的摺疊操作。
5. 基本說明（3）所使用的已等分割格圖，應呼應基本說明（3）之等分割活動，以長方形或圓形為主。但其分母的範圍可稍放寬為常用的 2、3、4、5、6、8、9、10、12。
6. 單位分數之比較應在摺紙活動中進行，學生理解 $\frac{1}{8} < \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ 的道理，知道分的次數越多，所得越小的道理即可。
7. 「的幾分之一」僅限於活動與日常溝通，不是分數乘法問題。

## 釋例

1. 引入單位分數前，先從日常例子讓學生體驗公平的分配。由於真正的等分，在二年級還太困難，因此經常從反面的排除法，體驗等分大致上的意思。  
例：兄弟兩人平分鬆餅，由哥哥來分，弟弟先選，你覺得下面哪一種分餅的方法最公平？



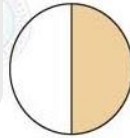


2. 摺紙等分操作，從 1 次對摺，2 次對摺，最多 3 次對摺，引入  $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{8}$ 。

(1) 活動時在對摺打開後，教師引導學生確認平分的份數，將其中一份塗色，再引入「幾分之一」的記法和讀法。

例 1: 拿出 1 張圓形圖卡，把圖卡對摺。

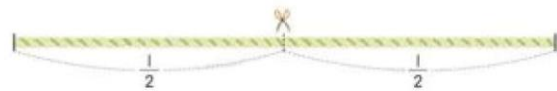
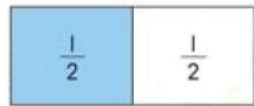
打開圖卡對摺，對摺把 1 張圖卡平分成幾份？（2 份）



把其中一份塗上顏色，塗色的這 1 份，是這張圖卡的一半，也就是這張圖卡的  $\frac{1}{2}$ ， $\frac{1}{2}$  讀做

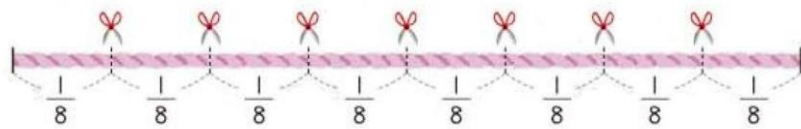
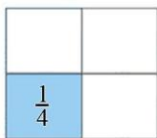
「二分之一」。沒有塗色的另一半，也是這張圖卡的  $\frac{1}{2}$ 。

(2) 可以操作圓形或長方形圖卡（或長條的圖卡如下）。



活動中透過  $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{4}$  的圖卡，與學生溝通日常語言「的一半」、「的二分之一」、「的四分之一」的意義：

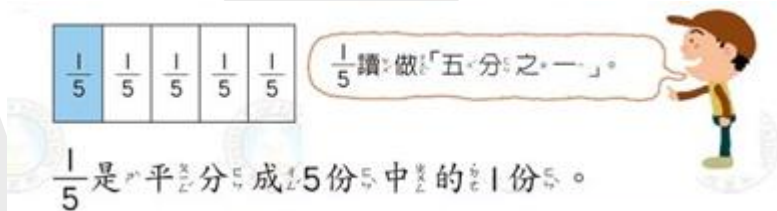
例 1: 1 張圖卡平分成 4 份如左圖，塗色的 1 份是圖卡的  $\frac{1}{4}$ （四分之一）。



例 2: 1 條繩子平分成 8 段如右圖，其中一段是繩子的  $\frac{1}{8}$ （八分之一）。

3. 認識單位分數。

(1) 摺紙活動之後，學生已初步理解單位分數的意思。接著再藉由與摺紙活動類似但等分好的圓形或長方形圖卡，完整認識單位分數



$\frac{1}{5}$  是平分成成5份中的1份。



$\frac{1}{6}$  是平分成成6份中的1份。

(2) 單位分數的說、讀、聽、寫、做活動：

課堂上學習單位分數時，「等分中的一份」、「分數數詞」、「分數數字」彼此間的轉換，就是單位分數的說、讀、聽、寫、做活動。

例：「一張紙平分成 4 等份，其中的一份」、「四分之一」、「 $\frac{1}{4}$ 」。

- 說：教師呈現四等分的圖形，問：「一張紙平分成 4 等份，（指著）其中這一份，說說看，這是多少張紙？」
- 讀：教師拿出數字卡「 $\frac{1}{4}$ 」或板書，請小朋友讀讀看。
- 聽：教師念分數數詞「四分之一」，請小朋友拿出數字卡或寫出。
- 寫：教師呈現四等分的圖形，問：「一張紙平分成 4 等份，（指著）其中這一份，寫寫看，這是多少張紙？」
- 做：給定空白圓形或長方形圖卡，要求學生「把四分之一張紙塗上顏色」。若分母不是 2、4、8，則圖卡上應有提示虛線。

(3) 等分好的圖形不可使用等積異形的圖示。避免混亂學生對分數概念的理解，影響分數的學習。

4. 以相同圖卡分別對摺的活動進行分數的大小比較活動：

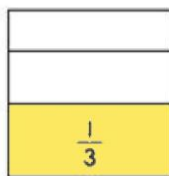
例：將一樣形狀的圖卡對摺出 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{8}$ ，比比看哪一個比較大？

可以分別比較 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{4}$ 和 $\frac{1}{8}$ 、 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{8}$ ，知道 $\frac{1}{8} < \frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ 且 $\frac{1}{8} < \frac{1}{2}$ 。引導學生理解其中的道理：摺的次數越多，得到的結果越小。

註：教師可以結合 N-2-9，問「把 12 顆糖果分給 2 個人或 4 個人，哪一種分法，分得的糖果數比較多？」兩種道理是一樣的。

錯誤類型

1. 不等的分割，誤以為隨意摺（或分），三份中一份就是 $\frac{1}{3}$ 。



2. 學生在溝通時，可能混用單位，如「我把1塊披薩平分成8塊，其中1塊是 $\frac{1}{8}$ 塊披薩。」單位混淆是學生學習分數的常見障礙。教師應釐清是「我把1個披薩平分成8份，其中1份是 $\frac{1}{8}$ 個披薩。」

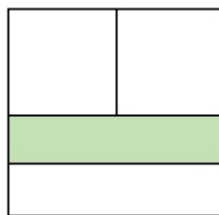
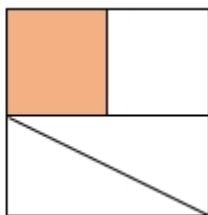
## 評量

1. 評量重點：

- (1) 能透過摺紙活動初步認識 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{8}$ 的意義。
- (2) 認識分母2、3、4、5、6、8、9、10、12的單位分數，進行其說、讀、聽、寫、做的活動。
- (3) 知道 $\frac{1}{8} < \frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{8} < \frac{1}{2}$ 。

2. 注意事項：

- (1) 摺紙活動進行時不能過度計較微小的差異。連續對摺的操作，以三次為限，避免造成平分有過大誤差（見錯誤類型1）。
- (2) 教師評量應注意單位不要混淆（見錯誤類型2）。
- (3) 評量命題不能出現等積異形的圖示，這超出學生的認知能力。如：



<p><b>N-2-11 長度：</b>「公分」、「公尺」。實測、量感、估測與計算。單位換算。</p> <p><b>補充說明：</b>單位換算公尺數限個位數。長度的加減問題必須包含和數線加減可以連結之題材。</p>	n-l-7
---	-------

先備：N-1-5 ( S-1-1 )

連結：S-2-3, S-2-4, R-2-1

後續：N-3-11, N-3-12

### 基本說明

1. 以一年級的「長度」量個別單位活動為基礎，二年級開始學習常用單位「公分」與「公尺」。由於是首次學習，建議「公分」與「公尺」分上下學期教學。「公分」學習可和使用公分尺 (S-2-3) 的單元結合。
2. 常用單位的學習目的在應用於日常生活。因此教學活動應包含完整的實測、量感、估測與簡單加減計算。知道什麼是常用的測量器具——直尺，並能正確使用直尺 (S-2-3)。量感的教學應配合學生身體或周遭物件，以建立量感的實質基礎。估測必須在實測已有經驗之後才進行，結合對單位的基本量感和實測經驗來估計長度，並會使用「大約多少公分」的敘述。
3. 有一些長度活動因為概念較難，並未在 N-1-5 進行，應在二年級完成 (見(3)、(4)、(5)說明)。學生應知道長度概念的數量表示，必須完整包含單位數和單位測量。如果不知道個別單位長，只知道測量得到的單位數，並無法做長度比較。
4. 在長度活動中理解長度大小的遞移關係 (R-2-1)。重點是應從實際量感著手，以測量後的單位數來比較，只宜做為驗證。最後應知道，甲、乙兩物不 (能) 直接比較時，若甲比乙長，乙比丙長，則甲比丙長的遞移關係。
5. 在常用單位的單位換算教學之前，應先進行「單位換算」活動：以兩種個別單位測量物體。本活動應討論以下兩個重點：個別單位比較長，量出來的單位數反而必較少；如何根據不同個別單位的關係，做單位數的換算。
6. 認識「1 公尺 = 100 公分」，並能處理相對應的單位換算 (如「325 公分是 3 公尺 25 公分」、「3 公尺 25 公分是 325 公分」) 與相應長度計算問題。
7. 結合長度活動與加減計算問題。學生應知道長度單位數的加減在長度情境中的意義。為了和三年級數線活動 (N-3-11) 連結，加減問題應包含與尺刻度有關的計算問題，數字可僅限於一把尺的數字範圍，但應清楚其意義。
8. 線段圖是源自長度問題而自然發展出來的 (加減) 解題思考工具，在本指標下的長度加減問題，均應呈現線段圖，一方面協助理解題意，同時也讓學生熟悉其使用，以作為協助其他解題和日後學習數線之用。

### 條目範圍

1. 因為本年度整數學習為三位數，因此單位換算公尺數限個位數。
2. 長度的加減問題與說明必須包含和數線加減可以連結之題材。
3. 量感和估測活動，應注意單位的合理性，不應以「公尺」量身高，也不應以「公分」量走

廊長。

- 二年級的估測比較接近量感活動，和「量」的經驗有關，絕非實測後再求近似值的概算活動。估測和學生成熟度有很大的關係，應以活動討論為主，著重經驗學習與應用，不宜過度評量。
- 基本說明(5)中的不同個別單位做單位數的換算，只處理一單位為另一單位倍數的情況，而且只處理大單位換成小單位的情況。

### 釋例

- 長度常用單位的需求感活動。一年級已學會以「個別單位」測量長度。在二年級引入常用單位「公分」、「公尺」之前，宜先進行「為什麼需要相同單位的活動」：例如由學生自選個別單位，測量同一物件，進而從溝通需要，建立使用相同單位的需求感。

例1：老師的桌子有多高？用你的筆量量看。

下面是四位小朋友量出來的紀錄

圓圓	東東	小威	小可
8枝	5枝	6枝	4枝

為什麼他們量出來的數量不一樣呢？

圓圓和東東的筆，誰的筆比較長？



(《部》第三冊第42頁)

- 一樣的桌子為什麼會有不同的數值結果。透過討論，學生理解並能說明：「因為筆不一樣長，量得數量不相同」。
- 也可討論筆的長度和所得數值之間的關係。筆越長，量得的數值越大還是越小。將例1的結果轉化成如「4枝小可的筆和6枝小威的筆一樣長」，問「小可和小威誰的筆比較長？」
- 也可將問題轉化成如果1枝小可的筆和2枝圓圓的筆一樣長，表中測得的數值是合理的嗎？

例2：誰家的冰箱比較高？



(《部》第三冊第43頁)

以不同個別單位測量不同物品長度，從所得數值並無法判斷長短，必須用一樣長的個別單位才能從判斷，所以需要共同單位。

- 常用單位「公分」。引入「公分」並進行其實測、估測，從實測、估測的經驗培養量感。公分和公尺宜分在不同學期教學，較易掌握的公分應先引入。

- (1) 公分引入與直尺實測活動，請先閱讀 S-2-3。下例是簡單的點數活動。
- (2) 公分的估測與量感。有實測經驗後，可以「先估再量」培養長度的量感。

例：估估看，紅色緞帶有多長？粉色紙帶有多長？再量量看。



(改自《部》第三冊第45頁)

- 估自己身上較短長度的部分，例如指甲寬大約1公分、食指長、手掌寬、「一掬」(拇指與食指張開的寬度)或是腳掌長、步長等。熟悉身體的長度單位，可以協助日後做較精確的長度估測。同理也可估測身邊常見的物件，未來也可協助估測。
- 公分估測不做相對於公分太長的物件(如教室長)。

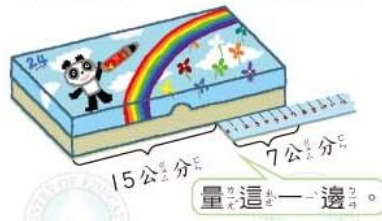
- 公分的計算應用。透過情境引入加減計算，並發展線段圖為解題鋪路。在本條目下的加減問題，最初均應呈現線段圖，讓學生熟悉這個有用的表徵。

- (1) 在實測時，當需要兩次測量(以上)的情況，自然須使用長度加法。

例：用15公分尺量盒子的邊長，量完一次後，剩下的部分量出來是7公分，邊長有多長？

$$15 + \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

答：  $\underline{\quad}$  公分



(《部》第三冊第 49 頁)

(2) 長度比較的情境要使用長度減法。

例：紅繩長 13 公分，藍繩長 9 公分，紅繩比藍繩長多少公分？

$$13 - \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

答：  $\underline{\quad}$  公分



(《部》第三冊第 49 頁)

(3) 其他長度加減計算情境。

例：水桶一圈 96 公分，水桶把手 51 公分，水桶一圈比把手長多少公分？

$$96 - \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

答：  $\underline{\quad}$  公分



(《部》第三冊第 50 頁)

(4) 本問題的重點是要確定學生知道彎曲部分要拉直。

例 1：小永和小軒合作量桌子，小永從左邊量了 35 公分，小軒從右邊量了 27 公分，桌子有多長呢？

$$35 + 27 = \underline{\quad}$$

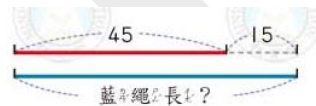
答：  $\underline{\quad}$  公分



例 2：紅繩長 45 公分，紅繩比藍繩短 15 公分，藍繩長多少公分？

$$45 + 15 = \underline{\quad}$$

答：  $\underline{\quad}$  公分



(《部》第三冊第 51 頁)

4. 常用單位「公尺」：

(1) 公尺的引入常使用 1 公尺直尺，直尺在 1 公尺處標示有 1 公尺和 100 公分。

用1公尺的尺量繩子的長。



答：繩子長1公尺。

(《部》第四冊第63頁)

(2) 公尺和公分的關係：1公尺=100公分：

用10公分的尺量繩子，剛好量了10次，繩子長多少公分？



$$10 \times 10 = 100$$

答：繩子長100公分。

因為量的是同一條繩子，所以1公尺=100公分。



(《部》第四冊第63頁)

(3) 公尺的實測。公尺實測工具是1公尺直尺。學生應先熟悉公分直尺的使用(S-2-3)。實測活動可測量教室的長寬、黑板、布告欄、身高、門高等，學生應熟悉公尺和公分同時出現的記法如身高1公尺28公分。另外，彎曲物件如腰圍、水桶握把長的長度可用捲尺測量。

(4) 長度的估測與量感：  
例1：

地面到窗戶的高度比1公尺長還是短？手臂張開呢？



手臂張開比1公尺長嗎？

地面到窗戶的高度比1公尺短嗎？

練習 圈圈看。

1 我的身高比1公尺(長, 短)。

2 桌子比1公尺(高, 矮)。

(《部》第四冊第64頁)



先聚焦在 1 公尺的量感，和身體部位結合，以利後續估測。

例 2：回答下列問題：

估估看，教室大約有幾公尺寬？\_\_\_\_\_公尺

量量看，教室大約有幾公尺？\_\_\_\_\_公尺

不做幾公尺幾公分的估測

例 3：教室有多長？你會用 1 公尺直尺來量，還是 15 公分直尺來量？

這支粉筆有多長？你會用 1 公尺直尺來量，還是 15 公分直尺來量？

估測時要選擇合理的單位。

例 4：圈出合理的答案：

走廊長 (50 公分 50 公尺)

鉛筆長 (20 公分 20 公尺)

手指長 (5 公分 5 公尺)

5. 單位換算。二年級單位換算不用「乘以 100」或「除以 100」換算。

例 1：黑板的長邊是 4 公尺 50 公分，黑板有幾公分長？

$$4 \text{ 公尺} = 400 \text{ 公分}$$
$$400 + 50 = \underline{\quad}$$

答：\_\_\_\_\_ 公分



(《部》第四冊第 66 頁)

例 2：教室寬 850 公分，教室寬幾公尺幾公分？

800 公分是 8 公尺，所以 850 公分是 8 公尺 50 公分。

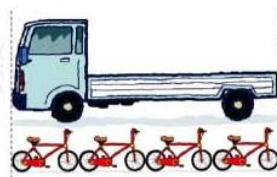
6. 公尺的計算應用，含加法、減法、乘法。建議先不討論複合單位計算

例 1：腳踏車長 2 公尺，貨櫃車長 12 公尺，兩輛車相差多少公尺？

例 2：1 輛腳踏車長 2 公尺，4 輛一樣的腳踏車排成一直線和貨車一樣長，貨車長多少公尺？

$$2 \times 4 = \underline{\quad}$$

答：\_\_\_\_\_ 公尺



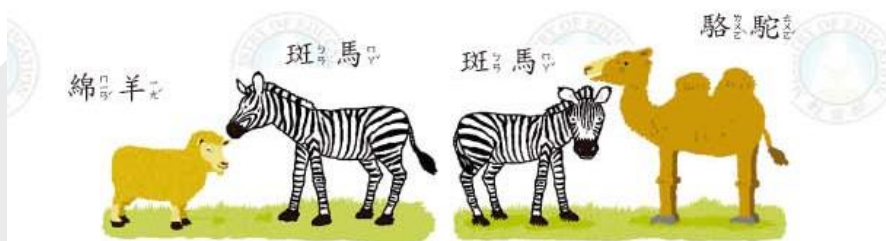
(《部》第四冊第 69 頁)

7. 長度大小的遞移關係。

二年級先透過圖示處理如「甲 > 乙、乙 > 丙」或「甲 < 乙、乙 < 丙」的問題，先從直接比較確定第遞移關係的正確性。再運用於無圖示的推理問題。

例：

- 2 綿羊比斑馬矮，斑馬比駱駝矮。  
那隻最高？那隻最矮？



(《部》第四冊第 67 頁)

雖然學生可從圖示看見駱駝比綿羊高。但教師可以引導將兩圖發生的地點獲時間分開。強迫學生思考並確認透過斑馬來比較的正确性。

### 錯誤類型

1. 學生會忽略使用的是不同個別單位，直接以測得的數值比較長度。
2. 回答長度問題時，答案只報數值，沒有「公分」或「公尺」的單位。
3. 用尺錯誤類型見 S-2-3。

### 評量

1. 評量重點：
  - (1) 知道用不同長度的個別單位測量同一物品，量的數值會不同，且個別單位比較長的量出的數值較少，反之亦然。
  - (2) 能使用「公分」、「公尺」進行實測與估測，並從活動中培養量感。
  - (3) 能做長度的加法、減法和乘法計算（單位公分或公尺，不做複合單位的計算），解決生活中長度的問題。
  - (4) 能做「公分」、「公尺」的單位換算。
2. 注意事項：
  - (1) 估測和量感的培養以活動和討論為主，不宜做紙筆評量。
  - (2) 長度常用單位的解題，評量時答案要包含單位。

<p><b>N-2-12 容量、重量、面積：</b>以操作活動為主。此階段量的教學應包含初步認識、直接比較、間接比較（含個別單位）。不同的量應分不同的單元學習。 補充說明：重量使用天平教學，但學生仍須體驗重量的體感。無常用單位。</p>	<p>n-l-8</p>
--	--------------

先備：N-1-5

連結：R-2-1

後續：N-3-14、N-3-15、N-3-16

### 基本說明

1. 如同 N-1-5，這是認識容量、重量、面積這些量的第一次學習活動，應以操作活動為主，並包含初步認識、直接比較、間接比較（含個別單位），也可包含比較遞移關係。不同的

量應分在不同單元學習。

- 除了長度之外，容量是小學中較早學習、較易處理又與數學教學（分數和小數）有關的量。容器的容量原來是體積或容積的概念，可透過容器裝滿的液量來認識其容量，後來延伸成也用容量稱呼容器中（未裝滿）的液量。在容量初步認識中，如何用個別單位（如小杯）來度量容器中的液量是最關鍵的步驟，教師應清楚教學，也可以此化解容量教學中常見的等量異形問題。總之，容量概念本身並不簡單，要讓教學順暢，必須妥善安排教學順序和教具使用，讓學生熟悉如何測量容量，才能讓學生從使用中更理解其意義。
- 重量是日常生活的常用量，但和與視覺有關的幾何量不同。重量教學必須結合體感和測量工具（本年度只需要天平），進行相關的量感與比較活動。由於體感較主觀，誤差也較大。重量教學相當依賴恰當的測量工具。直接比較活動可用手（單手測量兩次）先主觀經驗輕重的差別，並建立重量相等和天平水平的連結（也可透過直覺的對稱性），再以天平進行重量的間接比較和個別單位活動。
- 面積是幾何量，可以用視覺做比較。但因為面的形狀變化很多，進行本條目面積初步認識時，應把握底下原則：所有直接比較都只處理一圖形包含於另一圖形的情形（亦即本年度不處理直接分割被比較區域的活動）。但是本年度仍要進行以個別單位來比較兩無法直接比較區域的活動。

### 條目範圍

- 重量教學不能只使用天平，學生仍須充分體驗重量的體感。不過運用體感比較時，兩物的重量不宜過近。
- 面積個別單位應只處理最簡單而基本的情況：正方形或長方形。
- 本年度不介紹容量、重量、面積的常用單位。（N-3-14、N-3-15、N-3-16）

### 釋例

- 容量的初步認識、特性與比較。
  - 容器的容量是指這個容器所能容納的量，例如把一個杯子裝滿水，所裝入的水量，就是這個杯子的容量。換句話說，容量是和體積、容積類似的視覺量，有時並不容易做直接比較。  
例 1：誰的容量比較大？



（《部》第四冊第 98 頁）

- 由於容器形狀形形色色，有時很難進行視覺直接比較。這時可透過把容器甲裝滿水，將水倒入另一容器乙。若剛好倒滿，則甲乙容量相等；若乙還有空間，則乙的容量比甲大；否則乙的容量比甲小。  
例 2：誰的容量比較大？



這是直接比較還是間接比較呢？如果將液量等同容器甲的容量，這是直接比較。但如果將水的液量視為一種「容量」，則容器甲、乙的容量，是透過水的容量來比較，這就是間接比較。

- (3) 於是除了容器的容量，我們也常將容器中（未裝滿）的液體量視為容量，這個概念甚至比容器容量的原來概念更常用。

例：誰的容量比較大？

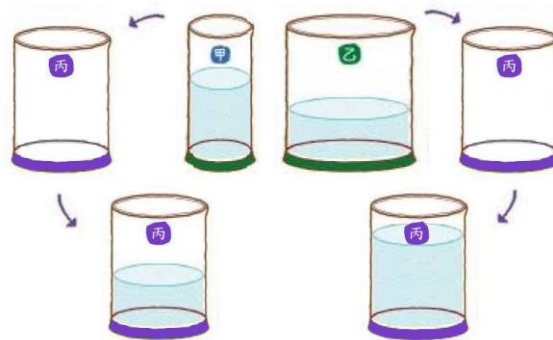


左圖兩容器中的液體高度相同，但底面積不相等，從視覺可以判斷右側的液體容量較大。右圖兩容器中的液體底面積相等，但高度不同，從視覺可以判斷右側的液體容量較大。這是新容量定義下，容器中液體容量的直接比較。

## 2. 容量的間接比較與個別單位比較。

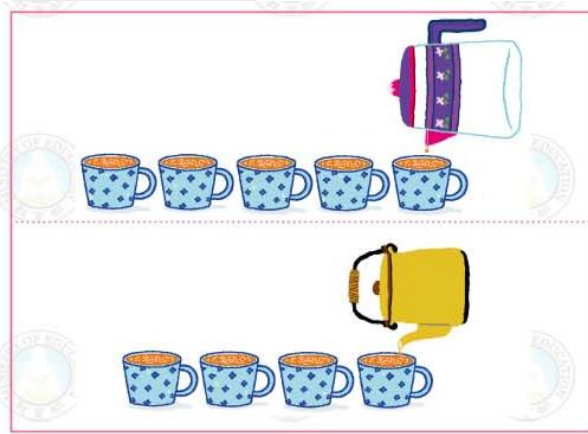
- (1) 容量的間接比較比較傳統的作法，是將甲、乙兩容器中（未裝滿）的液體，倒到第三個容器丙中，在丙中做比較。

例 1：誰的容量比較大？



- (2) 容量的個別單位比較：建立長度的個別單位測量，可以用數的大小來比較物體的長短，建立了數和量的密切關係。容量的個別單位重點也相同，將兩容器（未裝滿）的水分別倒入「同一」個別單位，測得倒的次數，因此也可用數的比較來比較容量的大小。

例 2：紫色水壺的容量比黃色水壺多多少？倒在同樣的杯子中，比比看。



5杯 > 4杯

紫色水壺的容量比黃色水壺多1杯。

(《部》第四冊第 100 頁)

上例也可以反過來，改用杯子裝滿水，倒入水壺中，以裝滿水壺的杯數比較容量。

### 3. 重量的初步認識與直接比較。

- (1) 重量是物體受力的大小，可利用拿拿看、掂掂看，感受物品的重量。重量不是視覺量，無法用幾何大小來比較重量，甚至還造成誤導（如氣球和鉛球）。因此除了體感與經驗之外，重量的學習相當依賴測量工具的使用。：

例：老鼠和獅子哪一個比較重？（用經驗推測）



(《部》第四冊第 94 頁)

- (2) 重量的直接比較只能訴諸體感，可用同一手拿兩物品比較，或用兩手各拿一物來比較。但除非兩物重量差別極大，這種比較方式相當粗略。

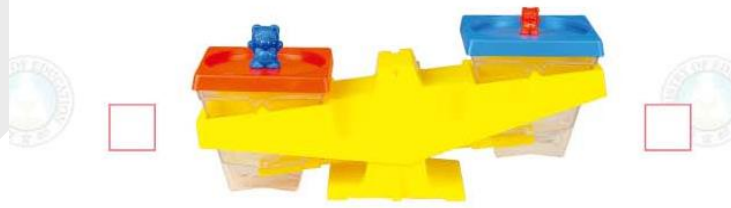
例：氣球和排球哪一個比較輕？



(《部》第四冊第 94 頁)

- (3) 初學重量，最常用的工具是「天平」來比較重量。若天平呈水平表示兩物等重，否則下垂的一方較重。由於教具靈敏度

例：比較重的畫△，比較輕的畫○






（《部》第四冊第 95 頁）

4. 重量的間接比較及個別單位比較。

(1) 重量的間接比較：三個物品的重量比較，可使用天平兩兩比較知道三個物品的重量關係：

例：用天平比比看  和  哪個比較重？






透過  比較重量，知道  比  重。

教師在這邊也可進行遞移關係的教學（R-2-1）。



(2) 重量的個別單位比較。在天平情境，個別單位相當於砝碼。

例：

 和  和  那一個比較重？



1





1 個  和 3 個  一樣重。

2



1 個  和 2 個  一樣重。

3

(, ) 比較重。

（《部》第四冊第 96 頁）

5. 面積的初步認識與直接比較。

(1) 面積的初步認識：平面圖形的大小稱為面積，是可透過視覺感官比較大小的量。例如：紅色正方形的面積比藍色長方形的面積大（左圖）。



(2) 面積的直接比較：如上題情境，可以直接透過視覺感官比較面積的大小，也可以透過兩個平面圖形相互疊合，進行直接比較（右圖）。

例 1：



（《部》第三冊第 92 頁）

## 6. 面積的間接比較與個別單位比較。

(1) 當兩個平面圖形無法相互疊合進行直接比較時，可透過大小複製後進行間接比較。

例 1：上例布告欄之問題，若不移動物件直接疊合，也可以用複製的方法進行間接比較。例如複製圖畫面積(黃色部分)，再與海報或報紙進行疊合比較，可知面積比海報和報紙小。



（改編自《部》第三冊第 92 頁）

(2) 面積的個別單位比較，應只用正方形或長方形做個別單位。

例 1：用正方形紙卡拼排測量桌面面積大小。

例 2：用報紙拼排，測量某處如走廊面積的大小。

7. 在容量、重量、面積的間接比較活動時，也可以進行 R-2-1 的大小比較遞移關係比較。讓學生理解遞移關係不只出現在數，也出現在各種量的比較中。

### 錯誤類型

1. 重量的比較學生受視覺感官影響，以為較大物品較重，建議教師利用較大的氣球和小的球（如棒球或網球），讓學生比較，修正錯誤觀念。
2. 一樣的水倒到不同形狀的容器高度不一樣時，學生可能認為水柱較高的水量較多。教師可以再將水倒回同一容器，確定水量一樣多。
3. 進行面積個別單位比較活動時，注意拼排的紙卡是否緊密連接或紙卡重疊。

### 評量

1. 評量重點：
  - (1) 能初步認識容量、重量和面積。
  - (2) 能做容量、重量和面積的直接比較。
  - (3) 能做容量、重量和面積的間接比較（含個別單位）。
2. 注意事項：
  - (1) 二年級學生不能做靈敏度高的操作，因此任何量比較的教學或評量，都不應該挑量非常接近的物件比較。若要呈現量的相等，則必須容忍誤差。
  - (2) 容量與重量的評量應以實作評量為主，否則必須等學生有足夠的操作經驗，理解比較的工具和方式後，才進行進行紙筆評量
  - (3) 容量的直接比較應符合：一個容器能直接裝到另一容器中；或可以並置並能用視覺判斷比較。
  - (4) 重量比較的紙筆評量不宜只給物品圖，而無測量工具或重量關係的圖示。
  - (5) 面積直接比較的評量，不宜處理一圖形無法包含於另一圖形的情況。
  - (6) 面積個別單位的評量，應只用正方形或長方形做個別單位。



<p><b>N-2-13 鐘面的時刻：</b>以操作活動為主。以鐘面時針與分針之位置認識「幾時幾分」。含兩整時時刻之間的整時點數（時間加減的前置經驗）。</p> <p><b>補充說明：</b>同步練習「五個一數」、「十個一數」。不含秒針。整時的點數須配合鐘面進行。</p>	n-l-9
--	-------

**先備：**N-1-6

**連結：**N-2-14

**後續：**N-3-17

### 基本說明

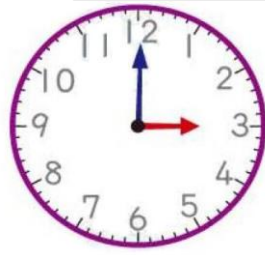
1. 以操作活動為主，由鐘面上的時針、分針之位置與刻度認識「幾時幾分」。「幾時」之報讀：認識「時針」；知道時針走一大格為 1 時，時針繞一整圈是 12 時。「幾分」之報讀：認識「分針」；知道分針走一小格是 1 分，走一大格是 5 分，分針繞一整圈是 60 分，並能用「5 個一數」或「10 個一數」協助「幾分」的點數。從分、時針的聯合轉動，知道時針除整點外多半介於兩大格之間，並應知道「幾時」應以哪一格為準。知道接近下一整點時，時針和分針的位置如何變化。
2. 撥鐘教學，能讓學生體驗時間進行時分針和時針的位置變化（如學生該知道「分針走一整圈，時針走一大格」、「分針走 30 分（半圈），時針走半個大格」）。因此至少老師所使用的教具鐘，其時針和分針的連動要有一定的準確度。
3. 教師應配合日常作息，進行上午幾時幾分與下午幾時幾分的教學。
4. 以配合鐘面點數方式，處理牽涉到兩整時時刻間的簡單「加減」問題（詳見釋例（3）），這是時間加減的前置經驗（N-3-17），重點在認識這些問題的情境與分析，而非列式計算。
5. 由於生活中常用到電子計時裝置，建議老師可以說明其意義，並與鐘面做對照連結（若電子鐘為 24 小時制，老師可略加說明）。但這不是教學要點，也不需要做評量。

### 條目範圍

1. 點數鐘面時，可同步練習「五個一數」「十個一數」。
2. 完全不處理「秒針」。(N-3-17)
3. 「加減」問題不處理跨午問題。
4. 不論是時刻或時間量，在正式布題與時間單位上統一採用「時」、「分」。幾「點」、幾「小時」、幾「分鐘」這類用語可視為日常溝通用語。

### 釋例

1. 繼一年級 N-1-6 簡單報讀「整點」與「半點」，二年級由鐘面時針、分針之位置（刻度）報讀幾時幾分。鐘面只有 1 到 12 的數字，而不是 1 到 60，有效率的報讀需要熟練的用「5 個一數」往上數。初學時，可只報讀 5 的倍數。  
一年級已介紹長針短針，此處透過鐘面報讀介紹時針（即短針）和分針。  
例 1：鐘面上的長針指向哪裡？短針指向哪裡？是幾時？

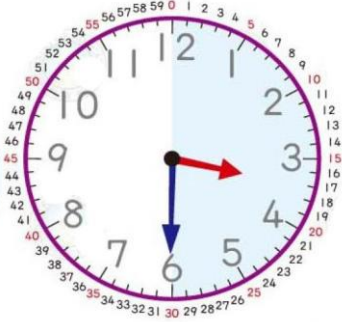


短針又叫做時針。  
3點也可以說成3時。

(《部》第三冊第 53 頁)

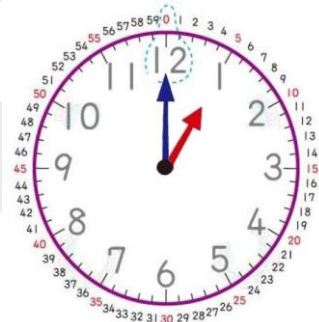
例 2：長針指向 6，短針指在 3 和 4 之間，是幾時幾分？

長針又叫做分針。  
3 點半也可以說成 3 點 30 分或 3 時 30 分。



(《部》第三冊第 53 頁)

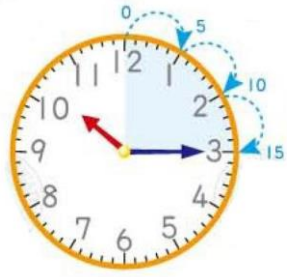
2. 進行撥鐘教學，課前教師需準備且確認有相對準確的教具鐘，以利撥鐘時學生的觀察。  
例：撥撥看



- (1) 從 1 時開始撥鐘到 2 時，分針轉了幾圈？經過幾小格？是幾分鐘？
- (2) 從 2 時開始撥鐘到 3 時，分針轉了幾圈？經過幾小格？是幾分鐘？
- (3) 從 3 時開始撥鐘到 5 時，分針轉了幾圈？代表過了幾小時？
- (4) 從 5 時撥回 4 時，分針轉了幾圈？代表轉回了幾小時？
- (5) 從 6 時慢慢撥鐘，分針在鐘面每個數字時是 6 時幾分？每大格數字之間是幾分鐘？
  - 撥鐘時要提醒學生理解如 4 時 1 分至 4 時 59 分，鐘面的時針從 4 旋轉至 5，但不會超過 5，避免學生誤將 4 時 59 分報讀成 5 時 59 分。
  - 4 點 59 分再撥轉 1 分鐘是 4 點 60 分，教師可以說「滿 60 分了，變成 5 時」，並讓學生確認鐘面的確是 5 時，教師告知通常不說 4 點 60 分。

3. 報讀幾時幾分。

例 1：下面鐘面是幾時幾分？用 5 個 1 數的方法數數看。



\_\_\_ 時 \_\_\_ 分



5 時 \_\_\_ 分

例 2：報讀下面鐘面是幾時幾分？



\_\_\_ 時 \_\_\_ 分



3 時 \_\_\_ 分

例 3：

3 這是 4 時 57 分？還是 5 時 57 分？



（《部》第三冊第 57 頁）

觀察時針位置，時針在 4 到 5 之間，分針未到 60，因此是 4 點多。

例 4：圈圈看，並填上吃早餐的時間：



今天吃早餐的時間是（上午 下午）\_\_\_\_時\_\_\_\_分  
本年度使用 12 時制報讀「上午」或「下午」幾時幾分。

4. 以撥鐘或鐘面點數，解決簡單的「加減」類型問題。教學前確認學生有足夠的撥鐘經驗，才能做有意義的鐘面點數。限整時刻且不處理跨午問題。

(1) 處理兩時刻之間的時間量。

例：世林參加烤肉會，他下午 1 點提早到場，還要等多久活動才會開始？



(2) 處理時刻加減時間量類型的問題，但進行時用點數而不用加法。

例 1：下圖是小華到圖書館的時刻，再過 2 小時就回家，小華何時回家？



由 9 開始。經過 2 小時（唱數 10、11），是 11 時。

例 2：下圖是小華看完電影的時刻，電影全長 2 小時，電影何時開始播出？



由 3 開始，往回經過 2 小時（倒數唱數 2、1），是 1 時。

5. 電子鐘雖非教學重點，但因為常用，學生應學會報讀，並與鐘面連結。

例：下面兩個鐘各是幾時幾分？



\_\_\_\_時\_\_\_\_分      \_\_\_\_時\_\_\_\_分

## 錯誤類型

1. 混淆時針與分針的刻度意義，如時針與分針混淆。
2. 超過 45 分，幾「時」容易弄錯，如 2 時 55 分，學生錯誤報讀為 3 時 55 分。應加強學生撥鐘過時的經驗，並注意觀察時針位置的變化。
3. 點數時間弄錯，例如從 3 點到 5 點經過幾小時，點數「時」，從 3、4、5 回答有 3 小時，讓學生實際撥鐘，清楚理解題意以及錯誤的原因。

## 評量

1. 評量重點：
  - (1) 能以鐘面時針與分針之位置正確報讀「幾時幾分」。
  - (2) 能以正確撥鐘或點數，解決簡單時間加減類型問題（限整時不跨越中午）。
2. 注意事項：
  - (1) 操作評量使用撥鐘要注意分針應指在正確的時間位置，不應有在半分鐘的情形。

解決時間簡單問題前要有足夠的撥鐘經驗，紙筆評量要有鐘面圖讓學生點數。

<b>N-2-14 時間：</b> 「年」、「月」、「星期」、「日」。理解所列時間單位之關係與約定。 <b>補充說明：</b> 可做簡單計算問題（如暑假的總天數）。不做時間間隔問題。可觀察月曆結構模式。可教「閏年」，但只談「四年一閏」。	n-I-9
---	-------

先備：N-1-6

連結：N-2-13

●●綱要教具應加註連續三年或四年（若去年、今年、明年皆非閏年）之月曆。●●

## 基本說明

1. 為因應日常生活所需，本條目處理「日」以上的時間單位約定。由於這些單位關係比較複雜，宜清楚條列，分開教學與練習。
2. 以年曆和月曆認識「1 年有 12 個月」、「月份的日數約定」、「2 月有 28 天，閏年時有 29 天」、「1 星期有 7 天」。
3. 初學時，「年」、「月」、「星期」、「日」似乎有自然的起點和結束點（如「一年起於 1 月 1 日，終於 12 月 31 日」）。但應用時也常作為時間量的單位（如「從今年 7 月 7 日到明年 7 月 6 日共經過 1 年」）。兩種用法都很常用，兩者教師都應教學，並敏感注意學生理解的狀況。
4. 可以年曆和月曆為工具，觀察或做簡單的計算問題，前者如「每月至少有 4 星期」（非除法問題），後者如「暑假的總天數」。

## 條目範圍

1. 處理簡單計算問題的原則：可假設學生知道從每月初的 1 日到該月 18 日是 18 日，除此之外均宜透過點數日曆來計算。不處理一般的時間間隔計算問題。
2. 可觀察簡單的月曆結構模式，如某一日期之下一週、上一週、前一日、後一日的日期（假設在同一月中）。

- 教「閏年」時，只談「四年一閏」的規則。由於常用，「1 年 365 天、閏年 366 天」可以告知學生，但不必點數。
- 關於「大月」「小月」，由於純屬文化約定，和數學學習無關。雖然規定大月 31 天，其他為小月較簡潔。但將月分成大月、小月和閏月也有其特色。我們不做任何推薦。類似的還有一週的開始為週日或週一的問題。

### 釋例

- 認識「年」、「月」、「1 年有 12 個月」及解決簡單月分計算問題。建議老師準備連續三年或四年的年曆，若連續三年或四年沒有閏年，應再增加閏年的年曆。

- (1) 透過年曆，認識「年」、「月」。

例 1：今年是民國幾年？去年呢？明年呢？

例 2：今年的第一個月是幾月？最後一個月是幾月？去年呢？明年呢？

例 3：今年一共有幾個月？去年呢？明年呢？

- (2) 配合年曆，透過點數與簡單計算，解決月分計算問題。

例 4：從 2 月開始練習跑步到 6 月，共練習幾個月？

例 5：楊老師訂報從 9 月開始到隔年 1 月，共訂了幾個月的報紙？

例 6：蓋一間房子預計要 1 年 3 個月。1 年 3 個月是幾個月？

例 7：母象懷孕約需 22 個月會產下大象寶寶。22 個月是幾年幾月？

2. 認識每月的「日」數與平年、閏年：

透過查閱年曆認識每個月的日數、日期、星期幾。

例 1：拿出 107 年和 108 年的年曆查查看，填入每個月的日數。

月	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
107年	31											
108年	31											

(1)那幾個月是 30 天？ (2)那幾個月是 31 天？

(3)107 年的 2 月有幾天？108 年的 2 月分有幾天？

(《部》第四冊第 35 頁)

平年、閏年：平年時 2 月有 28 日，閏年時 2 月有 29 日，因此平年有 365 天，閏年有 366 天。

例 2：拿出年曆查查看：

(1) 今年的第一天是幾月幾日？明年第一天的日期和今年一樣嗎？

(2) 今年最後一天是幾月幾日？明年最後一天的日期和今年一樣嗎？

(3) 今年的中秋節是幾月幾日星期幾？

(4) 你的生日是幾月幾日？今年生日是星期幾？明年生日是星期幾？

3. 與星期有關的問題。

(1) 「1 星期有 7 日」是人為約定的週期，由星期日到星期六，從星期六到星期五，或從某一天開始連續七天，都可說是 1 星期。

例：暑假期間，銘義、華維、立光都規劃了一星期的旅遊：

107 年 7 月						
日	一	二	三	四	五	六
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

- (1) 銘義家從 7 月 8 日到 7 月 14 日去澎湖旅遊，一共有幾日？
- (2) 華維家從 7 月 14 日出發，旅遊 7 天，會在幾月幾日結束旅遊？
- (3) 立光家旅遊一星期，從 7 月 10 日結束，他們在幾月幾日出發？

(2) 一個月有幾個星期又幾日（翻閱年曆，了解每個月有四個星期又幾天）

例 1：108 年 4 月有幾個星期又幾日？108 年 10 月有幾個星期又幾日？

例 2：拿出年曆數數看，每個月是不是有 4 個星期又幾天？

有些學生可能以為一星期一定從星期日到星期六，教師須提醒學生連續 7 日就是 1 星期。

(3) 星期幾的問題。

例 1：林叔叔要上 1 星期的游泳課，這星期三第一次上課，下星期幾結束？

例 2：曉琳要連續練習 2 星期書法，從上星期四開始，下星期幾結束？

4. 用月曆點數或計算天數。

例 1：拿出日曆，資訊展從 6 月 8 日開始展覽到 6 月 17 日，共展覽了幾天？

例 2：慈玟全家旅遊，從 1 月 27 日到 2 月 3 日停送羊奶，羊奶一共停送幾天？

107 年 1 月							107 年 2 月						
日	一	二	三	四	五	六	日	一	二	三	四	五	六
	1	2	3	4	5	6					1	2	3
7	8	9	10	11	12	13	4	5	6	7	8	9	10
14	15	16	17	18	19	20	11	12	13	14	15	16	17
21	22	23	24	25	26	27	18	19	20	21	22	23	24
28	29	30	31				25	26	27	28			

例 3：阿姨生產住院 6 天，11 月 1 日出院，阿姨幾月幾日住院生產？

107 年 10 月							107 年 11 月						
日	一	二	三	四	五	六	日	一	二	三	四	五	六
	1	2	3	4	5	6					1	2	3
7	8	9	10	11	12	13	4	5	6	7	8	9	10
14	15	16	17	18	19	20	11	12	13	14	15	16	17
21	22	23	24	25	26	27	18	19	20	21	22	23	24
28	29	30	31				25	26	27	28	29	30	

簡單計算，最多可包含兩個月，不宜超過。

例 3：暑假從 7 月 1 日開始到 8 月 29 日結束，用月曆數數看或算算看暑假共有多少天？

## 5. 月曆的結構

例：奶奶生日是 8 月 19 日星期一。運用月曆回答下列問題：

108 年 8 月						
日	一	二	三	四	五	六
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

- (1) 奶奶生日前一個星期一預訂了蛋糕，預訂蛋糕是哪一天？
- (2) 奶奶的朋友從國外寄的生日卡，在生日的下個星期一才寄到，收到生日卡的日期是哪一天？
- (3) 奶奶生日前一天，曉華做生日禮物，做生日禮物是幾月幾日星期幾？
- (4) 曉華在奶奶生日後 1 天完成暑假作業，完成日期是幾月幾日星期幾？

學生熟悉月曆後，可問學生「8 月 17 日是星期六，不看月曆你知道上個星期六是幾月幾日？下個星期六是幾月幾日？」

### 錯誤類型

1. 用月曆計算日數，學生自行列式常列錯算式，例如：「從 6 月 8 日到 6 月 17 日，共有幾日？」學生常列成  $17-8=9$ （應為 10 日），本年度只要求點數。
2. 一個月有幾個星期？是指有幾輪完整的連續 7 日，而非月曆上有幾個橫排。教師先強調一星期是指連續 7 日，並用月曆展示其意義。
3. 學生常誤認這星期五到下星期五是 1 星期或 7 日，讓學生在月曆上點數理解。

### 評量

1. 評量重點：
  - (1) 透過年曆認識 1 年有 12 個月、平年 2 月有 28 天，閏年時有 29 天。
  - (2) 能藉由年曆和月曆，用點數或計算解決和月、星期、日有關的生活問題。
2. 注意事項：
  - (1) 評量簡單生活計算問題時，應提供相關的月曆或年曆，讓學生能以點數方式解題，教師不需求列出算式。
  - (2) 國小不引入閏年與平年的判斷方法，因此不需評量。
  - (3) 雖透過月曆點數知道 1 個月有 4 個星期又幾天，但學生尚未學習除法，不宜過度評量這類問題，若要評量必須提供月曆。
  - (4) 瞭解月曆的結構可參考釋例(5)的例題，不宜過度評量。



<p><b>S-2-1 物體之幾何特徵：</b>以操作活動為主。進行辨認與描述之活動。藉由實際物體認識簡單幾何形體（包含平面圖形與立體形體），並連結幾何概念（如長、短、大、小等）。</p> <p><b>補充說明：</b>活動應以實際物體為主。幾何特徵指非嚴格定義的頂點、角、邊、面，周界、內外。</p>	s-l-1
---	-------

先備：S-1-2

連結：S-2-2

### 基本說明

1. 本條目以操作活動為主。讓學生從身邊的實際物體著手，辨認其幾何特徵，並做描述與討論。教師準備的實際物體應有較明顯的特色，讓學生可以察覺其幾何特徵。幾何特徵包括非嚴格定義的頂點、角、邊、面，周界、內外。
2. 藉由對實際物體觀察、辨認、察覺其中的幾何要素，如角、邊、面，進行對簡單幾何形體（包含平面圖形與立體形體）的歸納與認識，也可與（長度之）長、短；（面積之）大、小等幾何概念連結。
3. 原則上，本條目的進行應在 S-2-2 之前。本條目著重對實際物體的觀察與察覺，S-2-2 則針對明確的幾何形體進行活動。

### 條目範圍

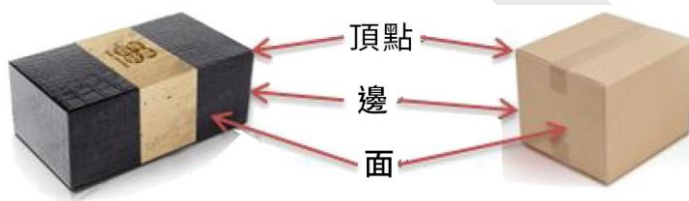
1. 本條目之活動應以教師所準備的常見實際物體為主。
2. 針對察覺的幾何特徵，教師應給予學生探索、察覺與溝通的機會，徐徐引導，不急著下結論。
3. S-2-2 與 S-2-3 不見得要區分成不同單元，立體與平面形體也不見得要合在一單元中。教師應斟酌自己課程安排的邏輯。

### 釋例

1. 建議教師多安排感官操作活動，讓學生透過視覺進行分類、造型、堆疊、描繪、著色等活動，協助學童察覺身邊物體的幾何特徵，包括非嚴格定義的頂點、角、邊、面，周界、內外，並能以非嚴格定義的語言加以描述與討論。

(1) 認識日常生活與身邊常見的形體的頂點、邊、面。

- 辨認立體形體的頂點、邊、面。



- 辨認常見立體形體的內外。

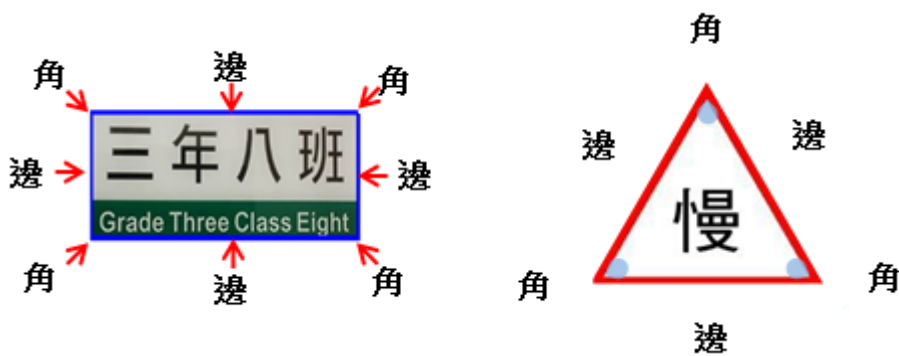


左圖鉛筆在盒內，橡皮擦在盒子外。右圖烤雞在烤箱內，餅乾在烤箱外。

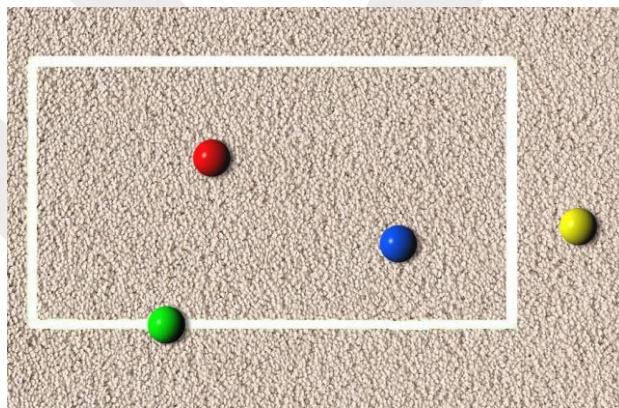
●用非嚴格的語言描述常見立體形體的頂點、邊、面，如「物體尖尖的角角」、「平平的面轉彎的地方」、「物體摸起來平平的地方」。

(2) 辨認平面圖形的的邊、角、周界、內外。

●平面圖形的邊與角



●平面圖形的周界與內外：



藍球和紅球在長方形周界內，黃球在周界外，綠球在周界上

(3) 用非嚴格的語言描述常見平面圖形的頂點、角、邊、周界、內外，例如：「圖形上尖尖的點」、「圖形左上方的角落」、「圖形的邊邊」、「邊邊圍起來的範圍」、「柵欄圍起來的地方」、「圖形邊邊圍起來的外面」等等。注意：學生在這時候言語分不清楚頂點與角是正常的。

2. 可以在活動中，直接比較不同形體的邊的長短或面的大小。重點是概念的連結，而不是測量與數量。

## 錯誤類型

由於是在活動中初步認識幾何的概念，嚴格來說，沒有典型的錯誤。教師反而要小心不要太過嚴格。

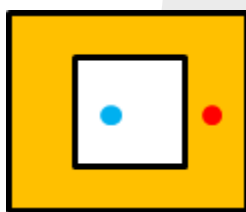
## 評量

### 1. 評量重點

在操作活動中辨認日常身邊形體的特徵：非嚴格定義的頂點、角、邊、面，周界、內外。本條目僅作操作評量。

### 2. 注意事項

評量內外概念時，應迴避複雜而容易引起誤解的圖形，如「環」狀圖形或螺旋狀圖形。



<b>S-2-2 簡單幾何形體：</b> 以操作活動為主。包含平面圖形與立體形體。辨認與描述平面圖形與立體形體的幾何特徵並做分類。 <b>補充說明：</b> 可配合資料處理之教學（D-2-1）。	s-l-1
--	-------

先備：S-1-2

連結：S-2-1, S-2-3, D-2-1

後續：S-3-1, S-3-2, S-3-4

## 基本說明

1. 本條目以操作活動為主。由教師提供各種標準平面圖形與立體形體教具（想成 S-2-1 實際形體的理想化），由學生進行探索、辨認，並描述學生在意的幾何特徵。可與 D-2-1 部分結合，進行分類活動。亦可考慮與 S-2-4 合併進行。另建議平面圖形可早於立體形體並分開進行。
2. 教師可開始約定常用詞「頂點」、「角」、「邊」、「面」，以利教學溝通。但並非嚴格定義，尤其是角。另外本條目雖然會用到許多標準平面圖形和立體形體，但目的不在定義這些形體，即使使用常用名稱，其重點也僅止於溝通，以利學生探索並描述特定圖形的特殊性質。
3. 平面圖形可發現的特徵包括：「頂點數」、「邊數」（如「三邊」形、四邊形）、「邊長特徵」（如三邊一樣長）、「對稱特徵」（有些轉動或翻轉會跟原來一樣，但有些不行）等等。因此教具可準備各種三角形（如正三角形、等腰三角形、直角三角形、一般三角形）、四邊形（正方形、長方形、菱形、箏形、平行四邊形、一般四邊形）、六邊形（正六邊形），並有各種大小。也可觀察圓和以上圖形的差異。
4. 立體形體可發現的特徵包括，「頂點數」、「邊數」、「面數」、「面的特徵」（各面看起來是不是一樣，哪些面一樣）、「邊長特徵」（邊是不是一樣長）等等。教具可準備常見之正方體、

長方體（含某對面為正方形之長方體）、角錐、角柱，並有各種大小。也可觀察球、圓柱和以上形體的差異。

## 條目範圍

1. 本條目可和 S-2-3、D-2-1 整合教學，並配合 D-2-1 中分類的深入討論。
2. 不強調「平行」「垂直」這類更深的幾何概念。若學生察覺，可請他說明。
3. 切勿將圓、球、圓柱放入不恰當的活動中，徒增教學困擾。
4. 在活動中，教師可鼓勵學生歸納查覺到的形體之構成要素或性質，但不需要強調該性質是否能刻畫或定義這些圖形，也不需要做進一步的推理。
5. 本條目是學生首次接觸標準形體，圖形名稱只要足以協助教學現場溝通即可，不一定要是正式名稱，就算使用正式名稱，也請揀選容易理解的名稱即可。教科書或教師不宜將課程發展成命名教學單元。

## 釋例

1. 可做連結 S-2-1 與 S-2-2 的活動，以此認識常見形體。  
例：師生共同準備盒子、罐子、球、水果、漏斗、甜筒等實物。讓學生指認像圓錐、球、長方體、正方體、圓柱等的東西。
2. 透過觀察與操作，發現平面圖形的特徵，包括：「頂點的數目」、「邊的數目」（「三邊形、四邊形）、「邊長的特徵」、「對稱的特徵」等等。

### (1) 平面圖形有幾個頂點？幾個邊？幾個角？

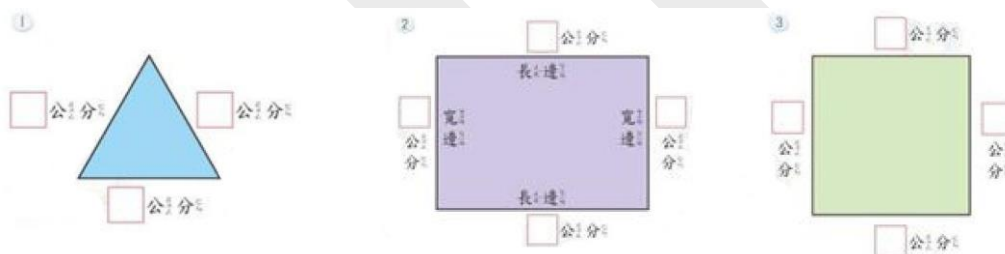
例 1：三角形有 3 個頂點、3 個邊和 3 個角。（左下圖）



例 2：四邊形有 4 個頂點、4 個邊和 4 個角。（右上圖）

### (2) 平面形體邊長的特徵

例：正三角形 3 個邊一樣長、正方形 4 個邊一樣長。



3. 透過觀察與操作，發現立體形體的特徵，包括：「頂點的數目」、「邊的數目」、「面的數目」、「邊長的特徵」、「對稱的特徵」等等。

### (1) 點數立體形體的面數。

例：正方體（或長方體）有幾個面？（寫上數字）數數看。



(2) 點數立體形體有幾個邊。

例：正方體（或長方體）有幾個邊？（寫上數字）數數看。（下左圖）

(3) 比較立體形體的面，形狀大小一樣大嗎？

例：描下正方體的一個面，和其他面比比看，大小一樣大嗎？（下中圖）



(4) 比較立體形體的邊，長度一樣嗎？（上右圖）

例：把正方體的一個邊描下來，和其他的邊比比看，長度一樣嗎？

4. 可和 D-2-1 結合進行分類活動。

(1) 教師可以提示「哪些圖形有 3 個邊？」「哪些形體有 6 個面？」等等。

(2) 雖然可以進行「兩條邊一樣長的圖形有哪些？」「三條邊一樣長的圖形有哪些？」的活動，但不適合作為分類的依據，尤其不宜問混淆二年級學生認知的問題，如「正三角形是不是等腰三角形？」「正方形是不是長方形？」等。

(3) 可以在活動中，問「（平面）圖形的頂點數和邊數是不是一樣多？」

### 錯誤類型

1. 學生可能認為沒有擺正的圖形如成正方形或正三角形，就不是正方形或正三角形。教師要加強溝通，把圖形拿在手中轉動，強調這是同一個圖形。
2. 學生點數立體形體的面數或邊數時，由於缺乏點數技巧，常造成重複點數或漏數（答案可能正確！），教師可指導用著色、標記、標數字等方式正確點數。
3. 把立體形體中兩面共享的邊，數成 2 個邊（如正方體，有 6 個正方形面，每面 4 個邊，因而誤算正方體有 24 個邊。）教師可展示模型強調共享的邊只能算 1 次。
4. 進行立體圖形活動時，應避免提到「角」，學生可能混淆頂點、面上的角，甚至立體形體

的尖角。

## 評量

### 1. 評量重點：

- (1) 活動評量：學生是否能掌握基本幾何形體的特徵如頂點、邊、面。
- (2) 活動評量：能正確點數「頂點數」「邊數」「面數」。

### 2. 注意事項：

- (1) 本條目以活動為主，學生還在建立幾何概念，應已溝通和釐清錯誤為主。

紙筆評量宜以容易正確呈現的平面圖形為主。

<b>S-2-3 直尺操作</b> ：測量長度。報讀公分數。指定長度之線段作圖。 <b>補充說明</b> ：建立使用數學工具的良好習慣。	n-I-7
---	-------

先備：N-1-5

連結：N-2-11, S-2-4

後續：N-3-10, N-3-11, N-3-12

## 基本說明

1. 直尺是學生學習的第一個測量工具，其刻度的報讀與標記的熟悉，有助於學生舉一反三學習其他量（如容量、重量、角度、時間）的測量工具。本條目雖強調 15 公分的直尺，但學生應能類推至其他較長的尺。
2. 本條目旨在強調正確運用測量工具量出長度的重要性。使用標準直尺（15 公分尺），先對齊 0 與欲測（直）線狀物之一端，將尺對齊線狀物，再正確讀出另一端的刻度，得到線狀物的長度。
3. 能用直尺畫出直線，包括畫出指定長度之線段。由於學童手部肌肉可能尚未發展成熟，教師不宜過度評量。
4. 給定兩點，讓學童畫出以此兩點為端點的線段，再測量線段的長度，得到兩點間的距離。學生剛開始未必會特意對齊刻度與兩點，但最後應教導學生直接利用直尺讀出兩點的距離（一點對齊刻度 0）。以上活動可讓學生體會兩點決定一直線的意義，但不必歸納成結論。本活動限 15 公分內。
5. 教師應討論下列兩常見長度測量問題：(a) 斷尺時（尤其指無刻度 0 的情況），如何測量長度；(b) 被測線段長度超過直尺長度時應如何測量。
6. 實際測量一定會發生誤差，教師教導學生使用「大概」或「大約」幾公分的描述方式。另一方面，評量時教師應小心區分誤差和錯誤的差別，回到學生錯誤的原點，協助克服其問題。

## 條目範圍

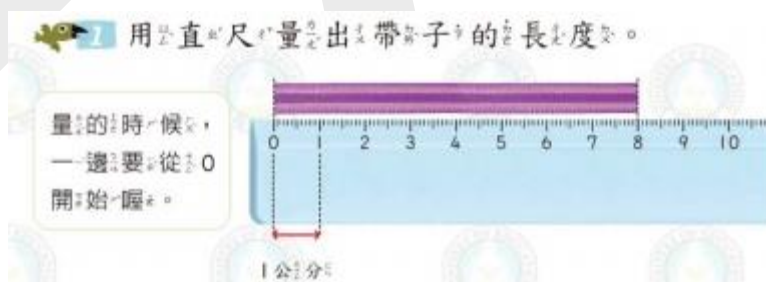
1. 初期測量活動布題（例如畫出指定長度之線段），長度應小於直尺長度 15 公分。後期測量較長線段時，建議測量次數不超過兩次，即長度小於 30 公分。
2. 學生應建立使用數學工具的良好習慣，不然容易出現某些常見錯誤。（參考錯誤類型 (1)(2)）。

3. 「兩點距離」是常用口語，教師不必強調嚴格定義與性質，藉由操作讓學生自然習得即可。

### 釋例

1. 能正確使用標準 15 公分直尺，量出欲測線狀物的長度（基本說明（2））。

例 1：

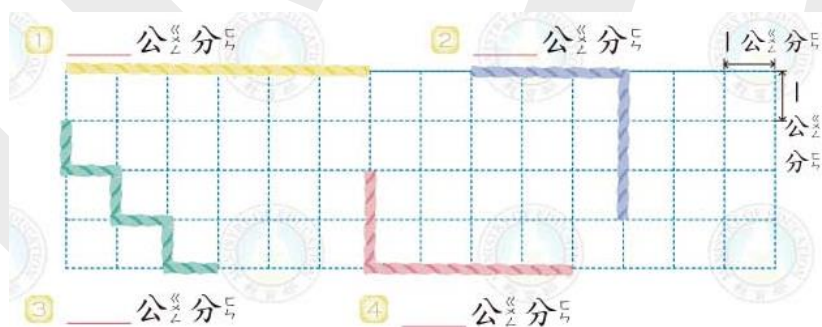


（《部》第三冊第 44 頁）

先對齊 0 與直線物的一端，將尺對齊直線物，再讀出另一端的刻度，因此帶子的長度是 8 公分，表示帶子的長度是 8 個 1 公分。

- (1) 測量長度的回答需完長包含「單位數」8 和「單位」公分。
- (2) 初期實測物件應比直尺短且盡量為整公分。（較長物件見後）
- (3) 若物件不是整公分時，可用「大約 8 公分」、「接近 8 公分」、「長度在 7 公分和 8 公分中間」等方式來描述。

例 2：各種顏色的繩子有多長？填填看。



（《部》第三冊第 45 頁）

2. 給定兩點，讓學童先畫出通過兩點的線段，再測量其線段長度，得到兩點的距離。

這是「北斗七星」的星座圖。



1 用尺做看看。

① 按照數字順序，把星星連起來。

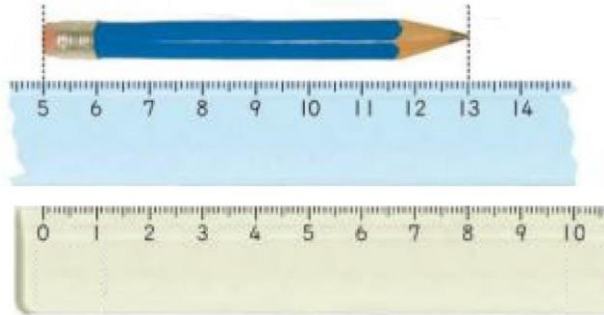
② 量看看，黑色點到紅色點的長度大概是    公分。

（《部》第三冊第 46 頁）

3. 使用斷尺時（無刻度 0），測量欲測直線物的長度。

例：鉛筆一端對齊斷尺的刻度 5，另一端對齊斷尺的刻度 13，從刻度 5 到刻度 13 是多少公分？

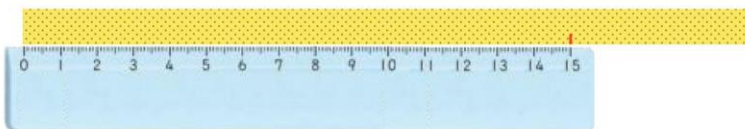
練習 鉛筆有多長呢？



（《部》第三冊第 50 頁）

可先用點數：指點刻度 5 到刻度 6，唱數 1；再指點刻度 6 到刻度 7，唱數 2；以此類推。最後指導學生能用減法算式： $13-5=8$ 。

4. 欲測直線物的長度超過直尺長度時，如何測量其長度。



第一步：學生以 0 對齊一端，在 15 公分處作暫時記號。





第二步：移動尺，讓 0 對齊所做記號，測量剩下的部分為 5 公分，因此總長度為  $15 + 5 = 20$  公分。

#### 5. 畫指定長度的線段。

例：「畫出 12 公分的直線」。

學生先畫一點，以直尺刻度 0 對準此點，再沿直尺畫出 12 公分的線段。若學生先畫出較長直線，再用測量方式確定 12 公分長線段，並擦掉多出部分，也是正確的。若有多餘時間，也可以探討「畫出 20 公分線段」(線段的長度超過直尺長度)的作法。

#### 錯誤類型

1. 在未對齊 0 或斷尺時，學生可能誤以報讀的數字為長度。
2. 在斷尺的情況，例如由刻度 3 到 7，學生可能點數刻度：3、4、5、6、7，唱數 1、2、3、4、5，誤以為長度為 5 公分。

#### 評量

1. 評量重點：
  - (1) 能用直尺畫出直線，包括畫出指定長度之線段。
  - (2) 給定兩點，能用直尺測量兩點距離。
  - (3) 能在非對齊刻度 0 時（如斷尺），測量長度。
  - (4) 能測量超過 15 公分線狀物的長度。
2. 注意事項：
  - (1) 評量直尺作圖時，由於學童肌肉尚未發展成熟，教師不宜過度評量。
  - (2) 測量與報讀長度公分數時，應以整公分長度為宜。
  - (3) 欲測量線段長度宜小於 30 公分。

**S-2-4 平面圖形的邊長：**以操作活動與直尺實測為主。認識特殊幾何圖形的邊長關係。含周長的計算活動。

**補充說明：**周長計算為簡單加法連加，不受限於兩步驟加法的限制。強調操作，不處理公式。

n-l-7

連結：N-2-11, S-2-2, S-2-3

後續：S-3-2

#### 基本說明

1. 本條目以操作活動與直尺實測為主，運用 S-2-3 所學，測量平面圖形的邊長，也可進行相應的周長計算。
2. 認識特殊幾何圖形的邊長關係。例如正三角形三邊等長（即使三角形未命名，仍可進行此活動），等腰三角形兩腰等長，正方形四邊等長，長方形對邊等長等等。當然「對邊」、「等

腰三角形」、「腰」這些詞不見得出現在教學現場。教師若要使用這些專詞，應予以充分之引導與說明。

3. 介紹簡單幾何圖形的內部、外部、周長，並測量簡單幾何圖形的周長。知道正三角形周長是邊長的3倍，正方形的周長是邊長的4倍，也會計算例如長方形的周長。因此，本條目教學應放在學生比較熟悉十乘乘法之後。

### 條目範圍

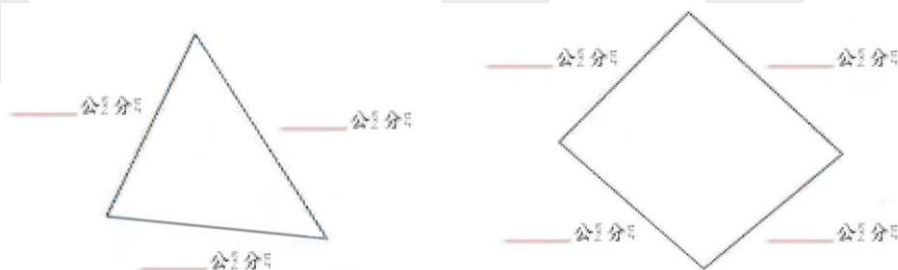
1. 周長計算是簡單加法連加，不受限於兩步驟加法的限制（N-2-8）。
2. 基本上以操作活動為主，發現幾何性質，並做簡單計算。不強調邊長性質是否能刻畫所測的平面圖形，也不強調公式。

### 釋例

1. 測量平面圖形的邊長。

運用 S-2-3 所學測量平面圖形的邊長

例 1：量一量，下列圖形每一邊有多長。



2. 認識特殊幾何圖形的邊長關係

透過實測活動，認識正三角形三邊等長，等腰三角形兩腰等長，正方形四邊等長，長方形對邊等長。（註：「對邊」、「等腰三角形」、「腰」在教學上不一定要出現。教師若使用這些專詞，應予以充分之引導與說明。）

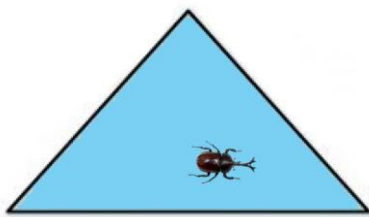
例 1：量一量，底下兩個三角形的每一邊有多長？紅色三角形的3個邊都一樣長嗎？藍色三角形的3個邊都一樣長嗎？那些邊長度一樣長？



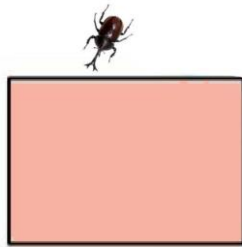
例 2：量一量，底下兩個四邊形的每一邊有多長？綠色四邊形的的4個邊都一樣長嗎？黃色四邊形的4個邊都一樣長嗎？哪些邊長度一樣長。



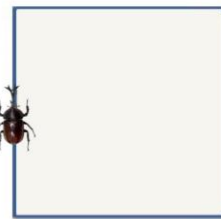
3. 幾何圖形的內部、外部和周界。



獨角仙在三角形內部



獨角仙在長方形外部  
(《部》第六冊第8頁)。

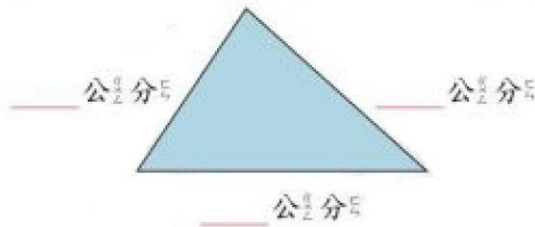


獨角仙在正方形周界上

4. 測量並計算簡單幾何圖形的周長

例 1. 量一量，三角形的每一邊長有多長，再算算看它的周長？

① 量一量，看看這個三角形的每一邊有多長？



② 上面三角形的周界有多長？寫出算式做一做看看。

$$\begin{array}{r} \underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad} \\ \underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad} \end{array}$$

三角形周界的長就是三個邊加起來的長度。

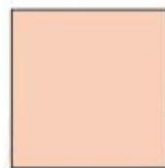


例 2. 量一量，正方形的每一邊長有多長，再算算看它的周長？

2 量出下面的正方形一邊有多長，再計算它的周長。

正方形每一邊都一樣長，將4個邊加起來就是周長，也可以用乘法來算。

$$\underline{\quad} \times 4 = \underline{\quad}$$



例 3. 量一量，長方形的每一邊長有多長，再算算看它的周長？

3 長方形的周長是幾公分？



長方形的周長是兩個長邊與兩個寬邊的和。



本問題有很多列式的可能，學生只要能說明自己的算式即可。

### 錯誤類型

### 評量

#### 1. 評量重點：

- (1) 實測平面圖形邊長，知道正方形四邊相等、長方形兩對邊長相等、正三角形三邊相等、等腰三角形兩腰相等。
- (2) 認識周長是平面圖形周界的長度，透過實測與加法計算一般平面圖形周長。
- (3) 知道正三角形周長是邊長的 3 倍，正方形周長是邊長的 4 倍。

#### 2. 評量注意事項：

- (1) 評量重點 1. 所提專有名詞(對邊、等腰三角形、腰)在教學上不一定出現。
- (2) 此條目重點在透過實測活動，認識特殊幾何圖形的邊長關係，而非以邊長關係來定義平面圖形。教師的評量重點不是幾何圖形的命名。
- (3) 評量圖形邊長測量時，其邊長應為整公分數。
- (4) 評量以乘法進行周長計算時，須以乘法十乘法為範圍。

<p><b>S-2-5 容量、重量、面積：</b>以操作活動為主。初步認識、直接比較、間接比較(含個別單位)。 補充說明：請見 N-2-12 面積。</p>	<p>n-l-8</p>
<p><b>R-2-1 大小關係與遞移律：</b>「&gt;」與「&lt;」符號在算式中的意義，大小的遞移關係。 補充說明：不出現「遞移律」一詞。本階段應在加減法單元中完成，不需獨立單元教學。</p>	<p>r-l-1</p>

先備：R-1-1

連結：N-2-1, N-2-11, N-2-12

後續：

### 基本說明

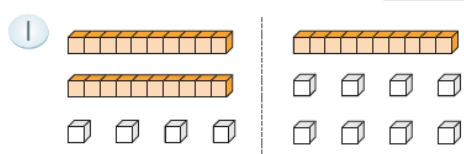
1. 大小比較是兩個數量之間的基本關係，在一年級已進行過教學。本條目旨在引入「>」、「<」（或「=」）符號來記錄這種關係。從情境中學習比較，最初可能連著單位，但最後要統一以「>」、「<」（或「=」）記錄數的大小關係，如「 $12 > 5$ 」、「 $5 < 12$ 」，並能說明記錄與原情境的關係。
2. 從日常經驗或一年級學習，學生對「大小」遞移關係有一定的理解。本年度除從更多量的直接比較學習遞移關係外，更重要是將遞移關係當作可以推理應用的規律，甚至能回答不涉及數量的問題，如「小明的錢比小美多，小美的錢比小華多，誰的錢最多？」也應討論等號和不等號混合的比較關係，如「小明的錢和小美一樣多，小美的錢比小華多，小明和小華的錢誰多？」
3. 除了（2）這類直接的問題，較難問題請教師斟酌教學時間，只在活動中討論，不做紙筆評量。像「小明的錢比小美多，小美的錢比小華少，誰的錢最多？」「小明的錢比小美多，小美的錢比小華多，小華的錢比小清多，小美的錢比小清多嗎？」等都屬於較難的問題。

### 條目範圍

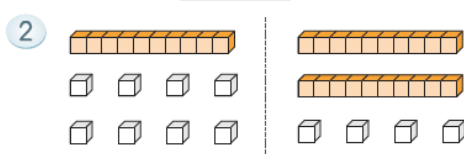
1. 本條目的重點在確認學生理解基本的遞移關係，教科書或教師不宜針對遞移關係做過度評量（參見基本說明（3））。
2. 課本和教學不出現「遞移律」。本條目不需獨立單元教學。
3. 二年級學生容易在比較詞上出現紊亂，建議評量時以直接而簡易布題為主。
4. 為釐清題目有時會使用線段圖，建議教科書及評量此類型題目時，應提供線段圖，協助學生標示解題。

### 釋例

1. 引入「>」與「<」的符號表示大小比較的結果。
  - (1) 池塘裡有 24 隻水鴨和 18 隻白鵝，比較水鴨和白鵝的數量，運用「>」與「<」紀錄比較的結果，並能根據紀錄結果說明水鴨和白鵝的數量多少關係，例如：哪個多（或少）？多（或少）多少？



記<sub>し</sub>成<sub>し</sub> 24 > 18  
讀<sub>し</sub>做<sub>し</sub> 24 大<sub>し</sub>於<sub>し</sub> 18



記<sub>し</sub>成<sub>し</sub> 18 < 24  
讀<sub>し</sub>做<sub>し</sub> 18 小<sub>し</sub>於<sub>し</sub> 24

- (2) 「>」與「<」的符號與算式：

①  $12 + 16$  和  $30$ 。

$$\begin{aligned} 12 + 16 &= 28 \\ 28 &< 30 \end{aligned}$$

$$12 + 16 < 30$$

②  $24 + 31$  和  $50$ 。

$$\begin{aligned} 24 + 31 &= 55 \\ 55 &> 50 \end{aligned}$$

$$24 + 31 > 50$$

2. 提供圖示，透過直接比較，認識長短的遞移關係：

(1) 甲比乙高（矮），乙比丙高（矮），比較甲、丙高矮的關係。

驢子比小英高，小英比企鵝高。

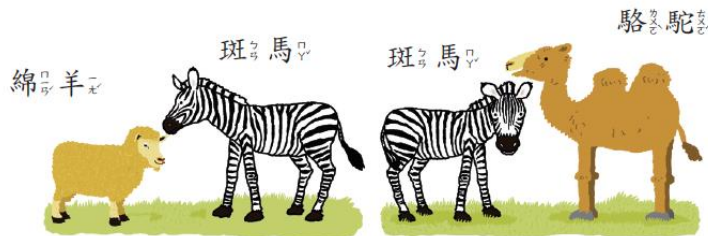
圈圈看，驢子比企鵝（高，矮）。



（《部》第四冊第 67 頁）

綿羊比斑馬矮，斑馬比駱駝矮。

圈圈看，綿羊比駱駝（高，矮）。



（《部》第四冊第 67 頁）

(2) 甲和乙一樣長，乙比丙長（短），甲、丙長短的關係。

繪圖：緞帶和繩子一樣長，繩子比毛線長（短）。

圈圈看，緞帶比毛線（長，短）。

(3) 甲比乙高（矮），乙和丙一樣長，比較甲、丙高矮的關係。

繪圖：哥哥比小明高（矮），小明和小珍一樣高。

圈圈看，哥哥比小珍（高，矮）。

3. 透過文字敘述，將遞移關係應用在已經學過的各種量的比較情境中：

(1) 小夫的錢比大雄多 5 元，大雄的錢比胖虎多 10 元。

圈圈看，小夫的錢比大雄（多，少）。

(2) 宜靜的錢比 100 元多，大雄的錢比 100 元少。

圈圈看，宜靜的錢比大雄（多，少）。

(3) 爸爸的身高低於 170 公分，叔叔的身高高於 170 公分。

圈圈看，爸爸的身高比叔叔（高，矮）。

## 錯誤類型

1. 弄混「>」和「<」。教師或可提示「開口處」數字較大。
2. 在遞移關係問題中困惑於比較用詞之複雜度。教師應體認現階段學生之閱讀程度，教學和評量勿過難。

## 評量

1. 評量重點：
  - (1) 能正確使用符號「>」、「<」與「=」。
  - (2) 能回答較簡單的遞移關係問題。
2. 注意事項：

本年度遞移關係評量的布題，應以直接為原則，避免複雜的布題。

**R-2-2 三數相加，順序改變不影響其和：**加法交換律和結合律的綜合。可併入其他教學活動。

**補充說明：**在加法的「併加型」（合成型）情境中理解。不出現「結合律」一詞。

r-1-2

先備：R-1-2

連結：N-2-8

後續：

## 基本說明

1. 本條目運算律指的是三數相加，誰先加，誰後加，都不影響其結果，這是合成分解模型的自然結果。一旦確立後，學生可以應用於其他類型的問題或靈活應用於加法計算，甚至更多步驟的運算。
2. 本條目應該併入兩步驟應用問題教學活動（N-2-8），不需另立單元教學。

## 條目範圍

1. 教學時透過合成分解模型（併加型）來分析理解最自然。
2. 雖然以加法規律來說，這是加法交換律和結合律的綜合，但本條目完全不強調其中的推理關係或代數意義。課本或教學更不該出現「交換律」、「結合律」的名詞。不需另立單元教學。

## 釋例

由於二年級還沒有學習連加併式，因此本條目旨在讓學生透過生活情境，理解到三個數用不同順序加在一起，答案都一樣。本條目教學時，建議可以和 N-2-8 兩步驟問題合併，學生可以列出兩步驟的算式解題。例如：

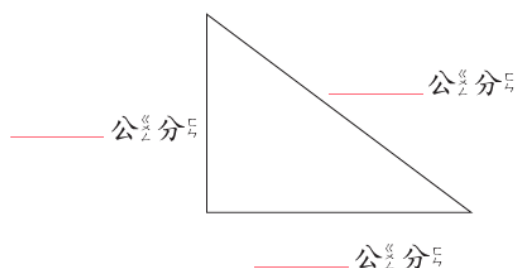
(1) 併加型情境：

「小明有 3 顆糖，小華有 2 顆糖，小麗有 8 顆糖，合起來共有多少顆糖？」，學生可以先算： $3+2=5$ ，再算： $5+8=13$ ；也可以先算： $8+2=10$ ， $10+3=13$ ，或者先算： $3+8=11$ ， $11+2=13$ 。以上不同順序的做法都是正確的解題方式。教師教學時可以鼓勵學生提出不同的做法，

並引導學生觀察為何不同的做法，算出來的結果都是一樣的。

(2) 算三角形周長：

- 量量看下面三角形各邊的邊長，再算出三角形的周長。和上例同理，學生可以將三個邊長以不同的順序，兩兩相加，求出周長。



(3) 探索活動：四個數相加的情境，讓學生知道這個規則其實不限於三個數。數字設計可以分成兩組容易相加的數，讓學生體會運用這個規律的好處。

- 罐子裡有四種不同顏色的珠子，紅珠子 50 顆、藍珠子 28 顆、黃珠子 50 顆、綠珠子 22 顆。這四種顏色的珠子共有多少顆？」

### 錯誤類型

學生在二年級尚未學習連加併式，若學生出現併式（不論是直式或橫式併式），教師應予以肯定，再請學生依題意要求，說明先算什麼？再算什麼？把做法一步一步用算式寫出來。

### 評量

1. 評量重點：

- (1) 理解三個數用不同順序加在一起，答案仍然一樣。
- (2) 能靈活運用此規律解題。

2. 注意事項：

雖然我們建議教師能設計布題中的數字，讓學生能充分運用此規律。但因為學生尚未學習併式，請不要評量下數這類情境不恰當的問題，例如：

- (1) 豬小弟有 19 元，豬二哥比弟弟多 28 元，豬大哥比二哥多 1 元，豬大哥有幾元？

序數型情境的加法問題也不適用。

<b>R-2-3 兩數相乘的順序不影響其積：</b> 乘法交換律。可併入其他教學活動。 <b>補充說明：</b> 二年級乘法教學最後階段，以行列模型教學。不出現「乘法交換律」一詞。	r-1-2
---	-------

先備：

連結：N-2-6, N-2-7

後續：

### 基本說明

1. 初學乘法時，應先專心學習乘法的意義，故乘法交換律不宜在二年級上學期學習。
2. 學習乘法交換律，應先學習將問題轉化為行列模型的圖示，如釋例（1），該圖可看成「一



列有 6 個，3 列有幾個？」，也可看成「一行有 3 個，6 行有幾個？」，因此  $6 \times 3$  和  $3 \times 6$  的結果一樣都是 18。

3. 計算規律的教學最後要能靈活應用規律本身，因此要有機會讓學生解決釋例（4）這類與情境衝突的問題。

### 條目範圍

1. 課本和教學不出現「乘法交換律」一詞。不需另立單元教學。
2. 乘法交換律確立後，原則上當然可應用於乘法計算。故教師在評量上，應細緻處理學生是否理解乘法意義的問題（見 N-2-6）。

### 釋例

1. 在具體情境中，透過行列模型的排列方式，認識乘法交換律。

例：下圖的花共有幾棵？用乘法算式記下來，並說說看。

解法 1

- 每個直排有 3 棵。
- 有 6 個直排。
- 可以用乘法列式。

$3 \times 6 = \underline{\quad}$

解法 2

- 每個橫排有 6 棵。
- 有 3 個橫排。
- 可以用乘法列式。

$6 \times 3 = \underline{\quad}$

（《部》第四冊課本 P59）

由此可知  $3 \times 6$  和  $6 \times 3$  的積一樣。

2. 觀察「十十乘法表」中和乘法交換律對應的對稱模式，引起學生的好奇心。

例：請學生拿出「十十乘法表」，任選二個數字如 5 和 8，查查看「 $5 \times 8$ 」和「 $8 \times 5$ 」，請學生說說看有什麼發現？再請學生任意選兩個數字，看看有什麼發現？透過不同學生的不同選擇，建立被乘數和乘數交換位置的乘積相同的深刻印象，並可以利用來減輕記憶「十十乘法表」的負擔。

3. 在超過十乘法的範圍，已可將問題轉化為行列模式，觀察其規律：

例：「一個橡皮擦 5 元，老師買了 12 個，總共要付多少元？」

解法 1：

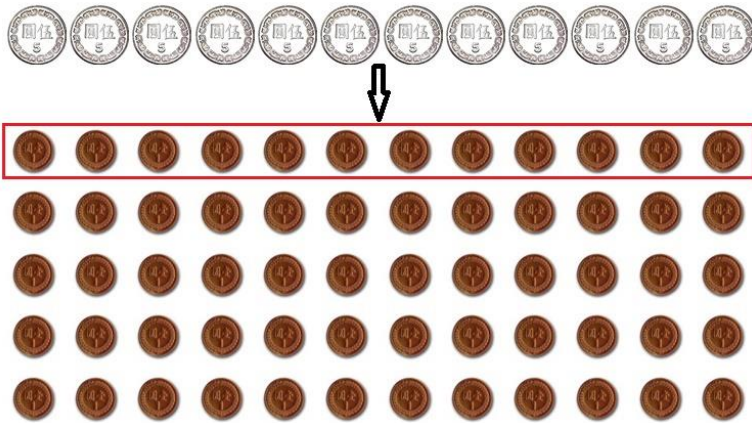
將問題想成 12 個 5 元硬幣來理解(如下圖)，



乘法算式： $5 \times 12 = 60$ （5 要連加 12 次）

解法 2：

可將 1 個 5 元換成 5 個 1 元，將問題轉化「行列模型」呈現(如下圖)，



乘法算式： $12 \times 5 = 60$  (12 連加 5 次)

教師可詢問學生，從上面不同乘法算式，是否發現一樣的規律？

#### 4. 應用乘法交換律，簡化計算。

例：

8 一盒有 2 個南瓜，15 盒共有多少個？

$2 \times 15 = \underline{\quad}$

答：  $\underline{\quad}$  個

•  $2 \times 15$  可以用  $15 \times 2$  來算。  
•  $15 \times 2$  可以用  $15 + 15$  來算。

#### 錯誤類型

#### 評量

##### 1. 評量重點：

能理解兩數相乘的順序不影響其積，並能應用。

##### 2. 注意事項：

(1) 乘法交換律的評量經常造成教師和家長的衝突，主因在於學生所列算式之「被乘數」

與「乘數」的位置與原問題情境看似不相對應時，有可能是學生完全不理解題意而弄錯，也有可能是學生完全清楚題意，只是有自己的解釋，或直接運用乘法交換律。教師評量應以學生是否理解為考量，不能只是光從算式來判斷。教師可追問學生列式的原由，看看學生是否誤會題意、隨意列式、有意義轉換題意、已明瞭交換律等等，再作評量之判斷。

- (2) 針能應用乘法交換律解決一位數乘以二位數的應用問題。例如：「同樂會跳舞分組，每組 2 人，18 組多少人？」，學生應理解正確列式為「 $2 \times 18$ 」，但可以轉成「 $18 \times 2$ 」來計算。

<p><b>R-2-4 加法與減法的關係：</b>加減互逆。應用於驗算與解題。</p> <p>補充說明：應用加減互逆到驗算時，只用加法驗算減法答案，但不用減法驗算加法答案。</p>	<p>n-l-3 r-l-3</p>
--	------------------------

先備：N-1-3

連結：N-2-3

後續：

### 基本說明

1. 在 N-1-3 教學活動中，學生已初步經驗加法和減法的互逆關係。二年級在 N-2-3 的加減法解題活動中，更深入學習此重要關係，並應用於解題活動。
2. 如 N-2-3 之說明，合成分解模型最適合說明加減互逆關係，應先以這類問題導引，等學生熟悉後再應用於其他類型的問題。(參見 N-2-3)
3. 加減互逆的常見應用之一是驗算。驗算不是重新執行原來的方法，而是用不同方式檢查計算的正確性。例如驗算  $31-14=17$ ，可用加減互逆，檢查  $17+14$  是否等於 31。
4. 單純的括號算式問題如  $23+(\ )=36$ ； $50-(\ )=15$ ； $(\ )+18=40$ ； $(\ )-15=45$ ，可用來檢查學生是否能抽象理解加減互逆關係。

### 條目範圍

1. 應用加減互逆到驗算時，原則上只用加法驗算減法答案，因為大家認為不宜要求一般學生用較困難的減法驗算加法答案。但若有靈活的學生堅持使用，這完全符合加減互逆的學習目標，當然也不需禁止。
2. 「加減互逆」一詞建議不出現在教學與課本中，也不需另一單元教學。

### 釋例

1. 從合成分解模型探討加減互逆的關係：
  - (1) 讓學生觀察下圖，教師可以提問：



- 紅珠子幾顆？藍珠子幾顆？(9, 8)
  - 這串珠子一共有幾顆？怎樣列式？( $9+8=17$ 、 $8+9=17$ )
  - 一串珠子有 17 顆，將藍珠子 8 顆全部拿走，剩下幾顆紅珠子？怎樣列式？( $17-8=9$ )
  - 一串珠子有 17 顆，將紅珠子 9 顆全部拿走，剩下幾顆藍珠子？怎樣列式？( $17-9=8$ )
- (2) 讓學生觀察上面列出來的四個加減算式，說說看有哪些數字？有哪些符號？
2. 利用線段圖和還原的想法讓學生理解加減互逆的關係：
 

下面例題，建議教師除了利用線段圖表徵題意，也可用還原的想法幫助學生理解。

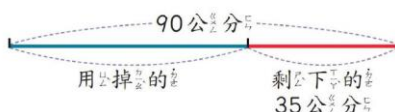
例如：把剩下的 30 公分和用掉的 60 公分還原回來，會不會和原來的緞帶一樣長？

**6** 圓圓做緞帶花，已經用掉60公分的緞帶，還剩下30公分，原來有的緞帶有多長？



答：\_\_\_公分

**5** 一條緞帶長90公分，做緞帶花用掉一些，剩下35公分，做緞帶花用去了幾公分？



答：\_\_\_公分

### 3. 用加法做減法的驗算：

**3** 先算答案，再做驗算。

① 公車上有32人，其中男生有12人，女生有幾人呢？

$$32 - 12 = \underline{\quad}$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ - 12 \\ \hline 20 \end{array}$$

驗算

$$\begin{array}{r} 20 \\ + 12 \\ \hline 32 \end{array}$$

答：\_\_\_人

(《部》第三冊課本 P3)

### 4. 利用加減互逆關係解決單純的有括號算式問題(含直式及橫式)。例如：

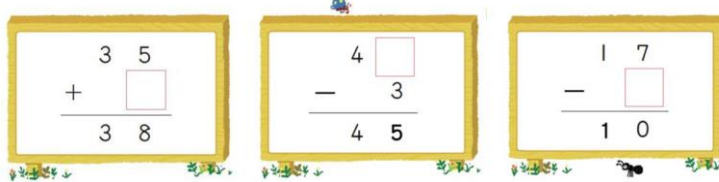
#### (1) 有括號的直式問題

小杰做對了下面的算式，但不小心把墨水水滴在算式上，請幫小杰把數字填上去。

$$\begin{array}{r} 6 \blacksquare \\ + 3 \\ \hline 66 \end{array}$$

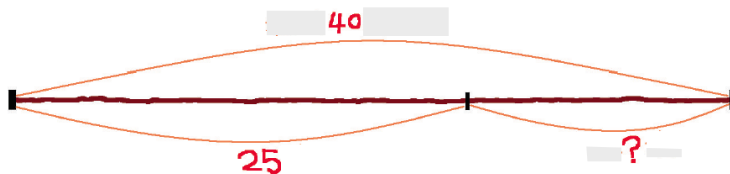


(2) 類似示例：

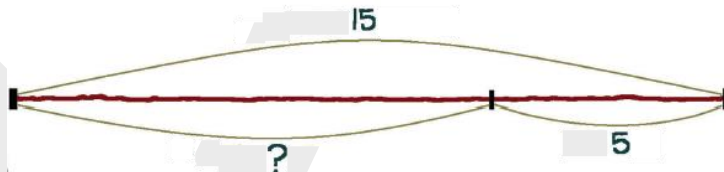


### 5. 有括號的橫式問題

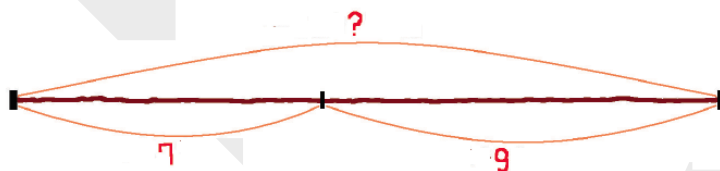
(1)  $25 + (\quad) = 40$ ，利用下列線段圖，理解可以用減法「 $40 - 25$ 」來算。



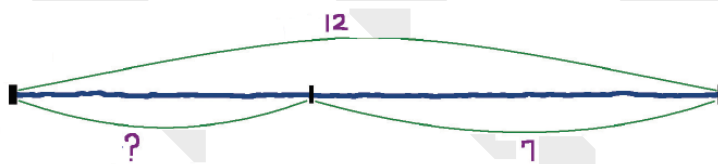
(2)  $(\quad) + 5 = 15$ ，利用下列線段圖，理解可以用減法「 $15 - 5$ 」來算。



(3)  $(\quad) - 7 = 9$ ，利用下列線段圖，理解可以用減法「 $7 + 9$ 」來算。



(4)  $12 - (\quad) = 7$ ，利用下列線段圖，理解可以用減法「 $12 - 7$ 」來算。



### 錯誤類型

第一次觀察線段圖，學生可能會在意實際長度，教師可以設計衝突的情境如「尺或紙張不夠長，怎麼辦？」這時教師可以引導學生理解「在圖上將問題的數量標示清楚，大家看的懂就好。」教師不用特別介紹「線段圖」的名詞。

### 評量

1. 評量重點：

- (1) 能理解加減互逆，並運用於驗算和解題。
- (2) 能利用加減互逆解決單純的有括號的算式問題。

2. 注意事項：

(1) 老師提供線段圖表徵時，雖不一定力求精確，但宜有相對的合理性。  
學生若不理解單純的括號算式問題解如  $61 - (\quad) = 25$ ，可提供線段圖協助。

<p><b>D-2-1 分類與呈現：</b>以操作活動為主。能蒐集、分類、紀錄、呈現與幾何形體相關的物體。討論分類之中可能還可以分類。</p> <p><b>補充說明：</b>非正式表格與統計圖表。可配合平面圖形與立體圖形教學。</p>	<p>d-I-1</p>
---	--------------

**先備：**D-1-1

**連結：**S-2-1、S-2-2

**後續：**D-3-1

### 基本說明

1. 本條目以操作活動為主，主要分成兩類活動：(a) 學生承繼 D-1-1 的經驗，對教師給定的資料或學生主動蒐集的資料，做分類、紀錄、呈現、說明與討論；(b) 在老師的引導下，學習資料在分類中可以再分類。本條目的進行重在體驗，作為日後學習的先備經驗，教師勿過度評量
2. 活動 (a) 至少包含和幾何特徵 (S-2-1) 與幾何圖形 (S-2-2) 有關之幾何形體，運用幾何特徵作為分類標準，同時強化幾何概念和分類的學習。
3. 活動 (b) 的進行應該包含兩種常見的資料分類方式：甲類如「動物有狗、貓.....狗有柴犬、柯基、土狗、.....，貓有暹羅、波斯、....」「整理東西，分別放入幾個抽屜，每個抽屜中的東西再分放在一些小盒子中。」第一層分類之下的子分類，彼此可能沒有很大關係。乙類如「把下列圖形分類，先用顏色分，再依邊數來分」，這時其他同學可能會採用「先用邊數分，再依顏色分」。這種情況被分類的物件，同時具有多種特徵，只是分類特徵採行的順序不同。
4. 活動 (b) 乙類的進行，建議由老師引導進行，安排不同分類特徵順序由不同小組進行分類、紀錄和呈現。
5. 教師教學仍應注意 D-1-1 基本說明 (5) 提到的注意事項。由於本年度包含明確幾何形體分類，教師更應用心安排，讓學生領會「第一，分類所依據的是同一個概念下的不同分組；第二，同一物體出現在兩個類別中，反映分類可能不妥當。」

### 條目範圍

1. 和 D-1-1 相同，低年級圖表是非正式圖表，可以發揮學生的創意。正式表格或統計圖表的呈現是中高年級的課題。
2. 雖然學生可自由呈現他喜歡的紀錄方式，但教師應藉由事先的課程規劃，減少活動或布題資料量的數目，分類項目及數量範圍也要有所限制，活動時透過提示和引導，協助學生建立清楚易懂的表現方式，釐清自己的意願。不然低年級學生進行討論時，可能會一團混亂。

### 釋例

1. 承繼 D-1-1，學生已有基本蒐集資料並加以整理、呈現之經驗。本年度結合 S-2-1、S-2-2，學習處理幾何形體。
  - (1) 蒐集生活中常見的立體形體，進行分類、記錄，並能說明與討論。  
例：將下列蒐集到的形體進行分類，並說明與討論，再作記錄。









小明的分類：用平平的面和彎曲的面來進行分類。

只有平平的面	只有彎曲的面	有平平的面、也有彎曲的面
		

小英的分類：用形狀來進行分類。

			
---	---	---	--

(2) 以上的分類和呈現範例僅供參考。低年級資料蒐集與呈現活動的重點，是由學生發揮想像力來進行自己的分類和呈現。評量重點是學生能清楚說明自己的分類依標準，也能參考他人意見修改。當然如果學生分類標準很薄弱，教師也可以給予引導。

2. 活動(b)甲類之分類活動。

例 1：教師和學生蒐集常用的文具、物品、雜物。要求學生安排將物品分到兩個或三個抽屜中，每個抽屜中的物品，再做分類，放到小盒子、夾子、袋子中。

讓學生體驗，先分出大類，之後再在每一大類中，進行小分類。由於每一大類性質可能差異很大，底下的子分類也可能沒有關係。

例 2：如果教學現場適合，也可請學生描述他們希望如何整理他們的衣物、書籍、玩具。重點是物品能先分大類，再分小類。

●：小雅想要用下面的分類整理她的衣物：

上衣類——夏天類（短袖）、冬天類（長袖）。

褲子類——牛仔褲類，休閒褲類。

洋裝類——素色類、印花類。

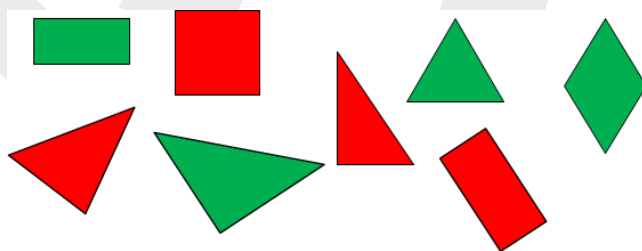
裙子類——長裙類、短裙類。

襪子類——短襪類、長襪類。

3. 活動(b)乙類之分類活動。

這種分類的物品可能同時有多種特徵，當學生採行特徵的順序不同，就有不同分類方式。建議由老師安排並訂立分類標準，較能控制活動進行品質。

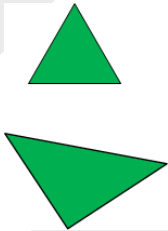

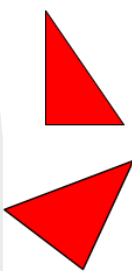
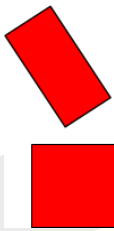
例 1. 將下列的圖形卡進行分類並記錄



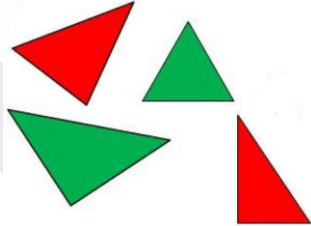
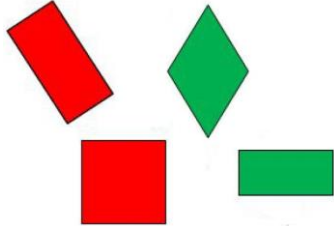
小賢的作法：先依顏色分成兩堆、再依圖形的邊數分類。

綠色	紅色

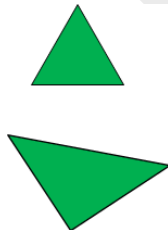
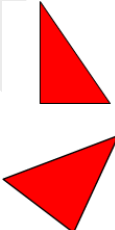


再依形狀又繼續分成四堆

綠色		紅色	
三角形	四邊形	三角形	四邊形
			

小芳的作法：先依圖形的邊數分類分成兩堆、再依顏色分類。

三角形	四邊形
	

再依形狀又繼續分成四堆

三角形		四邊形	
綠色	紅色	綠色	紅色
			

例 2：二年甲班有 21 位小朋友，10 位男生(6 位穿運動服，4 位穿制服)，11 位女生(5 位穿運動服，6 位穿制服)。

這 21 位小朋友有兩種分類方式：

第一種：

男生（10）—— 運動服男（6）、制服男（4）

女生（11）—— 運動服女（5）、制服女（6）

第二種：

運動服（11）—— 運動服男（6）、運動服女（5）

制服（10）—— 制服女（6）、制服男（4）

### 錯誤類型

和 D-1-1 相同，教師應謹慎處理分類的「錯誤」。本條目是體驗分類的操作活動，除非學生的分類方式明顯有問題或太隨性，否則教師不宜介入太多。

### 評量

#### 1. 評量重點

- (1) 學生能在老師引領下，進行幾何形體的分類、紀錄、呈現與討論。
- (2) 能說明自己分類的依據，並理解別人的分類方式。
- (3) 能在教師引導下，進行分類中的子分類活動，並說明分類的依據。

#### 2. 注意事項

- (1) 分類的資料量不宜太龐大。
- (2) 做分類中的子分類時，限於二層的分類—子分類，不做三層以上更複雜的子分類。

## 二、國民中學教育階段

### 國中階段特別說明

國中課程手冊的敘寫方式分三大段落說明：第一段落說明本題目的先備知識、該年級相關題目、以及其後續概念發展的條目；第二段落陳述該條目的主題內容與限制、教師的教學策略與方法、學生的錯誤類型與迷思概念；第三段落則提供評量注意要點、探索與奠基建議活動。各段落涵蓋細項說明如下：

第一段落	先備	先備知識的條目，以前一年之學習內容為主。
	連結	同年級相關的條目。
	後續	後續發展的條目，以後一年之學習內容為主。
第二段落	基本說明	教學目標之描述，含數學概念，定義說明、定理、習慣性用法。
	條目範圍	描述教學之合理範圍。
	釋例	以教師教學為主，包括教學注意要點、多種解法、教學策略、重要釋例。
	錯誤類型	以學生為主，包括出現頻率高的認知、錯誤類型與迷思概念。
第三段落	評量	含注意要點及評量限制。
	探索	課程延伸之學習活動，包括探索活動、奠基活動、以及操作性教學活動建議。

倘若該條目主題的段落細項並無相關內容可供表達，則會省略不寫。

<b>N-7-1 100 以內的質數</b> ：質數和合數的定義；質數的篩法。	n-IV-1
---	--------

先備：N-6-1。

連結：N-7-2。

#### 基本說明

1. 若一個大於1的整數，除了1和本身以外，沒有其他因數，則稱此數為質數。
2. 若一個大於1的整數，除了1和本身以外，還有其他因數，則稱此數為合數。
3. 正整數1既不是質數，也不是合數。
4. 能檢驗 100 以內的任何整數，哪些是質數，哪些是合數。
5. 正整數 2、3、5、11 的倍數判別法。

#### 釋例

判斷13是否為質數？

需要檢查大於1，小於13的整數，是否為13的因數。首先，2不是13的因數，所以4、6、8、10、12也不是13的因數；其次，3不是13的因數，所以9也不是13的因數；最後

5、7、11也不是13的因數；所以13的正因數只有1和13本身，故13是一個質數。

### 錯誤類型

學生可能會誤認為1，91都是質數的迷思概念。

### 探索

植樹的接龍遊戲。

<b>N-7-2 質因數分解的標準分解式：</b> 質因數分解的標準分解式，並能用於求因數及倍數的問題。
--

n-IV-1
--------

先備：N-6-1、N-6-2。

### 基本說明

1. 在正整數的範圍中，理解正整數的因數、質因數、倍數、公因數、公倍數以及質因數分解等。
2. 質因數分解：將一正整數完全分解為若干個質因數連乘積的過程。
3. 標準分解式：將一正整數表示成質因數的連乘積，遇相同的質因數則以指數形式表示，且底數通常由小排到大。
4. 常以  $(a,b)$  和  $[a,b]$  表示兩正整數  $a$  和  $b$  的最大公因數和最小公倍數；

以  $(a,b,c)$  和  $[a,b,c]$  表示三個正整數  $a$ 、 $b$  和  $c$  的最大公因數和最小公倍數。

5. 互質：兩數最大公因數為1時，稱這兩數互質，如  $(12,25) = 1$ ，所以12與25互質，明顯的12與25亦沒有共同的質因數。

### 條目範圍

1. 做正整數的質因數分解時，其質因數以不大於100為宜。
2. 質因數分解的計算要能熟練，但正整數位數不宜過高。
3. 不介紹「輾轉相除法」求最大公因數。
4. 以短除法求兩個正整數的最大公因數和最小公倍數，主要為複習 N-6-1、N-6-2，來銜接或說明以標準分解式的方法求解此問題。所以在此條目，不以短除法做三個(含)以上的數之最大公因數和最小公倍數問題。

### 釋例

1. 求72，48的的最大公因數與最小公倍數。

由短除法：

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 72 \quad 48} \\ 2 \overline{) 36 \quad 24} \\ 2 \overline{) 18 \quad 12} \\ 3 \overline{) 9 \quad 6} \\ 3 \quad 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{則兩數的最大公因數 } (72,48) = 2^3 \times 3 \text{ 或 } 24, \\ \text{而兩數的最小公倍數 } [72,48] = 2^4 \times 3^2 \text{ 或 } 144. \end{array}$$

或由標準分解式： $48 = 2^4 \times 3$ ， $72 = 2^3 \times 3^2$ ，可得  $(72,48) = 2^3 \times 3$ ， $[72,48] = 2^4 \times 3^2$ 。

2. 求 48, 72, 90 的最大公因數、最小公倍數。

因為  $(48, 72) = 24$ ，所以三數的最大公因數  $(48, 72, 90) = (24, 90) = 6$ 。

因為  $[48, 72] = 144$ ，所以三數的最小公倍數  $[48, 72, 90] = [144, 90] = 720$ 。

3. 試求 720 和  $2^6 \times 3^4 \times 7$  的最大公因數。

因為  $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$ ，所以

$$(720, 2^6 \times 3^4 \times 7) = (2^4 \times 3^2 \times 5, 2^6 \times 3^4 \times 7) = 2^4 \times 3^2 = 144。$$

4. 相關應用問題

例：一長方體蛋糕，其長 108 公分，寬 72 公分，高 54 公分，今小文欲將此蛋糕全部切成大小相同的正方體，且沒剩餘。試問：最少能切成幾個正方體？

因為長方體蛋糕需全部切成正方體，所以正方體的邊長為 108、72、54 的公因數。又正方體的個數要最少，故正方體的邊長要最大，即邊長為 108、72、54 的最大公因數。由於  $(108, 72) = 36$ ，可以算出  $(108, 72, 54) = ((108, 72), 54) = (36, 54) = 18$ ，得知正方體的

最大邊長為 18。又因為  $108 \div 18 = 6$ ， $72 \div 18 = 4$ ， $54 \div 18 = 3$ ，所以總共可切成正方體  $6 \times 4 \times 3 = 72$  個。

#### 錯誤類型

1. 標準分解式求最大公因數與最小公倍數的問題，學生會誤選質因數與質因數的指數。
2. 學生對於應用問題中，會誤判該求最大公因數或最小公倍數。

#### 評量

1. 能了解短除法與標準分解式在求最大公因數、最小公倍數問題時的關聯性。
2. 能將最大公因數、最小公倍數的觀念應用到生活上的相關問題。

#### 探索

1. 由最大公因數的意義，探索  $(a, b, c)$  和  $((a, b), c)$  的關係，並與「以標準分解式求最大公因數」的方法做比較。
2. 由最小公倍數的意義，探索  $[a, b, c]$  和  $[[a, b], c]$  的關係，並與「以標準分解式求最小公倍數」的方法做比較。
3. 利用實際例子，探索兩正整數  $a$  和  $b$  會滿足  $ab = (a, b)[a, b]$  的性質。

<b>N-7-3 負數與數的四則混合運算(含分數、小數)：</b> 使用「正、負」表徵生活中的量；相反數；數的四則混合運算。	n-IV-1
--	--------

先備：N-6-3、N-6-4、N-6-5。

連結：N-7-4、N-7-5。

後續：N-8-1。

### 基本說明

1. 國中數感的培養，除了對實例要有數感外，更需要培養涉及正負符號的數感。
2. 能認識負數是比零小的數。
3. 正、負數在生活中的應用是指能利用正、負數來表徵生活中性質相反的量。
4. 能辨別兩個負數的大小。
5. 在數線上和原點距離相同，但方向相反的兩個點，所代表的數互為相反數，且其和為0，即  $a + (-a) = 0$ 。
6. 能理解無論  $a$  是正數或是負數， $-a$  與  $a$  互為相反數。可知  $-(-a)$  與  $a$  皆為  $-a$  的相反數，所以  $-(-a) = a$ 。
7. 能以最大公因數、最小公倍數熟練分數的約分、擴分，擴及到正負數的四則運算，並有能力將分數化至最簡分數。

### 條目範圍

不宜出現多於三層以上括號的四則運算。

### 釋例

1. 求零下5度是指零度還低5度的溫度，而  $-5$ 、 $-10\frac{1}{2}$ 、 $-12.3$  分別是比0小5、 $10\frac{1}{2}$ 、12.3的數。
2. 若往東10步記為 $+10$ ，則往西4步記為 $-4$ ；第一週公司盈餘5000萬記為 $+5000$ 萬，第二週若虧損1000萬則記為 $-1000$ 萬。
3.  $-5$ 是比0小5的數， $-8$ 是比0小8的數。由於 $5 < 8$ ，所以 $-5 > -8$ 。
4. 3的相反數是 $-3$ ， $-\frac{7}{12}$ 的相反數是 $\frac{7}{12}$ ，而0的相反數是0。
5. 能理解 $a + b$ 的相反數就是 $-a - b$ ，即 $-(a + b) = -a - b$ 。

因為  $a + b + (-a - b) = a + b - a - b = 0$ ，所以  $-a - b$  是  $a + b$  的相反數，但是  $a + b$  的

相反數也可以記成  $-(a + b)$ ，所以  $-(a + b) = -a - b$ 。同理也可以說明  $a - b$  的相反數是

$-a + b$ 。

### 錯誤類型

1. 學生可能有  $-a$  為負數的迷思概念。
2. 學生可能會有  $\frac{2}{3}$  的相反數為  $\frac{3}{2}$  的迷思概念。



## 評量

1. 評量宜包含生活中的實例與正負符號的數之間的連結。
2. 評量宜包含負數、整數、相反數在數線上的位置與關係。

<b>N-7-4 數的運算規律：</b> 交換律；結合律；分配律； $-(a+b) = -a-b$ ； $-(a-b) = -a+b$ 。	n-IV-2
---	--------

先備：N-6-3、N-6-4、N-6-5。

連結：N-7-3。

後續：N-8-1。

## 基本說明

1. 能理解一個數  $a$  加上另一個數  $b$  後，不一定比原來的  $a$  大。換句話說，要由  $b$  是正數或是負數才能決定  $a+b$  是否比  $a$  大或比  $a$  小：

$$a + \text{正數} > a,$$

$$a + \text{負數} < a.$$

反之，若  $a+b > a$ ，則要能認識到這時  $b$  是正數；而若  $a+b < a$ ，則  $b$  是負數。

2. 能理解無論  $a$ 、 $b$  是正或負，

$$a + (-b) = a - b, \quad a - (-b) = a + b, \quad a \times (-b) = -ab, \quad (-a) \times (-b) = ab.$$

3. 能理解  $a \times a$  永遠大於或等於 0。

4. 若  $a$ 、 $b$  為兩個數，則有加法交換律  $a+b=b+a$ 、乘法交換律  $a \times b = b \times a$ 、加法結合律  $(a+b)+c = a+(b+c)$ 、乘法結合律  $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$  及乘法分配律

$$a \times (b+c) = a \times b + a \times c, \quad (a+b) \times c = a \times c + b \times c.$$

5. 除了上述的運算規則，另外去括號的規則也很重要，例如： $-(a+b) = -a-b$ ；

$$-(a-b) = -a+b, \text{ 並能活用於數的四則運算。}$$

## 條目範圍

負數與數的四則運算不宜出現分數與小數的複雜混合計算。

## 釋例

1.  $(-8) + (-20) = -(8+20) = -28$ 。
2.  $320 + 43 - 143 = 320 + (43 - 143) = 320 - 100 = 220$ 。
3.  $25 \times 13 \times 4 = 13 \times (25 \times 4) = 13 \times 100 = 1300$ 。
4.  $(-150) - 2 \times (-50) = -150 + 100 = -(150 - 100) = -50$ 。

$$5. 5 \times 123 - 5 \times 23 = 5 \times (123 - 23) = 5 \times 100 = 500。$$

$$6. \left(-12\frac{1}{8}\right) \times 4 = -\left(12 + \frac{1}{8}\right) \times 4 = -\left(48 + \frac{1}{2}\right) = -48\frac{1}{2}。$$

$$7. \frac{12}{13} - \left(\frac{6}{7} - \frac{1}{13}\right) - \frac{1}{7} = \frac{12}{13} - \frac{6}{7} + \frac{1}{13} - \frac{1}{7} = \frac{12}{13} + \frac{1}{13} - \frac{6}{7} - \frac{1}{7}$$

$$= \left(\frac{12}{13} + \frac{1}{13}\right) - \left(\frac{6}{7} + \frac{1}{7}\right) = 1 - 1 = 0。$$

上面應用運算規則到簡化的例子，在教學上，要配合訓練學生的觀察能力。

### 錯誤類型

1. 學生可能會忽略正、負符號的運算，例如： $-a \times (-b + c) = ab + ac$  的錯誤產生。
2. 學生對於除法的運算會有迷思概念，例如： $a \div (b + c) = a \div b + a \div c$ ，

$$a \div b \div c = a \div (b \div c)。$$

### 評量

評量時，除非有特別指定要將計算結果化為最簡分數，否則所有相對應之等值分數仍宜視為正確。

### 探索

以實例讓學生探索下列四則運算的變化型：

$$a \times b \div c = a \times b \times \frac{1}{c} = a \times \frac{1}{c} \times b = a \div c \times b，$$

$$a \div b \div c = a \times \frac{1}{b} \times \frac{1}{c} = a \times \frac{1}{b \times c} = a \div (b \times c)。$$

能分辨  $a \div (b + c) = a \times \frac{1}{b + c}$  與  $a \div b + a \div c = a \times \frac{1}{b} + a \times \frac{1}{c} = a \times \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$  的不同。

<b>N-7-5 數線：</b> 擴充至含負數的數線；比較數的大小；絕對值的意義；以 $ a - b $ 表示數線上兩點 $a, b$ 的距離。	n-IV-2
--	--------

連結：N-7-8、S-8-6、G-8-1。

基本說明（教學目標之描述，含數學概念，定義說明、定理、習慣性用法）。

1. 在數線上，我們稱0的位置為原點，且將負數(負整數、負分數、負小數)標記在原點的左

邊，正數標記在原點的右邊。標記時，知道數線上愈右邊的數愈大，愈左邊的數愈小，如  $-7 < -3 < 0 < 10$ ，而對應到數線時， $-7$ ， $-3$ ， $0$ ， $10$ 的位置是由左排到右。

2. 數線上點所對應的數稱為點的坐標，例如： $A$ 點的坐標為 $-3$ ，可記為 $A(-3)$ 。
3. 加減法與在數線上做平移的對應關係。
4. 數線上一數的絕對值等於此數與原點的距離。
5. 以實例表現數線上 $a$ 、 $b$ 兩點的距離可以 $|a-b|$ 或 $|b-a|$ 表示。
6. 絕對值在國中有兩個比較重要的應用：一個是用來比較負數的大小，另一個是用絕對值來表達數線上的兩點距離。
7. 兩個負數，如果其絕對值愈大，表示其對應的點在原點左方越遠處，則其值就愈小。
8. 數線是學生首次學習代數與幾何結合的題材，教學上應包括這類的題材，例如：求 $a$ 、 $b$ 兩點中點的坐標。

### 條目範圍

1. 數線上 $a$ 、 $b$ 兩點的中點，只需以實例來說明，如：求 $-5$ 和 $9$ 中點的坐標，暫時不需要導出 $a$ 、 $b$ 兩點中點的坐標公式。
2. 絕對值引入的目的是用於紀錄數線上兩點間的距離，不處理「絕對值方程式和絕對值不等式」。例如：不應出現 $|x-3|=4$ ，求 $x$ 的值； $|x-5|\leq 4$ ，求 $x$ 的範圍…等問題。

### 釋例

1.  $-3+10$ 即是由代表 $-3$ 的點向右移 $10$ 個單位，而 $-3-10$ 是由代表 $-3$ 的點向左移 $10$ 個單位。
2. 點 $-2$ 至原點的距離為 $2$ ，即 $-2$ 的絕對值為 $|-2|=2$ 。
3. 在國一階段學習絕對值應採用較直接且直觀的方式教學較佳，例如：一個正數的絕對值就是它自己，一個負數的絕對值就是把它的負號去掉後的數，而 $0$ 的絕對值還是 $0$ ，所以

$$\left|-\frac{5}{3}\right|=\frac{5}{3} \text{ (把負號去掉)}; \left|\frac{5}{3}\right|=\frac{5}{3}。$$

絕對值在數學上的定義：若 $a > 0$ ，則 $|a|=a$ ；若 $a < 0$ ，則 $|a|=-a$ ，若 $a=0$ ，則 $|a|=0$ 。

4. 試比較 $-15$ 和 $-18$ 的大小。  
首先 $|-15|=15$ ， $|-18|=18$ ，因為 $|-15| < |-18|$ ，所以 $-15 > -18$ 。
5. 試求數線上兩點 $A(-6)$ 和 $B(8)$ 的中點坐標。

設中點為 $C(x)$ ，因為 $\overline{AB}=|8-(-6)|=|8+6|=14$ ，所以 $\overline{AC}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times 14=7$ ，故

$x = -6 + 7 = 1$  或  $x = 8 - 7 = 1$ ，故中點為  $C(1)$ 。

### 錯誤類型

1. 教學上若有談到嚴謹的「絕對值在數學上的定義」，宜注意學生可能會有  $|a| = \pm a$  的迷思概念。
2. 當學生學會負數的加減計算後，應該要理解有絕對值算式的計算，例如： $10 - |-6|$  和  $10 - (-6)$  的不同。

### 評量

1. 評量宜包含負數、整數、相反數在數線上的位置與關係。
2. 絕對值引入的目的是用於紀錄數線上兩點間的距離，所以在評量上不處理「絕對值方程式和絕對值不等式」。

### 探索

1. 以  $|a - b|$  表示數線上兩點間距離的概念，探討  $|x - 3| = 4$ 、 $|2x - 5| = 3$ ...等問題。
2. 利用數線上兩點的距離觀念來探索中點坐標的公式。

<b>N-7-6 指數的意義：</b> 指數為正整數的次方；同底數的大小比較；指數的運算。	n-IV-3
---	--------

先備：N-6-1。

連結：N-7-2、N-7-7、N-7-8。

後續：N-8-6。

### 基本說明

1. 設  $a$  為任一數，則  $n$  個  $a$  相乘以  $a^n$  表示，讀作  $a$  的  $n$  次方，其中  $n$  為指數， $a$  為底數。
2. 能理解當  $a > 1$  時，若  $n$  愈大，則  $a^n$  愈大；當  $0 < a < 1$  時，若  $n$  愈大，則  $a^n$  愈小。
3. 對於算式出現「指數形式的數」能理解並運算。
4. 當底數為分數時，以  $\left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$  來解釋。
5. 知道指數的運算順序優先於四則運算，例如： $-3^4 = -(3^4)$ 。

### 條目範圍

不處理「指數為負整數」的情形。

### 釋例

1.  $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ 。
2.  $\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3^4}{2^4}$ 。
3.  $(-3)^5 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = -3^5$ 。

4.  $(-5)^6 = (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) = 5^6$ 。

5. 比較  $\left(\frac{8}{9}\right)^3$  和  $\left(\frac{8}{9}\right)^2$  的大小。

因為  $\frac{8}{9} < 1$ ，所以  $\left(\frac{8}{9}\right)^3 = \left(\frac{8}{9}\right)^2 \times \frac{8}{9} < \left(\frac{8}{9}\right)^2$ 。

6. 可使用電算器讓學生經驗「當  $a > 1$  時，若  $n$  愈大，則  $a^n$  愈大；當  $0 < a < 1$  時，若  $n$  愈大，則  $a^n$  愈小」的性質。

### 錯誤類型

1. 學生會誤認為當  $n$  愈大，則  $a^n$  會愈大。

2. 學生會誤認為  $\left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a}$ 。

3. 當指數  $n$  分別為奇數和偶數時，釐清  $a^n$ 、 $(-a)^n$ 、 $-(-a)^n$  及  $-a^n$  的異同。

### 評量

評量內容不應出現「指數為負整數」的數。

<p><b>N-7-7 指數律：</b>以數字例表示「同底數的乘法指數律」(<math>a^m \times a^n = a^{m+n}</math>、<math>(a^m)^n = a^{mn}</math>、<math>(a \times b)^n = a^n \times b^n</math>，其中 <math>m, n</math> 為非負整數)；以數字例表示「同底數的除法指數律」(<math>a^m \div a^n = a^{m-n}</math>，其中 <math>m \geq n</math> 且 <math>m, n</math> 為非負整數)；<math>a \neq 0</math> 時 <math>a^0 = 1</math>。</p>	<p>n-IV-3</p>
--	---------------

先備：N-6-1。

連結：N-7-6、N-7-8。

後續：N-8-6。

### 基本說明

1. 能理解乘法的指數律： $a^m \times a^n = a^{m+n}$ ； $(a^m)^n = a^{mn}$ ； $(a \times b)^n = a^n \times b^n$ ，其中  $m, n$  為大於 0 的整數， $a, b$  為任意數。

2. 能理解  $a^0 = 1$ ，其中  $a \neq 0$ 。

3. 能理解除法的指數律： $a^m \div a^n = a^{m-n}$ ，其中  $a \neq 0$ ， $m \geq n$ 。

### 條目範圍

1. 在指數律  $a^m \div a^n = a^{m-n}$  中，指數  $m, n$  須限制在如下條件： $m, n$  為非負整數，且  $m \geq n$ 。

2. 指數必須為非負整數。

### 釋例

1. 可用乘法或除法指數律說明  $5^0 = 1$ 。

$$5^3 = 5^{3+0} = 5^3 \times 5^0 \Rightarrow 5^0 = 1；$$

$$5^0 = 5^{1-1} = 5 \div 5 = 1。$$

2.  $2^2 \times 4^4 = ?$

$$2^2 \times 4^4 = 2^2 \times (2^2)^4 = 2^2 \times 2^8 = 2^{10} = 1024。$$

$$3. (39)^5 \times \left(\frac{1}{13}\right)^5 = ?$$

$$(39)^5 \times \left(\frac{1}{13}\right)^5 = \left(39 \times \frac{1}{13}\right)^5 = 3^5 = 243。$$

$$4. \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{4}{3}\right)^2 = ?$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{1}{2^4} \times \frac{8^2}{3^2} = \frac{1}{2^4} \times \frac{(2^3)^2}{3^2} = \frac{1}{2^4} \times \frac{2^6}{3^2} = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}。$$

$$5. 6^{10} \div 9^5 = ?$$

$$6^9 \div 9^4 = (2 \times 3)^9 \div (3^2)^4 = 2^9 \times 3^9 \div 3^8 = 2^9 \times 3^{9-8} = 1536。$$

### 錯誤類型

學生可能會將 $(a \times b)^n = a^n \times b^n$ 誤用為 $(a + b)^n = a^n + b^n$ 或 $(a - b)^n = a^n - b^n$ 的錯誤觀念。

### 評量

1. 評量時的題目、計算過程中，不應出現「指數為負整數」的情形。
2. 評量時的題目不宜出現代數符號，應以具體的數字例呈現。

<b>N-7-8 科學記號：</b> 以科學記號表達正數，此數可以是很大的數（次方為正整數），也可以是很小的數（次方為負整數）。	n-IV-3
--	--------

連結：N-7-6、N-7-7。

### 基本說明

1. 科學記號表示法是將正數表示成 $a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq a < 10$ ， $n$ 為整數。學生應知道 $a$ 不能是10的原因，是為了表示法的唯一性。
2. 能知道自然科學領域常用的單位名稱。
3. 引入 $10^n$ ，其中指數 $n$ 為整數，且其運算滿足指數律。

### 條目範圍

1. 科學記號表示法可以應用在任何正數，教學上應強調科學記號之所以重要在於我們能用它表示很大的數和很小的數，因此教學時，要與自然科學應用的例子結合在一起。
2.  $10^n$ 中的 $n$ ，其實是一種刻畫數字大小與做比較的有效指標(即所謂的「數量級」)，這是高中對數函數學習的前置經驗。
3. 引入 $10^n$ 中的指數 $n$ 為負整數時，可以使用小數與之轉換來解釋。
4. 主要為科學記號的了解與使用，不宜涉及科學記號的四則運算。
5. 不涉及其他底數的負整數次方。

### 釋例

1. 以科學記號表示32100000和0.00000035。

$$32100000 = 3.21 \times 10^7, \quad 0.00000035 = 3.5 \times 10^{-7}。$$

2. 1奈米( $nm$ ) =  $10^{-9}$ 公尺( $m$ )、1微米 =  $10^{-6}$ 公尺( $m$ )、1毫米( $mm$ ) =  $10^{-3}$ 公尺( $m$ )、光

速  $3 \times 10^8$  公尺/秒 ( $m/sec$ ) 等。

3. 試比較  $5 \times 10^6$  和  $6 \times 10^5$  的大小。

$$5 \times 10^6 = 5 \times 10 \times 10^5 = 50 \times 10^5 > 6 \times 10^5。$$

或因為  $5 \times 10^6$  為 7 位數， $6 \times 10^5$  為 6 位數，所以  $5 \times 10^6 > 6 \times 10^5$ 。

4. 試問  $8.23 \times 10^6$  是幾位數？

$$8.23 \times 10^6 = 8230000 \text{ 是 } 7 \text{ 位數。}$$

### 錯誤類型

1. 在科學記號的轉換上易有迷思概念，例如： $2.3 \times 10^{-4} = 0.000023$  的迷思概念。
2. 單位換算中的迷思概念，例如： $1 \text{ 公分} = 10^2 \text{ 公尺}$  的迷思概念。

### 評量

1. 能比較出科學記號的數彼此的大小關係。
2. 評量不宜涉及科學記號的四則運算。

<b>N-7-9 比與比例式</b> ：比；比例式；正比；反比；相關之基本運算與應用問題，教學情境應以有意義之比值為例。
--

n-IV-4

n-IV-9

先備：N-6-6。

後續：S-8-8。

### 基本說明

1. 比、比例式常用來表明數量間的比例關係，和其關係密切的有比值、倍數的概念。
2.  $a$ 、 $b$  ( $b \neq 0$ ) 兩數的比記為  $a:b$ ，且該比的前項為  $a$ 、後項為  $b$ 。
3. 若  $a:b$  和  $c:d$  為相等的比，則記為  $a:b = c:d$ ，該式稱為比例式。
4. 若  $a:b = m:n$ ，則  $a:m = b:n$  且  $a = mk$ ， $b = nk$ ， $k \neq 0$ 。
5. 若數值  $x$  改變時，數值  $y$  也隨之改變，且  $y$  值恆為  $x$  值的  $k$  ( $k \neq 0$ ) 倍。此時  $x$ 、 $y$  的關係為  $y = kx$ ，稱  $y$  和  $x$  成正比。
6. 若數值  $x$  改變時，數值  $y$  也隨之改變，且  $x$  和  $y$  的乘積為一個固定的數(不為 0)。此時  $x$ 、 $y$  的關係為  $xy = k$ ， $k \neq 0$ ，稱  $y$  和  $x$  成反比。
7. 比例問題在日常生活中或自然科技中有很廣泛的應用，因此國中學習比例，其中最重要的是要能認識哪些問題可用比與比例式來解決。常見的比例問題有：折扣、加成、利率、匯率、密度、濃度、速度、比例尺等。

### 條目範圍

1. 在比值的計算中，不提及「繁分數」的紀錄方式，以「前項÷後項」解之。
2. 在比例概念的教學與題目設計，以簡單數值為主，遇到複雜的數值或繁瑣的估算時，可使用計算機，例如匯率、密度、濃度等問題。

### 釋例

1. 500 公克的食鹽水中有 70 公克的食鹽，同樣濃度的 750 公克的食鹽水有多少公克的食鹽？  
因為  $750 \div 500 = \frac{3}{2}$ ，所以 750 公克的食鹽水有  $70 \times \frac{3}{2} = 105$  (公克) 的食鹽。或假設 750 公克的食鹽水有  $x$  公克的食鹽，得比例式： $500:70 = 750:x$  (對應關係)  $\Rightarrow 500x = 70 \times 750$ ，得  $x = 105$ 。
2. 一輛時速 90 km 的汽車在高速公路上等速直線行駛 45 分鐘的距離為多少？這段距離在比

例尺1:50000的地圖上會是多少公分？

- 面積相同的矩形，長與寬成反比；體積相同的長方體，高與底面積成反比。
- 若 $3:4=(x-1):x$ ，得 $3x=4x-4$ ，解得 $x=4$ 。
- 若 $a:b=3:7$ 且 $b-a=24$ ，則令 $a=3k$ ， $b=7k$ 解之，或 $a=\frac{3}{7}b$ 代入解之。

### 錯誤類型

- 「已知 $2a=3b$ ，則 $a:b=3:2$ 」，學生可能有「 $a:b=2:3$ 」的迷思概念。
- 在 $y$ 和 $x$ 成正比的關係式 $y=kx$ 中，學生可能有「 $k>0$ 」的迷思概念。
- 在應用問題的比例式中，學生可能有「等號兩邊前後項的對應關係位置擺錯」的迷思概念。
- 學生可能有「若 $x$ 增加， $y$ 也隨之增加，則 $y$ 必和 $x$ 成正比」或「若 $x$ 增加， $y$ 也隨之減少，則 $y$ 必和 $x$ 成反比」的迷思概念。

### 評量

- 在比例的問題中，除了基本的定義、運算外，在評量內容的設計上宜多與生活經驗、自然科技等作為主要題幹，以培養比例概念的素養。
- 比例的意義和運算主為概念的建立、計算方法的熟練，在數值設計上宜以簡單的數值為主。

<b>S-7-1 簡單圖形與幾何符號：</b> 點、線、線段、射線、角、三角形與其符號的介紹。	s-IV-1
---	--------

先備：S-6-4。

連結：S-7-1、S-7-3。

### 基本說明

- 認識點、線、線段、射線、角的意義。
- 認識點、線、線段、射線、角的符號與記法。
- 認識三角形與其符號之介紹。

### 條目範圍

本單元不需設獨立單元，宜與其他單元合併學習。

### 釋例

- 點沒有大小區分，習慣上以英文字母大寫A、B、C、…表示，如下圖所示，點A或A點。

• A

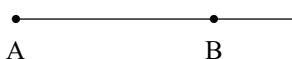
- 直線沒有端點，向兩端無限延伸，習慣上以大寫英文字母L、M、N表示；相異兩點可以成一直線，以直線AB或AB直線表示，以符號 $\overleftrightarrow{AB}$ 表示，如下圖所示。



- 線段的兩邊有端點，可以量長度，以大寫英文字母表示，如下圖所示，線段AB或AB線段，以符號 $\overline{AB}$ 表示。

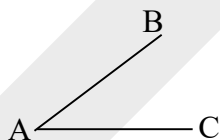


- 射線是以一邊端點為起點，向另一邊的端點無限延伸，如下圖所示，從A點向B點發射，稱為射線AB，以符號 $\overrightarrow{AB}$ 表示。

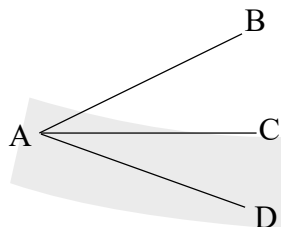




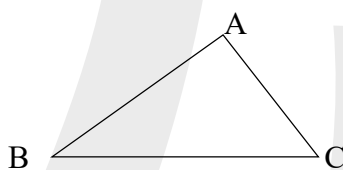
5. 如圖，角的記法稱 $\angle A$  或 $\angle BAC$  或 $\angle CAB$ 。



6. 如圖所示，此時的角必須使用三個點表示，例如 $\angle BAC$  或 $\angle CAD$ ；不宜用 $\angle A$ 。

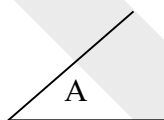


7. 三角形的記法以三個頂點標記符號，例如三角形 ABC 或以符號 $\triangle ABC$ ，如下圖所示：

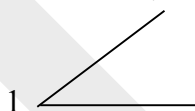


### 錯誤類型

1. 角的記法稱 $\angle BAC$ ，部分學生不知道誰是頂角
2.  $\angle A$  的 A，可能誤寫在圖形的裡面，如下圖所示：



3.  $\angle 1$  的 1，可能誤寫在圖形的外面，如下圖所示：



<b>S-7-2 三視圖：</b> 立體圖形的前視圖、上視圖、左（右）視圖。立體圖形限制內嵌於 $3 \times 3 \times 3$ 的正方體且不得中空。	s-IV-16
--	---------

先備：S-6-4。

連結：S-7-1、S-7-3。

### 基本說明

1. 瞭解立體圖形的三視圖(包括上視圖、前視圖、後視圖、左視圖、右視圖)的意義。
2. 繪製立體圖形的三視圖(包括上視圖、前視圖、後視圖、左視圖、右視圖)。
3. 給定一立體圖形，理解各視圖間的關係，例如前視圖和後視圖、左視圖與右視圖均有線對稱的關係，因此從立體圖形的前視圖、上視圖與右視圖便可得知其他視圖
4. 從前視圖、上視圖與右視圖便可大約知道原立體圖形的樣貌。

### 條目範圍

1. 不出現利用提供的視圖要求學生重製立體圖形。
2. 立體圖形的前(後)視圖、上視圖、左（右）視圖。立體圖形限制內嵌於  $3 \times 3 \times 3$  的正立方體且不得中空。

## 釋例

1. 給定立體圖形引導學生討論此立體圖形的樣貌，希望學生描述立體圖形時，不能僅單從某一方向觀察。
2. 設計活動，透過從實物立體圖形的上方觀察以及水平方向的觀察，及繪製視圖的練習與同班坐不同位置的同学討論，來理解觀察位置的不同與視圖(上、前、後、左、右視圖)的差異。
3. 整合前面對各方向視圖的學習，來理解視圖間的關係。
4. 由於是在立體圖形的上方俯視該立體圖形，因此我們稱此輪廓為「上視圖」或「俯視圖」。但要注意站在立體圖形的前方、後方、右方、左方俯視繪製的「上視圖」會有將此輪廓(平面圖形)旋轉的情況，因此一般我們強調「上視圖」是從站在立體圖形的正前方俯視繪製而成。

## 錯誤類型

1. 學生易混淆左右視圖的方向。
2. 學生繪製上視圖時，可能誤解上視圖的定義，例如從立體圖形的左上方往下看，則會產生偏差 90 度的錯誤上視圖。

## 評量

利用三視圖的觀察後重製立體圖形並非本課綱的教學目標，更不適當當成評量目標。

<b>S-7-3 垂直</b> ：垂直的符號；線段的中垂線；點到直線距離的意義。	s-IV-3
--	--------

先備：S-5-4。

連結：S-7-1、S-7-4、S-7-5。

後續：S-8-1、S-8-3、S-8-4。

## 基本說明

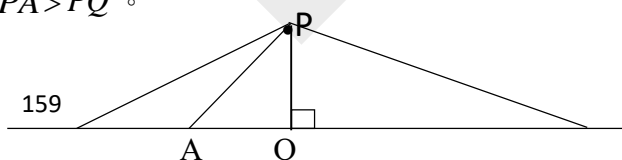
1. 利用直角定義兩直線互相垂直。
2. 認識  $\perp$  記號。
3. 能認識一線段之中垂線的意義。
4. 通過直線  $L$  外的一點  $P$ ，可以使用直角三角板，作一直線  $PQ$  垂直於直線  $L$ ，且交  $L$  於一點  $Q$ 。我們稱點  $Q$  為直線  $PQ$  在  $L$  上的垂足。利用測量說明  $\overline{PQ}$  為點  $P$  到直線  $L$  的最短距離。我們稱點  $P$  到垂足  $Q$  的距離  $\overline{PQ}$  為點  $P$  到直線  $L$  的距離。

## 條目範圍

本單元的中垂線暫不引入尺規作圖。

## 釋例

1. 透過直角三角板畫出兩條垂直的直線，認識垂直的意義與符號。
2. 過線段中點的垂線稱為該線段的中垂線。
3. 透過將直線外一點到該直線畫許多條線段，以垂直線段為最短距離，稱為這點到該直線的距離。學生可透過測量或觀察方式發現  $\overline{PA} > \overline{PQ}$ 。



4. 直線 L 與直線 M 垂直，記為  $L \perp M$ 。

### 錯誤類型

1. 有些學生誤以為直線有中垂線。
2. 有些學生誤以為直線有中點。
3. 有些學生誤以為線段的垂線只有一條。

<b>S-7-4 垂直：線對稱的性質：</b> 對稱線段等長；對稱角相等；對稱點的連線段會被對稱軸垂直平分。
--

s-IV-5
--------

先備：S-5-4。

連結：S-7-1、S-7-3、S-7-5。

後續：S-8-1、S-8-3、S-8-4。

### 基本說明

1. 以生活中的平面圖形為例，來理解線對稱的意義。
2. 認識對稱軸、對稱點、對稱線(段)及對稱角。理解對稱圖形中，對稱線段等長、對稱角相等。
3. 線對稱圖形中，兩個對稱點之連線段會被對稱軸垂直平分。

### 條目範圍

1. 以平面圖形為例，僅透過對摺重疊判斷圖形對稱。
2. 透過對摺驗證說明對稱線段與對稱角相等。

### 釋例

1. 透過對摺重疊找到線對稱圖形的對稱軸，重疊的點稱為對稱點，重疊的角稱為對稱角，重疊的邊稱為對稱邊。
2. 所有線段均為線對稱圖形：將一線段的兩端點對摺重疊，產生的摺痕為對稱軸；對稱軸必經過該線段的中點，並且兩對稱角重疊；透過平角 180 度以及兩角相等，可得其中一角為 90 度，必垂直。
3. 平面圖形中的各種三角形、矩形、正方形、菱形、平行四邊形、梯形、箏形、圓形...等，均可以透過對摺驗證是否為線對稱圖形。

### 錯誤類型

1. 學生易誤認平行四邊形是線對稱圖形。
2. 學生易誤認矩形的對角線是對稱軸。
3. 學生易誤認對稱圖形的對稱軸只有一條。

### 探索

可以透過對摺與剪紙活動的展開圖延伸學生掌握鏡射的概念。

<b>S-7-5 線對稱的基本圖形：</b> 等腰三角形；正方形；菱形；箏形；正多邊形。
--

s-IV-5
--------

連結：S-7-1、S-7-3、S-7-4。

後續：S-8-4~ S-8-12。

### 基本說明

1. 理解等腰三角形的對稱軸是底邊的中垂線，且此中垂線過三角形的頂點，並了解兩底角

相等。

2. 理解正三角形有三條對稱軸，分別是三邊的中垂線，並了解三個內角都相等。
3. 理解正方形有四條對稱軸，並了解四邊都等長與四個角都是直角。
4. 理解菱形是線對稱圖形，兩條對角線均為對稱軸，並了解四邊都等長。
5. 理解箏形有一條對稱軸，並了解兩組鄰邊等長。
6. 理解正多邊形為線對稱圖形，並了解所有邊長都相等，每個內角都相等。

### 條目範圍

不談圖形的包含關係。

### 釋例

1. 透過對摺可以了解等腰三角形的對稱軸是底邊的中垂線，且此中垂線過三角形的頂點，並了解兩底角相等。同理透過對摺，發現正三角形三個內角都相等。
2. 透過摺紙發現正方形 4 條對稱軸的位置，以及箏形 1 條對稱軸的位置。

### 錯誤類型

1. 學生容易將邊長都等長的多邊形誤為正多邊形。
2. 學生容易將內角都相等的多邊形誤為正多邊形。

### 評量

不出現圖形包含關係的試題。

<b>G-7-1 平面直角坐標系：</b> 以平面直角坐標系、方位距離標定位置；平面直角坐標系及其相關術語（縱軸、橫軸、象限）。
--

g-IV-1
--------

先備：S-6-2。

連結：N-7-5、A-7-6。

後續：G-8-1。

### 基本說明

1. 能運用直角坐標來標定位置，並能在直角坐標系上描出已知坐標對應的點。
2. 熟悉縱軸(y軸)、橫軸(x軸)和象限之術語、直角坐標系上坐標的定義。
3. 能了解四個象限上的符號規則，例如：第一象限為(+,+)，第二象限為(-,+)，第三象限為(-,-)，第四象限為(+,-)。
4. 能運用方位距離來標定位置。

### 條目範圍

方位只涉及東、西、南、北等四個方位。

### 釋例

1. 選定班上某一橫排為x軸，某一縱排為y軸，利用直角坐標系標定教室中的座位坐標。
2. 以原點為起點，向右走 3 單位，向下走 4 單位，其坐標為(3,-4)。
3. 能了解語詞「颱風中心位置位於恆春東方 100 公里處」的意義。

### 錯誤類型

1. 學生可能會混淆直角坐標系(x,y)和(y,x)的位置。
2. 點在第一象限，學生可能會誤認為與x軸的距離就是其x坐標，與y軸的距離就是其y坐標。當點在其他象限時，可能會有正負號的混淆。
3. 學生可能會混淆東西南北的相對關係。
4. 學生可能誤認為象限含有坐標軸。

**A-7-1 代數符號：**代數符號；以代數符號表徵交換律、分配律、結合律；一次式的化簡及同類項；以符號紀錄生活中的情境問題。

a-IV-1

先備：R-6-1。

連結：A-7-2、N-7-4、G-7-1。

後續：A-8-1、A-8-2。

### 基本說明

1. 理解利用  $a, b, c, \dots, x, y, z$  等符號代表一個數或一個未知數，以及數和符號構成算式的意義。
2. 理解代數算式裡符號的約定。

(1) 「 $\cdot$ 」可記成「 $\times$ 」，亦可省略，因此  $2 \cdot a$ 、 $2 \times a$ 、及  $2a$  意義皆相同。又如， $3 \cdot a \cdot b$  可簡寫成  $3ab$ 。

(2)  $1 \cdot a$ 、 $(-1) \cdot a$ 、及  $(-2) \cdot a$  分別簡寫成  $a$ 、 $-a$ 、及  $-2a$ 。

(3)  $2a$  的含義為「2個  $a$ 」或「 $a$  的2倍」。

(4) 符號及分式的等式： $\frac{4}{7}x = \frac{4x}{7}$ ，其中  $\frac{4}{7}x$  含義為  $\frac{4}{7} \times x$ ，而  $\frac{4x}{7}$  則為  $4 \cdot x \div 7$ 。又如

$$-\frac{4}{7}x = \frac{4x}{-7} = \frac{-4x}{7}。$$

3. 對一次算式中的同類項進行化簡及合併：

(1) 假設組成代數式的每一項皆為一個數或是一個數跟一個未知數的乘積，我們稱此代數式為一「一次式」，例如  $x+2y-1$ 、 $z-3$ 、 $x+1+3y-2x+y+3$  皆為一次式。

(2) 在一次式裡，假設有兩項其所含未知數為同一個未知數，或是皆不含未知數（亦即其皆為數），我們稱此兩項為「同類項」。例如，在  $x+1+3y-2x+y+3$  中  $x$  及  $-2x$  為同類項、 $3y$  及  $y$  為同類項、 $1$  跟  $3$  為同類項。

(3) 一次式裡同類項可合併以簡化運算。例如， $x+1+3y-2x+y+3$  中的  $x$  及  $-2x$  合併為  $-x$ 、 $3y$  及  $y$  合併為  $4y$ 、 $1$  跟  $3$  合併為  $4$ 。因此  $x+1+3y-2x+y+3$  化簡成  $-x+4y+4$ 。

4. 利用代數符號表徵數學中常見的運算規律。

(1) 交換律： $a+b=b+a$  及  $a \cdot b=b \cdot a$ 。

(2) 結合律： $a+(b+c)=(a+b)+c$  及  $a \cdot (b \cdot c)=(a \cdot b) \cdot c$ 。

(3) 分配律： $a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c$  及  $(a+b) \cdot c=a \cdot c+b \cdot c$ 。

5. 能用代數算式紀錄生活情境中的數學問題。

### 條目範圍

1. 對七年級學生而言，用符號代表數是相對抽象的過程，需要時間去理解及適應。因此在本條目範圍內，應避免引進過多代數術語及名詞。本條目的重點在於讓學生理解代數符號及其形成的算式的意義。

2. 本條目只做一次式的化簡，不涉及二次式以上（含二次）的運算。

### 釋例

1. 可先複習小學已學的代數知識。例如：已知小臻的哥哥比小臻大3歲，那麼當小臻  $x$  歲時，小臻的哥哥為  $x+3$  歲。反之，當小臻的哥哥為  $y$  歲時，則小臻為  $y-3$  歲。

2. 學生初學代數式化簡時，數字不宜過於複雜。適當的例子如： $2x+3-x-1$  化簡為  $x+2$ ，

$2x - y + 5x + 2y + 1$ 化簡為 $7x + y + 1$ 。

3. 假設一個長方形的長為5公分、寬為 $a$ 公分，那麼它的面積即為 $5a$ 平方公分。
4. 若有1000元鈔票 $x$ 張及500元鈔票 $y$ 張，可用 $1000x + 500y$ 代表總金額，因此當 $x = 3, y = 1$ 時，總金額為3500元，而當 $x = 1, y = 2$ 時，則總金額為2000元。

### 錯誤類型

1. 學生在利用分配律 $a(b+c) = ab+ac$ 化簡代數式時，可能會忘記 $a$ 既要乘 $b$ ，也要乘 $c$ 。如化簡 $3(x+1) - 2x+1$ 時，可能會寫成

$$\begin{aligned} 3(x+1) - 2x+1 &= 3x+1 - 2x+1 \\ &= x+2 \end{aligned}$$

2. 部分學生在化簡 $3 - 2x + 7x$ 時，可能會寫成 $3 - 9x$ 。

3. 部分學生在化簡分式 $\frac{9x-3}{3}$ 時，可能會寫成 $3x-3$ 。

<b>A-7-2 一元一次方程式的意義：</b> 一元一次方程式及其解的意義；具體情境中列出一元一次方程式。	a-IV-2
--	--------

先備：R-5-3。

連結：A-7-1、A-7-3、A-7-4、A-7-5、A-7-6、A-7-7。

後續：F-8-1、F-8-2。

### 基本說明

1. 理解一元一次方程式及其解的意義：

- (1) 「方程式」指的是含有未知數的等式，「一元」指的是此方程式恰有一個未知數，而「一次」代表每當此未知數出現在方程式裡時，其次方數皆為一。換句話說，組成方程式的每一項皆為一個數或是一個數跟此未知數的乘積。

- (2) 若有一個實際的數值，使得當我們將一元一次方程式中的未知數替換成此一實際數值時，等式成立，我們便將此一實際數值稱做為此方程式的「解」。

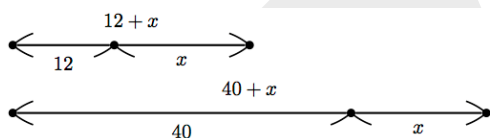
2. 能由具體情境中列出一元一次方程式。

### 條目範圍

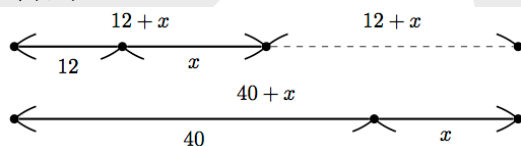
本條目只處理唯一解的情況，不考慮無解或無窮多個解的情況（高中十年級時再討論這些情況）。

### 釋例

1.  $3x+1=4x-2$ 為一元一次方程式，但 $3x+1-4x+2$ 及 $x+y-1=2x+1$ 則非一元一次方程式，其中 $3x+1-4x+2$ 不含等號，而 $x+y-1=2x+1$ 有兩個未知數，所以非一元一次方程式。
2. 考慮一元一次方程式 $3x+1=4x-2$ ，將式中所有 $x$ 代入3時等式成立，所以此方程式的解為 $x=3$ 。而將所有 $x$ 代入4時等式不成立，因此4不是此方程式之解。
3. 「老師帶兩盒一樣的口香糖，發給全班26個學生。每人發2條後，總共剩8條。假設一盒有 $x$ 條口香糖，試列出此 $x$ 滿足的一元一次方程式。」：一盒有 $x$ 條口香糖，所以兩盒共 $2x$ 條。26個學生一人發2條，共發出52條，所以剩 $2x-52$ 條。因此一元一次方程式為 $2x-52=8$ 。
4. 可適當的利用線段圖輔助思考。如「已知小桐今年12歲，小桐父親今年40歲。請問經過幾年後父親年齡為小桐年齡的兩倍？」在 $x$ 年後，小桐的年齡為 $12+x$ ，而父親的年齡為 $40+x$ ，用線段圖表示可得



其中第一條線段代表小桐的年齡，第二條線段代表父親的年齡。將代表小桐的線段延長一倍，得到



若父親的年齡為小桐的兩倍，則第一條線段（含虛線部分）總長等於第二條線段的長度，因此  $2(12 + x) = 40 + x$ 。

### 錯誤類型

將應用問題轉化成數學式子時的迷思概念，例如釋例中的(4)：「請問經過幾年後父親年齡為小桐年齡的兩倍？」，學生可能轉化為「 $40 + x = 12 \cdot 2$ 」。

<b>A-7-3 一元一次方程式的解法與應用：等量公理；移項法則；驗算；應用問題。</b>	a-IV-2
---	--------

連結：A-7-2、A-7-5、A-7-8。

後續：A-8-7。

### 基本說明

1. 能理解等量公理「等式左右同時加、減、乘、或除一數（除數不為0）時，等式仍然成立」的概念。亦即，若已知  $a = b$  成立，則  $a + c = b + c$ 、 $a - c = b - c$ 、 $a \cdot c = b \cdot c$ 、 $a \div c = b \div c$  ( $c \neq 0$ ) 等亦成立。
2. 等量公理為移項法則的基礎。學生需經由熟練等量公理來理解移項法則，並應用於一元一次方程式的解。
3. 應用一元一次方程式解的意義於驗算。
4. 能利用等量公理及移項法則等解決具體情境中的一元一次方程式問題。

### 條目範圍

不考慮無解或無窮多解的一元一次方程式。

### 釋例

1. 考慮一元一次方程式  $x + 2 = 3$ 。根據等量公理， $(x + 2) - 2 = 3 - 2$ 。化簡左式後得到  $x = 3 - 2$ 。觀察此推導過程，我們可以發現利用等量公理的結果，等同於將原式左邊的「+2」變成「-2」搬到右邊。又如方程式  $3x = 6$ ，根據等量公理， $\frac{1}{3} \cdot 3x = \frac{1}{3} \cdot 6 = \frac{6}{3}$ 。化簡左式後得到  $x = \frac{6}{3}$ 。觀察此推導過程，我們發現應用等量公理的結果，等同於將原式左邊的「3倍」變成「 $\div 3$ 」（或是說將「乘3」變成「乘 $\frac{1}{3}$ 」）搬到右邊而得到  $x = \frac{6}{3} = 2$ 。此類規則即為移項法則。
2. 協助學生養成寫答案時將未知數寫在等號左邊的習慣。
3. 一開始碰到未知數的移項時，可適當地將等量公理的細節列出。待學生習慣未知數的移項後，細節即可省略。例：解  $-x + 8 = 3x + 4$ 。

$$\begin{aligned}
 & -x + 8 = 3x + 4 \\
 & (-x + 8) + x = (3x + 4) + x && \text{根據等量公理，左右同加 } x，\text{等式依舊成立：} \\
 & 8 = 4x + 4 && \text{化簡一次式得到：} \\
 & 4 = 4x && \text{利用移項法則將右式的 } +4 \text{ 變號移到左式：} \\
 & 4x = 4 \\
 & x = 1 && \text{利用等號的對稱性將未知數寫在等式的左邊：}
 \end{aligned}$$

4. 「老師帶兩盒一樣的口香糖，要發給全班 26 個學生。如果每人發 2 條後，總共剩 8 條，問每盒原來裝幾條口香糖？」假設原來每盒有  $x$  條，依題意可列出  $2x - 2 \times 26 = 8$ ，利用移項法則可解出  $x = 30$ 。(此時可將  $x = 30$  代入情境驗算。)

### 錯誤類型

- 假設簡化方程式時需要通分再移項，因為多了一個步驟，容易發生疏漏。如將方程式  $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 1$  兩邊同乘 6 時，誤寫成  $6(\frac{x}{2} + \frac{x}{3}) = 1$ 。
- 假設方程式為  $3x - 6 = 9$ ，部分學生可能會將「左右同時乘以  $\frac{1}{3}$ 」誤寫成  $\frac{1}{3} \times 3x - 6 = \frac{1}{3} \times 9$ ，而得到  $x - 6 = 3$ 。又或是在做「左右同時除以 3」時列式列對  $\frac{3x - 6}{3} = \frac{9}{3}$ ，但化簡時，將左式錯誤化簡成  $x - 6$ 。為了避免類似的錯誤，老師可提醒學生在解一元一次方程式時，最好先用移項法則將所有含未知數的項移至等號的一側，而所有未含未知數的項移至等式的另一側，使得等式兩側各只有一項，再用乘除的移項法則解出未知數。

<p><b>A-7-4 二元一次聯立方程式的意義：</b>二元一次方程式及其解的意義；具體情境中列出二元一次方程式；二元一次聯立方程式及其解的意義；具體情境中列出二元一次聯立方程式。</p>	<p>a-IV-4</p>
---	---------------

連結：A-7-2、A-7-5、A-7-6。

### 基本說明

- 理解二元一次方程式及其解的意義：
  - 「二元」指的是此方程式有兩個未知數，「一次」指的是這此方程式每一項皆為一個數或是一個數和一個未知數的乘積。
  - 假設  $a$  跟  $b$  是兩個數，使得當二元一次方程式裡的未知數  $x$  及未知數  $y$  用  $a$  跟  $b$  分別代入時，等式成立，我們便稱  $(a, b)$  是此二元一次方程式的一組解。
- 能由具體情境中列出二元一次方程式。
- 能理解二元一次聯立方程式及其解的意義：
  - 二元一次聯立方程式指的是由兩個二元一次方程式組成的一組方程式。如  $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ 。
  - 若  $(a, b)$  代入一個二元一次聯立方程式後，兩個等號都成立，我們便稱  $(a, b)$  為此二元一次聯立方程式的解。
- 能由具體情境列出二元一次聯立方程式。

### 條目範圍

介紹二元一次聯立方程式時，不考慮無解或無窮多解的情況（此部份留至高中十年級時再討論）。



## 釋例

1. 考慮  $xy+1=3x$ ，雖然  $xy$  項中  $x$  及  $y$  次方數皆為一，但這並非一個二元一次方程式。在一個二元一次方程式裡，每一項只能是一個數或是一個數跟一個未知數的乘積。又如  $x+\frac{1}{y}=3$  亦非一個二元一次方程式，因為不是所有未知數的次方數皆為一。
2. 二元一次方程式可以有很多解，例如考慮二元一次方程式  $x+2y=8$ ，將  $x=2, y=3$  代入時等式成立，所以  $(2,3)$  是方程式的一個解。同理， $(4,2)$  及  $(-2,5)$  皆為方程式的解。
3. 「小桐有 60 元，要全部拿來買郵票，郵票分面額 10 元及 5 元兩種，若設共購買 10 元郵票  $x$  張及 5 元郵票  $y$  張，試列出  $x$  及  $y$  滿足之二元一次方程式。」依題意，小桐欲購買價值 60 元的郵票，而購買 10 元郵票  $x$  張及 5 元郵票  $y$  張共需  $10x+5y$  元，所以  $10x+5y=60$ 。
4. 「已知小璿有十元及五元硬幣共 10 枚，總值 80 元。令  $x$  及  $y$  分別為小璿十元硬幣數及五元硬幣數，試列出  $x$  及  $y$  滿足的二元一次聯立方程式。」依題意可得

$$\begin{cases} x+y=10 \\ 10x+5y=80 \end{cases}$$

## 評量

二元一次聯立方程式的題型不宜過度延伸。例如

$$\begin{cases} x+\frac{1}{y}=2 \\ x+\frac{2}{y}=3 \end{cases}$$

雖然我們可令  $z=\frac{1}{y}$ ，使其變成標準的二元一次聯立方程式，但初學二元一次聯立方程式應著重於其本質，不宜過度延伸，造成學習上的失焦。

<b>A-7-5 二元一次聯立方程式的解法與應用：</b> 代入消去法；加減消去法；應用問題。	a-IV-4
---	--------

連結：A-7-3、A-7-4。

## 基本說明

1. 能利用代入消去法解二元一次聯立方程式。
2. 能利用加減消去法解二元一次聯立方程式。
3. 能從具體情境裡列出二元一次聯立方程式，求其解，並驗證答案的合理性。

## 條目範圍

1. 僅考慮方程式個數及未知數個數皆為二的情況。
2. 不考慮無解或無窮多解的情況。

## 釋例

1. 在解二元一次聯立方程式時，可利用其中一個方程式將一個未知數用另一個未知數的代數式來表示，再將此表示式代入另一個方程式而得到一個一元一次方程式，進而解出其中一個未知數的值。此作法稱為「代入消去法」。例：

$$\begin{cases} x+y=1 & \text{①} \\ x+2y=3 & \text{②} \end{cases}$$

由①式可得  $x=1-y$ ，代入②式後得到  $(1-y)+2y=3$ ，由此解得  $y=2$ ，進而解出  $x=-1$ 。

(此時可代入檢查 $(-1, 2)$ 是否的確為兩個方程式的共同解。)

2. 在解二元一次聯立方程式時，可將兩個方程式各乘一個非零常數，使得其中一個未知數在兩式的係數相同（或互為相反數）。相減（或相加）之後即得一個另一未知數的一元一次方程式，進而求出聯立方程式的解，此作法稱為「加減消去法」。例：

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 & \text{①} \\ 3x + 4y = 2 & \text{②} \end{cases}$$

將①式乘以3、②式乘以2得到

$$\begin{cases} 6x + 9y = 3 & \text{③} \\ 6x + 8y = 4 & \text{④} \end{cases}$$

再將③式及④式相減，即得 $y = -1$ 。（這事實上是一個等量公理的應用。）將此值代入①式後得到 $2x + 3(-1) = 1$ 。由此解出 $x = 2$ 。

3. 「七年二班共有學生28人，已知男生比女生多4人，問男生、女生各多少人？」

作法一：假設男生有 $x$ 人，女生有 $y$ 人，依題意得到 $\begin{cases} x + y = 28 \\ x - y = 4 \end{cases}$ 。藉由代入消去法或加減消

去法可解出 $x = 16, y = 12$ 。

作法二：假設男生有 $x$ 人。因為女生比男生少4人，所以女生有 $x - 4$ 人。男女生共28人，所以 $x + (x - 4) = 28$ ，由此解出 $x = 16$ 。

注意到作法二本質上即為代入消去法（即將一個未知數用另一個未知數的代數式來表示，在這邊我們將女生人數用男生人數的代數式來表示）。

<b>A-7-6 二元一次聯立方程式的幾何意義：</b> $ax + by = c$ 的圖形； $y = c$ 的圖形（水平線）； $x = c$ 的圖形（鉛垂線）；二元一次聯立方程式的解只處理相交且只有一個交點的情況。	g-IV-2 a-IV-4
--	------------------

連結：A-7-4。

後續：F-8-2。

### 基本說明

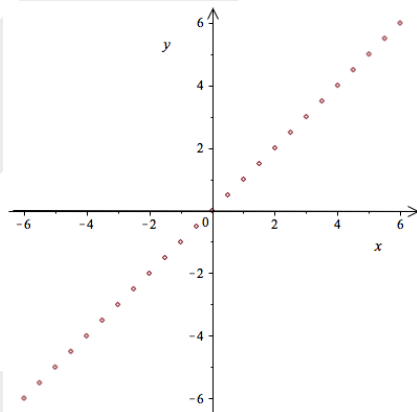
1. 能在直角坐標平面上描繪二元一次方程式的圖形：在直角坐標平面上，以描繪多個已知點的方式來描繪二元一次方程式 $ax + by = c$ 的圖形，並觀察其圖形成一直線的現象。更進一步，可發現只要找到 $ax + by = c$ 的兩個解，那麼過這兩點的直線即為 $ax + by = c$ 的圖形。
2.  $y = c$ 的圖形為水平線，而 $x = c$ 的圖形為鉛垂線。
3. 能理解二元一次聯立方程式及其解的幾何意義：二元一次聯立方程式裡的兩個二元一次方程式對應到直角坐標平面上的兩條直線，此時二元一次聯立方程式的解即為這兩條直線的交點坐標。

### 條目範圍

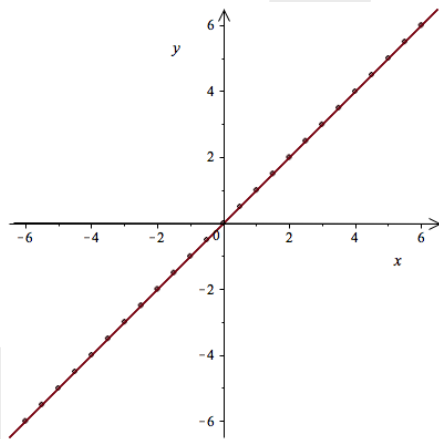
在國中階段僅處理二元一次聯立方程式恰有一個解的情況，其餘情況在高中 G-10-2 再處理。

### 釋例

1. 考慮二元一次方程式 $x - y = 0$ ，顯然對任意數 $k$ ， $(k, k)$ 皆為方程式的解。取若干個 $k$ 的值，在直角坐標系上標示對應的 $(k, k)$ ，如

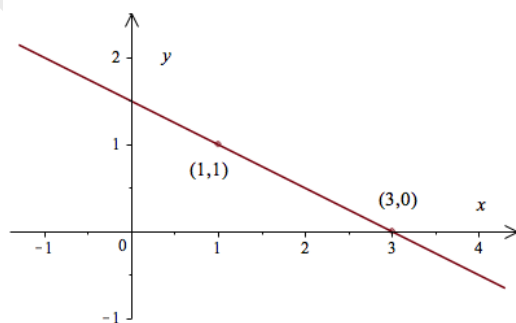


可發現這些點落在一直線上。將過這些點的直線畫出來，即為此二元一次方程式的圖形，如

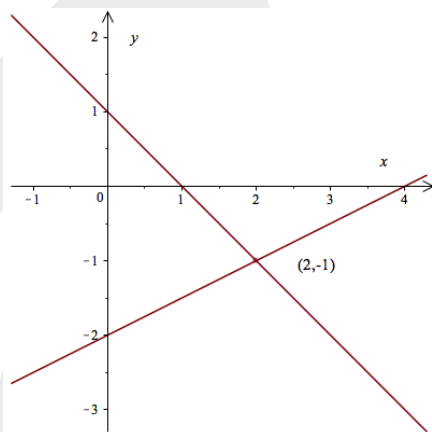


多舉幾個例子，使學生相信  $ax + by = c$  的圖形皆為一直線。

- 在熟知且明瞭二元一次方程式的圖形為一直線之後，我們可以利用「兩點唯一決定一直線」的性質，簡化繪圖過程：因為兩點決定一直線，我們只需找到二元一次方程式的兩個解，在直角坐標系上找出對應的兩點，並過此兩點做一直線，此直線即為此方程式的圖形。如考慮二元一次方程式  $x + 2y = 3$ ，我們可以輕易地找到兩個解  $(3, 0)$  及  $(1, 1)$ ，過這兩點做一直線，此直線即為方程式的圖形。



- 考慮二元一次方程式  $x = c$ （視為  $x + 0y = c$  的簡化），如果  $(a, b)$  是此方程式的解，顯然  $a$  必須等於  $c$ ，而  $b$  可以是任意數。將直角坐標系中所有  $x$ -坐標為  $c$  的點描出來，可以發現是一條鉛垂線。同理， $y = c$ （視為  $0x + y = c$  的簡化）的圖形會是一條水平線。
- 考慮二元一次聯立方程式  $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$ ，在直角坐標系畫出對應的兩條直線，



發現兩直線交於(2, -1)，恰為此聯立方程式的解。(直線上的每一點對應到二元一次方程式的一個解，所以兩條直線的交點為二元一次聯立方程式的解。)

**A-7-7 一元一次不等式的意義：**不等式的意義；具體情境中列出一元一次不等式。

a-IV-3

連結：A-7-2、A-7-8。

### 基本說明

1. 能理解不等式的意義以及口語上約定，例如「未滿」及「不足」等意指「 $<$ 」，而「不超過」及「至多」等意指「 $\leq$ 」。
2. 符號  $a \leq b$  代表「 $a < b$ 」或「 $a = b$ 」，口語上可以說成「 $a$  小於或等於  $b$ 」或「 $a$  不大於  $b$ 」。同理，符號  $a \geq b$  代表「 $a > b$ 」或「 $a = b$ 」，口語上可以說成「 $a$  大於或等於  $b$ 」或「 $a$  不小於  $b$ 」。
3. 能理解不等式的遞移律，即若  $a < b$  且  $b < c$ ，則  $a < c$ ，以及其他類似規則。
4. 「一元一次不等式」指的是不等式中恰有一個未知數，而此未知數的次方數為1。
5. 能由具體情境中列出簡單的一元一次不等式。(所謂的簡單的一元一次不等式指的是形式為  $ax + b \leq c$ 、 $ax + b < c$ 、 $dx + e \geq f$ 、或  $dx + e > f$  的不等式。)

### 條目範圍

不涉及有兩個不等號的一元一次不等式，如  $3 \leq 5x + 2 \leq 9$ 。

### 釋例

1. 「從台北坐高鐵到高雄至少要一小時半。」用不等式的符號來表示，可寫成「令  $a$  為從台北坐高鐵到高雄所需小時數，則  $a \geq 1.5$ 」。語意上，這邊「 $a \geq 1.5$ 」表示「 $a$  是一個大於或等於 1.5 的數」。
2. 「小穎帶了 200 元到水果行買蘋果，蘋果一顆 25 元，但因小穎忘記攜帶環保購物袋，另需花 2 元購買一個塑膠袋。假設小穎最後購買的蘋果數為  $x$ ，試列出  $x$  滿足的一元一次不等式。」蘋果一顆 25 元，買  $x$  顆需花  $25x$  元，另外需花 2 元購買一個塑膠袋，因此共花費  $25x + 2$  元。花費不能超過攜帶的現金，因此  $25x + 2 \leq 200$ 。

**A-7-8 一元一次不等式的解與應用：**單一的一元一次不等式的解；在數線上標示解的範圍；應用問題。

a-IV-3

連結：A-7-3、A-7-7。

### 基本說明

1. 若  $a$  是一個數，使得當一個一元一次不等式中的未知數代入  $a$  時不等式成立，我們便稱  $a$

為此不等式的一個解。

## 2. 理解不等式的運算性質：

- (1) 在不等式左右同加一數或同減一數，不等式仍然成立。
- (2) 在不等式左右同乘一正數或同除一正數，不等號方向不變。
- (3) 在不等式左右同乘一負數或同除一負數，則不等號方向改變。

3. 能利用上述不等式的運算性質解單一的一元一次不等式。

4. 能在數線上標出一元一次不等式解的範圍。

5. 能利用一元一次不等式解應用問題。

## 條目範圍

1. 不處理牽涉到兩個不等號的一元一次不等式，如  $3 \leq 2x - 1 \leq 5$ 。

2. 不去解類似  $2x + 1 < 2x + 3$  或  $2x + 1 \geq 2x + 3$  的一元一次不等式（即化簡後沒有未知數的不等式）。

## 釋例

1. 用多個例子使學生發現「在不等式左右同乘一正數或同除一正數，不等號方向不變。在不等式左右同乘一負數或同除一負數，則不等號方向改變。」

教師若要證明，可依下述處理：假設  $a$  跟  $b$  之間的大小關係為  $a > b$ ，移項可推得

$a - b > 0$ ，亦或是說  $a - b$  為一個正數。

(1) 假設  $c$  為一個正數，則  $c(a - b)$  亦為正數，或是說  $c(a - b) > 0$ 。左式用分配率展開得  $ca - cb > 0$ ，再移項得到  $ca > cb$ 。

(2) 假設  $c$  為一個負數，則  $c(a - b)$  為一負數，或是說  $c(a - b) < 0$ 。左式用分配率展開得  $ca - cb < 0$ ，再移項得到  $ca < cb$ 。

由以上討論我們得到一個結論：在不等式左右同乘一正數（或同除一正數），不等號方向不變；在不等式左右同乘一負數（或同除一負數），則不等號方向改變。（也有其他方法，如畫數線，考慮比值等。）

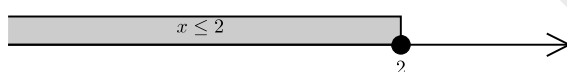
2. 考慮一元一次不等式  $3x - 1 \leq 5$ 。不等式兩側同加1，不等式仍然成立，因此  $3x - 1 + 1 \leq 5 + 1$ ，化簡得到  $3x \leq 6$ 。再將不等式兩側同乘  $\frac{1}{3}$ ，因為  $\frac{1}{3}$  是一個正數，不等號方向不變，所以  $\frac{1}{3} \times 3x \leq \frac{1}{3} \times 6$ ，化簡得到  $x \leq 2$ ，即為其解。

3. 考慮一元一次不等式  $-3x < 6$ 。將不等式兩側同乘  $-\frac{1}{3}$ ，因為  $-\frac{1}{3}$  是一個負數，不等號方向改變，所以  $(-\frac{1}{3}) \times (-3x) > (-\frac{1}{3}) \times 6$ ，化簡得到  $x > -2$ ，即為其解。

4. 考慮一元一次不等式  $3x - 1 \leq 5$ ，由釋例(2)可知解為  $x \leq 2$ 。在數線上，在2左方的點皆為小於2的數，而在2右方的點皆為大於2的數，因此  $3x - 1 \leq 5$  的解在數線上的範圍為



或以斜線（或陰影）示意

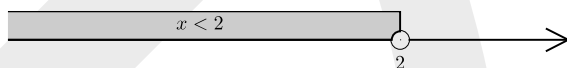


（習慣上，若解的範圍包含端點，我們會用實心點標出端點。）

5. 考慮一元一次不等式  $3x - 1 < 5$ ，解為  $x < 2$ ，其在數線上的範圍為



或以斜線（或陰影）示意



（習慣上，若解的範圍不包含端點，我們會用空心點標出端點。）

6. 「小穎帶了 200 元到水果行買蘋果，蘋果一顆 25 元，但因小穎忘記攜帶環保購物袋，另需花 2 元購買一個塑膠袋。試問小穎最多可購買幾顆蘋果？」假設小穎共購買  $x$  顆蘋果，則  $x$  滿足  $25x + 2 \leq 200$ 。此一元一次方程式的解為  $x \leq \frac{198}{25} = 7.92$ 。但這裏的  $x$  必須是整數，因此小穎最多可以買 7 顆蘋果。

### 錯誤類型

1. 部份學生常會忘記「不等式兩側同乘一負數，不等號方向改變」。
2. 部份學生在看到一個未知數時，心理上會覺得那代表一個正數（這或許是因為小學階段碰到的數都是正數），而犯下類似  $5 > 3 \Rightarrow 5x > 3x$  的錯誤。
3. 部份學生會誤認  $x > 2$  的解只包含整數解，例如寫成  $x = 3, 4, 5, \dots$ 。

<p><b>D-7-1 統計圖表：</b>蒐集生活中常見的數據資料，整理並繪製成含有原始資料或百分率的統計圖表：直方圖、長條圖、圓形圖、折線圖、列聯表。遇到複雜數據時可使用計算機輔助，教師可使用電腦應用軟體演示教授。</p>	<p>d-IV-1 n-IV-9</p>
--	--------------------------

先備：D-6-1。

連結：D-7-2。

後續：D-8-1。

### 基本說明

1. 學生應循序漸進，在非分組的情況，學習各種統計圖表之製作，並計算各種統計指標，等觀念清楚後，再學習分組的處理方式，並知道分組的使用時機。
2. 統計學中，條形圖分為長條圖、直方圖兩大類。長條圖適合用於表現離散的資料，因此各長條以適當的距離間隔來表現資料的離散性；直方圖則適合用於表現連續的資料，因此各長條間並無間隔，且資料應依序排列。
3. 國中階段統計的教學宜以有序且具連續性的資料為主，統計圖形則以直方圖、或折線圖為主。
4. 複雜數據時，學生可使用計算機輔助。當教學設備允許時，可使用電腦應用軟體輔助學習。

### 條目範圍

以生活中常見的數據資料為主。

### 釋例

1. 教師可選擇生活中常見的數據資料，要求學生從資料的蒐集、分類與整理、選擇適合的統計圖表與繪圖，統整性的學習整個概念。
2. 處理百分率的統計圖表時，因取近似值緣故，可能產生總和不等於 100% 的情況。

### 錯誤類型

學生可能選擇不適當的統計圖，例如：不具順序或不具連續性的資料，統計圖卻選擇以直方圖、或折線圖呈現。

### 探索

1. 生活中常見的數據資料，可搭配性別平等、人權、環境、與海洋等四大議題。
2. 處理百分率的統計圖表時，因取近似值緣故，可能產生總和不等於 100% 的情況，若要將各部分所占比率作調整使其總和等於 100%，常用的調整方法有 large remainder method 和 highest average method，可作為延伸學習活動。

**D-7-2 統計數據：**用平均數、中位數與眾數描述一組資料的特性；使用計算機的「M+」或「Σ」鍵計算平均數。

n-IV-9  
d-IV-1

先備：D-6-1。

連結：D-7-1。

後續：D-8-1。

### 基本說明

1. 平均數、中位數與眾數均可以某種程度地表示整筆資料集中的位置。平均數是指所有資料值的總和除以總次數；中位數是將資料排序後，前後各切成一半的中間位置資料值；眾數是次數最高的一個或一組資料值。平均數、中位數會使落在兩邊的資料呈現出某種「平衡」狀態。平均數是量的平衡，中位數則是個數的平衡，而眾數是落在出現次數最高的位置，與平均數、中位數有差別。
2. 將幾份同類資料合併時，其總和等於各份資料的平均數乘以各份次數的加總。必要時，可使用計算機的「M+」或「Σ」鍵來輔助計算。

### 條目範圍

本條目旨在學生了解統計圖表的意義與使用，勿作過度延伸。例如：教學與評量不適合出現「給定平均數及次數，反求此組資料中某一未知的數」的問題。

### 釋例

1. 給定一組資料，教師可先提問「能否使用一個數來描述此一組資料的集中位置」，之後再進行平均數、中位數、眾數的教學。
2. 平均數對於資料中有特別大或特別小的數特別敏感，中位數則不受影響。以  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  和  $\{1, 2, 3, 4, 500\}$  兩組資料為例，第一組的平均數、中位數均相同，但第二組的中位數不變，平均數則為 102。

### 錯誤類型

誤認為任何資料中平均數和中位數都必定很接近，甚至相等。

### 探索

加權平均數。

**N-8-1 二次方根：**二次方根的意義；根式的化簡及四則運算。  
(補充說明) 可使用乘法公式來化簡的根式，待乘法公式單元再提及。

n-IV-5

先備：N-7-6、N-7-7

連結：N-8-2、S-8-6、G-8-1

後續：S-9-6、N-10-1、N-10-3、G-10-2

### 基本說明

1. 設  $a$  為一個非負的數，若一數  $b$  滿足  $b^2 = a$ ，則稱  $b$  為  $a$  的二次方根或平方根。

2.  $a > 0$ ， $\sqrt{a}$  稱為  $a$  的二次方根，或稱為(正)平方根，即  $(\sqrt{a})^2 = a$ ，讀為根號  $a$ ；0 的平

方根是 0。在國中階段只討論非負有理數的平方根。

3. 根式的化簡是指每一項中只有分子含有根號，且根號中的正整數不含有完全平方數的因數。

4. 根式的四則運算包含整數、分數及根式間的運算，並且化簡之。

當  $a > 0$ ， $b > 0$  時，則

$$(1) \sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}。$$

$$(2) \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}。$$

$$(3) \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}。$$

5. 能比較含有根號的數之大小。

### 條目範圍

1. 化簡後的最簡根式以不超過兩個根式為主。例如：不宜出現  $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$  的結果。

2. 不涉及出現  $\sqrt{a^2} = |a|$  的結論。

### 釋例

1.  $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$ ...等這些開根號的數對學生來講是新的數，因此引進學習  $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$  的動機，對學生能學好這些新的數是非常重要的。從數學史來講，發現  $\sqrt{2}$  不是分數也是一件很重大的事情。因此，教材的編寫應有這方面的適當說明。

2. 能用畢氏定理或正方形的面積邊長關係等不同方式來理解： $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$ ...等開根號數的意義。

3.  $\pm\sqrt{3}$  皆為 3 的平方根，其中  $\sqrt{3}$  為 3 的正平方根， $-\sqrt{3}$  為 3 的負平方根。

4. 能用畢氏定理或正方形的面積與邊長關係等不同方式來理解：

當  $a > b > 0$  時， $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ 。

5. 能熟練正有理數的二次方根計算，例如：

$$(1) \sqrt{169} = 13。$$

$$(2) \sqrt{256} = \sqrt{2^8} = \sqrt{(2^4)^2} = 2^4。$$



(3)  $\sqrt{75} = \sqrt{5^2 \times 3} = 5\sqrt{3}$ 。

(4)  $\sqrt{\frac{9}{4}} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}$ 。

(5)  $\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 。

6. 利用乘法公式  $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$  化簡  $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ 。

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2})^2 - 1^2} = \sqrt{2}+1。$$

7. 求解  $3\sqrt{8} \cdot x = 2\sqrt{3}$ ，得  $x = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{8}} = \frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{3\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$ 。

8. 計算並化簡  $\sqrt{16} + \sqrt{100} - \sqrt{25} - \sqrt{\frac{1}{9}}$ 。

### 錯誤類型

1. 根式和二次方根觀念的混淆，例如：學生可能將  $\sqrt{4}$  誤解為  $\sqrt{4} = \pm 2$ 。
2. 在根式的四則運算中，未將根式化至最簡，產生同類項不能完全合併的情形。

例如：出現  $\sqrt{8} + \sqrt{2} - 1$  的答案。

3. 學生可能出現  $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{2+3} = \sqrt{5}$ 、 $2\sqrt{3} = \sqrt{2 \times 3} = \sqrt{6}$  等的錯誤概念。

4. 乘法公式的誤用可能產生的迷思概念，

例如：

(1)  $(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{3} - \sqrt{5}) = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2 = 5 - 3 = 2$ ，

正確答案應為  $(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2 = 3 - 5 = -2$ 。

(2)  $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 = 2 + 3 = 5$ ，

正確答案應為

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3 = 5 + 2\sqrt{6}。$$

### 評量

評量不宜只含綜合型的根式四則運算，其原因為難以鑑別學生學習的困難為何。

### 探索

在  $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$ ...等數的教學中，利用畢氏定理理解這些數可用尺規作圖方式得到。

**N-8-2 二次方根的近似值：**二次方根的近似值；二次方根的整數部分；十分逼近法。使用計算機「 $\sqrt{\quad}$ 」鍵。  
(補充說明) 二次方根的整數部分，可用幾何、十分逼近法、計算機求近似值。

n-IV-6  
n-IV-9

先備：N-7-6、N-7-7

連結：N-8-1、S-8-6、G-8-1

後續：N-10-1

### 基本說明

1. 能理解二次方根，如 $\sqrt{220}$ 的整數部分。
2. 熟悉使用計算機 $\sqrt{\quad}$ 鍵，建立對 $\sqrt{a}$ 數值的數感，其中 $a \geq 0$ 。
3. 除了 $a$ 是完全平方數之外，其餘計算機所計算出的 $\sqrt{a}$ 值皆為近似值。
4. 使用計算機 $\sqrt{\quad}$ 鍵，輔理解當 $a > b > 0$ 時，則 $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ 。
5. 以十分逼近法求得二次方根，如 $\sqrt{2}$ 的近似值，並可適時使用計算機輔助計算。

### 條目範圍

理解以十分逼近法求得二次方根的近似值，可適時使用計算機輔助計算，並正確估計至小數點後第一位為限。

### 釋例

1. 求 $\sqrt{220}$ 的整數部分。

因為 $14^2 = 196 < 220$ ，且 $15^2 = 225 > 220$ ，所以 $14 < \sqrt{220} < 15$ ，故 $\sqrt{220} = 14.\dots$ ，

即 $\sqrt{220}$ 的整數部分=14。

2. 以計算機求得 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{2.1}$ 、 $\sqrt{3.9}$ 、 $\sqrt{4}$ 的近似值，並歸納當 $a > b > 0$ 時， $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ 。
3. 在計算機的使用中，若輸入一個大於0的數，並連續按 $\sqrt{\quad}$ 鍵，其結果皆會逼近1。若此數大於1，則結果會漸減逼近1；若此數小於1，則結果會漸增逼近1。
4. 利用十分逼近法知道 $\sqrt{3}$ 的值介於1.7與1.8之間。

### 錯誤類型

1. 學生會有 $\sqrt{220}$ 的整數部分為220的迷思概念。

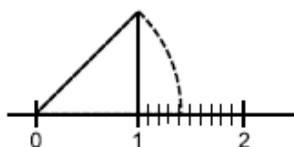
2. 學生會誤認為1.414為 $\sqrt{2}$ 的真正的值，也會誤認為以計算機操作 $\sqrt{2}$ 所得的也為真正的值。

### 評量

十分逼近法為求二次方根近似值的一種方法，目的為此方法的精神，故近似值正確估計至小數點後第一位為限。

### 探索

能以幾何方式理解 $1.4 < \sqrt{2} < 1.5$ ，例如：



**N-8-3 認識數列：**生活中常見的數列及其規律性（包括圖形的規律性）。

n-IV-7

先備：R-6-2、R-6-3

連結：N-8-4、N-8-6

後續：N-10-6

### 基本說明

1. 將數排成一列並以逗號分開，稱為數列。
2. 一數列的第一項(首項)通常記為 $a_1$ ，第二項記為 $a_2$ ，...，第 $n$ 項記為 $a_n$ 。若 $a_n$ 為此數列的最後一項，稱 $a_n$ 為此數列的末項。
3. 數列常見於高速公路里程標示、門牌號碼、計程車計費碼表等。從某些簡單、具規則的數列如：179，180，181，...和1，3，5，7，9，...等，學習數列的相關名詞，並理解其規則性。
4. 透過圖形的變化，找到圖形變化模式的規律，培養觀察與歸納的能力。

### 條目範圍

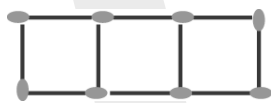
透過圖形的變化，主要為找到圖形變化模式的規律，不應出現以級數和求一般項，例如：不應出現求釋例(5)中的一般項。

### 釋例

1. 初期數列的觀察，宜以整數數列為主。

2. 由情境變化模式的規律性寫出其一般項的表示法。

例如:用火柴棒排正方形(如圖),排1個正方形要用4根火柴棒,排2個要用7根,排3個要用10根,則排 $n$ 個正方形要用\_\_\_\_\_根火柴棒。



設 $a_n$ 為排出 $n$ 個正方形的火柴棒個數,則

$$a_1 = 4, a_2 = 4 + 3, a_3 = 4 + 3 + 3 = 4 + 2 \times 3, a_4 = 4 + 3 + 3 + 3 = 4 + 3 \times 3, \dots,$$

$$a_n = 4 + (n - 1) \times 3,$$

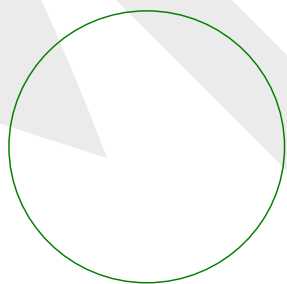
可得排 $n$ 個正方形要用 $a_n = 4 + (n - 1) \times 3 = 3n + 1$ 根。

3. 能以 $a_n$ 來代表數列一般項的符號表示法,例如:由奇數所形成的數列1、3、5、7...理

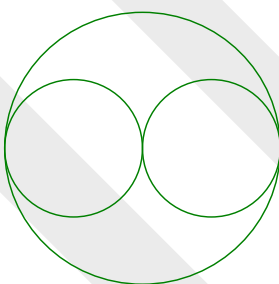
解 $a_n = 2n - 1$ 。

4. 設 $a_n = 1 - 2n$ ,可得 $a_5 = 1 - 2 \times 5 = -9$ 。

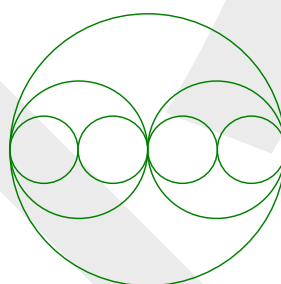
5.



圖一



圖二



圖三

.....

若圖一、圖二、圖三...中的圓形個數分別為 $a_1$ 、 $a_2$ 、 $a_3$ ,則依此圖形的規則性,

求出 $a_4$ 和 $a_5$ 的值。

$$a_1 = 1, a_2 = 1 + 2 = 3, a_3 = 1 + 2 + 4 = 7, a_4 = 1 + 2 + 4 + 8 = 15,$$

$$a_5 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 31。$$

此例中，若能找到 $a_4$ 和 $a_5$ 的值，顯示出學生已找到圖形變化的規則。因此不宜出現求如 $a_{10}$ 計算量龐大的數，更不應出現求一般項 $a_n$ 。

6. 學習須累積「由情境的問題轉化為一般項的表示法」的足夠經驗，才能進行以 $a_n$ 表示一般項的學習。

### 錯誤類型

1. 設 $a_n = 2n + 3$ ，則此數列是否有一項的值為3？

$2n + 3 = 3 \Rightarrow 2n = 0 \Rightarrow n = 0$ ，學生可能會回答「有，此時 $n = 0$ 」的迷思概念。

2. 學生在上述數列中，也可能會混淆「數值為5」和「第5項」的意義。

### 評量

- 觀察數列的規則性，求一般項 $a_n$ 時，宜以整數數列為主。
- 在數列或圖形的規則性觀察中，不宜出現太複雜的計算。

<p><b>N-8-4 等差數列：</b>等差數列；給定首項、公差計算等差數列的一般項。  <b>(補充說明)</b> 不涉及「已知等差數列不相鄰某兩項的值(不含首項)，反求首項、項數或公差」，例如：給定<math>a_5</math>和<math>a_9</math>的值，求首項和公差。</p>	n-IV-7
---	--------

先備：R-6-3

連結：N-8-3、N-8-5、N-8-6

後續：N-10-6

### 基本說明

- 若一個數列滿足 $a_{n+1} - a_n = d$  (定值)， $n = 1, 2, 3, \dots$ ，則稱此數列為一等差數列，且 $d$ 為其公差。
- 由等差數列的首項及公差，求得第 $n$ 項。也就是熟悉等差數列求第 $n$ 項的公式：

$$a_n = a_1 + (n - 1)d。$$

### 條目範圍

不涉及「已知等差數列不相鄰某兩項的值(不含首項)，反求首項、項數和公差」，例如：給定 $a_5$ 和 $a_9$ 的值，求首項和公差。

### 釋例

- 等差數列的教學重點在於為使學生觀察到數列中「後項－前項＝定值」的關係，  
例如：  
樣式一：1, 2, 3, 4, 5, …… ,  $n$   
樣式二：3, 6, 9, 12, 15, …… ,  $3n$   
樣式三：5, 8, 11, 14, 17, …… ,  $3n+2$   
樣式一有一規律：後一項都是前一項加1。  
樣式二與樣式三都有一規律：後一項都是前一項加3。  
樣式二與樣式一的關係為：樣式二的各項是樣式一的3倍。樣式三與樣式二的關係為：樣式三的各项比樣式二多2。如此，樣式三與樣式一的關係為：樣式三的各项是樣式一的3倍多2。
- 等差數列80, 77, 74…中，求首項，公差與第14項。  
 $a_1 = 80$ ，公差 =  $77 - 80 = -3$ ， $a_{14} = 80 + (14 - 1) \times (-3) = 41$ 。
- 已知一等差數列的首項為5，公差為-3，求-13是第幾項。
- 若 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 三數成等差，則稱 $b$ 為 $a$ 和 $c$ 的等差中項，且 $a + c = 2b$ 。  
例如：若三數成等差數列，等差中項為7，求三項的和。

### 錯誤類型

- 學生可能會誤將公差記為 $d = a_n - a_{n+1}$ 。例如：將等差數列1, 6, 11, 16, 21的公差算成 $d = 1 - 6 = -5$ 。
- 學生可能認為2, 6, 2, 6, 2, 6為等差數列，也可能認為2, 2, 2, 2不是等差數列。
- 學生可能記錯第 $n$ 項的公式，例如： $a_n = a_1 + nd$ 。

### 評量

主要評量要點如下：等差數列的意義、公差的意義、關係式 $a_n = a_1 + (n - 1)d$ 。

### 探索

- 探索等差數列 $a_m$ 和 $a_n$ 的關係。
- 等差數列中，若給定 $a_m$ 和 $a_n$ 的值，探討首項和公差為何。

**N-8-5 等差級數求和**：等差級數求和公式；生活中相關的問題。  
(補充說明) 不涉及「已知級數和反求首項、項數或公差」。

n-IV-8

連結：N-8-3、N-8-4

後續：N-10-6

### 基本說明

1. 設  $a_1, a_2, \dots, a_n$  為一等差數列，若將此等差數列的各項以「+」相加，則稱  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$  為等差級數。
2. 一等差數列的前  $n$  項和記為  $S_n$ ，即  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ 。
3. 等差級數  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$  的和  $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$  或  $S_n = \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2}$ ，其中  $d$  為公差，並比較兩者間應用的異同之處。

### 條目範圍

不涉及由聯立方程式解「僅由級數和反求首項和公差」等類似問題，例如：已知一等差數列的前10項和與前15項和的值，反求首項和公差。

### 釋例

1. 求等差級數  $-31 + (-29) + (-27) + \dots$  的前十一項之和。
2. 若首項為6的等差級數，已知前十項之和為285，求公差及第十項。
3. 若等差級數  $-1 + 0 + 1 + 2 + \dots + n = 152$ ，求  $n$ 。

$$\text{此級數共有 } n+2 \text{ 項， } S_n = \frac{(n+2)(-1+n)}{2} = 152$$

$$\Rightarrow n^2 + n - 306 = 0 \Rightarrow (n+18)(n-17) = 0 \Rightarrow n = 17 \text{ 或 } -18(\text{不合})$$

4. 快樂歌劇院共有22排座位，且自第二排開始，每一排比前一排多3個座位。已知第一排有10個座位，則快樂歌劇院共有幾個座位？

設第  $n$  排的座位有  $a_n$  個，則  $a_1, a_2, \dots, a_{22}$  為一首項  $a_1 = 10$ 、公差  $d = 3$  的等差數列。

$$\text{所以 } S_{22} = a_1 + a_2 + \dots + a_{22} = \frac{22[2 \times 10 + (22-1) \times 3]}{2} = 913,$$

即快樂歌劇院共有913個座位。

$$\text{或第 } 22 \text{ 排的座位 } a_{22} = 10 + (22-1) \cdot 3 = 73,$$

$$\text{所以 } S_{22} = a_1 + a_2 + \dots + a_{22} = \frac{22(10+73)}{2} = 913.$$

### 錯誤類型

求級數和時，對項數有迷思概念。例如：等差級數  $-1 + 0 + 1 + 2 + \dots + n$  中，學生可能將之誤認為總共有  $n$  項，事實上共有  $n+2$  項。

### 評量

1. 主要評量要點如下：由等差數列的首項、末項或首項、公差求得前 $n$ 項和 $S_n$ 。
2. 評量內容不涉及解聯立方程式，例如：給定 $S_{10}$ 和 $S_{35}$ 的值，反求首項和公差。

<p><b>N-8-6 等比數列：</b>等比數列；給定首項、公比計算等比數列的一般項。  <b>(補充說明)</b> 不處理「已知等比數列不相鄰某兩項的值(不含首項)，反求首項、項數或公比」，例如：給定<math>a_5</math>和<math>a_9</math>的值，求首項和公比。</p>	n-IV-7
---	--------

先備：R-6-3

連結：N-8-3、N-8-4

後續：N-10-6

### 基本說明

1. 若一個數列滿足 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$  (定值),  $n = 1, 2, 3, \dots$ , 則稱此數列為一等比數列, 且 $r$ 為其公比。
2. 由等比數列的首項及公比, 求得第 $n$ 項。也就是熟悉等比數列求第 $n$ 項的公式：

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}。$$

### 條目範圍

1. 觀察數列的一般項若為等比數列, 除了以10為底, 其指數可為0或負整數外, 其它形如 $a^n$ 的數, 其指數 $n$ 必須為正整數。
2. 不涉及「已知等比數列不相鄰某兩項的值(不含首項), 反求首項、項數和公比」, 例如：給定 $a_5$ 和 $a_9$ 的值, 求首項和公比。

### 釋例

1. 等比數列的教學重點在於為使學生觀察到數列中「後項 $\div$ 前項=定值」的關係, 例如：

樣式一：1, 2, 4, 8, 16, …… ,  $2^{n-1}$

樣式二：3, 6, 12, 24, 48, …… ,  $3 \cdot 2^{n-1}$

樣式一與樣式二有一規律：後一項都是前一項乘以2。

樣式二與樣式一的關係為：樣式二的各項是樣式一的3倍。

2. 等比數列1, -2, 4…中, 求公比與第10項。

$$a_1 = 1, \text{ 公比} = \frac{-2}{1} = -2, a_{10} = 1 \times (-2)^{10-1} = -512。$$



3. 已知一等比數列的首項為16，公比為 $\frac{3}{2}$ ，求81是第幾項。
4. 若不為0的三個數 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 成等比，則稱 $b$ 為 $a$ 和 $c$ 的等比中項，且 $a \cdot c = b^2$ 。
- 例如：若三數成等比數列，等比中項為-5，求三項之乘積。

### 評量

1. 主要評量要點如下：等比數列的意義、公比的意義、關係式 $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ 。
2. 評量內容不涉及「同時包含等差和等比」綜合概念的問題。

### 錯誤類型

1. 學生可能會誤將公比記為 $r = \frac{a_n}{a_{n+1}}$ 。例如：將等比數列81，27，9，3，1的公比算成 $r = \frac{81}{27} = 3$ 。
2. 學生可能記錯第 $n$ 項的公式，例如： $a_n = a_1 \cdot r^n$ 。
3. 學生可能認為2，6，2，6，2，6為等比數列，也可能認為2，-2，2，-2，2，-2不是等比數列。

<b>S-8-1 角：</b> 角的種類；兩個角的關係（互餘、互補、對頂角、同位角、內錯角、同側內角）；角平分線的意義。	s-IV-2
--	--------

先備：S-7-1，S-7-3

連結：S-8-2，S-8-3

後續：S-9-1，S-9-2，S-9-4，S-9-5

### 基本說明

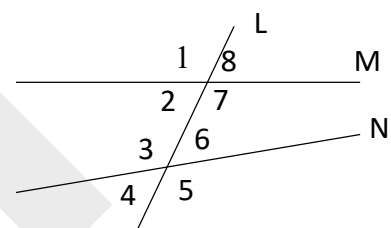
1. 認識角的種類：銳角(小於90度)、直角(等於90度)、鈍角(大於90度且小於180度)、平角(等於180度)、周角(等於360度)。
2. 認識兩個角的關係：若 $\angle A + \angle B = 90^\circ$ ，則稱兩角互餘， $\angle A$ 也稱為 $\angle B$ 的餘角；若 $\angle A + \angle B = 180^\circ$ ，則稱兩角互補， $\angle A$ 也稱為 $\angle B$ 的補角。
3. 在同一平面上，直線 $L$ 分別與直線 $M$ ， $N$ 交於兩個相異點，稱直線 $L$ 為直線 $M$ 與 $N$ 的截線。截線 $L$ 截過直線 $M$ ， $N$ 後形成八個角，這些角的關係如下

同位角： $\angle 1$ 與 $\angle 3$ ， $\angle 2$ 與 $\angle 4$ ， $\angle 5$ 與 $\angle 7$ ， $\angle 6$ 與 $\angle 8$

同側內角： $\angle 2$ 與 $\angle 3$ ， $\angle 7$ 與 $\angle 6$

內錯角： $\angle 2$ 與 $\angle 6$ ， $\angle 7$ 與 $\angle 3$

對頂角： $\angle 2$ 與 $\angle 8$ ， $\angle 7$ 與 $\angle 1$ ， $\angle 3$ 與 $\angle 5$ ， $\angle 4$ 與 $\angle 6$



4. 互為對頂角的兩角必相等，如上圖 $\angle 2 = \angle 8$ 。

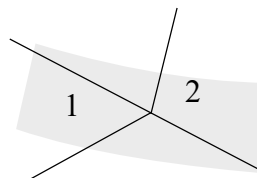
5. 若一直線將已知角平分成相等的兩角，則稱此直線為該角的角平分線。

## 條目範圍

不介紹外角平分線

## 錯誤類型

1. 學生容易對同位角與同側內角的定義混淆。
2. 如下圖，學生容易誤解 $\angle 1$ 與 $\angle 2$ 互為對頂角。



## 釋例

1. 兩角相加總合90度稱為互餘，給定一已知角求其餘角，除了使用90度減去已知角外，也可以使用兩角和等於90度的方式處理。例如已知角為 $60-3a$ ，則計算它的餘角的度數時，可以使用總合為90度的方式處理，則另一角為 $(30+3a)$ 。
2. 兩角相加總合180度稱為互補，給定一已知角求其補角，除了使用180度減去已知角外，也可以使用兩角和等於180度的方式處理。例如已知角為 $60-3a$ ，則計算它的補角的度數時，可以使用總合為180度的方式處理，則另一角為 $(120+3a)$ 。
3. 說明對頂角相等的方式，可以採取平角180度以及等量公理得出對頂角相等。
4. 透過將一已知角對摺，通過頂點使角的兩邊重疊，則此摺線為角平分線。

<p><b>S-8-2 凸多邊形的內角和：</b>凸多邊形的意義；內角與外角的意義；凸多邊形的內角和公式；正<math>n</math>邊形的每個內角度數。</p> <p>(補充說明) 不處理多邊形外角和公式。</p>	s-IV-2
---	--------

先備：S-7-1

連結：S-8-1，S-8-8

後續：S-9-1，S-9-2，S-9-3

## 基本說明

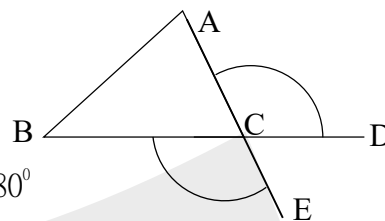
1. 理解凸多邊形的每個內角都小於 $180^\circ$ 。
2. 理解凸多邊形的內角與外角的意義。
3. 理解三角形內角和為 $180^\circ$ 。
4. 能理解三角形外角性質，即三角形任一外角等於其兩內對角之和。
5. 能理解 $n$ 邊形的內角和為 $(n-2)\times 180^\circ$ ， $n \geq 3$ 。進而可得正 $n$ 邊形的每個內角度數為 $\frac{(n-2)\times 180^\circ}{n}$ 。

## 條目範圍

1. 不介紹多邊形(不含三角形)的外角和。

## 釋例

1. 介紹三角形任一內角均有兩個外角。如右圖所示， $\angle ACB$  的外角可以是  $\angle ACD$  或者是  $\angle BCE$ ；而且內角與其外角的和等於  $180^\circ$ 。例如  $\angle ACB + \angle ACD = 180^\circ$
2. 計算凸  $n$  邊形的內角和，有兩種方式，一種是固定一頂點將  $n$  邊形切割成  $(n-2)$  個三角形，所以內角和  $= (n-2) \times 180^\circ$ ；第二種方式為固定  $n$  邊形裡面一定點，從這一點向外可做  $n$  個三角形，但是扣除周角  $360^\circ$  就是多邊形的內角和； $n \times 180^\circ - 360^\circ = (n-2) \times 180^\circ$



3. 計算正  $n$  邊形每個內角度數，可以先計算內角和  $(n-2) \times 180^\circ$ ，再除以  $n$  個內角即可。
4. 可利用過三角形一頂點做平行對邊之直線，理解三角形內角和為  $180^\circ$ ；或沿三角形邊界環繞一周時，計算在各個頂點之旋轉角的總和，理解三角形的外角和為  $360^\circ$ ，進而推理得到三角形的內角和為  $180^\circ$ 。

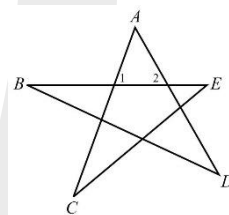
5. 能熟練三角形內角和公式及三角形外角性質的應用。如右圖， $\angle B = 25^\circ$ ， $\angle C = 30^\circ$ ， $\angle D = 35^\circ$ ， $\angle E = 40^\circ$ ，求  $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 、 $\angle A$  的度數。

根據 三角形外角性質： $\angle 1 = \angle C + \angle E = 30^\circ + 40^\circ = 70^\circ$

$$\angle 2 = \angle B + \angle D = 25^\circ + 35^\circ = 60^\circ$$

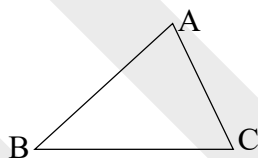
根據 三角形內角和為  $180^\circ$ ，

$$\angle A = 180^\circ - \angle 1 - \angle 2 = 180^\circ - 70^\circ - 60^\circ = 50^\circ$$

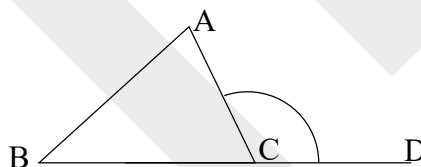


## 錯誤類型

1. 學生對於外角的認知容易產生迷思，以為是三角形外面的角。如下圖所示，學生誤以為  $\angle A$  外角的度數  $= 360^\circ - \angle A$ 。



2. 三角形  $ABC$ ，沿著  $\overline{BC}$  從  $B$  到  $C$ ，再沿著  $\overline{AC}$  從  $C$  到  $A$ ，其旋轉的角度為  $\angle ACD$ ，但，學生容易誤認為  $\angle ACB$ 。



## 探索

哪些正多邊形可無縫隙鋪設平面？而哪些正多邊形卻不能無縫隙鋪設平面？

先備：S-7-1，S-7-3

連結：S-8-1，S-8-2，S-8-8，S-8-9，S-8-10，S-8-11，S-8-12

後續：S-9-3

### 基本說明

- 兩條直線永不相交稱為平行。
- 平面上同時垂直一直線的兩直線必平行，並認識平行的符號「//」。
- 直線  $L$  同時垂直於直線  $M$ ， $N$  時，所形成八個角均為直角。
- 兩直線互相平行時，同位角相等、內錯角相等、同側內角互補。
- 直線  $L$  為直線  $M$ ， $N$  的截線，若下列三者中之一成立，
  - 同位角相等
  - 內錯角相等
  - 同側內角互補
 則直線  $M$ ， $N$  互相平行。
- 平面上，若兩相異直線  $L // M$ ，則  $L$  上的任一點到直線  $M$  的距離均相等，這個性質稱為兩平行線間的距離處處相等。

### 釋例

- 兩平行線被一直線所截，可以透過平行線的定義解釋同位角相等。說明

如圖所示， $L_1 // L_2$ ， $\angle 1 = 50^\circ$ ，則  $\angle 2$  的度數是多少？

過直線  $L$  上一點  $P$ ，作直線  $M$ ，與直線  $L_1$  垂直，則  $\angle 3 = 90^\circ$ ；

並與直線  $L_2$  交角為  $\angle 4$ ；因為  $L_1 // L_2$ ，所以  $\angle 4 = 90^\circ$

根據三角形內角和為  $180^\circ$ ，

所以  $\angle 5 = 180^\circ - \angle 1 - \angle 3 = 180^\circ - 50^\circ - 90^\circ = 40^\circ$

又  $\angle 2 = 180^\circ - \angle 5 - \angle 4 = 180^\circ - 40^\circ - 90^\circ = 50^\circ$

同樣的 如果  $\angle 1 = x^\circ$ ，則  $\angle 2$  的度數是多少？

$\angle 5 = 180^\circ - \angle 1 - \angle 3 = 180^\circ - x^\circ - 90^\circ = 90^\circ - x^\circ$

又  $\angle 2 = 180^\circ - \angle 5 - \angle 4 = 180^\circ - (90^\circ - x^\circ) - 90^\circ = x^\circ$

因此 可得  $\angle 5 = \angle 2$

- 若同側內角和小於  $180^\circ$ ，則此兩直線必在此側相交。
- 若同位角不相等，則兩直線必相交。
- 熟練應用平行線截角性質。

如右圖，平行四邊形  $ABCD$  中， $\angle A = 137^\circ$ ，求  $\angle B$ 、 $\angle C$ 、 $\angle D$ 。

四邊形  $ABCD$  是平行四邊形，

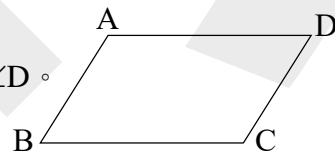
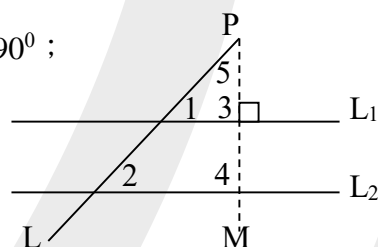
則  $AD // BC$

可得  $\angle A + \angle B = 180^\circ$

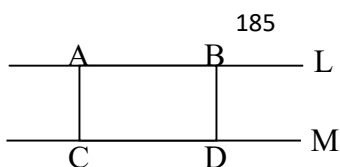
$\angle B = 180^\circ - \angle A = 180^\circ - 137^\circ = 43^\circ$

同理  $\angle B + \angle C = 180^\circ$ ， $\angle C = 180^\circ - \angle B = 180^\circ - 43^\circ = 137^\circ$

同理  $\angle C + \angle D = 180^\circ$ ， $\angle D = 180^\circ - \angle C = 180^\circ - 137^\circ = 43^\circ$



- 直線  $L$  與直線  $M$  平行，在  $L$  上取  $A$ 、 $B$  兩點，過  $A$ 、 $B$  兩點作  $M$  的垂線，分別交直線  $M$



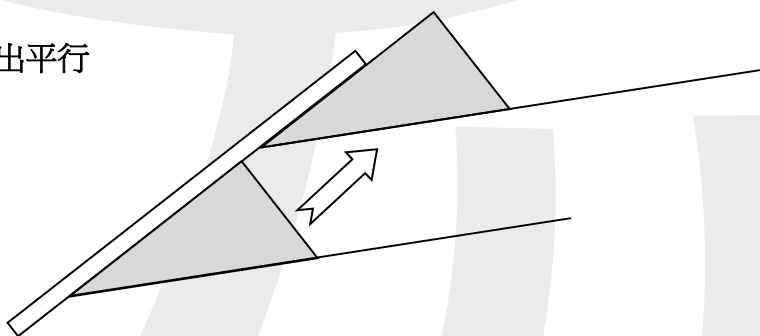
於 C、D 兩點；則可得四邊形 ABCD 有四個直角，即為矩形，進而理解兩平行線間距離處處相等。

### 錯誤類型

學生習慣背誦同位角相等，內錯角相等，同側內角互補；事實上，同位角不一定相等，內錯角也不一定相等，同側內角不一定互補；前提必須兩直線平行下才成立。

### 探索

利用三角板的移動畫出平行



<b>S-8-4 全等圖形：</b> 全等圖形的意義（兩個圖形經過平移、旋轉或翻轉可以完全疊合）；兩個多邊形全等則其對應邊和對應角相等（反之亦然）。
--

s-IV-4
--------

先備：S-7-1，S-7-4

連結：S-8-5，S-8-6

後續：S-9-1，S-9-2

### 基本說明

1. 如果兩個平面圖形經過平移、旋轉或翻轉可以完全重疊在一起，它們就是兩個形狀與大小都相同的圖形，我們稱它們是兩個全等圖形。
2. 如果兩個三角形可以完全重疊在一起，疊在一起的頂點稱為對應點，疊在一起的邊稱為對應邊，疊在一起的角稱為對應角。
3. 能理解兩多邊形全等，則其對應邊、對應角相等。反過來，若對應邊、對應角相等，則兩多邊形全等。

### 條目範圍

1. 不涉及非凸多邊形的全等。

### 釋例

1. 當兩個圖形經過平移、旋轉或翻轉後重疊，稱為全等圖形。同時重疊的點稱為對應點，重疊的邊稱為對應邊，重疊的角稱為對應角。
2. 兩個凸多邊形的每個對應角與每個對應邊都相等，可透過疊合動作，發現此兩凸多邊形全等。

## 錯誤類型

學生誤以為兩多邊形所有對應邊都相等就是全等圖形；或者，誤以為兩多邊形所有對應角都相等就是全等圖形。

## 探索

透過平移、旋轉或翻轉的操作活動體認全等的圖形。

<b>S-8-5 三角形的全等性質：</b> 三角形的全等判定（SAS、SSS、ASA、AAS、RHS）；全等符號（ $\cong$ ）。	s-IV-9
---	--------

先備：S-7-1，S-7-4

連結：S-8-6，S-8-8

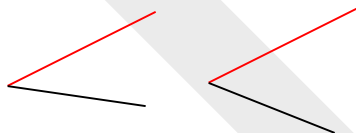
後續：S-9-1，S-9-2

## 基本說明

1. 如果兩個三角形  $\triangle ABC$  與  $\triangle DEF$  可以完全重疊在一起，我們就稱  $\triangle ABC$  與  $\triangle DEF$  為兩個全等三角形，記為  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ，讀做「三角形  $ABC$  全等於三角形  $DEF$ 」，其中以符號  $\cong$  表示全等。
2. 能理解 SAS、SSS、ASA、AAS、RHS 全等性質。
3. 能理解 SSA 不一定全等。

## 釋例

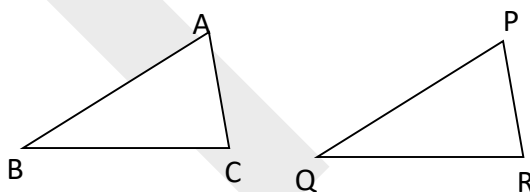
1. 在說明兩個三角形全等時，可以使用填空格式讓學生練習書寫的程序與論述的理由。
2. 以重疊驗證全等，發現兩個三角形只要三組對應邊與三組對應角都相等則全等；之後再討論是否可以減少條件。
3. 也可以從最少的條件慢慢增加，從一組對應邊(或角)相等的兩個三角形全等嗎，讓學生學習找反例；若再增加1組條件，例如兩組對應邊相等，或兩組對應角相等，或一組對應邊與一組對應角相等，讓學生造例或舉反例，討論是否全等。從學生舉出的反例中，再增加某項條件後就全等了。例如給定2組對應邊相等，如下圖所示：因為中間的夾角可能會變動，就不會全等！如果加上中間的夾角相等，三角形固定了，就全等。



4. 如圖， $\triangle ABC$  與  $\triangle PQR$  中， $\angle A = \angle P = 70^\circ$ ， $\angle B = \angle Q = 30^\circ$ ， $\overline{BC} = \overline{QR} = 2.4$ ，

求：(1)  $\triangle ABC$  與  $\triangle PQR$  是否全等 (2)  $\angle C$  及  $\angle R$

在  $\triangle ABC$  與  $\triangle PQR$  中，  
因為  $\angle A = \angle P = 70^\circ$ ，  
 $\angle B = \angle Q = 30^\circ$ ，



$$\overline{BC} = \overline{QR} = 2.4$$

所以  $\triangle ABC \cong \triangle PQR$  (AAS)

則  $\angle C = \angle R = 180^\circ - 70^\circ - 30^\circ = 80^\circ$

5. 如圖，D、E 分別在  $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$  上， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， $\angle B = \angle C$ 。

請證明  $\triangle ABE \cong \triangle ACD$

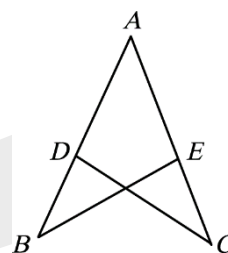
在  $\triangle ABE$  與  $\triangle ACD$  中，

因為  $\overline{AB} = \overline{AC}$

$\angle B = \angle C$

$\angle BAE = \angle CAD$

所以  $\triangle ABE \cong \triangle ACD$  (ASA)



6. 其它的全等性質(SSS、SAS、RHS)仿上例應用。

7. 能以三角形的全等性質做簡單幾何推理，例如：

(1) 等腰三角形兩底角相等。

(2) 角平分線上的任一點到角的兩邊距離相等。反之，同一平面上，若一點到角的兩邊之距離相等，則此點位在角的平分線上。

(3) 一線段中垂線上任一點到兩端點等距。反之，若一點到線段的兩端點等距，則此點在此線段的中垂線上。

### 錯誤類型

1. 學生對於判斷 SAS、SSS、ASA、AAS、RHS 全等性質仍陌生並充滿迷思，尤其是遇見一組直角三角形時，都會誤認一定是 RHS，事實上可能是 ASA 或 AAS 或其他。

2. 學生容易將 AAS 與 ASA 視為相同，(忽略了順序關係)；同樣的，SSA 與 SAS 都是兩邊一角的條件，也視為相同的全等性質。

### 評量

學習證明的過程循序漸進，從填空題格式練習書寫做起。

**S-8-6 畢氏定理：**畢氏定理（勾股弦定理、商高定理）的意義及其數學史；畢氏定理在生活上的應用；三邊長滿足畢氏定理的三角形必定是直角三角形。

s-IV-7

先備：S-5-1，S-5-2，S-7-1

連結：S-8-7，S-8-8，G-8-1

後續：S-9-5，S-9-12

### 基本說明

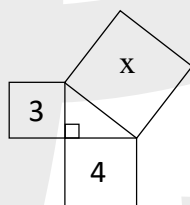
1. 了解只有一個角為直角的三角形，是直角三角形，並認識其斜邊與股的意義。

2. 認識畢氏定理(勾股弦定理、商高定理)，即直角三角形斜邊長的平方等於兩股的平方和；並介紹其相關的數學史。

3. 從給定直角三角形其中兩邊的長，依據畢氏定理求出第三邊的長；並將畢氏定理應用於生活情境中的問題，必要時可使用計算機輔助計算。
4. 了解三角形的三邊長滿足畢氏定理必定是直角三角形。

### 釋例

1. 透過直角三角板教具，認識兩股長與斜邊長；同時旋轉三角板認識斜邊位置可能的情形。
2. 透過摺紙、剪紙或計算面積，…等多樣的活動介紹畢氏定理，認識它的證明與推理過程；透過面積方式，讓學生了解  $a^2$ 、 $b^2$ 、 $c^2$  的幾何意義，強化三個正方形面積關係。因此學生對於給定直角三角形的兩個股邊的正方形面積為3，4時，則斜邊長的正方形面積比較不會出現迷思概念為5的狀況。如下圖所示：



3. 已知直角三角形的兩邊長為3，4；求第三邊的長。因為斜邊是最長邊，如果3，4是兩股邊，則第三邊為斜邊  $= \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ；如果4是斜邊，則第三邊是股邊  $= \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$ 。

4. 數學史上關於畢氏定理的說明：

#### 商高定理

在中國最古老的數學書《周髀算經》裏，有一段周公和商高的對話，其中提到「勾廣三，股修四，徑偶五」。因為商高所提到的勾三、股四、弦五是我國最早有關「商高定理」的記載，故有些人認為此定理應稱為「商高定理」。

#### 陳子定理

有關一般性「商高定理」的最早記載出現在《周髀算經》中對於陳子的敘述，這段敘述除了指出三角測量的方法外，並提到「商高定理」的一般性原則「句股各自乘，并而開方除之」。因為這段敘述，所以有人認為此定理應稱為「陳子定理」。

#### 畢氏定理

西方國家普遍相信「畢氏定理」是於西元前 560 年到西元前 480 年間由畢達哥拉斯發現的，或者至少是由他證明的。雖然有許多證據顯示畢達哥拉斯並非此定理的創始者，然而因為早期許多哲學家、數學史家等推斷畢達哥拉斯發現了這個定理，故冠以「畢達哥拉斯定理」之名，許多人已經習慣了這個名稱，是以此名稱仍沿用至今。

#### 勾股定理

所謂的勾股弦即表示直角三角形的三個邊長



1. 三角形的短邊稱之為「勾」
2. 三角形的長邊稱之為「股」
3. 長邊和短邊的連線的斜邊稱之為「弦」



也有一些人認為不知到底是由誰最先發現此定理，故不如避開人名，直接以「勾股弦定理」稱之，而有勾股必有弦，故亦稱為「勾股定理」。



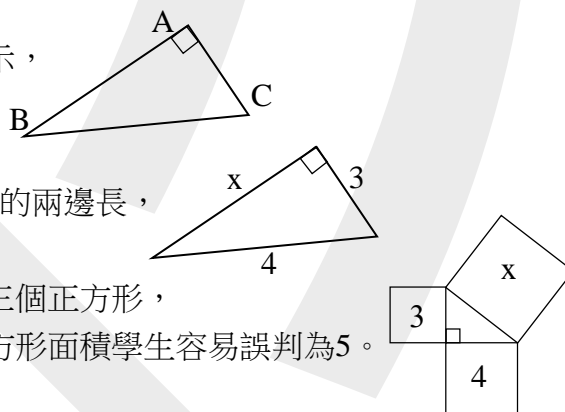
左圖是一張希臘為了紀念畢達哥拉斯於 1955 年 8 月 20 日發行的郵票，中間白色的三角形是直角三角形，而旁邊的三個正方形則是依照直角三角形的三邊長所畫出來的。

兩個小正方形的面積和等於大正方形的面積。

5. 解決生活的應用問題，依題意列出方程式求出的解，常會出現不合理的答案，因此需要代回去檢驗。
6. 三角形的三邊長滿足畢氏定理必定是直角三角形。建議放在三角形的全等後再補充，作為三角形 SSS 全等判定的應用，理解三邊長滿足畢氏定理之三角形一定是直角三角形。

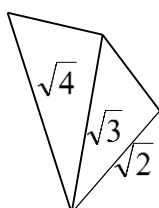
### 錯誤類型

1. 學生對於斜邊的位置有迷思，如右圖所示， $\angle BAC=90^\circ$ ，學生誤認為  $\overline{AB}$  是斜邊。
2. 學生習慣背誦 3, 4, 5；給定直角三角形的兩邊長，如圖所示，學生容易誤認為  $x=5$ 。
3. 如圖所示，一直角三角形的三邊分別有三個正方形，已知兩個正方形面積為 3, 4；第三個正方形面積學生容易誤判為 5。



### 評量

本單元不適合出現給定邊長為 1 的方格紙，在格子點上畫出邊長為  $\sqrt{13}$ ， $\sqrt{17}$ ，... 等長的線段；但若是從兩股長為 1 的等腰直角三角形延伸，慢慢找出  $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{4}$ 、 $\sqrt{5}$ 、...，是可以呈現的。例如：



## 探索

1. 讓學生使用畢氏定理測量兩樓層間兩點的距離。
2. 求長方體圖形的邊長，關係到立體圖形，建議給予立體模型的教具以利學生觀察出直角三角形的關係。

**S-8-7 平面圖形的面積：**正三角形的高與面積公式；及其相關之複合圖形的面積。

s-IV-8

先備：S-7-1，S-7-4

連結：S-8-6，S-8-10，S-8-11

後續：S-9-5，S-9-6

## 基本說明

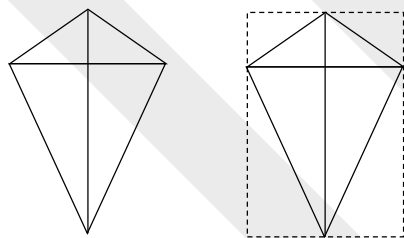
1. 邊長為  $a$  之正三角形的高為  $\frac{\sqrt{3}}{2}a$
2. 邊長為  $a$  之正三角形的面積為  $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$
3. 複合圖形可以採取切割方式，或是補足為一般的圖形再扣除增加的圖形面積。

## 條目範圍

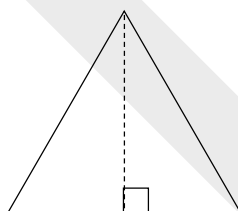
複合圖形以多邊形為限，不適合出現與圓相關的圖形。

## 釋例

1. 箏形的對角線互相垂直，將箏形補成矩形，如下圖所示；依據矩形面積為長乘以寬，而箏形面積恰好是矩形面積的一半；而矩形的長與寬恰好是兩條對角線的長。所以得出箏形的面積 =  $\frac{1}{2} \times (\text{兩條對角線長之乘積})$ 。

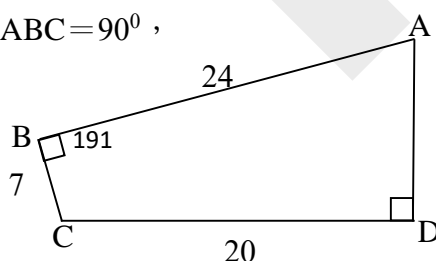


2. 邊長為  $a$  的正三角形，從頂點做高，再利用畢氏定理求出高等於  $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ ，因此可得面積等於  $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 。



3. 如圖四邊形 ABCD，其中  $\angle ADC = \angle ABC = 90^\circ$ ，

求四邊形 ABCD 的面積？



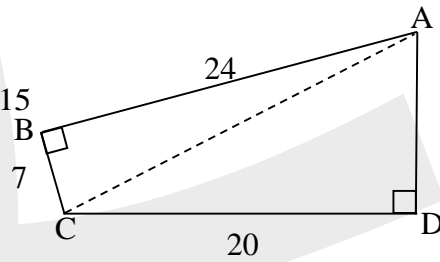
連接  $\overline{AC}$ ，則將四邊形分成兩個三角形：

$$\overline{AC} = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25, \quad \overline{AD} = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15$$

四邊形 ABCD 面積

$$= \triangle ABC + \triangle ADC$$

$$= 24 \times 7 \div 2 + 20 \times 15 \div 2 = 84 + 150 = 235$$



### 錯誤類型

學生常常混淆正三角形的高與面積的公式。

**S-8-8 三角形的基本性質：**等腰三角形兩底角相等；非等腰三角形大角對大邊，大邊對大角；三角形兩邊和大於第三邊。

n-IV-4  
s-IV-9

先備：S-7-1，S-7-4

連結：S-8-6，S-8-10

後續：S-9-2，S-9-4，S-9-5

### 基本說明

1. 理解有兩邊相等的三角形，稱為等腰三角形。等腰三角形的兩底角相等。若三角形的兩內角相等則此三角形為等腰三角形。
2. 理解三邊等長的三角形，稱為正三角形。正三角形的三個內角都相等。若三角形的三內角相等則此三角形為正三角形。
3. 理解有兩邊相等的直角三角形，稱為等腰直角三角形。
4. 由兩點間直線距離最短，來理解三角形任兩邊之和大於第三邊，兩邊長的差小於第三邊。
5. 能理解三個正數滿足任意二數和大於第三邊，則此三個正數必為某一三角形的三邊長。
6. 理解三角形中，大角對大邊，大邊對大角；等邊對等角，等角對等邊。

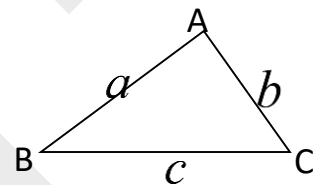
### 釋例

1. 等腰三角形透過頂點作角平分線或高或中線，得出兩個全等三角形，並推得兩底角相等的結果。

2. 如圖，若  $a$ 、 $b$ 、 $c$  是  $\triangle ABC$  的三邊長，我們可以得到：

$$a + b > c, \quad a + c > b, \quad b + c > a$$

但是：若  $c \geq a$ ， $c \geq b$ ，我們不用每次都檢查三遍，只要檢查兩短邊長的和  $>$  最長邊即可。



3. 已知兩線段長分別是10公分、8公分，再給一條線段長為  $a$ ， $a$  必須具備什麼條件才可以讓這三條線段形成三角形？依據三角形中，兩短邊長的和  $>$  最長邊，如果10是最長邊，則

$8+a>10$ ， $a$ 必須超過2即可；如果 $a$ 是最長邊，則 $10+8>a$ ，因此綜合上述兩者， $a$ 必須超過2，且小於18。亦即 $10-8<a<10+8$

4.  $\triangle ABC$  中， $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$  的長度分別是11、13、15公分，比較 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$  的大小關係。因為 $\overline{AC}>\overline{BC}>\overline{AB}$ ，依據同一個三角形中，大邊對大角，小邊對小角所以 $\angle B>\angle A>\angle C$ 。

5.  $\triangle ABC$  中， $\angle A=60^\circ$ ， $\angle B=62^\circ$ ，比較 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$  的大小關係。

$$\angle C=180^\circ-\angle A-\angle B=180^\circ-60^\circ-62^\circ=58^\circ$$

則 $\angle B>\angle A>\angle C$ ，依據同一個三角形中，大角對大邊，小角對小邊；

所以 $\overline{AC}>\overline{BC}>\overline{AB}$ 。

**S-8-9 平行四邊形的基本性質：**關於平行四邊形的內角、邊、對角線等的幾何性質。

s-IV-8

先備：S-7-1，S-7-4

連結：S-8-10，S-8-11，S-8-12

後續：S-9-1，S-9-2，S-9-3，S-9-4，S-9-5

### 基本說明

- 理解兩組對邊分別平行的四邊形稱為平行四邊形。
- 理解下列平行四邊形的基本性質：
  - 平行四邊形的一條對角線將此平行四邊形分成兩個全等三角形。
  - 平行四邊形的兩組對邊相等。
  - 平行四邊形的兩組對角相等。
  - 平行四邊形的兩條對角線互相平分。
- 理解下列平行四邊形的判別性質：
  - 若四邊形的兩組對邊分別相等，則此四邊形必為平行四邊形。
  - 若四邊形的兩組對角分別相等，則此四邊形必為平行四邊形。
  - 若四邊形的兩條對角線互相平分，則此四邊形必為平行四邊形。
  - 若四邊形的一組對邊平行且相等，則此四邊形必為平行四邊形。

### 釋例

1. 一平行四邊形  $ABCD$ ， $\overline{AB}\parallel\overline{CD}$ ， $\overline{AD}\parallel\overline{BC}$

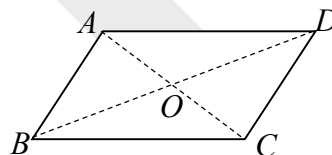
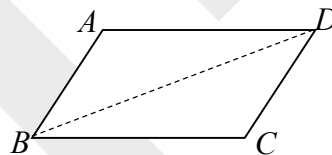
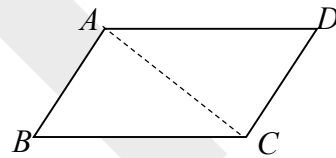
連接任何一條對角線可分成兩個全等三角形

如連接  $\overline{AC}$ ，則可得 $\triangle ABC\cong\triangle CDA$

並可得 $\angle B=\angle D$ ， $\overline{AB}=\overline{CD}$

同理，如連接  $\overline{BD}$ ，則可得 $\triangle ABD\cong\triangle CDB$

並可得 $\angle A=\angle C$ ， $\overline{AD}=\overline{BC}$



2. 一平行四邊形  $ABCD$ ， $\overline{AB}\parallel\overline{CD}$ ， $\overline{AD}\parallel\overline{BC}$

$\overline{AC}$  與  $\overline{BD}$  交於  $O$  點，可得 $\triangle ABO\cong\triangle CDO$

並可得  $\overline{BO}=\overline{OD}$ ， $\overline{AO}=\overline{OC}$

因此可得出  $\overline{AC}$  與  $\overline{BD}$  互相平分

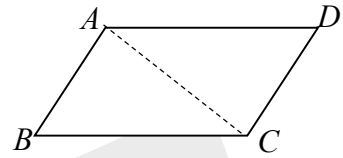
同時，可得  $\triangle ABO$ ， $\triangle CDO$ ， $\triangle AOD$ ， $\triangle COB$  面積均相等

3. 四邊形  $ABCD$ ， $\overline{AB} = \overline{CD}$ ， $\overline{AD} = \overline{BC}$ ，判斷四邊形  $ABCD$  為平行四邊形

連接  $\overline{AC}$ ，則可得  $\triangle ABC \cong \triangle CDA$

並可得  $\angle BAC = \angle DCA$ ，則  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

同理可得  $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，因此 四邊形  $ABCD$  為平行四邊形



4. 四邊形  $ABCD$ ， $\angle A = \angle C$ ， $\angle B = \angle D$ ，判斷四邊形  $ABCD$  為平行四邊形。

因為四邊形四個內角和  $360^\circ$

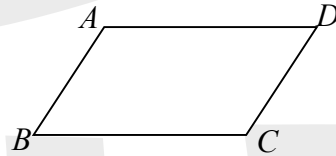
$$\angle A + \angle C + \angle B + \angle D = 360^\circ$$

因為  $\angle A = \angle C$ ， $\angle B = \angle D$

$$\text{所以 } 2\angle A + 2\angle B = 360^\circ$$

得出  $\angle A + \angle B = 180^\circ$  則  $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

同理可得，四邊形  $ABCD$  為平行四邊形



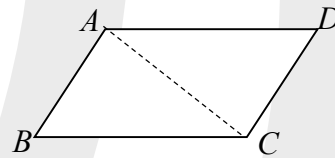
5. 四邊形  $ABCD$ ， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{AD} = \overline{BC}$ ，判斷四邊形  $ABCD$  為平行四邊形。

連接  $\overline{AC}$ ，因為  $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，所以  $\angle DAC = \angle BCA$

又  $\overline{AD} = \overline{BC}$ ， $\overline{AC} = \overline{AC}$

則可得  $\triangle CDA \cong \triangle ABC$  (ASA)

得  $\overline{AB} = \overline{DC}$ ，因為兩組對邊等長，所以四邊形  $ABCD$  為平行四邊形。



6. 四邊形  $ABCD$ ， $\overline{BO} = \overline{OD}$ ， $\overline{AO} = \overline{OC}$ ，判斷四邊形  $ABCD$  為平行四邊形。

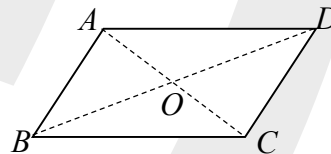
因為  $\overline{BO} = \overline{OD}$ ， $\overline{AO} = \overline{OC}$

$$\angle AOB = \angle COD$$

所以  $\triangle ABO \cong \triangle CDO$  (SAS)

得  $\overline{AB} = \overline{DC}$ ，同理可得， $\overline{AD} = \overline{BC}$

因為兩組對邊等長，所以四邊形  $ABCD$  為平行四邊形。



7. 能理解菱形與矩形也是平行四邊形。

### 錯誤類型

1. 一組對邊平行，另一組對邊相等的四邊形是平行四邊形。
2. 學生誤認為平行四邊形的對角線為內角平分線。
3. 學生誤認為平行四邊形為線對稱圖形。

**S-8-10 正方形、長方形、等形的基本性質：**長方形的對角線等長且互相平分；菱形對角線互相垂直平分；等形的其中一條對角線垂直平分另一條對角線。

s-IV-8

先備：S-7-4，S-7-5

連結：S-8-9，S-8-11

後續：S-9-1，S-9-3

### 基本說明

1. 理解四個內角都是直角的四邊形稱為長方形(矩形)。
2. 理解四個內角都是直角且四邊等長的四邊形稱為正方形。
3. 理解兩組鄰邊等長的四邊形稱為箏形。
4. 理解四邊都等長的四邊形稱為菱形。
5. 理解長方形(矩形)的對角線等長且互相平分。
6. 理解菱形對角線互相垂直平分。
7. 理解箏形的其中一條對角線垂直平分另一條對角線。
8. 理解四邊形中其中一條對角線垂直平分另一條對角線必是箏形。

### 釋例

1. 可由畢氏定理推得矩形的對角線等長。
2. 長方形(矩形)就是平行四邊形，因為平行四邊形的對角線互相平分，所以長方形(矩形)的對角線也是互相平分。
3. 菱形也是平行四邊形，所以對角線互相平分；透過三角形的全等可以證明對角線互相垂直，所以菱形對角線互相垂直平分。
4. 如圖箏形  $ABCD$  中，

連接  $\overline{AC}$ ，則  $\triangle ABC \cong \triangle ADC$  (SSS)；

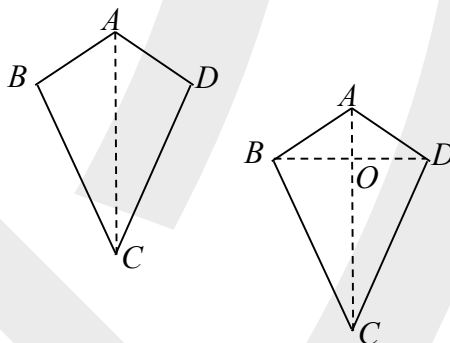
則  $\angle BAC = \angle DAC$

連接  $\overline{BD}$ ，與  $\overline{AC}$  交於  $O$  點；

則  $\triangle ABO \cong \triangle ADO$  (SAS)

得  $\angle BOA = \angle DOA = 90^\circ$

且  $\overline{BO} = \overline{DO}$  所以對角線互相垂直，且一條對角線被另一條對角線平分。



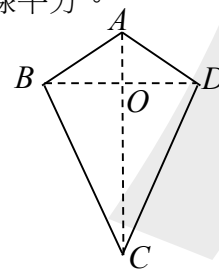
5. 四邊形  $ABCD$  中，已知  $\overline{BO} = \overline{DO}$ ， $\angle BOA = \angle DOA = 90^\circ$ ，

又  $\overline{AO} = \overline{AO}$

可得  $\triangle ABO \cong \triangle ADO$  (SAS)

則  $\overline{AB} = \overline{AD}$

同理可得  $\overline{BC} = \overline{DC}$ ，四邊形  $ABCD$  是箏形。



### 錯誤類型

1. 學生易誤認長方形(矩形)是正方形的一種。
2. 學生易誤認長方形(矩形)的對角線也是對稱軸。

## 探索

討論從兩條對角線的關係探索四邊形的種類，例如兩條對角線互相平分，這樣的四邊形有哪些？再加上等長條件時，情形如何？若再加上垂直條件？互相垂直的條件？

**S-8-11 梯形的基本性質：**梯形兩腰中點的連線段平行於上下底，且其長度等於兩底長度和的一半；等腰梯形的兩底角相等；等腰梯形為線對稱圖形。

s-IV-8

先備：S-7-4，S-7-5

連結：S-8-9，S-8-10

後續：S-9-1，S-9-3

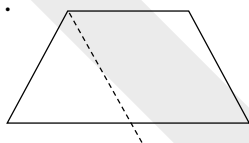
## 基本說明

1. 理解只有一組對邊平行的四邊形稱為梯形。
2. 理解梯形兩腰中點的連線段平行上、下底，同時長度=兩底長度和的一半。
3. 理解梯形面積=兩腰中點連線長×高
4. 理解兩腰等長的梯形稱為等腰梯形，等腰梯形的兩底角相等且兩條對角線等長。若一梯形的兩底角相等，則此梯形是等腰梯形。
5. 等腰梯形為線對稱圖形。

## 釋例

1. 證明等腰梯形的兩底角相等，可以從一頂點作平行一腰的直線，推理可得。

如下圖所示：



2. 如圖，梯形  $ABCD$  中， $E$ 、 $F$  分別是  $\overline{AB}$ 、 $\overline{DC}$  的中點，將梯形  $ABCD$  複製並與原梯形兩者合併，如下圖所示

因為梯形  $ABCD$ ，所以  $\angle 5 + \angle 6 = 180^\circ$

又  $\angle 6 = \angle 7$ ，所以  $\angle 5 + \angle 7 = 180^\circ$

得  $A$ 、 $D$ 、 $C'$ 、 $B'$  四點共線

同理  $B$ 、 $C$ 、 $D'$ 、 $A'$  四點共線

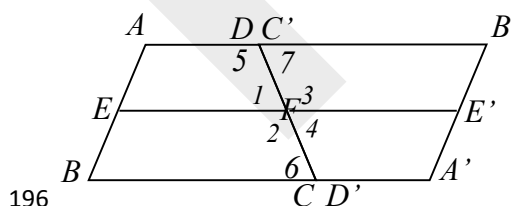
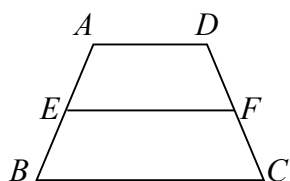
因為  $\overline{AB} = \overline{B'A'}$  且  $\overline{AB} \parallel \overline{B'A'}$

所以合成後的四邊形為平行四邊形

同理可得四邊形  $AEE'B'$  與  $EBA'E'$  皆為平行四邊形

可得  $\overline{AB'} \parallel \overline{EE'} \parallel \overline{BA'}$  且  $\overline{AB'} = \overline{EE'} = \overline{BA'}$

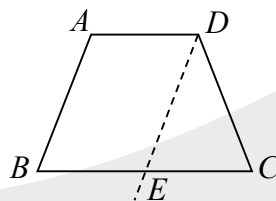
因此 梯形的中線長平行上、下底，同時長度=兩底和的一半。



3. 如上圖，梯形面積 =  $\frac{(\overline{AD} + \overline{BC}) \times h}{2} = \frac{(\overline{AD} + \overline{BC})}{2} \times h = \overline{EF} \times h = \text{中點連線長} \times \text{高}$ ，其中  $h$  為梯形的高。

4. 梯形  $ABCD$  中，已知  $\angle B = \angle C$ ；

可以作  $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$  交於  $E$  點，推理可得 ~ 梯形  $ABCD$  為等腰梯形。



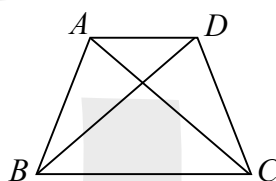
5. 等腰梯形兩對角線等長

等腰梯形  $ABCD$  中， $\overline{AB} = \overline{DC}$

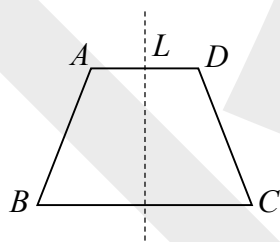
$\overline{AC}$  與  $\overline{BD}$  為對角線，

可由三角形全等性質或畢氏定理推理可得

$\overline{AC} = \overline{BD}$



6. 如圖，等腰梯形  $ABCD$  的對稱軸為直線  $L$ ，同時為  $\overline{AD}$  與  $\overline{BC}$  的中垂線。



### 錯誤類型

學生誤認為梯形的兩腰中點連線將梯形面積平分。

**S-8-12 尺規作圖與幾何推理：**複製已知的線段、圓、角、三角形；能以尺規作出指定的中垂線、角平分線、平行線、垂直線；能寫出幾何推理所依據的幾何性質。

s-IV-13

先備：S-7-1，S-7-3，S-7-4，S-7-5

連結：S-8-1，S-8-9，S-8-10，S-8-11

後續：S-9-3

### 基本說明

1. 只利用直尺(沒有刻度)及圓規製作圖形之方法，稱為尺規作圖。
2. 能以尺規作圖複製已知的線段、圓、角、三角形。
3. 能以尺規作圖作一已知線段之中垂線。



- 能以尺規作圖作一已知角的角平分線。
- 過一直線外的已知點，能以尺規作圖作此直線之平行線與垂直線。
- 過一直線上的已知點，能以尺規作圖作此直線之垂直線。
- 在幾何推理中，能寫出有些步驟所依據的幾何性質。

### 條目範圍

尺規作圖讓學生熟悉工具的使用，不要過度延伸。

### 釋例

- 本細目只強調會做基本的尺規作圖即可，基本的尺規作圖明列如上方的基本說明。在每一尺規作圖應能明確的說明此尺規作圖的原理，這種說明在教學上是必須的，但可以不作評量。
- 複製三角形可採取全等性質中的 SSS 或 SAS 等方式。  
例如：如果已知三個正數滿足任兩數和大於第三數，則可用尺規作圖作出以此三數為邊長之三角形。

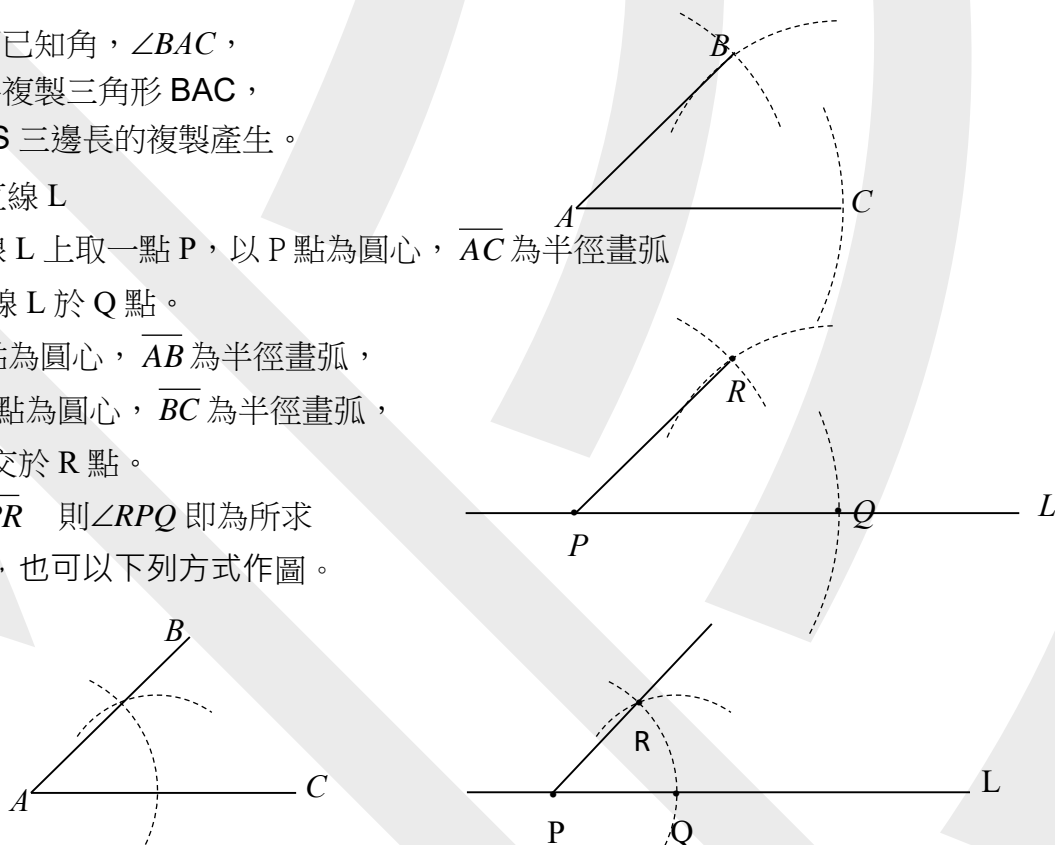
- 複製一個已知角， $\angle BAC$ ，  
可以視為複製三角形  $BAC$ ，  
採取 SSS 三邊長的複製產生。

(1)作一直線  $L$

(2)在直線  $L$  上取一點  $P$ ，以  $P$  點為圓心， $\overline{AC}$  為半徑畫弧  
交直線  $L$  於  $Q$  點。

(3)以  $P$  點為圓心， $\overline{AB}$  為半徑畫弧，  
以  $Q$  點為圓心， $\overline{BC}$  為半徑畫弧，  
兩弧交於  $R$  點。

(4)連接  $\overline{PR}$  則  $\angle RPQ$  即為所求  
當然，也可以下列方式作圖。

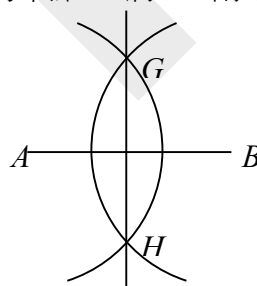


- 不要求學生能對一幾何問題的證明寫一完全的推理說明。僅要求在幾何推理的教學中，要讓學生能寫出有些步驟所依據的是什麼原理。

例如：利用尺規作圖做出中垂線，說明如下：

說明：已知  $\overline{AB}$ ，求作  $\overline{AB}$  的中垂線。(求作  $\overline{AB}$  的中點 or 將  $\overline{AB}$  兩等分)。

(1)分別以  $A$ 、 $B$  為圓心，



大於  $\frac{1}{2}\overline{AB}$  的長度為半徑畫弧，

設兩弧相交於  $G$ 、 $H$  兩點。

畫  $\overrightarrow{GH}$ ， $\overrightarrow{GH}$  即為所求。

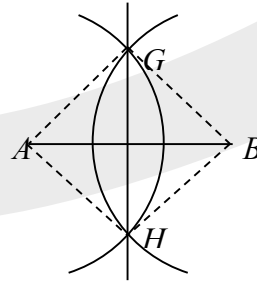
(2) 連接  $\overline{AG}$ 、 $\overline{AH}$ 、 $\overline{BG}$ 、 $\overline{BH}$

因為  $\overline{AG} = \overline{AH} = \overline{BH} = \overline{BG}$

所以四邊形  $AHBG$  為菱形

依據菱形的對角線互相垂直平分

所以  $\overrightarrow{GH}$  為  $\overline{AB}$  的中垂線。



5. 作直線上一點的垂線可以使用平角180度的角平分線的作法可得出垂直線。

**G-8-1 直角坐標系上兩點距離公式：**直角坐標系上兩點  $A(a, b)$  和  $B(c, d)$  的距離為

$\overline{AB} = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$ ；生活上相關問題。

g-IV-1

先備：N-7-5, G-7-1

連結：S-8-6, F-8-2

後續：F-9-2

基本說明

直角坐標系上兩點  $A(a, b)$  和  $B(c, d)$  的距離為  $\overline{AB} = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$

釋例

1. (a) 給定水平線上的兩點，例如： $A(2, 1)$  和  $B(5, 1)$ 。先畫出  $y = 1$  的水平線，並說明此兩點均落在  $y = 1$  的水平線上，而且  $(0, 1)$  就像數線上的 0； $(2, 1)$  就像數線上的 2； $(5, 1)$  就像數線上的 5，因此  $A(2, 1)$  和  $B(5, 1)$  的距離就等於數線上 2 和 5 的距離  $5 - 2 = 3$ 。

(b) 同理，給定鉛垂線上的兩點，例如： $A(2, 1)$  和  $C(2, 5)$ 。先畫出  $x = 2$  的鉛垂線，並說明此兩點均落在  $x = 2$  的鉛垂線上，而且  $(2, 0)$  就像數線上的 0； $(2, 1)$  就像數線上的 1； $(2, 5)$  就像數線上的 5，因此  $A(2, 1)$  和  $C(2, 5)$  的距離就等於數線上 1 和 5 的距離  $5 - 1 = 4$ 。

(c) 由(a)和(b)可知  $\triangle ABC$  為直角三角形，且  $\overline{AB} = 3$ 、 $\overline{AC} = 4$ ，由畢氏定理可知

$$\overline{BC} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

2. 給定任意的兩點  $P(a, b)$  和  $Q(c, d)$  (為避免取絕對值時造成學生理解困擾，畫圖時可取  $a > c$  且  $b > d$ )，取點  $(c, b)$  並命名為  $R$ 。因為  $R(c, b)$  和  $P(a, b)$  都落在  $y = b$  水平線上，所以

$$\overline{RP} = |a - c|$$

同理， $R(c, b)$ 和 $Q(c, d)$ 都落在 $x = c$ 鉛垂線上，所以

$$\overline{RQ} = |b - d|$$

因為  $\triangle PQR$  為直角三角形， $\angle PRQ$ 為直角，所以

$$\overline{PQ} = \sqrt{\overline{RP}^2 + \overline{RQ}^2} = \sqrt{|a - c|^2 + |b - d|^2} = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$$

### 3. 應用到生活上相關問題。

例如：某人向東走 40 公尺，再向北走 30 公尺，請問此時距離出發點多少公尺？

解題可透過訂定坐標系方式，將出發點定為坐標原點；向東為  $x$  軸的正方向；向北為  $y$  軸的正方向；單位長為 1 公尺，可知終點坐標為(40,30)，由距離公式可得距離原點（出發點）為 50 公尺。

### 錯誤類型

學生可能誤認為(2,-1)和(8, 7)的兩點距離為  $\sqrt{(8 - 2)^2 + (7 - 1)^2}$  。

<p><b>A-8-1</b> 二次式的乘法公式：<math>(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2</math> ；</p> <p><math>(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2</math> ；<math>(a + b)(a - b) = a^2 - b^2</math> ；</p> <p><math>(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd</math> 。</p>	a-IV-5
---	--------

先備：A-7-1

連結：A-8-5, A-8-7

後續：

### 基本說明

1. 能熟練分配律： $(a + b)c = ac + bc$ 、 $a(b + c) = ab + ac$ 、

$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$ ，並能運用這些公式進行簡單速算。

2. 能熟練二次乘法公式，如：

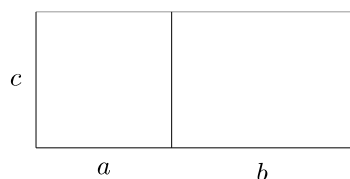
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

### 釋例

1. 計算大長方形



的面積時，以兩種不同方式計算，得到 $(a+b)c = ac + bc$ ，可用來解釋分配律。

2. 計算 $37 \times 29 + 63 \times 29$ ：

$$37 \times 29 + 63 \times 29 = (37 + 63) \times 29 = 100 \times 29 = 2900。$$

3. 計算 $103 \times 97$ ：

$$103 \times 97 = (100 + 3) \times (100 - 3) = 100^2 - 3^2 = 9991。$$

4. 計算 $99^2$ ：

$$99^2 = (100 - 1)^2 = 100^2 - 2 \times 100 \times 1 + 1^2 = 9801$$

5. 計算 $101^2$ ：

$$101^2 = (100 + 1)^2 = 100^2 + 2 \times 100 \times 1 + 1^2 = 10201。$$

### 錯誤類型

1. 學生常誤認 $(a+b)(c+d) = ac + bd$ 及 $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ 。

2. 學生常誤算 $103^2 - 97^2 = (100+3)(100-3)$ 。

### 探索

乘法公式學習前的奠基活動

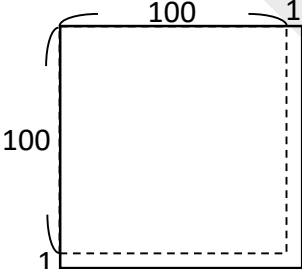
老師發下估算卡，進行估算活動，限時 30 秒作答完成。

第一關

(a) 學生估算下列乘積

1.  $101 \times 101 =$
2.  $102 \times 102 =$
3.  $103 \times 103 =$
4.  $104 \times 104 =$
5.  $105 \times 105 =$

(b) 用圖像的方式估計乘積，並與正確值做比較：

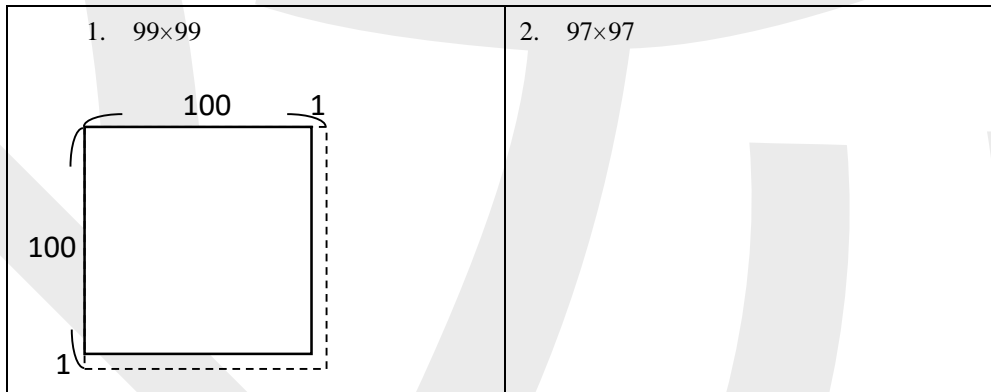
<p>1. <math>101 \times 101 =</math></p> 	<p>2. <math>102 \times 102 =</math></p>
---	---

第二關

(a) 學生估算下列乘積

1.  $99 \times 99 =$
2.  $98 \times 98 =$
3.  $97 \times 97 =$
4.  $96 \times 96 =$
5.  $95 \times 95 =$

(b) 用圖像的方式估計乘積，並與正確值做比較：

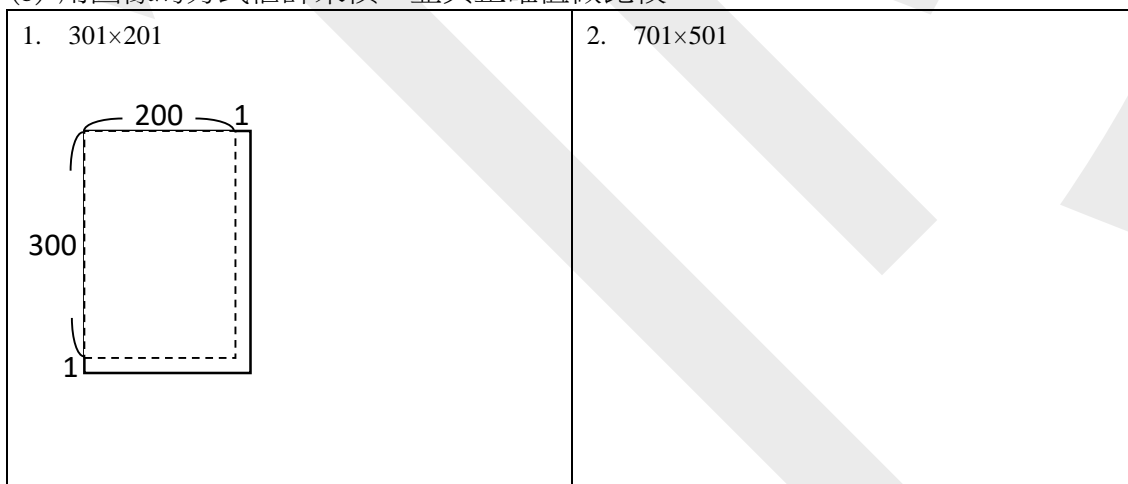


第三關

(a) 學生估算下列乘積

1.  $301 \times 201 =$
2.  $701 \times 501 =$
3.  $203 \times 405 =$
4.  $602 \times 601 =$
5.  $409 \times 904 =$

(b) 用圖像的方式估計乘積，並與正確值做比較：

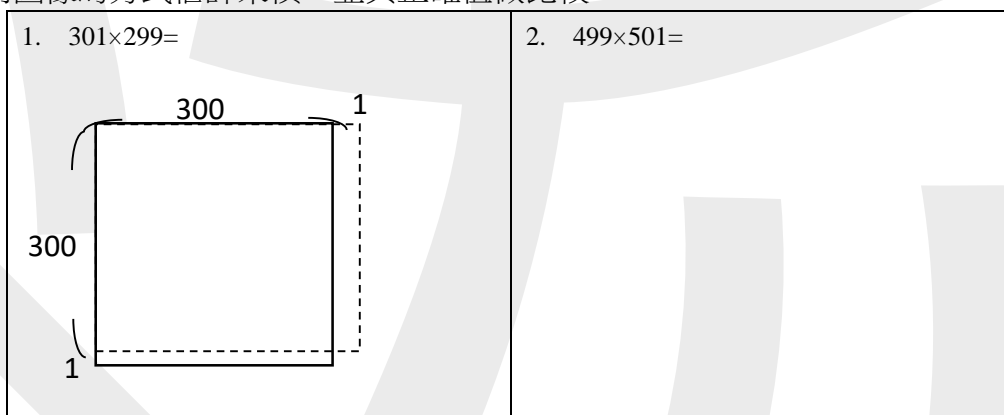


第四關

(a) 學生估算下列乘積

1.  $301 \times 299 =$
2.  $499 \times 501 =$
3.  $402 \times 399 =$
4.  $599 \times 201 =$
5.  $702 \times 699 =$

(b) 用圖像的方式估計乘積，並與正確值做比較：



**A-8-2 多項式的意義：**一元多項式的定義與相關名詞（多項式、項數、係數、常數項、一次項、二次項、最高次項、升冪、降冪）。

a-IV-5

先備：A-7-1

連結：A-8-3、A-8-4、A-8-6

後續：

### 基本說明

1. 若一個代數式是由一些未知數的正整數次方及常數，透過加法及乘法形成的，我們稱此代數式為一「多項式」。若一多項式只有一個未知數，則為「一元多項式」。
2. 多項式用加號隔開的每一部分稱為多項式的「項」。如一個項裡沒有任何未知數，我們稱此項為「常數項」。如一個項是由一個常數跟未知數的正整數次方相乘所形成，我們稱此常數為此項的「係數」。
3. 習慣上，係數為0的項會省略不記，如 $3x^2 + 0x + 1$ 簡寫成 $3x^2 + 1$ ；若一個項的係數為1且不是常數項，其係數1亦會省略不記，如 $2x^2 + 1x + 2$ 簡寫成 $2x^2 + x + 2$ ；又如 $x^2 + (-2)x + 1$ 會簡寫成 $x^2 - 2x + 1$ 。
4. 在一元多項式裡，未知數的次方為1的項稱為「一次項」；次方為2的項稱為「二次項」；依此類推。
5. 一元多項式裡，未知數次方相同的項稱為「同類項」。將所有同類項透過係數相加合併成一項，此過程稱為多項式的化簡。
6. 一元多項式經化簡後，未知數次方最高且係數非零的項稱為「最高次項」，其次方稱為此

多項式的「次數」。

7. 若多項式只有常數項，稱此多項式為「常數多項式」。非零的常數多項式的次數為0，但不定義或討論零多項式的次數。
8. 將一元多項式各項依次方數由小排到大，稱為「升冪」排列；由大排到小則為「降冪」排列。

## 條目範圍

### 釋例

1. 多項式  $3x - 2x^3 + 1 - 4x^2$  共有四項，分別為  $3x$ 、 $-2x^3$ 、 $1$ 、 $-4x^2$ ，其中常數項為1，一次項為  $3x$  其係數為3，二次項為  $-4x^2$  其係數為-4，最高次項為  $-2x^3$  其係數為-2。此多項式的升冪排列為  $1 + 3x - 4x^2 - 2x^3$ ，降冪排列為  $-2x^3 - 4x^2 + 3x + 1$ 。
2. 多項式  $1 - 2x + x^3 - 2 + x^2 - x^3$  化簡之後為  $(1 - 2) + (-2)x + x^2 + (1 - 1)x^3 = -1 - 2x + x^2$ ，其次數為2（而非3）。

### 錯誤類型

1. 在多項式  $3x^2 - 2x + 1$  裡，一次項為  $-2x$ ，但會有少數學生憑直覺誤以為一次項為  $2x$ 。
2. 學生會誤以為  $x$  多項式  $ax^2 + bx + c$  的次數恆為2。

<b>A-8-3 多項式的四則運算：</b> 直式、橫式的多項式加法與減法；直式的多項式乘法（乘積最高至三次）；被除式為二次之多項式的除法運算。 <b>（補充說明）</b> 不涉及使用分離係數法。	a-IV-5
---	--------

先備：

連結：A-8-2、A-8-4、A-8-5

後續：

### 基本說明

1. 將兩個多項式的同類項相加（或相減），形成新的多項式，此過程稱為多項式的「加法」（或「減法」）。
2. 能以直式及橫式做多項式加法與減法。
3. 給定兩個同未知數的一元多項式，其乘法定義如下：
  - (1) 若此二多項式皆為常數多項式，其乘法定義與一般常數的乘法定義相同。
  - (2) 若一個多項式為常數多項式  $a$ ，而另一多項式的形式為  $bx^n$ ，其中  $a$  及  $b$  為常數、 $x$  為未知數、 $n$  為正整數，則其乘積定義為  $abx^n$ 。如  $3 \cdot (5x^4) = 15x^4$ 。
  - (3) 若一個多項式為  $ax^m$ ，而另一多項式的形式為  $bx^n$ ，其中  $a$  及  $b$  為常數、 $x$  為未知數、 $m$  及  $n$  為正整數，則其乘積定義為  $abx^{m+n}$ 。如  $(3x^2) \cdot (5x^4) = 15x^6$ 。
  - (4) 一般的情況，則利用分配律，將兩個多項式的乘積展開成上述三種形式的乘積的和。

如:

$$\begin{aligned}(x+2)(2x+1) &= x(2x+1)+2(2x+1) \\ &= x(2x)+x+2(2x)+2 \\ &= 2x^2+x+4x+2 \\ &= 2x^2+5x+2\end{aligned}$$

4. 能利用直式乘法來熟練多項式的乘法運算。(乘積之次數不超過三。)
5. 假設  $A$  為一元多項式而  $B$  為非零多項式，則存在兩個多項式  $Q$  及  $R$  使得
- (1)  $A = BQ + R$ ，
  - (2) 且多項式  $R$  的次數小於  $B$  的次數或為零多項式。
- 我們稱  $A$  為「被除式」、 $B$  為「除式」、 $Q$  為「商式」、 $R$  為「餘式」。
6. 能用長除法做被除式為二次之多項式除法運算。

### 條目範圍

1. 多項式乘法裡，乘積次數最高為三。
2. 除法中的被除式次數最高為二。
3. 不涉及使用分離係數法。

### 釋例

1. 計算  $(3x^2 - 5 + x) + (x^2 - 3x + 7)$ 。

橫式：

$$\begin{aligned}(3x^2 - 5 + x) + (x^2 - 3x + 7) &= 3x^2 - 5 + x + x^2 - 3x + 7 \\ &= (3x^2 + x^2) + (x - 3x) + (-5 + 7) \\ &= 4x^2 - 2x + 2\end{aligned}$$

直式：將多項式降幂排列，次數一樣的項對齊，如下

$$\begin{array}{r} 3x^2 + x - 5 \\ + ) x^2 - 3x + 7 \\ \hline 4x^2 - 2x + 2 \end{array}$$

2. 若有缺項（即係數為零），可補零以避免錯誤，如計算  $(3x^2 + 1) - (x^2 + x + 2)$ ：

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 0x + 1 \\ - ) x^2 + x + 2 \\ \hline 2x^2 - x - 1 \end{array}$$

3. 利用公式  $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$  計算  $(x+3)(2x+1)$ 。

$$\begin{aligned}(x+3)(2x+1) &= x \cdot (2x) + x \cdot 1 + 3 \cdot (2x) + 3 \cdot 1 \\ &= 2x^2 + 7x + 3\end{aligned}$$

4. 計算  $(2x^2 + x - 3)(3x - 1)$ 。



直式，從常數項開始算：

$$\begin{array}{r}
 2x^2 + x - 3 \\
 \times ) \quad 3x - 1 \\
 \hline
 -2x^2 - x + 3 \\
 \hline
 6x^3 + 3x^2 - 9x \\
 \hline
 6x^3 + x^2 - 10x + 3
 \end{array}$$

5. 求  $x^2 + 3x - 5$  除以  $x - 3$  的商式及餘式。

長除法：

$$\begin{array}{r}
 x + 6 \\
 x - 3 \overline{) x^2 + 3x - 5} \\
 \underline{x^2 - 3x} \phantom{- 5} \\
 6x - 5 \\
 \underline{6x - 18} \\
 13
 \end{array}$$

商式為  $x + 6$ ，餘式為  $13$ 。

在整數除法中，若  $a$  為被除數、 $b$  為除數、 $q$  為商、 $r$  為餘數，則  $a = bq + r$ ，且  $r$  是小於  $b$  的正整數或是  $0$ ，例如  $13 \div 5 = 2 \dots 3$  可寫成  $13 = 5 \times 2 + 3$ ，其中  $13$  為被除數、 $5$  為除數、 $2$  為商、 $3$  為餘數。

由此類比多項式的除法，可驗證  $x^2 + 3x - 5 = (x - 3)(x + 6) + 13$ 。

6. 在做長除法時，若有缺項，可補零以避免錯誤，如計算  $3x^2 - 5$  除以  $x + 1$ ：

$$\begin{array}{r}
 3x - 3 \\
 x + 1 \overline{) 3x^2 + 0x - 5} \\
 \underline{3x^2 + 3x} \phantom{- 5} \\
 -3x - 5 \\
 \underline{-3x - 3} \\
 -2
 \end{array}$$

7. 已知一多項式  $A$  用  $2x + 1$  去除得商式  $x + 2$  及餘式  $-3$ ，求多項式  $A$ 。

解：令  $B$ 、 $Q$ 、 $R$  分別代表題中的除式、商式、及餘式，則  $A$ 、 $B$ 、 $Q$ 、 $R$  之間的關係為  $A = BQ + R$ ，因此

$$\begin{aligned}
 A &= (2x + 1)(x + 2) + (-3) \\
 &= 2x^2 + 5x + 2 - 3 \\
 &= 2x^2 + 5x - 1
 \end{aligned}$$

### 錯誤類型

1. 學生在做長除法時常將加減混淆，犯下類似下例的錯誤。

$$\begin{array}{r} x \\ x-3 \overline{) x^2 + 3x - 5} \\ \underline{x^2 - 3x} \phantom{-5} \\ -5 \end{array}$$

- 基於過去整數除法的經驗，部分學生在長除法取商的時候會覺得係數要是整數，如用  $2x - 3$  去除  $3x^2 - 4$  時，取  $x$  為商，而非正確的  $\frac{3}{2}x$ 。
- 在除式為單項式時，部分學生會犯下面形式的錯誤。

$$\begin{array}{r} 3x + 2 + 1/x \\ x \overline{) 3x^2 + 2x + 1} \\ \underline{3x^2} \phantom{+ 1} \\ 2x + 1 \\ \underline{2x} \phantom{+ 1} \\ 1 \\ \underline{1} \\ 0 \end{array}$$

**A-8-4 因式分解：**因式的意義（限制在二次多項式的因式）；二次多項式的因式分解意義。

a-IV-6

先備：

連結：A-8-2, A-8-3, A-8-5

後續：

基本說明

- 能理解二次多項式的因式意義：一般而言，假設二次多項式  $A$  為被除式、 $B$  為除式時，餘式為  $0$ （亦即存在一多項式  $C$  使得  $A = B \cdot C$ ），我們便稱「 $A$  能被  $B$  整除」、「 $B$  整除  $A$ 」、「 $B$  為  $A$  的因式」、或「 $A$  為  $B$  的倍式」（此時  $C$  亦為  $A$  的因式）。
- 能理解二次多項式因式分解的意義：一般而言，「因式分解」是將一個多項式寫成一至數個多項式的乘積，而其中各多項式皆無法再降次分解。

條目範圍

因式分解僅限係數為有理數。

釋例

- 用  $x - 2$  去除  $x^2 - 3x + 2$  得商式  $x - 1$  餘式  $0$ ，因此  $x - 2$  為  $x^2 - 3x + 2$  的因式（ $x - 1$  亦為  $x^2 - 3x + 2$  的因式），而  $x^2 - 3x + 2$  為  $x - 2$  的倍式（ $x^2 - 3x + 2$  亦為  $x - 1$  的倍式）。
- 考慮  $2x^2 - 6x + 4$ 。因為

$$\begin{aligned} 2x^2 - 6x + 4 &= (2x - 2)(x - 2) \\ &= (x - 1)(2x - 4) \\ &= 2(x - 1)(x - 2) \end{aligned}$$

而且  $2$ 、 $x-1$ 、 $x-2$ 、 $2x-2$ 、 $2x-4$  等皆不可再降次分解，上列三式皆為  $2x^2 - 6x + 4$  的因式分解。（雖然  $2x-4=2(x-2)$ ，但  $x-2$  的次數與  $2x-4$  的次數相等，所以  $2x-4=2(x-2)$  並非  $2x-4$  的降次分解。事實上，任意一次多項式皆無法做降次分解。）

### 錯誤類型

部分學生會誤認為  $2$  不是  $3x^2 - 1$  的因式，或  $3x-3$  不是  $x(x-1)$  的因式。

<p><b>A-8-5 因式分解的方法：</b>提公因式法；利用乘法公式與十字交乘法因式分解。 (補充說明) 只處理整係數 <math>ax^2 + bx + c</math> 的因式分解或與乘法公式直接相關者，不處理一般二元齊次或二元非齊次式但有一次介入者。</p>	<p>a-IV-6</p>
--	---------------

先備：

連結：A-8-1, A-8-3, A-8-4, A-8-7

後續：

### 基本說明

1. 能利用分配律，以提出公因式的方法分解二次多項式。
2. 能利用 A-8-1 裡的二次乘法公式操作因式分解。
3. 能觀察係數以十字交乘法做二次多項式因式分解。

### 條目範圍

只考慮有理係數一元二次多項式的因式分解，或是 A-8-1 裡二次乘法公式的直接應用，不考慮二元齊次或非齊次多項式。

### 釋例

1. 提公因式法：

考慮  $(x+1)(2x-3)+(x-3)(2x-3)$ ，利用分配律  $ac+bc=(a+b)c$  可得

$$\begin{aligned} (x+1)(2x-3)+(x-3)(2x-3) &= [(x+1)+(x-3)](2x-3) \\ &= (2x-2)(2x-3) \end{aligned}$$

此即為  $(x+1)(2x-3)+(x-3)(2x-3)$  的一個因式分解。

2. 由乘法公式  $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$  可得  $x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x+3)(x-3)$ 。又如由

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \text{ 可得 } x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2。$$

3. 假設  $Ax^2 + Bx + C = (ax+b)(cx+d)$  是二次多項式  $Ax^2 + Bx + C$  的一個因式分解 ( $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  為常數)，比較係數可得  $A = ac$ 、 $B = ad + bc$ 、及  $C = bd$ 。其中一次項的係數關係可用圖表描述。

$$\begin{array}{r} ax \quad \quad b \\ cx \quad \quad d \\ \hline bcx + adx = (ad + bc)x \end{array}$$



連結：A-8-2, A-8-7

後續：F-9-1

### 基本說明

1. 若方程式經過移項化簡後可整理成形式為  $ax^2 + bx + c = 0$  的方程式，其中  $a$ 、 $b$ 、及  $c$  為常數且  $a \neq 0$ ，我們便稱此方程式為「一元二次方程式」。
2. 一般而言，給定一元二次方程式，若有實際的數，使得當我們將方程式中的未知數代入此數時，等式成立，我們便將此數稱做為此方程式的「解」（亦稱為「根」）。
3. 能在具體情境中列出一元二次方程式。

### 條目範圍

國中階段裡的一元二次方程式各係數以有理數為原則。

### 釋例

1.  $x^2 - 6x + 8 = 0$ 、 $x(x + 2) = 24$  皆為一元二次方程式，但  $x^2 + x - 7$ 、 $x^2 + 7 = x^2 + 3x + 5$  皆非一元二次方程式。（後者化簡後為  $3x - 2 = 0$ ，非二次方程式。）
2. 可以生活中的例子介紹一元二次方程式，如：已知一長方形的長比寬多 2 公分，而其面積為 24 平方公分，問寬為多少？假設此長方形寬為  $x$  公分，由問題的描述可知長為  $x + 2$  公分，面積為  $x(x + 2)$  平方公分，因此  $x(x + 2) = 24$ 。
3. 將  $x = 4$  代入  $x^2 - 6x + 8 = 0$  時，等式成立，因此，4 是方程式  $x^2 - 6x + 8 = 0$  的一個解。同理， $x = 2$  亦為此方程式的解。

### 錯誤類型

部份學生會以為  $x^2 + 7 = x^2 + 3x + 5$  是一元二次方程式。

<b>A-8-7 一元二次方程式的解法與應用：</b> 利用因式分解、配方法、公式解一元二次方程式；應用問題；使用計算機計算一元二次方程式根的近似值。
---

a-IV-6
--------

先備：A-7-3

連結：A-8-1, A-8-5

後續：

### 基本說明

1. 能利用因式分解解一元二次方程式。
2. 能利用配方法解一元二次方程式。
3. 能利用公式解一元二次方程式。
4. 能利用一元二次方程式解應用問題（需驗證根的合理性）。
5. 給定一元二次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$ ，當  $b^2 - 4ac > 0$  時，方程式有相異兩解；當  $b^2 - 4ac = 0$ ，方程式有一重根；當  $b^2 - 4ac < 0$  時，方程式無解。我們稱  $b^2 - 4ac$  為  $ax^2 + bx + c = 0$  的「判別式」。
6. 能利用計算機（配合公式解）估計一元二次方程式根的近似值。

## 釋例

1. 用因式分解解一元二次方程式的想法，基本上是下述性質的應用：若兩數  $A$  跟  $B$  的乘積為 0，則  $A$  等於 0 或  $B$  等於 0。因此，一元二次方程式  $(ax+b)(cx+d)=0$  的解有兩個，分別為一元一次方程式  $ax+b=0$  的解或  $cx+d=0$  的解，亦即解為  $x=-\frac{b}{a}$  或  $x=-\frac{d}{c}$ 。

2. 利用因式分解求  $2x^2 - 3x - 2 = 0$  的解。

解：  $2x^2 - 3x - 2$  的因式分解為  $(2x+1)(x-2)$ ，因此方程式  $2x^2 - 3x - 2 = 0$  有兩個解，分別為  $2x+1=0$  或  $x-2=0$  的解，亦即解為  $x=-\frac{1}{2}$  或  $x=2$ 。

3. 解一元二次方程式  $(x+1)^2 = 9$ 。

解：一般而言，若  $A^2 = B^2$ ，則  $A = B$  或  $A = -B$ 。因此，若  $(x+1)^2 = 9$ ，則  $x+1=3$  或  $x+1=-3$ 。化簡後得到  $x=2$  或  $x=-4$ 。

4. 配方法的基本想法是利用上例中「若  $A^2 = B^2$ ，則  $A = B$  或  $A = -B$ 」此性質，透過代數運算將一元二次方程式轉換成  $(x+a)^2 = b^2$  的形式，進而解出  $x = -a+b$  或  $x = -a-b$ 。

5. 利用配方法解  $2x^2 - 3x - 2 = 0$ 。

解：

(1) 先將常數移至等號右側，得到  $2x^2 - 3x = 2$ 。

(2) 等號兩側同除以二次項的係數，以使二次項係數變成 1：

$$\frac{2x^2 - 3x}{2} = \frac{2}{2},$$

化簡後得到  $x^2 - \frac{3}{2}x = 1$ 。

(3) 下一步的目標是將等號左側配方成  $(x+a)^2$  的形式。注意到  $(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ ，

比較一次項係數可知  $a = -\frac{3}{4}$ 。因此，我們將等號兩側同加  $\frac{9}{16}$ ，得到

$$x^2 + 2 \times \left(-\frac{3}{4}\right)x + \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = 1 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2, \text{ 進而得到 } \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} = \left(\frac{5}{4}\right)^2.$$

(4) 由「若  $A^2 = B^2$ ，則  $A = B$  或  $A = -B$ 」可得  $x - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$  或  $x - \frac{3}{4} = -\frac{5}{4}$ ，化簡後可知

$2x^2 - 3x - 2 = 0$  的解為  $x = 2$  或  $x = -\frac{1}{2}$ 。

6. 將上述配方法的過程完全符號化可得所謂的公式解：令  $ax^2 + bx + c = 0$  為一元二次方程

式。

- (1) 先將常數移至等號右側，得到  $ax^2 + bx = -c$ 。  
(2) 等號兩側同除以二次項的係數，以使二次項係數變成1：

$$\frac{ax^2 + bx}{a} = -\frac{c}{a},$$

化簡後得到  $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$ 。

- (3) 下一步的目標是將等號左側配方成  $(x+A)^2$  的形式。注意到  $(x+A)^2 = x^2 + 2Ax + A^2$ ，比

較一次項係數可知  $A = \frac{b}{2a}$ 。因此，我們將等號兩側同加  $\frac{b^2}{4a^2}$ ，得到

$$x^2 + 2 \times \frac{b}{2a} \times x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2},$$

進一步得到  $x + \frac{b}{2a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 。（假設  $b^2 - 4ac \geq 0$ 。）

- (4) 由「若  $A^2 = B^2$ ，則  $A = B$  或  $A = -B$ 」可知  $x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  或  $x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ，

亦即  $x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  或  $x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 。此即為  $ax^2 + bx + c = 0$  的公式解。（習慣

上將公式解簡寫成  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 。）

7. 用公式解  $2x^2 - 3x - 2 = 0$ 。

解：將  $a = 2$ 、 $b = -3$ 、 $c = -2$  代入公式解得

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2)}}{2 \times 2} \\ &= \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4} \end{aligned}$$

化簡後得  $x = 2$  或  $x = -\frac{1}{2}$ 。

8. 在推導  $ax^2 + bx + c = 0$  公式解過程中，其中一步驟為  $x + \frac{b}{2a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ 。當

$b^2 - 4ac < 0$ ，因為沒有任何一數的平方為負數，方程式無解；當  $b^2 - 4ac = 0$ ，則

$x + \frac{b}{2a} = 0$ ，或是  $x + \frac{b}{2a} = 0$ ，此時兩根同為  $-\frac{b}{2a}$ ，我們稱「方程式有重

根」；當  $b^2 - 4ac > 0$  時， $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  為相異兩數，方程式有相異兩根。

9. 一般所謂的黃金比例身材指的是「下半身跟全身的比等於上半身跟下半身的比」，其中上半身指的是肚臍以上，下半身則為肚臍以下。用計算機估計一位擁有黃金比例身材而身高為 170 公分的人，下半身有多長？

解：設下半身長為  $x$  公分，依題意可得

$$\frac{x}{170} = \frac{170 - x}{x},$$

化簡後得到一元二次方程式  $x^2 + 170x - 28900 = 0$ ，其公式解為

$$\begin{aligned} x &= \frac{-170 \pm \sqrt{170^2 + 4 \cdot 28900}}{2} \\ &= \frac{-170 \pm \sqrt{144500}}{2} \end{aligned}$$

用計算機估計解得  $x \approx 105$  或  $x \approx -275$ ，其中負數不合題意，因此下半身約為 105 公分。

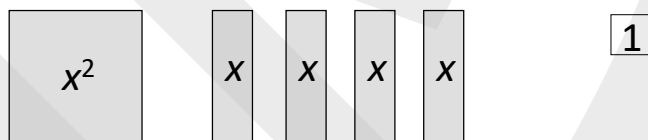
### 錯誤類型

1. 部份學生因為無法因式分解  $x^2 - 7$ ，而誤以為  $x^2 - 7 = 0$  無解。
2. 部份學生解  $x(x+1) = x(2x-1)$  時會將  $x$  消掉，而只得到  $x = 2$  的解。
3. 部份學生在用配方法解一元二次方程式時，忘記左右要同加一數，例如解  $x^2 + 4x = 3$  時誤寫為  $x^2 + 4x + 4 = 3$ 。類似情況也會發生在左右同乘一數。

### 探索

配方法奠基活動－從幾何圖形的觀點看配方法：

- (1) 如下圖所示  $x^2 + 4x$  需再加幾個 1 可以拼成正方形？請你畫畫看！



- (2)  $x^2 + 6x$  需再加幾個 1 可以拼成正方形？請你畫畫看！



**F-8-1 一次函數：**透過對應關係認識函數（不要出現  $f(x)$  的抽象型式）、常數函數（ $y = c$ ）、一次函數（ $y = ax + b$ ）。

f-IV-1

先備：A-7-6, G-7-1

連結：F-8-2

後續：F-9-1, F-9-2



## 基本說明

1. 認識函數可以是一對一、多對一的對應關係，但不可以一對多。
2.  $y$  是  $x$  的常數函數，即  $y = c$ 。
3.  $y$  是  $x$  的一次函數，即  $y = ax + b$ ，其中  $a \neq 0$ 。

## 條目範圍

不出現  $f(x)$ ， $g(x)$  等函數符號

## 釋例

1. 這是第一次介紹函數，學會函數的概念是國中學習函數的重點，因此應該多從生活的實例來介紹，什麼數量是什麼數量的函數。

例如：下表是將水加熱時，加熱的時間和水溫的表

時(分)	0	3	6	9	12	15	18
水(°C)	25	45	65	85	100	100	100

由表知，只要給定時間，就能得到水溫，因此溫度是時間的函數。反之，知道溫度是  $100^{\circ}\text{C}$ ，並不能完全知道加熱的時間，所以時間不是溫度的函數。

2. 本條目只處理一次函數，教學時可舉情境例，透過觀察對應關係的規律性，進而表徵為  $y = ax + b$ ，認識一次函數。

例如：下表是攝氏溫度與華氏溫度的對應表

攝氏溫度 (°C)	0	10	20	30	40	50	60
華氏溫度 (°F)	32	50	68	86	104	122	140

觀察出「攝氏每增加 10 度，華氏增加 18 度」，因此以  $x^{\circ}\text{C}$  代表攝氏溫度、 $y^{\circ}\text{F}$  代表華氏溫度，攝氏溫度與相對應的華氏溫度之關係  $y = 1.8x + 32$  (或  $y = \frac{9}{5}x + 32$ )，進而介紹關係如  $y = 1.8x + 32$  稱為一次函數。

3. 理解正比關係也是函數的一種。

## 錯誤類型

學生常誤認為  $y = c$  不是函數。

**F-8-2 一次函數的圖形：**常數函數的圖形；一次函數的圖形。

f-IV-1

先備：A-7-6, G-7-1

連結：F-8-1

後續：F-9-1, F-9-2

## 基本說明

1. 理解常數函數 ( $y = c$ ) 的圖形為水平線
2. 理解一次函數 ( $y = ax + b$ ) 的圖形為一條直線，但非水平線和鉛垂線。並且，當  $b = 0$  時此直線必過原點。
3. 能利用一次函數的圖形是直線，畫出一次函數的圖形。

## 釋例

1. 以描繪已知點的方法來繪製一次函數的圖形，如  $y = 3$ 、 $y = \frac{9}{5}x$  和  $y = \frac{9}{5}x + 32$ ，並觀察其圖形成一直線的現象。
2. 透過描繪  $y = ax$  的圖形，理解此類  $y = ax$  的函數圖形必過原點，進而認識正比關係 ( $a \neq 0$ ) 的函數圖形是過原點的斜直線。

## 錯誤類型

學生常誤認為  $y = \frac{1}{x}$  也是一次函數。

**D-8-1 統計資料處理：**累積次數、相對次數、相對累積次數折線圖。

n-IV-9

d-IV-1

先備：D-7-1, D-7-2

連結：

後續：D-9-1, D-9-2, D-9-3

## 基本說明

1. 將資料發生的「次數」或「人數」視需要加以排序或分組整理而成的表格統稱為次數分配表。「相對次數」是將各筆或各組資料的次數除以總次數所得的比值。
2. 「累積次數」為經排序或分組整理後，依序累加至各筆或各組資料的次數；「累積相對次數」則為依序累加至各筆或各組的相對次數。累積次數或相對累積次數可以讓人知道資料在整體中所佔的相對位置。
3. 知道將幾份同類資料合併時，平均數的計算方式，並知道這只和各資料次數占總次數的相對比例有關。

## 釋例

1. 中山國中三年一班的數學科第一次段考成績總表，如下表：

表 1、三年一班的數學科第一次段考成績總表

座號	1	2	3	4	5	6	7	8
成績	5	64	35	78	36	43	44	82
座號	9	10	11	12	13	14	15	16
成績	83	48	52	55	58	64	65	68
座號	17	18	19	20	21	22	23	24

成績	69	70	74	35	79	80	78	45
座號	25	26	27	28	29	30		
成績	47	33	84	75	85	89		

老師若想瞭解成績分布情形，可以把成績整理成如下的統計表。

表 2、三年一班各組成績次數表

分數	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
次數	1	4	8	11	6

全班人數=30

習慣上，0~20 這一組是指成績大於或等於 0 分且小於 20 分的學生；

20~40 這一組是指成績大於或等於 20 分且小於 40 分的學生；

40~60 這一組是指成績大於或等於 40 分且小於 60 分的學生；

60~80 這一組是指成績大於或等於 60 分且小於 80 分的學生；

80~100 這一組是指成績大於或等於 80 分且小於或等於 100 分的學生。

表 3、三年一班各組成績相對次數表

分數	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
相對次數	0.03	0.13	0.27	0.37	0.20

表 4、三年一班各組成績累積次數表

分數	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
累計次數	1	5	13	24	30

表 5、三年一班各組成績累積相對次數表

分數	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
累計相對次數	0.03	0.16	0.43	0.80	1.00

2. 製作次數折線圖或相對次數折線圖時，習慣上會以組中點(各組中點)來代表該組之資料值(圖 1 和圖 2)而在製作累積次數折線圖，或累積相對次數折線圖時，則常以各組的右端點來取折點，這樣才符合累積的意義(圖 3 和圖 4)。

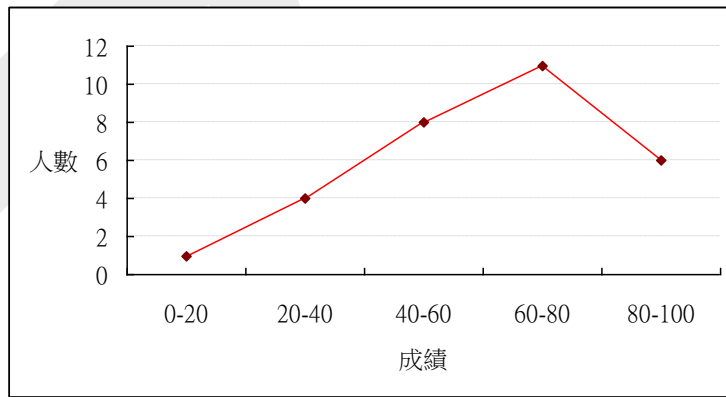


圖 1、三年一班各組成績次數折線圖

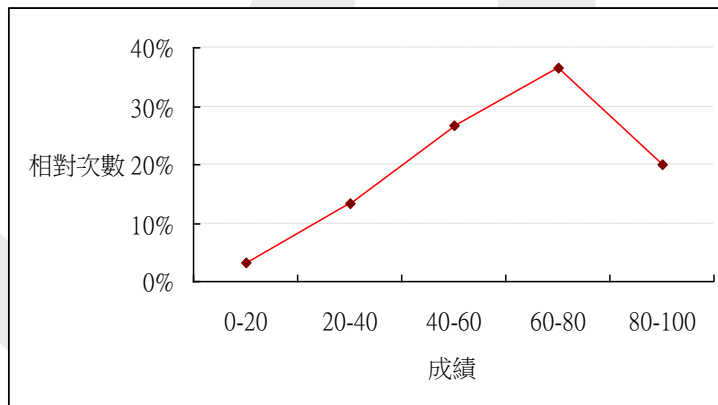


圖 2、三年一班各組成績累積相對次數折線圖

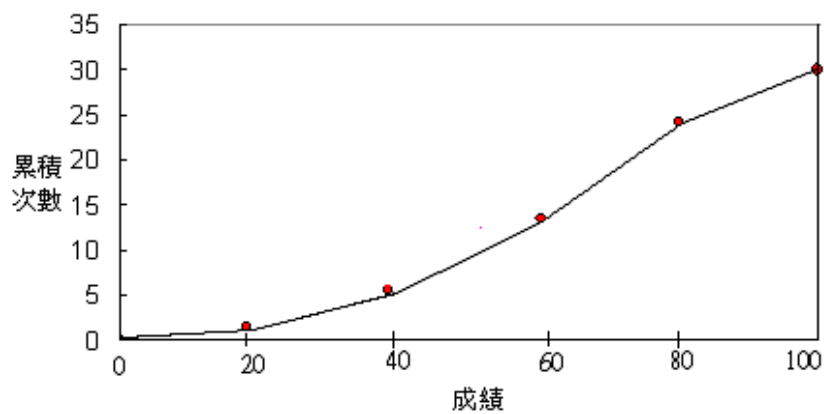


圖 3、三年一班各組成績累積次數折線圖

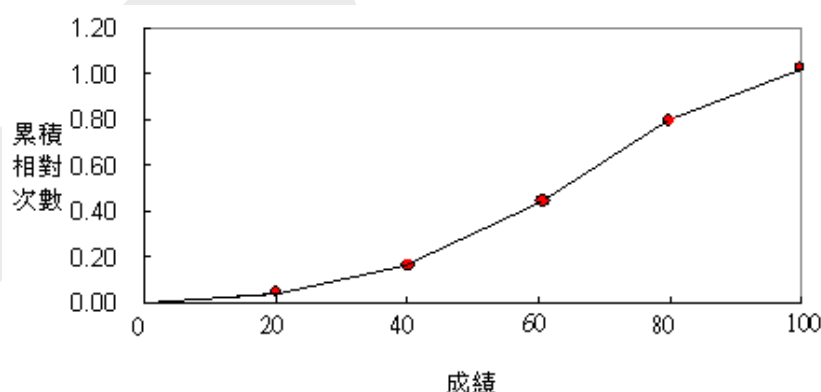


圖 4、三年一班各組成績累積相對次數折線圖

3. 在沒有特定的使用目的限制下，習慣上，組距的大小可以(最大值－最小值)÷(組數)來參考訂定。重點是，統計圖表要能協助使用者清楚呈現他想表達的資訊。

### 錯誤類型

當將連續資料整理成各組資料的次數分配表時，學生常誤解組間邊界數據的處理。例如：表一中的座號 22 號的成績為 80 分，學生可能計算分組的累積次數時，誤將他計入 60~80 的分組次數。

### 探索

可就發生的事件實例，製作(相對)累積次數統計圖表，並探索數據中的涵義。例如：某一學校學生每日使用手機的時數與全國的學生做比較，透過(相對)累積次數統計圖表可觀察出其差異性。

**N-9-1 連比：**連比推理；連比例式；連比的紀錄；及其基本運算與相關應用問題；涉及複雜數值時使用計算機協助計算。

n-IV-4  
n-IV-9

先備：N-7-9

連結：S-8-8、S-9-2、S-9-3

後續：G-10-7

### 基本說明

1. 連比、連比例式常用來表明三個數量間的比例關係。
2. 設  $a$ 、 $b$ 、 $c$  是不為 0 的數，則  $a:b:c$  稱為此三個數的連比。
3. 連比例式  $x:y:z = a:b:c$  表示  $x:y = a:b$ ， $y:z = b:c$ ， $x:z = a:c$ 。
4. 由  $x:y = a:b$ ， $y:z = c:d$  的條件，求得  $x:y:z$  的連比例。

### 條目範圍

刪除繁分數，計算上若有兩分數的比值問題，則須轉換回分數的除法處理之。

## 錯誤類型

1. 已知  $a:b:c=5:3:7$ ，學生可能會誤解成  $a=5$ 、 $b=3$ 、 $c=7$ ，或誤解  $a$ 、 $b$ 、 $c$  皆大於 0。
2. 已知  $a$ 、 $b$ 、 $c$  滿足  $2a=3b=4c$ ，學生可能會誤解成  $a:b:c=2:3:4$ 。
3. 在連比例式中誤用「內項乘積=外項乘積」的運算方法。  
例如：已知  $a:b:c=5:6:7$ ，學生可能會誤解成  $7a=6b=5c$ 。

## 釋例

1.  $a:b=1:2$ ， $b:c=3:4$ ，則  $a:b:c=3:6:8$ 。

2. 已知  $a:b:c=5:3:7$ ，則

■  $a=5k$ 、 $b=3k$ 、 $c=7k$ ， $k \neq 0$ 。

■  $\frac{a}{5} = \frac{b}{3} = \frac{c}{7}$ 。

3. 已知  $a$ 、 $b$ 、 $c$  滿足  $2a=3b=4c$ ，則  $a:b:c = \frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{4}$ 。

4.  $A$ 、 $B$  兩個正方形的面積比為  $25:12$ ，而  $C$ 、 $B$  兩個正方形的面積比為  $3:4$ ，請問  $A$ 、 $C$  兩個正方形的邊長比為何？

因為  $C$ 、 $B$  兩個正方形的面積比為  $3:4$ ，所以  $B$ 、 $C$  兩個正方形的面積比為  $4:3=12:9$ ，因此  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三個正方形的面積連比為  $25:12:9$ ，我們就知道  $A$ 、 $C$  兩個正方形的面積比為  $25:9$ ，邊長比為  $5:3$ 。

我們也可利用  $A$ 、 $B$  兩個正方形的面積比為  $25:12$ ，而  $C$ 、 $B$  兩個正方形的面積比為  $3:4$ ，得到

$$A \text{ 的面積} = B \text{ 的面積} \times \frac{25}{12}$$

$$C \text{ 的面積} = B \text{ 的面積} \times \frac{3}{4}$$

因此， $A$  的面積： $C$  的面積  $= (B \text{ 的面積} \times \frac{25}{12}) : (B \text{ 的面積} \times \frac{3}{4}) = \frac{25}{12} : \frac{3}{4} = 25:9$

故  $A$ 、 $C$  兩個正方形的面積比為  $25:9$ ，邊長比為  $5:3$ 。

5.  $\triangle ABC$  中， $\overline{AB}$ ， $\overline{BC}$ ， $\overline{CA}$  三邊長分別為 10，12，15，則其邊上的高之比為

$$\frac{1}{10} : \frac{1}{12} : \frac{1}{15} = 6:4:5。$$

6. 現有一些 100 元，500 元，1000 元的鈔票，合計 16500 元。已知 100 元，500 元，1000 元的鈔票的張數比為  $5:4:3$ ，請問各有多少張？

## 評量

連比在評量的設計上，若出現繁分數，則需轉換回分數的除法處理之，避免直接套用算則。

## 探索

由新台幣與美元、新台幣與日圓的匯率換算，求出新台幣、美元、日圓的幣值比，必要時可使用計算機。

<b>S-9-1 相似形</b> ：平面圖形縮放的意義；多邊形相似的意義；對應角相等；對應邊長成比例。	S-IV-6
---	--------

先備：S-6-1、S-8-4、S-8-5、S-8-8

連結：S-9-2、S-9-3、S-9-4

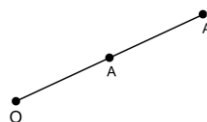
後續：G-10-6

## 基本說明

1. 透過圖形的縮放了解縮放後的邊長成比例，對應角仍不變。
2. 將圖形縮放中心點位置的不同，隨之產生對應的縮放圖形的位置也會有不同。若縮放比例固定，則這些縮放後的圖形皆全等。
3. 能理解兩個平面圖形，若其中一個經過縮放動作後，和另一個圖形全等，則稱這兩個平面圖形相似。此時，這兩個平面圖形之對應角相等，且對應邊長成比例。
4. 兩個邊數相同的多邊形，若對應角相等且對應邊長成比例時，則這兩個多邊形會相似。

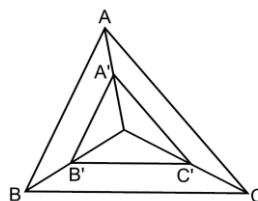
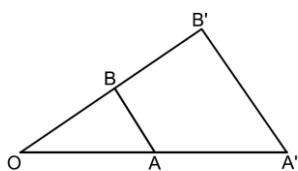
## 釋例

1. 如下圖，在平面上固定一點  $O$ ，任意取一點  $A$ ，在  $\overline{OA}$  上取一點  $A'$  使得  $\overline{OA'} = 2\overline{OA}$ ，稱  $A'$  是以  $O$  為中心將  $A$  縮放 2 倍的點。



2. 將平面圖形上的任一點，由  $O$  縮放 2 倍的結果，就是由  $O$  將此平面圖形縮放 2 倍後的圖形。

例如：下圖表示由  $O$  將  $\overline{AB}$  縮放 2 倍的情形，下圖表示由  $O$  將  $\triangle ABC$  縮放  $\frac{1}{2}$  倍的結果：



3. 在 S-6-1，比例思考的應用，「幾倍放大圖」、「幾倍縮小圖」。知道縮放時，對應角相等，對應邊成比例。因此，本細目要求能由推理來理解下面的性質：
  - (1) 任意的縮放，將直線變成直線。
  - (2) 將一直線縮放  $r$  倍後，若此直線和原直線是相異的二條直線，則這二條直線平行。
  - (3) 任意  $r$  倍的縮放，將任一長度為  $l$  的線段變成另一長度為  $rl$  的線段。
  - (4) 任意的縮放，將一角度變成另一角，同時角度的度數不變。

- (5) 任何圖形，經過一  $r$  倍的縮放，雖然縮放的中心點不同，但所得到的圖形會全等，因此通常在談論圖形縮放的性質時，通常不會特別提及中心點。
4. 全等必相似，相似不一定全等！
  5. 透過實物的操作，讓學生熟悉兩相似多邊形經對稱或旋轉後，能判斷出對稱點，對於日後較能找出對應邊長比。
  6. 任意兩個正  $n$  邊形，因為對應角皆相等，且對應邊長皆成比例，故這兩正  $n$  邊形會相似。

### 錯誤類型

1. 學生誤以為兩個長方形相似。
2. 學生誤以為兩個菱形相似。
3. 學生誤以為兩個等腰三角形相似。
4. 學生誤以為兩個直角三角形相似。

### 探索

以 A4 的紙張對摺後仍相似，探討邊長比的值。探討紙張 A3 與 A4 的關係。

<p><b>S-9-2 三角形的相似性質：</b>三角形的相似判定 (AA、SAS、SSS)；相似的符號 <math>\sim</math>，對應邊長之比 = 對應高之比；對應面積之比 = 對應邊長平方之比；利用三角形相似的概念解應用問題。</p>	<p>s-IV-10</p>
--	----------------

先備：S-6-1、S-8-4、S-8-5、S-8-8

連結：S-9-3、S-9-4、S-9-5

後續：G-10-6

### 基本說明

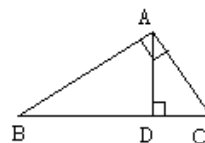
1. 理解三角形的 AA、SAS、SSS 等相似性質。
2. 使用相似符號『 $\sim$ 』記錄兩相似三角形。
3. 理解兩相似三角形中，對應邊長之比 = 對應邊高之比，及對應面積之比 = 對應邊長平方比。

### 釋例

1. 透過製作兩相似三角形的教具讓學生觀察發現，透過平移、旋轉與翻轉後的位置關係。
2. 相似三角形性質的證明，透過將原三角形縮放後與另一個三角形全等，則兩圖形相似。例如：SAS 相似性質說明如下：兩個三角形有兩組對應邊長成比例，兩對應邊的夾角相等，若兩組對應邊長的比例的比值為  $r$ ，將其中之一的三角形縮放  $r$  倍，則縮放後的三角形與另一個三角形成 SAS 全等；因此得到相似。其他如 AA，SSS 等相似的性質亦可如上述方式給於證明。
3. 三角形中只要有兩組對應角相等，則第三組對應角也相等；因此不需要三組對應角相等。
4. 對直角三角形，能利用斜邊上的高來做出或找出相似三角形，也就是說若直角三角形  $\triangle ABC$  中， $\angle A = 90^\circ$  且  $AD$  為斜邊  $BC$  上的高，則  $\triangle ABC \sim \triangle DBA \sim \triangle DAC$ ，

此時  $\overline{AB}^2 = \overline{BC} \times \overline{BD}$ ， $\overline{AC}^2 = \overline{BC} \times \overline{DC}$ ， $\overline{AD}^2 = \overline{BD} \times \overline{CD}$ 。

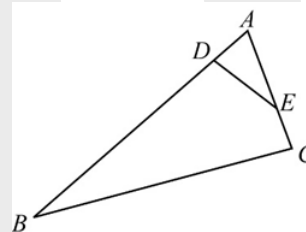
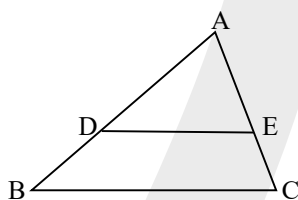
直角三角形母子相似視為相似三角形的應用，不視為公式，讓學生學習掌握相似後對應邊長比的關係遠勝於公式背誦。



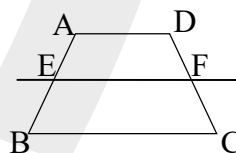
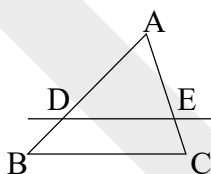


## 錯誤類型

- 學生對於在三角形內做平行線截出相似三角形容易接受， $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，則 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，如下圖所示；但是對於做截線但不平行底邊時( $\overline{DE}$  不平行  $\overline{BC}$ )，其中一截角( $\angle ADE$ )等於底邊另一底角( $\angle C$ )時，因為 $\angle A$  是公共角，依據 AA 相似， $\triangle ADE \sim \triangle ACB$ ，容易出現迷思概念，對應點與對應邊容易對錯；如下圖所示。



- 在三角形內做一平行底邊的直線可截出一組小三角形與原三角形相似( $\triangle ADE$  與  $\triangle ABC$ )；但是對梯形做一平行線平行下底時，小梯形與原梯形不會相似( $AEFD$  不相似  $ABCD$ )。



## 評量

直角三角形母子相似視為相似三角形的應用，不適合將母子相似的關係式做為後續再推論。例如利用直角三角形母子相似關係式證明畢氏定理。

**S-9-3 平行線截比例線段：**連接三角形兩邊中點的線段必平行於第三邊（其長度等於第三邊的一半）；平行線截比例線段性質；利用截線段成比例判定兩直線平行；平行線截比例線段性質的應用。

s-IV-6  
s-IV-10

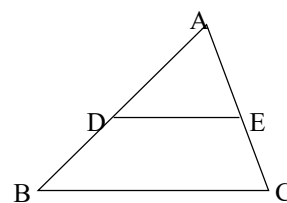
先備：S-6-1、N-7-9， S-8-4， S-8-5， S-8-8

連結：S-9-4， S-9-5

後續：G-10-6

## 基本說明

- 連接三角形兩邊中點的線段必平行於第三邊，且長度等於第三邊的一半。
- 平行線截比例線段性質：設一直線平行於三角形的一邊，且與另兩邊相交，則此直線把這兩邊截成比例的線段。



在 $\triangle ABC$ 中 $D$ 在 $\overline{AB}$ 上， $E$ 在 $\overline{AC}$ 上，且 $\overline{DE}$ 平行於 $\overline{BC}$ ，則

$$\overline{AD} : \overline{DB} = \overline{AE} : \overline{EC}$$

$$\overline{AD} : \overline{AB} = \overline{AE} : \overline{AC}$$

$$\overline{AB} : \overline{DB} = \overline{AC} : \overline{EC}$$

而且，更進一步可得到  $\overline{AD} : \overline{AB} = \overline{DE} : \overline{BC}$

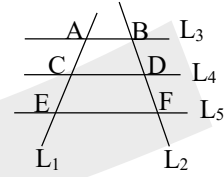
稱為平行線截比例線段性質。

3. 已知直線 $L_3$ 、 $L_4$ 、 $L_5$ 互相平行，

而且直線 $L_1$ 與 $L_3$ 、 $L_4$ 、 $L_5$ 分別交於 $A$ 、 $C$ 、 $E$ ，

直線 $L_2$ 與 $L_3$ 、 $L_4$ 、 $L_5$ 分別交於 $B$ 、 $D$ 、 $F$ ，

則 $\overline{AC} : \overline{CE} = \overline{BD} : \overline{DF}$ ，(2)與(3)皆稱為平行線截比例線段性質。



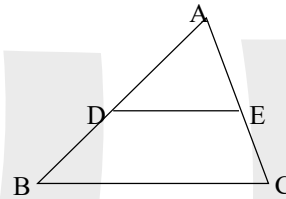
4. 能利用截線段成比例線段來判別兩直線是否平行：若一直線把一個三角形的兩邊截成比例線段，則這直線必平行於此三角形的第三邊。

在 $\triangle ABC$ 中 $D$ 在 $\overline{AB}$ 上， $E$ 在 $\overline{AC}$ 上，

且 $\overline{AD} : \overline{DB} = \overline{AE} : \overline{EC}$  (或  $\overline{AD} : \overline{AB} = \overline{AE} : \overline{AC}$

或  $\overline{AB} : \overline{DB} = \overline{AC} : \overline{EC}$ ) 成立時，

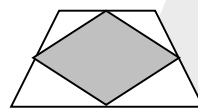
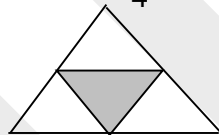
則 $\overline{DE}$ 平行於 $\overline{BC}$ ，並且 $\overline{AD} : \overline{AB} = \overline{DE} : \overline{BC}$ 。



### 釋例

1. 教師可讓學生讀題與讀圖，透過提問釐清關係。
2. 經過三角形一邊的中點且平行於另一邊的直線，一定通過第三邊中點。
3. 三角形中做一平行線平行底邊可截出比例線段，可以使用等高的三角形面積比等於底邊長的比，或者利用相似三角形對應邊成比例來說明。
4. 三角形或四邊形各邊中點連線所成的多邊形的面積和原多邊形面積的關係，如下圖：左圖

中灰色三角形面積是原三角形的 $\frac{1}{4}$ ，右圖中灰色四邊形面積為原四邊形的 $\frac{1}{2}$ 。



5. 進行比的運算時讓學生再複習比例式的計算，以利學生後續學習。
6. 平行線截比例線段的逆敘述，當成比例線段時，證明平行的結果；可以採取窮舉法證明兩點重合。亦可使用當線段成比例時，則兩三角形面積相等，由於同底，所以高一定相等，則兩線一定平行。如下圖所示：

$\triangle ABC$ 中，若 $\overline{AD} : \overline{DB} = \overline{AE} : \overline{EC}$

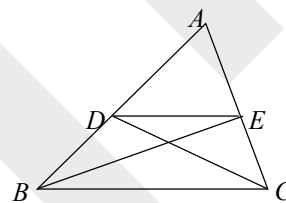
則 $\triangle ADE : \triangle BDE = \triangle ADE : \triangle CDE$

可得 $\triangle BDE = \triangle CDE$  (面積相等)

由於 $\triangle BDE$ 與 $\triangle CDE$ 有相同的底 $\overline{DE}$ ，

因為面積相等，所以高相等；

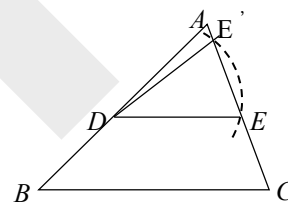
則 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$



7. 若 $\overline{AD} : \overline{AB} = \overline{DE} : \overline{BC}$ ，則 $\overline{DE}$ 不一定平行 $\overline{BC}$ 。

若 $\overline{AB} > \overline{AC}$ ，以 $D$ 點為圓心， $\overline{DE}$ 為半徑，交 $\overline{AC}$ 與 $E'$

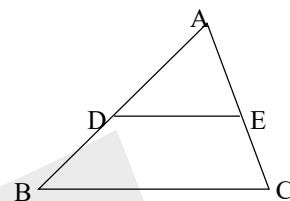
則 $\overline{DE} = \overline{DE}'$



$\overline{AD} : \overline{AB} = \overline{DE} : \overline{BC}$ ，則  $\overline{DE}$  不平行  $\overline{BC}$ 。

### 錯誤類型

如右圖，學生誤以為若  $\overline{AD} : \overline{AB} = \overline{DE} : \overline{BC}$ ，則  $\overline{DE}$  平行  $\overline{BC}$ 。



<p><b>S-9-4 相似直角三角形邊長比值的不變性：</b>直角三角形中某一銳角的角度決定邊長比值，該比值為不變量，不因相似直角三角形的大小而改變；三內角為「<math>30^\circ, 60^\circ, 90^\circ</math>」其邊長比為「<math>1:\sqrt{3}:2</math>」；三內角為「<math>45^\circ, 45^\circ, 90^\circ</math>」其邊長比為「<math>1:1:\sqrt{2}</math>」。</p>	<p>s-IV-10 s-IV-12</p>
--	----------------------------

先備：S-8-6、S-8-8

連結：N-9-1，S-9-1，S-9-2，S-9-3、S-9-5

後續：G-10-6

### 基本說明

1. 任何一個有固定銳角角度的直角三角形，其任兩邊長的比值皆為不變量，不因相似直角三角形的大小而改變。
2. 能理解直角三角形三內角為「 $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ 」，其邊長比為「 $1:\sqrt{3}:2$ 」。
3. 能理解直角三角形三內角為「 $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ 」，其邊長比為「 $1:1:\sqrt{2}$ 」。

### 條目範圍

不處理直角三角形中，不同角度時兩對應邊對應的比值，隨之變大或小。

### 釋例

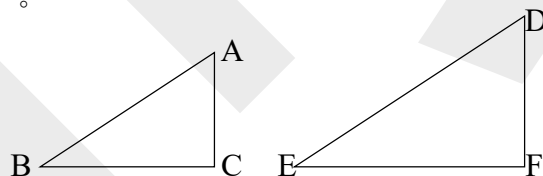
1. 兩個直角三角形只要其中之一銳角相等，則這兩個直角三角形相似(AA 相似)。
2. 如下圖所示，直角 $\triangle ABC$  與直角 $\triangle DEF$  中，已知  $\angle C = \angle F = 90^\circ$ ，且  $\angle B = \angle E$ ，則  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ (AA 相似)；可得對應邊成比例，

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} ; \overline{AC} : \overline{DF} = \overline{BC} : \overline{EF} = \overline{AB} : \overline{DE}。$$

也可表示成：

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{DE}}, \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{DE}}, \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{EF}}$$

此三項比值不因相似直角三角形的大小而改變。



3. 給於直角三角形，三內角為「 $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ 」，其對應邊長比為「 $1:\sqrt{3}:2$ 」。例如：直角三角形中，三內角為「 $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ 」，且斜邊長為4，能利用邊長比為「 $1:\sqrt{3}:2$ 」求出另兩邊的長。

4. 給於直角三角形，三內角為「 $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ 」，其邊長比為「 $1:1:\sqrt{2}$ 」。例如：直角三角形中，三內角為「 $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ 」，且斜邊長為2，能利用邊長比為「 $1:1:\sqrt{2}$ 」求出另兩邊的長。

### 錯誤類型

學生容易誤記「 $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ 」的對應邊連比例式為 $1:2:\sqrt{3}$ 或 $1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$

<p><b>S-9-5 直角三角形的三角比：</b>對直角三角形的一個銳角定義「斜邊」、「鄰邊」、「對邊」，並引入符號 <math>\tan A</math>、<math>\sin A</math>、<math>\cos A</math>；直角三角形內，給定一邊的長和一個銳角的角度，決定另一邊的邊長；學生無使用計算機時，角度限於 30 度、45 度、60 度。</p> <p><b>(補充說明)</b> 本條目只限於直角三角形內，不應出現畫輔助線成為直角三角形的情形。即使是如「等腰三角形三邊長為 5, 5, 6，求底角的 <math>\sin</math> 值」的問題，都不應出現。</p>	<p>s-IV-12 n-IV-9</p>
---	---------------------------

先備：S-8-6、S-8-8

連結：N-9-1、S-9-1、S-9-2、S-9-3、S-9-4

後續：G-10-6

### 基本說明

1. 認識直角三角形的斜邊，以及指定某一銳角，此銳角之鄰邊與對邊的意義。
2. 直角三角形中，給定一銳角  $A$ ，則任兩對應邊的比值不變。並認識符號  $\tan A = \frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}$ 、 $\sin A = \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}$ 、 $\cos A = \frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}$  的意義。
3. 直角三角形中，給定一銳角  $A$ ，能使用計算機得出  $\tan A$ 、 $\sin A$  和  $\cos A$  的值，當給定其中一邊的長，能選擇適合的三角比，求出其他兩邊的長；唯當無計算機使用時，銳角  $A$  的角度僅限於 30 度、45 度和 60 度。

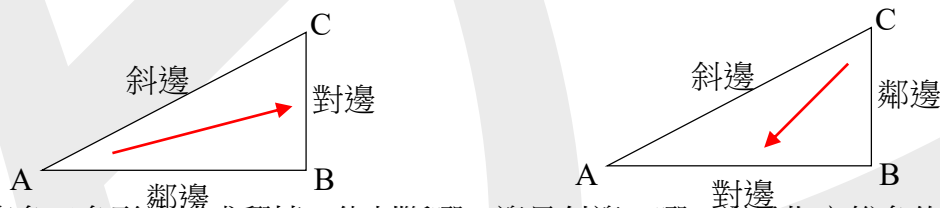
### 條目範圍

3. 直角三角比只限於  $\tan A = \frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}$ 、 $\sin A = \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}$  和  $\cos A = \frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}$  三種。
4. 在本條目不介紹平方關係、商數關係、餘角關係。
5. 勿介紹符號  $\tan A$ 、 $\sin A$ 、 $\cos A$  的中文名稱，即不出現正切、正弦、餘弦等名稱。
6. 只限於直角三角形下求  $\tan A$ 、 $\sin A$ 、 $\cos A$  的值，勿使用畫輔助線的形式求三角比的值。例如：不宜出現給定等腰三角形的三邊長，求  $\tan A$ 、 $\sin A$ 、 $\cos A$  的值。
7. 不討論角度變化時，三角比( $\tan A$ 、 $\sin A$ 、 $\cos A$ )的值之遞增或遞減。

### 釋例

1. 如下圖所示：給定  $\angle A$ ， $\overline{AC}$  是  $\angle A$  的斜邊， $\overline{AB}$  是  $\angle A$  的鄰邊， $\overline{BC}$  是  $\angle A$  的對邊。

給定 $\angle C$ ， $\overline{AC}$ 是 $\angle C$ 的斜邊， $\overline{BC}$ 是 $\angle C$ 的鄰邊， $\overline{AB}$ 是 $\angle C$ 的對邊



2. 將直角三角形旋轉或翻轉，能判斷哪一邊是斜邊，哪一邊是指定銳角的對邊或鄰邊。

3. 直角三角形 $ABC$ 中，若 $\angle B=90^\circ$ ， $\overline{AC}=9$ ， $\overline{AB}=6$ ，求 $\sin A$ 之值。

由畢氏定理可得 $\overline{BC}=\sqrt{9^2-6^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$ ，所以 $\sin A=\frac{3\sqrt{5}}{9}=\frac{\sqrt{5}}{3}$ 。

4. 直角三角形中，一銳角為 $30^\circ$ ，已知斜邊長為 $12$ ，求鄰邊的長。

由於 $\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，依據 $\cos A$ 值 $=\frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}$ ，所以 $\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\text{對邊}}{12}$ ，得到 $\text{對邊}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 12=6\sqrt{3}$ 。

5. 學生能使用計算機得到任一銳角的直角三角比，並理解所得的結果可能為近似值。

例如： $\sin 60^\circ \doteq 0.8660254$ ，此為 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的近似值。

6. 直角三角形中，一銳角為 $28^\circ$ ，已知斜邊長為 $12$ ，求對邊的長。

依據 $\sin A$ 值 $=\frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}$ ，使用計算機算出對邊 $=12\times\sin 28^\circ \doteq 5.634$ (四捨五入取到小數點後第三位)。

### 錯誤類型

學生對於直角三角形中斜邊、鄰邊與對邊的意義容易有迷思概念。

### 評量

只限於給定銳角求邊長的比值，或是給定銳角及其中一邊的長，求出其他邊的長。

### 探索

結合校園數學步道，做實際測量，包括測量樓高、旗桿高、...

<b>S-9-6 圓弧長與扇形面積</b> ：以 $\pi$ 表示圓周率；弦、圓弧、弓形的意義；圓弧長公式；扇形面積公式。	s-IV-14
---	---------

先備：S-8-1、S-8-4、S-8-7

連結：S-9-7、S-9-12、S-9-14

後續：G-10-3、N-11A-1

### 基本說明

1. 認識弦、圓弧、弓形、扇形的意義。

2. 圓弧長度 $=2\times$ 半徑 $\times\pi\times\frac{q}{360}$ ，圓弧所對的圓心角為 $q^\circ$

3. 扇形面積 = 半徑×半徑× $\pi$ × $\frac{q}{360}$ ，扇形的圓心角為 $q^\circ$

### 釋例

1. 處理扇形面積可以從切割圓形的概念發展。將圓對切、切四等份、切八等份；讓學生觀察發現切割後的扇形面積與圓形面積的關係；進而發現扇形面積等於圓形面的一部分，這一部分的比率與扇形的圓心角佔360度的比率相同。
2. 圓心角120度的扇形，圓半徑為12單位，求此扇形面積。

因為120度的扇形，佔圓形面積比例為 $\frac{120}{360} = \frac{1}{3}$ ，

而圓形面積=半徑×半徑× $\pi$ = $12 \times 12 \times \pi = 144\pi$

扇形面積= $144\pi \times \frac{1}{3} = 48\pi$

3. 圓心角120度的扇形，圓半徑為12單位，求此扇形周長。

因為120度的扇形佔圓形面積比例為 $\frac{120}{360} = \frac{1}{3}$ ，

而圓形周長= $2 \times$ 半徑× $\pi$ = $2 \times 12 \times \pi = 24\pi$

扇形是弧長加上2邊的半徑所圍成的圖形。

扇形周長= $24\pi \times \frac{1}{3} + 12 + 12 = 24 + 8\pi$

4. 一樣的圓心角因半徑長不同，弧長隨之不同。

5. 扇形面積 = 半徑×半徑× $\pi$ × $\frac{q}{360} = \frac{1}{2} \times$ 扇形的圓弧長度×半徑，其中扇形的圓心角為 $q^\circ$

### 錯誤類型

1. 半徑不是弦，但是存在有半徑長度的弦。
2. 扇形是兩條半徑與一圓弧所圍成的圖形。看起來像扇子，但不是由兩條半徑所圍出來的圖形就不能稱扇形。  
對於扇形的周長，學生經常忽略兩條半徑。

**S-9-7 圓的幾何性質：**圓心角、圓周角與所對應弧的度數三者之間的關係；圓內接四邊形對角互補；切線段等長。

s-IV-14

先備：S-8-1、S-8-4、S-8-7

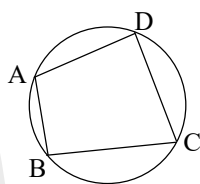
連結：S-9-6、S-9-12、S-9-14

後續：G-10-3、N-11A-1

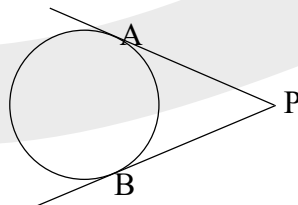
### 基本說明

1. 認識圓心角、圓周角與所對的弧的度數等名詞的意義。
2. 能理解圓心角的度數等於所對弧的度數。

3. 能理解同一弧所對的圓周角都是所對圓心角的一半。
4. 能理解圓內接四邊形(可以稱這四點共圓)的對角互補。如下圖所示，四邊形 ABCD 為圓內接四邊形，則  $\angle A + \angle C = 180^\circ$ ， $\angle B + \angle D = 180^\circ$



5. 過圓外一點的兩切線段等長。  
P 是圓外一點，自 P 點對圓做二條切線；分別交圓於 A、B 兩點；則  $\overline{PA} = \overline{PB}$



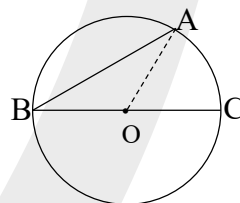
### 條目範圍

1. 本單元不介紹弦切角，圓內角，圓外角。
2. 不介紹圓幕性質。

### 釋例

1. 在一圓中，以角的頂點位置判斷角的名稱，頂點在圓心的角謂之圓心角，頂點在圓周上的角謂之圓周角。
2. 以量角器為例，將半圓周分成180等份，認識1度的弧與1度的圓心角。
3. 圓周角度數的求法可以分成三種模式：圓心在弦上，圓心在圓周角內，圓心在圓周角外。

第一種情況是圓心在  $\angle ABC$  的邊上，連接  $\overline{OA}$ ，則  $\triangle OAB$  是等腰三角形(因為  $\overline{OA} = \overline{OB}$ )  
所以， $\angle B = \angle BAO$ ，且  $\angle AOC = \angle B + \angle BAO = \angle B + \angle B = 2\angle B$   
由於  $\angle AOC = AC$  弧的度數，因此  $2\angle B = AC$  弧的度數  
所以  $\angle B = \frac{AC \text{ 弧的度數}}{2}$

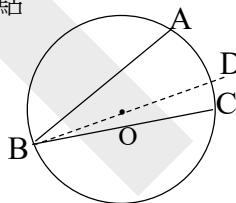


第二種情況是圓心在  $\angle ABC$  內，連接  $\overline{BO}$  交圓 O 於 D 點  
依據第一種情況可知，

$$\angle ABD = \frac{AD \text{ 弧的度數}}{2}, \quad \angle DBC = \frac{DC \text{ 弧的度數}}{2}$$

$$\begin{aligned} \angle ABC &= \angle ABD + \angle CBD \\ &= \frac{AD \text{ 弧的度數}}{2} + \frac{DC \text{ 弧的度數}}{2} \\ &= \frac{AD \text{ 弧的度數} + DC \text{ 弧的度數}}{2} = \frac{ADC \text{ 弧的度數}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \angle ABC = \frac{ADC \text{ 弧的度數}}{2}$$



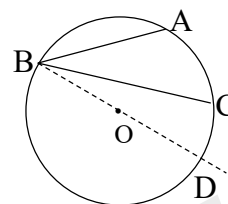
第三種情況是圓心在 $\angle ABC$ 外， $\overrightarrow{BO}$ 交圓 $O$ 於 $D$ 點  
 據第一種情況可知，

$$\angle ABD = \frac{ACD\text{弧的度數}}{2}, \quad \angle CBD = \frac{CD\text{弧的度數}}{2}$$

$$\angle ABC = \angle ABD - \angle CBD$$

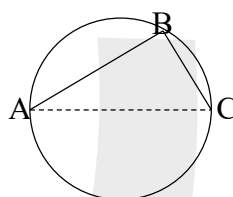
$$= \frac{ACD\text{弧的度數}}{2} - \frac{CD\text{弧的度數}}{2}$$

$$= \frac{ACD\text{弧的度數} - CD\text{弧的度數}}{2} = \frac{AC\text{弧的度數}}{2}$$



所以綜合這三種情況可知 圓周角的度數等於所對弧度數的一半。

4. 半圓所對的圓周角是直角。如下圖所示， $\overline{AC}$ 是圓的直徑， $B$ 點在圓周上，則 $\angle ABC = \frac{AC\text{半圓度數}}{2} = 90^\circ$ 。



### 錯誤類型

學生容易記錯圓心角與圓周角的公式

### 評量

1. 不評量圓內角、圓外角。
2. 不評量圓幕性質。

### 探索

四邊形 $ABCD$ 中，若 $\angle A + \angle C < 180^\circ$ ，探索 $C$ 點在三角形 $ABD$ 外接圓的外部或內部？

<b>S-9-8 點、直線與圓的關係：</b> 點與圓的位置關係（內部、圓上、外部）；直線與圓的位置關係（不相交、相切、交於兩點）；圓心與切點的連線垂直此切線（切線性質）；圓心到弦的垂直線段（弦心距）垂直平分此弦。	s-IV-14
---	---------

先備：S-8-1、S-8-4、S-8-7

連結：S-9-6、S-9-7、S-9-12、S-9-14

後續：G-10-3、N-11A-1

### 基本說明

1. 理解點與圓的位置關係。依據點到圓心之距離大於、等於或小於半徑，判斷此點位於圓的外部、圓上或圓的內部。
2. 理解直線與圓的位置關係：依據圓心到直線之距離大於、等於或小於半徑，判斷此直線與圓不相交、交於一點或交於兩點。與圓交於一點的直線稱為切線，兩者關係稱為相切。
3. 理解切線性質：圓心與切點的連線必垂直此切線。反之，若一直線過圓上一點且垂直於過此點之半徑，則此直線為該圓之切線。
4. 圓心到弦的垂直線段(長)稱為弦心距，且該線段垂直平分此弦。



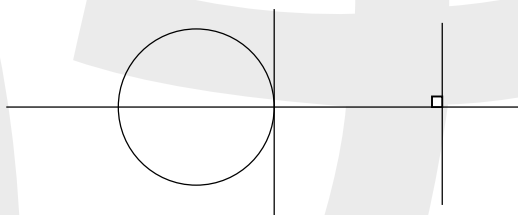
5. 利用畢氏定理可知：同一圓中，弦心距愈長，則弦愈短，反之亦然；兩弦心距等長，則兩弦也等長，反之亦然。

### 條目範圍

1. 本單元教材只處理點與圓以及線與圓的關係；不處理兩圓的位置關係。
2. 不處理兩圓的公切線。

### 釋例

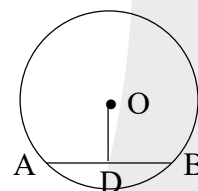
1. 直線與圓的關係中，以垂直經過圓心的直線，由外而內慢慢靠近，觀察了解直線與圓的位置關係。



2. 過圓上一點對圓做切線，可由過此點作一垂直此點與圓心的連線，就是切線。
3. 點與圓的關係可以依據點與圓心的距離判斷；直線與圓的關係可以使用圓心與直線的距離來判斷。
4. 自圓心對弦所做的垂直線段稱為該弦的弦心距，如下圖所示：

$\overline{OD} \perp \overline{AB}$ ， $\overline{OD}$  為  $\overline{AB}$  弦的弦心距，依據畢氏定理，

$\overline{AD} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OD}^2}$ ，若  $\overline{OD}$  愈短，則  $\overline{AD}$  愈長；反之亦然。



### 評量（含注意要點及評量限制）

1. 不評量兩圓的位置關係。
2. 不評量兩圓的公切線長。

<b>S-9-9 三角形的外心：</b> 外心的意義與外接圓；三角形的外心到三角形的三個頂點等距；直角三角形的外心即斜邊的中點。	s-IV-11
--	---------

先備：S-8-1、S-8-4、S-8-7

連結：S-9-12、S-9-10、S-9-11

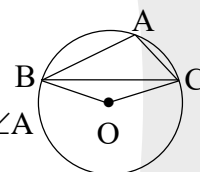
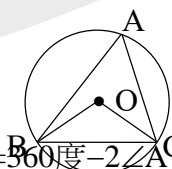
後續：G-10-3

### 基本說明

1. 過三角形三個頂點的圓，稱為三角形的外接圓，此外接圓的圓心稱為三角形的外心。
2. 能理解三角形的外心為三邊的中垂線的交點。
3. 能理解任一個三角形必有外心。
4. 理解三角形的外心至各頂點等距離，而且此距離為其外接圓半徑。
5. 理解直角三角形斜邊中點是此三角形的外心，因此其斜邊中點到三頂點等距離。斜邊就是外接圓的直徑。

## 釋例

- 推論證明前，給學生學習單上有三種三角形：銳角三角形、直角三角形、鈍角三角形；透過摺紙或作圖活動驗證三條中垂線均相交於同一點。
- 解釋三角形三邊的中垂線交於同一點，先以兩邊的中垂線交於一點，再利用中垂線逆性質說明第三邊的中垂線必通過同一點；理解外心到三角形的三頂點的距離相等，此距離是外接圓半徑。
- O 是三角形 ABC 的外心，依據  $\angle A$  的不同種類，可以得出  $\angle BOC$  與  $\angle A$  的關係。
  - 若  $\angle A$  是銳角，如下圖所示，O 是三角形的外心，則  $\angle BOC=2\angle A$ ；  
三角形 ABC 中，O 是外心，連接  $\overline{OB}$  與  $\overline{OC}$ ，  
因為圓心角是圓周角的兩倍，  
所以， $\angle BOC=2\angle A$
  - 若  $\angle A$  是鈍角，如下圖所示，O 是三角形的外心，則  $\angle BOC=360^\circ-2\angle A$ 。  
三角形 ABC 中，O 是外心，連接  $\overline{OB}$  與  $\overline{OC}$ ，  
BC 優弧的弧度  $=2\angle A$   
 $\angle BOC = \text{BAC 弧度} = 360^\circ - \text{BC 優弧的弧度} = 360^\circ - 2\angle A$
  - 若  $\angle A$  是直角，則 O 點在  $\overline{BC}$  上，則  $\angle BOC=180^\circ=2\times 90^\circ=2\angle A$
- 不共線三點必共圓。
- 理解銳角三角形的外心必在內部，直角三角形的外心必在斜邊中點，鈍角三角形的外心在三角形的外部。



## 錯誤類型

直角三角形中，斜邊上的中線、斜邊上的高、斜邊的中垂線，這三條線容易被誤解。

## 評量（含注意要點及評量限制）

評量三角形的外接圓半徑只限於等腰或直角三角形。

<b>S-9-10 三角形的內心：</b> 內心的意義與內切圓；三角形的內心到三角形的三邊等距；三角形的面積 = 周長 $\times$ 內切圓半徑 $\div 2$ ；直角三角形的內切圓半徑 = (兩股和 - 斜邊) $\div 2$ 。	s-IV-11
--	---------

先備：S-8-1、S-8-4、S-8-7

連結：S-9-6、S-9-7、S-9-8、S-9-12、S-9-14

後續：G-10-3

## 基本說明

- 與三角形三邊相切的圓，稱為三角形的內切圓，此內切圓的圓心稱為三角形的內心。
- 能理解三角形的內心在三內角的角平分線上。
- 任一個三角形必有內心；三角形的內心必在三角形的內部。
- 理解三角形的內心至各邊等距離，而且這個距離就是內切圓的半徑。
- 設  $\triangle ABC$  周長  $s$ ，內切圓半徑  $r$ ，則  $\triangle ABC$  的面積 =  $\frac{sr}{2}$ 。直角三角形中，

內切圓半徑  $r = (\text{兩股和} - \text{斜邊}) \div 2$

## 釋例

1. 推論證明前，給學生學習單上有三種三角形：銳角三角形、直角三角形、鈍角三角形；透過摺紙或作圖活動驗證三內角平分線均相交於同一點。且這一點到三邊的距離相等。
2. 以位置分辨，畫在三角形外面並通過三頂點的圓，稱為外接圓，外接圓的圓心稱為外心；畫在三角形裡面並與三邊相切的圓，稱為內切圓，內切圓的圓心稱為內心。
3. 解釋三角形三內角的平分線交於同一點，先以兩內角的角平分線交於一點，再利用角平分線逆性質說明第三角的角平分線必通過同一點。
4. 理解內心到三角形的三邊的距離相等，此距離是內切圓半徑。
5. 理解三角形面積的切割組合，得到 $\triangle ABC$ 的面積 $=\frac{sr}{2}$ ， $s$ 為 $\triangle ABC$ 周長。
6. 利用切線長性質理解直角三角形中，內切圓半徑 $r=(\text{兩股和}-\text{斜邊})\div 2$ 。
7. 若 $I$ 是三角形的內心，則 $\angle BIC=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A$

## 錯誤類型

學生容易混淆內心與外心的性質，例如 $O$ 是三角形 $ABC$ 的內心，學生誤認 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$ 。

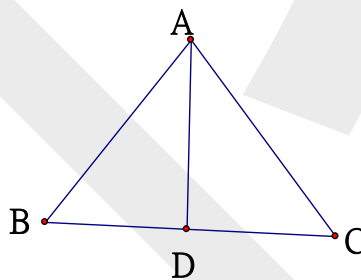
## 評量

1. 評量三角形內切圓半徑，只限於直角三角形，等腰三角形與正三角形，不適合評量任意三角形。
2. 評量試題宜注意數據是否合理，避免為了湊數據，讓答案不合理；例如：三角形三邊長為5, 6, 7；已知三角形面積為18，求內切圓半徑？事實上此三角形面積不可能等於18，本試題有誤。

## 探索

如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AD}$ 為 $\angle BAC$ 的角平分線， $\overline{AD}$ 交對邊於 $D$ 點，

試證  $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{DC}$



**S-9-11 三角形的重心：**重心的意義與中線；三角形的三條中線將三角形面積六等份；重心到頂點的距離等於它到對邊中點的兩倍；重心的物理意義。

S-IV-11

先備：S-8-1、S-8-4、S-8-7

連結：S-9-6、S-9-7、S-9-8、S-9-9、S-9-10、S-9-12

後續：S-11A-1

## 基本說明

1. 三角形的頂點與對邊中點的連線稱為此邊的中線。

2. 能理解通過三角形頂點且能將三角形分割成面積相等的兩個三角形之直線一定是此三角形中線。
3. 三角形三條中線必相交於同一點，這個點稱為三角形的重心。
4. 理解三角形的重心到一頂點距離等於它到對邊中點的兩倍。
5. 理解三角形三條中線將三角形面積六等份。
6. 知道三角形重心的物理意義。

### 釋例

1. 透過實際體驗說明三角形的中線必經過質量的中心；以珍珠板做成的三角板，讓學生試著以手指頭找出質量的中心(以手指頭頂住某個點可以讓三角板保持平衡)。其次，再抓住三角板的頂點讓它自然下垂，發現鉛垂線必經過對邊的中點。再換個頂點，驗證結果仍相同。
2. 三角形中先畫出兩條中線的交點，再驗證第三條中線也通過這一點，便得出三條中線相交於同一點。
3. 透過三角形的中線將原三角形分成兩塊面積相等的三角形，經推理說明可得三條中線將原三角形分成六塊面積相等的三角形。
4. 重心到三頂點的連接線段將三角形分成三塊面積相等的三角形。  
可透過平行線截比例線段或面積相等方法推理，可得重心將中線長分成兩段長度比為2:1。

### 錯誤類型

直角三角形斜邊上的中線易被誤解為斜邊上的高。

<p><b>S-9-12 證明的意義：</b>幾何推理（須說明所依據的幾何性質）；代數推理（須說明所依據的代數性質）。</p> <p><b>(補充說明)</b>證明的題材以學習內容直接推理可得為限，勿涉及引用延伸學習內容。</p>	<p>s-IV-3 s-IV-4 s-IV-5 s-IV-6 s-IV-9 s-IV-10 a-IV-1</p>
---	--

先備：S-8-1、S-8-12

連結：S-9-2、S-9-11

後續：N-10-6

### 基本說明

1. 數學證明是由已知條件或已經確定是正確的性質來推導出某些結論。因此學生在學習時，應將每一步驟所根據的理由適切地表達出來。
2. 在幾何推理，8-s-12已要求學生能將幾何推理步驟所依據的性質用填充格方式作答，本條目要求能完整將證明過程表達出來。
3. 本細目的證明並不侷限於幾何推理，也可以包括代數或數與量的推理。

### 條目範圍

1. 先以填充題的格式練習表達。
2. 證明的範例最多以融合二個概念為限。

### 釋例

本細目的教學僅要讓學生初步認識證明的意義，因此推理的過程以二個概念為限，如下面的例子所示：

例1. 直角三角形  $ABC$  中， $\angle BAC=90$ 度， $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ，

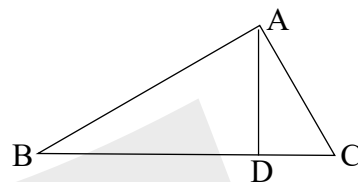
試證明  $\angle B = \angle CAD$

因為  $\angle BAC=90$ 度，所以  $\angle BAD + \angle CAD = 90$ 度

因為  $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ，所以  $\angle B + \angle BAD = 90$ 度

故  $\angle B + \angle BAD = \angle BAD + \angle CAD$

同時抵銷  $\angle BAD$ ，可得  $\angle B = \angle CAD$



例2. 若  $a$ 、 $b$ 、 $c$  為三個正整數，且滿足  $a^2 + b^2 = c^2$ ，試證明  $c + b$  可以整除  $a^2$ 。

證明：

$$\begin{aligned} \text{由 } a^2 + b^2 &= c^2 \\ \text{得 } a^2 &= c^2 - b^2 \\ &= (c - b)(c + b) \end{aligned}$$

$$\text{因此 } a^2 \div (c + b) = c - b$$

所以  $c + b$  可以整除  $a^2$

例3. 3的倍數+6的倍數一定是3的倍數

證明：3的倍數以  $3a$  表示， $a$  是整數；

6的倍數以  $6b$  表示， $b$  是整數；

3的倍數+6的倍數  $= 3a + 6b = 3(a + 2b)$ ，一定是3的倍數。

**評量**（含注意要點及評量限制）

證明過程中所使用數學概念，應以本課綱條目範圍內為限，勿使用課綱條目延伸之概念。

<b>S-9-13 空間中的線與平面：</b> 長方體與正四面體的示意圖，利用長方體與正四面體作為特例，介紹線與線的平行、垂直與歪斜關係，線與平面的垂直與平行關係。 <b>(補充說明)</b> S-5-6 僅教授「面與面的平行與垂直」，並且以操作活動為主。本條目則新增「空間中的線與線的垂直、平行、歪斜，以及線與面的平行與垂直」，且以理解數學概念為主。	s-IV-15
--	---------

先備：S-8-1~S-8-6，S-8-12

連結：S-9-14

後續：G-10-2，G-10-3，G-10-4，G-10-7

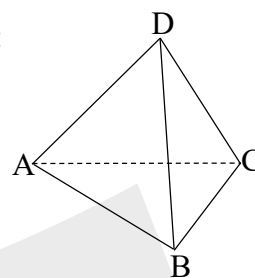
**基本說明**

1. 長方體的每個面都是矩形、長方體中相鄰兩稜邊互相垂直，任意不相鄰的兩邊(延長之後)都不會相交。
2. 長方體中不相交的兩邊，且落在同一平面上時，稱這兩直線平行；長方體中不相交的兩邊，且無法落在同一平面上，稱這兩直線歪斜。

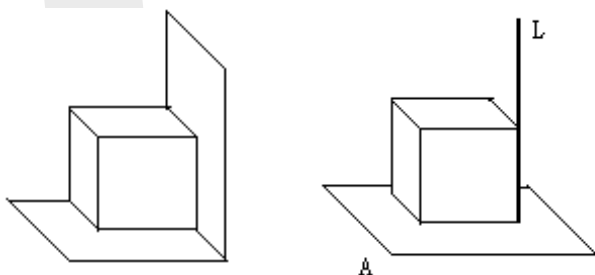
3. 認識長方體之相鄰兩面都垂直，不相鄰的兩面都平行；以及稜邊與哪些面垂直、稜邊與哪些面平行。

4. 如右圖所示，正四面體中，4個面與6條直線既不平行也不垂直；

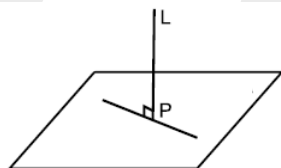
AD 直線與 BC 直線不相交，也不落在同一平面上，因此，稱這兩直線為歪斜。



5. 能藉由長方體的高與上下兩平行底面均垂直的已知現象，理解一直線同時垂直於兩已知平面，則這兩個平面平行。



6. 能理解一已知直線  $L$  垂直於平面，且交於點  $P$ ，則此平面上通過點  $P$  的任一直線都與直線  $L$  垂直。



### 條目範圍

1. 不處理空間中兩平面不垂直時計算兩者的夾角度數。
2. 只判斷空間中直線、平面間是否平行以及兩直線是否歪斜。
3. 僅限於評量長方體與正四面體內，線與線、線與平面、平面與平面之間的關係。

### 釋例

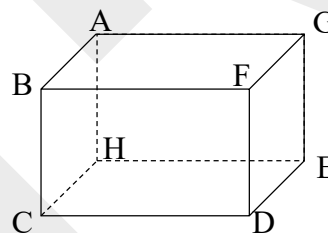
1. 初次學習線與平面、平面與平面的垂直與平行關係時，我們以直觀且可操作為教學之重點。
2. 透過長方體的實物觀察發現，了解空間中的平面與直線的關係。正如同直角三角板是檢查平面上兩線垂直或平行的方便工具，我們將用長方體來檢查兩平面垂直或平行，一直線與一平面垂直，一直線與一平面平行。

如右圖所示：

相鄰兩平面垂直，例如：矩形 ABFG 垂直於矩形 BCDF 所在的平面。

相對的兩面平行，例如：矩形 ABFG 平行於矩形 CDEH。

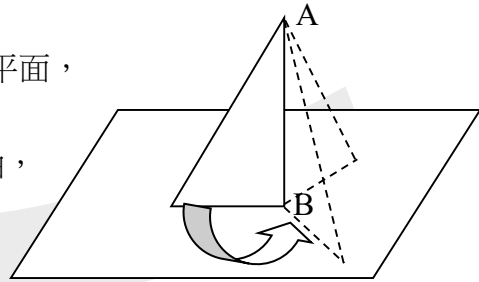
線與面的關係，例如：線段 FD 垂直於矩形 CDEH 所在的平面。



相鄰兩鄰邊垂直，例如：線段 FD 垂直於線段 CD。  
 線與線的歪斜關係，例如：線段 FG 歪斜於線段 CD。

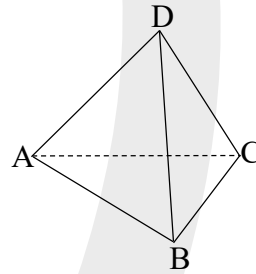
3. 平面上有一點 B，如右圖所示，已知  $\overline{AB}$  垂直此平面，

取一直角三角板置於平面上，以  $\overline{AB}$  為旋轉軸，  
 固定 B 點，旋轉直角三角板，



可以發現， $\overline{AB}$  垂直 B 點所在的平面，並且與平面上通過 B 點的直線均垂直。

4. 透過正四面體的實物觀察發現，了解空間中的平面與直線間的關係。  
 線與線的歪斜關係，例如：線段 AD 與線段 BC，不在同一平面上，所以歪斜。  
 相鄰兩平面既不垂直也不平行。



### 錯誤類型

學生對於平面中直線與平面的垂直存在迷思概念。

### 評量（含注意要點及評量限制）

僅限於評量長方體與正四面體內，線與線、線與平面、平面與平面之間的關係。

<p><b>S-9-14 表面積與體積：</b>直角柱、直圓錐、正角錐的展開圖；直角柱、直圓錐、正角錐的表面積；直角柱的體積。  <b>（補充說明）</b> S-6-4 僅教授「直柱體的體積」，本條目除了複習並加深直柱體的體積概念，並且透過直柱體與正錐體的展開圖，計算其表面積。</p>	<p>s-IV-16</p>
---	----------------

先備：S-6-4，S-8-6，S-8-7，S-8-10，S-8-11

連結：S-9-6，S-9-12，S-9-13

後續：

### 基本說明

1. 認識直角柱、直圓錐與正角錐之展開圖；並運用展開圖，求立體圖形的表面積。
2. 上下底為兩個全等多邊形，且側面均為矩形的柱體叫做直角柱。
3. 直角柱的每一個側面均與底面垂直。
4. 下底為正多邊形且側面均為等腰三角形的錐體叫做正角錐。
5. 下底為圓形，且錐的頂點與底面圓心的連線垂直於底面的錐體叫做直圓錐。

6. 直角柱的體積為底面積乘以高。

### 條目範圍

1. 不出現斜角柱與斜角錐。
2. 評量從展開圖反推原有的立體圖形的概念時，題目避免出現每個面再添加其他標誌。

### 釋例

1. 簡單立體圖形包括直角柱、直角錐、直圓錐等，可舉生活的實例來說明。
2. 透過生活實物了解各種立體圖形。
3. 能理解柱體與錐體的頂點、面、邊等構成要素。
4. 計算圓錐的表面積時，底面為圓形，側面的展開圖為扇形。學生可從實作中發現『圓形的周長與扇形的弧長相等』。
5. 透過各種平面圖形面積的公式，計算直角錐的表面積。

### 錯誤類型

學生容易誤認直圓柱的展開圖中，側面的展開圖只能長方形，其實也可以平行四邊形。

### 評量

不求直圓錐與角錐的體積。

### 探索（課程延伸之學習活動）

利用展開圖來計算長方體表面上兩點之最短距離。

<b>F-9-1 二次函數的意義：</b> 二次函數的意義；具體情境中列出兩量的二次函數關係。
---

f-IV-2
--------

先備：F-8-1, F-8-2

連結：F-9-2

後續：F-10-1

### 基本說明

1. 理解二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ ， $(a \neq 0)$  的意義。
2. 能在具體情境中列出兩量的二次函數關係。

### 條目範圍

不涉及二次函數的配方法。

### 釋例

1. 透過正方形面積  $y$  與邊長  $x$  的關係，理解  $y = x^2$  二次函數。



2. 由給定之實際觀測數據來理解自由落體或拋擲物體時，因為受到地心引力的影響，物體與地面的距離  $y$  是時間  $x$  的二次函數。

<p><b>F-9-2 二次函數的圖形與極值：</b>二次函數的相關名詞（對稱軸、頂點、最低點、最高點、開口向上、開口向下、最大值、最小值）；描繪 <math>y = ax^2</math>、<math>y = ax^2 + k</math>、<math>y = a(x - h)^2</math>、<math>y = a(x - h)^2 + k</math> 的圖形；對稱軸就是通過頂點（最高點、最低點）的鉛垂線；<math>y = ax^2</math> 的圖形與 <math>y = a(x - h)^2 + k</math> 的圖形的平移關係；已配方好之二次函數的最大值與最小值。</p> <p><b>（補充說明）</b>「二次函數的配方法」及「二次函數的應用問題」為高一課程（F-10-1），本條目的教學聚焦在其圖形的特性。</p>	<p>f-IV-2 f-IV-3</p>
--	--------------------------

先備：F-8-1, F-8-2

連結：F-9-1

後續：F-10-1

### 基本說明

1. 理解二次函數的相關名詞（對稱軸、頂點、最低點、最高點、開口向上、開口向下、最大值、最小值）。
2. 能描繪  $y = a(x - h)^2 + k$  的圖形。
3. 理解  $y = ax^2$  的圖形與  $y = a(x - h)^2 + k$  的圖形的平移關係。
4. 理解二次函數  $y = a(x - h)^2 + k$  的圖形。當  $a > 0$  時，圖形的開口向上， $(h, k)$  為圖形的最低點；當  $a < 0$  時，圖形的開口向下， $(h, k)$  為圖形的最高點；二次函數的圖形恰有一個頂點（圖形的最高點、最低點都稱為頂點），其坐標為  $(h, k)$ ；二次函數的圖形恰有一條對稱軸，就是通過頂點的鉛垂線，其方程式為  $x = h$ 。
5. 理解二次函數  $y = a(x - h)^2 + k$ ，當  $a > 0$  時在  $x = h$  發生最小值  $k$ ；當  $a < 0$  時在  $x = h$  發生最大值  $k$ 。

### 條目範圍

1. 不涉及二次函數的配方。
2. 不涉及「未配方的二次函數」之圖形繪製，以及頂點坐標、最大值、與最小值的求解。
3. 不涉及「二次函數圖形與  $x$  軸的兩個交點，為其對應一元二次方程式的根」的概念。

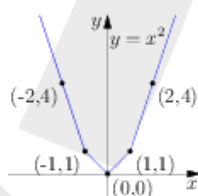
### 釋例

1. 以描點的方式繪製二次函數  $y = ax^2$  之圖形， $a \neq 0$ ，並能察覺圖形的對稱軸及最高點或最低點。必要時，可透過應用軟體繪圖展示。
2. 以描點的方式繪製二次函數  $y = ax^2 + k$  之圖形， $a \neq 0, k \neq 0$ 。發現圖形的對稱軸及最高點或最低點，並能察覺此圖形與二次函數  $y = ax^2$  圖形之關係。

- 以描點的方式繪製二次函數  $y = a(x-h)^2$  之圖形， $a \neq 0, h \neq 0$ 。發現圖形的對稱軸及最高點或最低點，並能察覺此圖形與二次函數  $y = ax^2$  圖形的平移關係。
- 能察覺二次函數  $y = a(x-h)^2 + k$  圖形之對稱軸是直線  $x = h$ 。當  $a > 0$  時，圖形開口向上，其最低點是  $(h, k)$ ；當  $a < 0$  時，圖形開口向下，其最高點是  $(h, k)$ 。
- 能利用二次函數  $y = a(x-h)^2 + k$ ，理解二次函數的對稱軸是通過其最高點或最低點的鉛垂線。
- 能利用對稱軸與最高點或最低點之概念，快速描繪二次函數  $y = a(x-h)^2 + k$  的大致圖形。
- 能由函數圖形中理解二次函數的最大值或最小值。

### 錯誤類型

有些學生會誤認為  $y = a(x-h)^2 + k$  的圖形為折線圖，例如： $y = x^2$  的圖形誤認為下圖。



### 評量

能處理二次函數的配方法解決

**D-9-1 統計數據的分布：**全距；四分位距；盒狀圖。

(補充說明) D-7-2 處理單一統計量(平均數、中位數、眾數)表達數據，本條目則傳達以盒狀圖描述數據的集中程度。

n-IV-9  
d-IV-1

先備：D-8-1

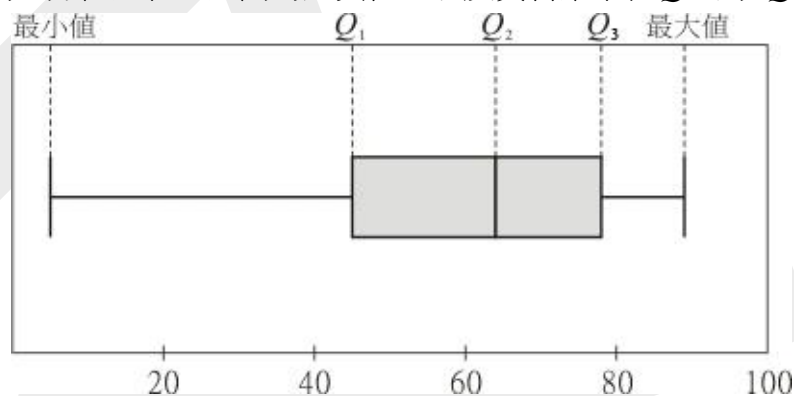
連結：D-9-2, D-9-3

後續：D-10-2

### 基本說明

- 全距是最大數與最小數的差，全距大通常表示資料較疏散，全距小則是指資料較集中。
- 認識第 1、第 2、第 3 四分位數(可記為  $Q_1$ 、 $Q_2$ 、 $Q_3$ )的意義，知道如何運用資料的相對累積次數分配表來找出  $Q_1$ 、 $Q_2$ 、 $Q_3$ 。知道第 2 四分位數即中位數；四分位距則為第 3 四分位數與第 1 四分位數的差，即  $Q_3 - Q_1$ 。
- 盒狀圖可以表徵整組資料的分散程度，它是由最大值、最小值與四分位數構成，如下圖。

可以很容易觀察到四分位距和全距間的差異性，以及資料集中在  $Q_1$  到  $Q_3$  附近。



4. 關於四分位數的定義，一般並沒有統一的取法，很多處理資料的統計軟體所用的四分位數定義也不一樣。因此學生應先確切學習取四分位數的原理，再學習可能的算則。

### 釋例

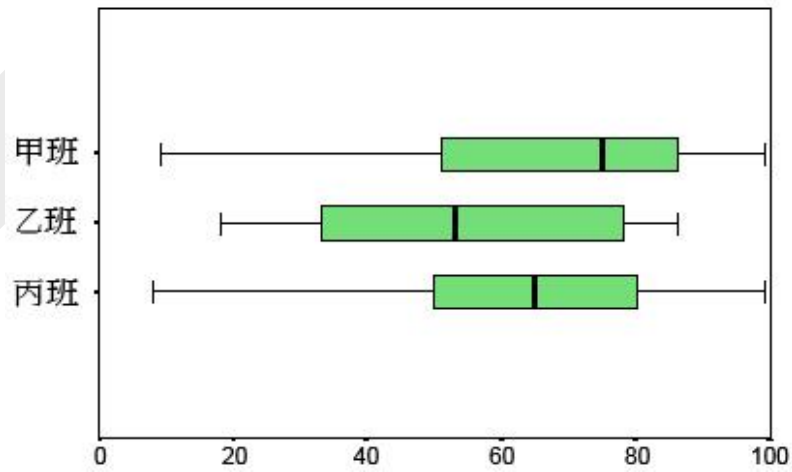
1. 中山國中三年一班的數學科第一次段考成績總表，如下表：

表 1、中山國中三年一班的數學科第一次段考成績總表

座號	1	2	3	4	5	6	7	8
成績	5	64	35	78	36	43	44	82
座號	9	10	11	12	13	14	15	16
成績	83	48	52	55	58	64	65	68
座號	17	18	19	20	21	22	23	24
成績	69	70	74	35	79	80	78	45
座號	25	26	27	28	29	30		
成績	47	33	84	75	85	89		

以三年一班數學成績為例，最大數與最小數分別為 89 與 5，所以全距為 84。以及  $Q_1$ 、 $Q_2$ 、 $Q_3$  分別為 45、64.5、78，則四分位距為  $Q_3 - Q_1 = 33$ 。

2. 教師可使用類似下圖合併表徵各組資料的分散程度，分析各組資料間的關係。



**D-9-2 認識機率：**機率的意義；樹狀圖(以兩層為限)。

(補充說明) 以樹狀圖分析所有的可能性，國中階段以對稱性(節點相同)的樹狀圖為主。

n-IV-9  
d-IV-1

先備：D-8-1

連結：D-9-3

後續：D-10-3, D-10-4

### 基本說明

1. 能知悉不確定性的事物可能發生的結果，並以樹狀圖表徵。
2. 從重複試驗中，認識機率的意義。

### 條目範圍

樹狀圖以兩層為限。

### 釋例

1. 例如：擲銅板可能出現正面和反面、擲骰子時 1 點到 6 點都可能出現。如下

圖：



2. 教師除了使用對稱性的情境(例如：銅板、骰子、撲克牌、抽球等)，分析可能發生的結果外，也應探討非對稱性的情境(如圖釘、圓錐、爻杯)。
3. 擲銅板可能出現正面和反面，但不表示投擲一銅板，若第一次出現正面，第二次就要出現反面。

**D-9-3 古典機率：**具有對稱性的情境下（銅板、骰子、撲克牌、抽球等）之機率；不具對稱性的物體（圖釘、圓錐、爻杯）之機率探究。

n-IV-9

d-IV-2

先備：D-8-1

連結：D-9-2

後續：D-10-3, D-10-4

### 基本說明

1. 在對稱性的情境(例如：銅板、骰子、撲克牌、抽球等)，使學生相信每一基本事件出現的機會相同，並能由直觀來輔助學生學習機率的基本意義。
2. 丟擲有兩態(如圖釘、圓錐、爻杯)的不對稱物體時，其出現的機率通常並不是  $\frac{1}{2}$ 。
3. 了解不可能發生的事件機率為 0。
4. 了解所有基本事件出現的機率總和為 1。

### 條目範圍

複合的機率事件以兩層為限，例如：連擲骰子兩次。

### 釋例

1. 教師應教授「試驗有兩態時，出現的機率不相等的情境」，例如：箱子裡放入 2 顆黑球、1 顆白球，則抽出黑球、白球的機率並不相等，並說明統計資料的相對次數與機率之關係。
2. 當遇到很難執行試驗的情境時（例如：在全班學生中任意抽一名學生，則其成績在 80 分以上的機率是多少？），可以將原來的統計資料轉換成「抽球」模型來處理。
3. 處理「丟擲有兩態(如圖釘、圓錐、爻杯)的不對稱物體，其出現的機率不是  $\frac{1}{2}$ 」。教師可利用重複試驗的方式，估計機率大概是多少，並讓學生能初步體認「如果試驗越多次，所獲得的機率資訊越可靠」。
4. 以例子說明“不可能發生的事件機率為 0”，例如：丟兩顆骰子，出現點數和為 1 的機率為 0。
5. 以例子說明“所有基本事件出現的機率總和為 1”，例如：丟銅板，出現正面與反面的機率和為 1。

### 錯誤類型

1. 隨機選取一位班上同學，此同學為女生的機率為何？學生常誤認為 $\frac{1}{2}$ ，而忽視班上男生、女生的人數是否相等。
2. 有些學童會誤認為「若第一次出現正面，第二次就要出現反面」。學生最後需能體認，即使投擲一銅板已出現 10 次正面，下次投擲仍然有一半的機會是正面。

### 探索

學生可探索統一發票中獎的機率。

## 高中階段特別說明

- (1) 課綱文件裡的十至十二年級「學習內容補充說明」，並沒有獨立列在以下說明文件內，而是融入在「教學斟酌」、「條目範圍」、「釋例」、「評量」等項目內。
- (2) 為強調國中與高中階段的銜接，高中階段的「先備」包含國中階段之學習內容。但是，高中階段的「後續」卻不涉及大學課程。
- (3) 因為十一年級的 B 類課程是新課程，並不適合說明「與 99 課綱的差異」。為提供更有效的訊息，該欄位改為「與 A 類課程的差異」。
- (4) 重申領綱所訂的符號意義如下：
  - ※ 為進階或延伸教材，教師宜適當補充，建議不納入全國性考試的範圍。
  - ★ 建議不列為評量的直接命題對象，可融入其他課題的評量之中。
  - # 不必設置獨立的教學單元，宜融入適當課題，在合理的脈絡中教授。

<b>N-10-1 實數：</b> 數線，十進制小數的意義，三一律，有理數的十進制小數特徵，無理數之十進制小數的估算，( $\sqrt{2}$ 為無理數的證明 ★)，科學記號數字的運算。	n-V-1
---	-------

**先備：**有理數的四則運算，平方根式的化簡 (N-8-1)。

**連結：**指對數 (N-10-3、N-10-4)。

**後續：**無窮等比級數，複數 (選修數學甲、乙)。

### 基本說明

#### 1. 與 99 課綱的差異

使用計算機，讓學生能實際透過計算操作而認識十分逼近法的過程，以及十進制小數的意義。從計算的意義，而不藉由冪函數的圖形來認識正數的  $n$  次方根。

#### 2. 相關約定

- (1) 可以用「黑板粗體字型」的大寫字母  $\mathbf{N}$ 、 $\mathbf{Z}$ 、 $\mathbf{Q}$ 、 $\mathbf{R}$ ，依序表示正整數、整數、有理數、實數。
- (2) 不討論負數的  $n$  次方根，不討論負數的非整數次方。
- (3) 「準至四位小數」或「算到小數點下第四位」的意思是在小數點下第五位做「無條件捨去」(chopping)，而「取四位最近小數」或「約至四位小數」或「約至小數點下第四位」的意思是在小數點下第五位做「四捨五入」(rounding)。例如準至四位小數的  $\pi$  是 3.1415，而約至四位小數的  $\pi$  是 3.1416。小數點下的位數也可以改用十分位、百分位等位名來稱呼。不影響數值的 0 可以寫出來也可以省略，其判斷準則是以溝通的效率來衡量。
- (4) 非零的實數可轉換成唯一的科學記號數字，形式如  $\pm m \times 10^n$ ，其中  $\pm$  稱為科學記號的「正負號」，當它為正時可以省略不寫； $m$  稱為科學記號的「係數」部分，須滿足  $1 \leq m < 10$ ； $n$  稱為「指數」部分， $n \in \mathbf{Z}$ 。
- (5) 對非零的數，取其「 $n$  位有效數字的估計值」或者「以  $n$  位有效數字表示」的意思是：先將它寫成科學記號數字，再將它的係數約至  $n-1$  位小數，然後以普通記號或科學記號呈現其數值。

- (6) 建議使用  $\approx$  或  $\doteq$  作為近似值，凡是近似值都應使用，例如  $\frac{1}{3} \doteq 0.3333$ 、 $\sqrt{2} \approx 1.4142$ 。

但是因為高中教學現場已經習慣使用等號進行溝通，所以，在前後文脈絡清晰的前提下，可以混用等號 = 與近似符號。學生應該明白，例如「 $\sqrt{2} = 1.4142$ 」是「以五位有效數字表示  $\sqrt{2}$ 」的意思。

### 3. 學習目標

- (1) 知道有理數與無理數的定義，知道它們十進制小數的區別特徵。
- (2) 延續國中對數線的認識與理解，能作圖找到整數、有理數、平方根式之無理數在數線上的位置。
- (3) 理解十進位制小數的意義，能做有限小數與其等值分數的互化。
- (4) 能進行有理數之分數與小數形式的互化，知道循環小數的特徵。
- (5) 使用計算機做四則、平方根、或任何有限小數次方的運算，並明白其值僅為估計。
- (6) 能判讀計算機顯示的科學記號數字，能將科學記號數字輸入計算機。
- (7) 理解「取三位小數」、「準至千分位」、「以兩位有效數字作計算」等類型的語言，並能用以溝通，例如將任意數依指令寫成正確的概數。
- (8) 理解數線上的點坐標即為實數，而實數可以分成無理數與有理數，後者又可以分出整數與正整數。
- (9) 理解整數與有理數在離散性與稠密性的差異，而有理數雖然稠密卻不能佈滿數線，所以實數不全是有理數。

### 4. 教學斟酌

- (1) 本條目通常實現在教科書的第一冊第一章，特別指出使用計算機，具有宣示的目的。
- (2) 在數線上作圖時，不必拘泥於「尺規」限制，可使用直角板做垂線或平行線、可複製長度、可做一線段的均勻分割。
- (3) 所有關於準至、約至、有效數字和有效位數的說法，都是為了溝通而約定的語言，它們本身並非數學領域的教學目標。本手冊對有效數字 (Significant Figures) 的約定，符合其他領域的習慣用法，應該不至於產生歧義。但是，數學領域所說的「有效位數」只是「有效數字的位數」的簡約說法而已，與自然科學和工程裡的專業術語有些差異，後者還須關切真值、估計值、與測量值的考量；例如，當 1000 表示  $10^3$  的數值，則 1000 的有效位數是 4，但是當 1000 表示  $2^{10}$  的數值，則 1000 的有效位數是 2。所以，數學教材應避免正式定義「有效位數」，更不要將它列為評量目標，將它作為教學與評量過程中的溝通語言即可。
- (4) 把計算機當作數學實驗的工具，在數學理論未及說明計算機的功能時，可以把它的結果當作客觀存在的事實。在實際的計算情境中，教導科學記號數字與有效數字之觀念。若輸入之值含有概數，結論之有效位數當與之匹配。例如若取  $\pi$  之三位有效數字做計算（亦即令  $\pi = 3.14$ ），則答案仍以三位有效數字為宜。
- (5) 使用計算機做出結果很大或很小的數，就自然會看到計算機顯示科學記號數字。各款計算機的顯示方式大同小異，應該都要看懂。在情境問題中，讓學生能夠將科學記號數字輸入計算機。
- (6) 引導學生認識科學記號估計值與日常語言之間的關聯。例如以兩位有效數字表示台灣



的人口，記作  $2.3 \times 10^7$  或者 23,000,000 都可以，而讀作「兩千三百萬」。例如以兩位有效數字表示  $2^{32}$ ，記作  $4.3 \times 10^9$  或者 4,300,000,000 都可以，而讀作「四十三億」。

(7) 在應用情境中，若由手算，以使用二位或三位有效位數的數值為宜，若由計算機取概數，也不宜要求超過五位；除非有確切需求，不宜刻意提高有效位數。

(8) 數學教學與評量中，不必拘泥於有效位數的書寫規定。例如若要以四位有效數字表示  $\frac{1}{4}$ ，寫 0.25 和 0.2500 都可以；而若要以四位有效數字表示  $\frac{10000}{39999}$ ，雖然應該要寫 0.2500 才對，但是仍可以接受 0.25。

(9) 運用計算機，結合十分逼近法，讓學生能具體操作以小數逼近無理數（ $n$  次方根）的過程，並在過程中建立誤差估算的觀念。

(10) 透過數線上點的前後關係，建立數的大小關係之對應，此認識三一律，並做為未來複數與平面向量不具備大小關係的基礎。

(11) 在缺乏參照時，諸如「結合律」、「交換律」等抽象性質，不容易產生意義。教師可等到不滿足交換律的運算出現時（例如空間向量的外積），再正式介紹這些性質。

### 條目範圍

1. 透過  $\sqrt{2}$  是無理數的證明，讓學生認識反證法，但不列入大考的評量範圍。
2. 根式的化簡以雙重根式及分式的有理化為原則。
3. 此處不用極限觀念探討無理數之「無窮小數」的存在性，所以也不用極限觀念處理無窮循環小數。
4. 本條目不含整數論，特別聲明不討論關於負整數的因數、倍數問題。
5. 不刻意探討給定的數字的有效位數問題。

### 釋例

1. 三一律的應用機會之一，是討論  $0.\bar{9}$  與 1 的關係。若先承認  $0.\bar{9}$  是一個實數（從它的小數形式來看），則若  $0.\bar{9}$  不等於 1 就必定較大或較小。從這裡切入，或許可以帶領學生在概念上理解  $0.\bar{9}$  與 1 的相等關係。
2. 雖然還沒講極限觀念，教師不必迴避無窮循環小數就是一個實數的事實。若先接受這個事實，則  $10 \times 0.\bar{9} = 9 + 0.\bar{9}$  之計算就是合法的。
3. 利用無窮循環小數的特徵，可輕易比較  $\frac{71}{100}$  和  $\frac{70}{99}$ （分子和分母各減一）的大小。

### 錯誤類型

1. 因為沒有「完備性」的觀念，學生可能以為「稠密性」是實數的特徵，又或許認為稠密即「連續」。教師可引導學生認識有理數即具備稠密性，但它卻還有「縫隙」；這些縫隙可以被無理數填滿。
2. 因為  $(-2)^3 = -8$ ，學生容易認定  $\sqrt[3]{-8} = -2$ ，然而在高中數學範疇內，不討論負數的非整數次方。教師倒不必說它們無意義或未定義，也不必急著說明它是一種約定（而如此約定的原因是與稍後的  $a^x = 10^{x \log a}$  一致），只要不刻意討論它就行了。

### 評量

1. 無理數的證明不宜列入大考範圍，例如不宜「證明  $\sqrt[3]{4}$  是無理數」及「已知  $\sqrt{2}$  為無理數，

證明 $3+\sqrt{2}$ 為無理數」。

2. 所有關於有效數字、有效位數、準至與約至的說法，都是為了溝通而約定的教學語言，在評量時可用於說明題意，不宜作為直接評量的對象。例如在一道應用題裡，敘述題幹之後，補一句類似「以公尺為單位，用兩位有效數字作答」這樣的規定就好了。
3. 未介紹極限概念，不宜以無窮等比級數討論 $0.\bar{9}=1$ 之類的問題。
4. 未證明 $\sqrt[3]{2}$ 無法尺規作圖，不宜出現對一般的正數 $a$ 與 $n \geq 2$ ，判斷 $\sqrt[n]{a}$ 是否可以尺規作圖之問題。
5. 不應出現涉及負數之方根，或負數之非整數次方的問題。
6. 避免須刻意禁止使用計算機的評量題目，例如不宜禁止使用計算機而問「 $\sqrt{3+\sqrt{17}}$ 在哪兩個連續整數之間」。
7. 以下兩種計算策略，所得的數值結果可能有異：**(a)** 計算過程中，全部以計算機之精度進行，最後依指令寫出概數；**(b)** 每一步皆取概數，以概數做下一步計算。評量之時，應該接受這類差異，或者以命題方法避免這類差異。務實的情況是，若以器算，則應採策略**(a)**，而若筆算，則應採策略**(b)**。

<b>N-10-2 絕對值：絕對值方程式與不等式。</b>	n-V-4
-------------------------------	-------

**先備：**絕對值的意義；以 $|a-b|$ 表示數線上兩點 $a, b$ 的距離(N-7-5)，不等式的意義(A-7-7)，在數線上標示一元一次不等式解的範圍(A-7-8)。

**連結：**誤差觀念(N-10-5)。

**後續：**向量的長度，三角不等式(G-11A-4)，二次曲線的標準式(G-12甲-1)，複數的絕對值及其幾何意涵(N-12甲-3)。

## 基本說明

### 1. 與 99 課綱的差異

國中階段雖已介紹絕對值的意義及其符號，但僅作紀錄之用，並未涉及絕對值的運算，如下觀念並不屬於國中課程範圍：

$$|a-b| = \begin{cases} a-b, & \text{若 } a > b \\ b-a, & \text{若 } a < b \end{cases}$$

上述概念在 99 課綱為前置經驗，在本課綱則須視為新概念進行引導與概念建立，以便進行絕對值方程式或不等式的教學。

### 2. 相關約定

(1) 以  $[a, b]$ 、 $(a, b)$ 、 $[a, b)$ 、 $(a, b]$ 、 $(-\infty, b]$ 、 $(-\infty, b)$ 、 $[a, \infty)$ 、 $(a, \infty)$  等區間符號以及聯集符號  $\cup$  表示解區間；不一定在本條目全部用到。

(2) 所謂兩(實)數之差，就是大數減小數。用符號來寫，就把「 $a$ 與 $b$ 之差」記作 $|a-b|$ 。

### 3. 學習目標

(1) 能知道絕對值的具體概念為距離，在數線上或坐標平面上兩數相減的絕對值代表此兩數間的距離。

(2) 能透過判斷數字的大小關係，進行絕對值方程式與不等式成立與否的討論。

- (3) 透過絕對值不等式求得的解，搭配在數線上所呈現的區域，介紹區間符號，並能以區間符號表示絕對值不等式的解。可包括區間的聯集以及  $\pm\infty$  符號。
- (4) 能理解絕對值方程式與絕對值不等式在數線上所代表的距離關係，並透過此距離關係求出所有的解，同時也能將所有可能的解表現在數線上。
- (5) 能將不等式  $|x - a| < b$  與誤差範圍的意義相連結，並能用此形式的不等式表達誤差範圍。

#### 4. 教學斟酌

- (1) 本條目通常出現在教科書的第一冊第一章，學生尚未學習到絕對值函數圖形，不應出現以函數圖形方式求解的問題與學習內容。
- (2) 講解絕對值不等式時，應同時採用代數討論及幾何概念兩種方式。使用代數解法時，若使用兩邊平方去絕對值方式，應提醒學生  $0 < a < b$  時， $0 < a^2 < b^2$ ，反之則不成立的概念，在設計問題時，不應出現平方後為  $x$  的二次不等式。
- (3) 進行討論範圍去絕對值的過程中，應強化以下兩種觀念：
  - 對於前提條件及原不等式解需取交集
  - 對於分段討論取不同範圍所求得的解，彼此間則需取聯集。
- (4) 可設計絕對值不等式的聯立方程組，但僅以兩個不等式為限。

#### 條目範圍

1. 不含兩層或更多層的絕對值方程式或不等式，例如不含  $||x - 2| - 2| \leq 3$  之解。
2. 不含絕對值函數圖形及其相關解個數的問題。
3. 不含三角不等式，此課題推遲到十一年級的 A 類課程。
4. 區間符號僅作記錄之用，不含任何集合運算。同理， $\pm\infty$  也僅用作「無界」區間之記號，不討論其運算性質。

#### 釋例

1. 某果汁飲料中，含糖比例為  $30\% \pm 5\%$ ，代表 |實際糖份比 - 30%|  $\leq 5\%$ 。
2. 可利用  $|x - 2| = 3$ ，在數線上的解為  $x = -1$  或  $x = 5$ ，建立學生以 2 為中心，找出距離為 3 的兩個位置，即為  $x = -1$  或  $x = 5$ 。接著再利用此題，請學生思考，當絕對值方程式之解為  $x = -1$  或  $x = 5$  時，其絕對值方程式應為  $|x - 2| = 3$ ，以強化學生對於絕對值以數線上距離概念思考的連結。

#### 錯誤類型

1.  $2|x + 2| + |x - 3| < 5$ ，需分三段進行討論，忽略折絕對值時的前提條件，而求得錯誤答案。
2.  $|x - 2| > x$ ，僅能分段討論，不能使用兩邊同時平方的解法。

#### 評量

1. 分式型絕對值不等式如：解不等式  $\left| \frac{x+1}{x-1} \right| \leq 2$ ，不宜作為本條目之評量問題。
2. 絕對值方程式或不等式之討論以一次為原則，例如：解不等式  $|x^2 - 3x| + 4x - 6 \geq 0$ ，不宜作為本條目之評量問題。
3. 不宜出現需使用三角不等式解絕對值方程式概念的問題。如：解  $|x - 5| + |2x + 3| = |3x - 2|$ 。
4. 不宜出現由多個絕對值所組成之函數求極值問題。如：求  $|x + 3| + |x + 2| + |x - 1| + |x - 7|$  的最小值。

<b>N-10-3 指數</b> ：非負實數之小數或分數次方的意義，幾何平均數與算幾不等式，複習指數律，實數指數的意義，使用計算機的 $x^y$ 鍵。	n-V-1
---	-------

**先備**：正整數指數律 (N-7-7)。

**連結**：科學記號數字 (N-10-1)，對數 (N-10-4)。

**後續**：指數函數 (F-11A-4, F-11B-2)。

**基本說明**

**1. 與 99 課綱的差異**

- (1) 99 課綱實施的時候， $a^0 = 1$ 是在國中定義的，本課綱則放在高中本條目中。
- (2) 99 課綱用單項函數  $x^n = a$ ，其中  $a > 0$ ，之正根定義  $a^{1/n}$ ，本條目意欲由計算的意義而直接定義  $a^{1/n}$ ，不經過單項函數的圖形與求根的過程。99 課綱無計算機相關內容。

**2. 相關約定**

- (1) 不討論負數的非整數次方。原因是未來要建立  $x^y = 10^{y \cdot \log x}$  之概念，而高中階段一律規定  $\log x$  的定義域為  $x > 0$ 。
- (2) 分數指數可以寫成橫列的形式，例如  $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} = 2^{1/2}$ 。

**3. 學習目標**

- (1) 複習整數指數的指數律，並由此概念，定義  $a^0 = 1$  及分數指數與有限小數的指數，並推廣整數的指數律到分數與有限小數。
- (2) 用計算機求得  $x^y$  的數值，並理解它「通常」應為無理數，而計算機的結果是近似值。
- (3) 能解讀計算機顯示很大或很小的  $x^y$  計算結果，例如  $3^{200}$ ，並報讀或記錄為指定有效位數的科學記號數字；也能判讀超出計算機處理能力的  $x^y$ ，例如  $2^{1025}$  和  $2^{-1075}$ 。
- (4) 知道無理數指數也符合指數律，亦即指數律對所有實數皆成立（但非整數指數僅作用在正數上）。
- (5) 介紹算術平均數與幾何平均數的概念及定義，透過代數及幾何方式進行算幾不等式證明，並應強調等號成立的條件。

**4. 教學斟酌**

- (1) 無理數指數（例如  $2^{\sqrt{3}}$ ）也是有意義的，但是實際計算時，它也僅能從  $\sqrt{3}$  的近似值做  $2^{1.732\dots}$  來代替  $2^{\sqrt{3}}$ ，所以  $2^{\sqrt{3}}$  的存在性是一個概念性的問題，沒有計算上的困難。因此，建議不必主動教導這個理論的細節。當學生有疑問或者有能力理解時，教師可以用逼近無理數之有效位數越來越多的有限小數來闡述其意義（例如 2,  $2^{1.7}$ ,  $2^{1.73}$ ,  $2^{1.732}$ , ... 越來越靠近某個固定的數，那個數就是  $2^{\sqrt{3}}$ ），也可以將此概念的說明延宕到學習了指對數函數之後。

無理數指數之所以難以解釋的根本原因，是它不再能使用「連乘」的意義來說明。前段建議之解釋方法，涉及極限概念或者連續概念，皆不宜以嚴格的理論形式教學。建議善用計算機，以具體的數值展現「逼近」的現象。事實上，如果教師並不在此條目範圍內針對無理數指數設計評量問題，則學生暫時沒有理解無理數指數的迫切性，只要接受其存在，能依指數律操作其運算，並且能用計算機操作其近似值即可。因此，教師可以將這個課題移到學習了指對數函數之後再詳細說明。說明的方式之一是定義  $x^y = 10^{y \cdot \log x}$  然後將實數指數的存在性推給指數函數與對數函數的連續性。但即使這樣

說，還是有未竟之處，徹底的處理方式無法避免極限觀念，無法在高中階段真正講清楚，所以，關於無理數指數的存在性與其指數律，總免不了「告知」的成分。既然或多或少都得「告知」，就直接宣稱它「存在」即可。

- (2) 不討論  $0^0$ 。只要避免評量  $0^0$  即可，不必刻意說它不存在或無定義。因為計算機的普及，學生可能會發現科技工具顯示  $0^0$  是 1，數學教師如果遇到這種疑問，可以說這是一個具有某種方便性的規定，將來若是學習到不定形式的極限，才能全面地了解它。

## 條目範圍

本條目僅止於指數符號的認識與了解，再搭配計算機的  $x^y$  鍵，讓學生了解  $2^{2/3}$ 、 $2^{3.14}$  類型之實數指數的意義與近似值，讓學生更確切地感受指數的大小。有關指數函數或指數代數型的操作，皆不屬於此條目。

## 釋例

1. 透過生活中、故事裡或寓言式的例子，讓學生感受指數的成長或衰退。例如：將一張厚度 0.01 公分且足夠大的紙，對摺 10 次的厚度為幾公分？如果能夠一直對摺，幾次以後會比 101 大樓還高？
2. 創造一個需要對科學記號數字開方的情境，特別是指數為奇數的情況。

## 錯誤類型

1. 非整數指數僅在底數為正數時才有意義，例如，雖然  $-2$  是  $x^3 = -8$  的一個解，但是  $\sqrt[3]{-8}$  並不是  $-2$ ，而且  $\left((-2)^{\frac{1}{2}}\right)^2 = -2$  並不正確。
2. 透過計算機的操作是一種估算且會有誤差。例如  $10^{0.1}$  得到的是 1.2589254118，理論上  $(10^{0.1})^{10} = 10^1$ ，但是若算  $(1.2589254118)^{10}$  卻會得到 10.0000000005  $\neq 10$ 。此處應該強調有效位數的選取，進而決定只需要選擇估算的位數。並讓學生了解任一數的小數或分數次方「通常」不是個有限小數。
3. 算幾不等式的誤用。例如：已知  $a, b$  是正實數，若  $3a + 2b = 15$ ，求  $ab$  的最大值。學生誤解：因為  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$  等號成立的條件為  $a = b$ ，又  $3a + 2b = 15 \Rightarrow a = b = 3$ ，所以  $ab$  的最大值為  $3 \times 3 = 9$ 。

## 評量

1. 此節以認識實數指數符號為原則，過多的代數操作不適宜作為此節的命題內容，例如：若  $a > 0$ ，且  $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 4$ ，求  $a^{\frac{5}{2}} + a^{-\frac{5}{2}} = \underline{\hspace{2cm}}$  為不宜的題目。
2. 不過度針對無理數指數做評量。避免評量  $0^0$ 。
3. 有關指數函數性質的試題，皆不為此節的評量範圍，應避免。  
例：  $x, y, z \in \mathbf{R}, xyz \neq 0$ ，已知  $3^x = 5^y = 15^z$ ，求  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z}$  之值
4. 算幾不等式的相關應用例題僅限於兩個變數。例如：若  $a + b = 15$  求  $a^2b$  之最大值的題型不適宜作為考題。
5. 不宜在這裡出現根式的代數運算問題，應強調計算機處理小數或分數次方所得結果與目標

數值的誤差。

$$\text{例：} \frac{1}{a^5} \times (a^2)^4 \times \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^2} \times (a^3)^2}$$

<b>N-10-4 常用對數：</b> log 的意義，與科學記號連結，使用計算機的 $10^x$ 鍵和 log 鍵。	n-V-1
---	-------

**先備：**概數 (N-4-4)，指數律 (N-7-7)，科學記號 (N-7-8 與 N-10-1)。

**連結：**指數 (N-10-2)，有效位數 (N-10-1)，數值計算的誤差 (N-10-5)，等比級數與求和公式 (N-10-6)。

**後續：**對數律 (A-11A-4)，指數函數與對數函數 (F-11A-4)。

### 基本說明

#### 1. 與 99 課綱的差異

本課綱使用計算機，讓學生能實際透過計算操作而認識常用對數 log 的意義，並能將它當作一種紀錄和表達數值的記號，而不是直接定義對數隨即進行代數操作，也不透過指數函數的圖形講解對數。可以說本課綱將對數的學習分成兩階段，本條目讓 log 先以記號與計算的意義出現，讓學生有機會在具體情境中使用它，然後在十一年級才進入代數性質和變化與關係的層次，並引入對數函數的觀念。

#### 2. 相關約定

(1) 對任意正數  $x$ ， $\log x$  稱為  $x$  的對數。

(2) 在求  $f(x) = b$  之近似解的情境中，「取二位最近小數」或「約至二位小數」或「約至小數點下第二位」的意思是： $x$  是使得  $f(x)$  與  $b$  誤差最小的二位小數；當此數不唯一時，依情境做個案處理。例如求解  $10^x = 3$  時， $10^{0.4771} = 2.99985\dots$ ，誤差不到 0.0003，而  $10^{0.4772} = 3.00054\dots$ ，誤差超過 0.0004，用計算機實驗觀察其他四位小數造成的誤差更大，所以約至四位小數的解是  $x = 0.4771$ 。

#### 3. 學習目標

(1) 能用計算機的  $x^y$  功能，探索形如  $(1.01)^x = 2$  之方程式的近似解。

(2) 理解計算機的  $10^x$  功能是  $x^y$  的特殊化，明白此特殊化的緣由是我們使用「十進制」計數系統，並能用計算機估計指定位數的  $10^x = a$  近似解。

(3) 理解  $\log a$  的意義就是  $a = 10^{\log a}$ ，其中  $a$  為正數。反之，任意正數  $a$  都可以改寫成  $10^{\log a}$ 。能用 log 符號紀錄或表達數值。

(4) 能轉換科學記號數字與 10 的幕次，藉以理解 log 數值之整數與小數部分的意義，並建立 10 的幕次與對數的數感（亦即不使用計算機而粗略估計 10 的幕次或對數的值）。

#### 4. 教學斟酌

(1) 建議讓學生先熟悉  $2 = 10^{0.3010}$ 、 $3 = 10^{0.4771}$  的近似值表達方式，再以指數律理解  $10^{0.7781} = 6$ 、 $10^{1.4771} = 30$ 、 $10^{-1.6990} = 0.02$  的近似值表達方式。最後才引入符號  $\log 2 = 0.3010$ 。

(2) 把計算機當作數學實驗的工具，在數學理論未及說明計算機的功能時，可以把它的結

- 果當作客觀存在的事實。在實際的計算情境中，教導科學記號數字與有效數字之觀念。
- (3) 若  $10^a = 10^b$  則可以推論  $a = b$ ；此事實隱含一個前提，即  $10^x$  是一對一函數，但是只要學生依照計算的經驗接受上述事實，教師可以不多做闡述。在學生能夠理解的條件下，可提醒學生這類關係未必成立，例如  $a^2 = b^2$  不能推論  $a = b$ 。

### 條目範圍

1. 僅介紹以 10 為底的常用對數符號，不講其他底數也沒有換底公式。
2. 不介紹對數函數，所以不宜介紹遞增遞減性質及內插法。
3. 本條目不含「 $\log 2$  為無理數」的證明。
4. 含指數或對數的方程式或不等式，應在高二學習對數函數後再學習。

### 釋例

1. 不使用計算機，判斷  $10^{1.01}$ 、 $10^{0.4771}$  分別最接近哪一個整數，並說明理由。
2. 不使用計算機，判斷  $\log 34567$  介於哪兩個整數之間，並說明理由。
3. 待學生對 10 的幕次表示法熟練後，可以與化學科連結，計算 pH 值；例如將 pH 值 3 與 pH 值 4 的溶液等體積混合之後，pH 值會是 3.5 嗎？

### 錯誤類型

以  $\log$  定義的度量，關心的是 10 的幕次，例如地震的級數、酸鹼度、聲音的響度等。在這些度量裡，級數 1 並不是級數 2 的一半，兩種級數的「平均」也不是算術平均數。

### 評量

1. 不使用對數律來幫助計算，若涉及指數方程式，僅限  $a^x = b$  且  $0 < a \neq 1$  的情況。
2. 不使用首數與尾數的名詞，應以科學記號的表達法來理解一個數為幾位數。
3. 關於計算數值解的「取至」和「約至」的說法，都是為了溝通而約定的共同語言，在評量時可用於說明題意，但不宜作為直接評量的對象。
4. 不介紹對數函數，因此應避免使用遞增遞減性質來比較數值的大小，如「比較  $\log\sqrt{2}$ 、 $\log 3$  與  $\log\pi$  的大小」為此階段學習不宜出現的評量試題。

<b>N-10-5 數值計算的誤差：認識計算機的有限性，可察覺誤差的發生並做適當有效位數的取捨。★#</b>	n-V-2
--	-------

**連結：**所有使用計算機求值或求解的情形。

### 基本說明

#### 1. 與99課綱的差異

以前不在課綱裡放置計算機相關內容，所以沒有討論誤差的必要性，這是新的課題。此外，以前的高中課綱都類似教材章節的大綱，所以也沒有這類「不設置獨立教學單元，融入適當課題，在合理的脈絡中教授」的綱要條目。

#### 2. 相關約定

- (1) 所謂「誤差」就是指「絕對誤差」，亦即估計值與理論值之差。
- (2) 在課綱文件裡「計算機」有時也稱為「計算器」，意指英文的 Calculator，並非 Computer；後者稱為「電腦」。

### 3. 學習目標

- (1) 能理解計算機的「有限性」可以做以下類比：一律採用係數部分限定為三位有效位數，且指數部分限定在 $\pm 9$ 之間的科學記號數字做計算（除了0以外），但是在宣告答案時必須將係數的最後一位四捨五入，給出兩位有效數字的結果。如此限制所產生的誤差，本質上就是計算機的有限性誤差。計算機硬體的擴充可以提高係數的有效位數與指數的位數，得計算結果顯示較多的數字，但是永遠無法克服其有限性。所以，計算機產生的結果（幾乎）必有誤差。
- (2) 能察覺計算結果可能是一個循環小數，例如1.6666667可能是 $1.\bar{6}$ ，但是不論它是或不是 $\frac{10}{6}$ ，都只能由數學來論證而不能從數值判斷。但是，在適當的誤差範圍內，可以用 $\frac{10}{6}$ 代替1.6666667。
- (3) 能理解當有理數的小數循環節太長，就無法從計算結果讀出循環小數。
- (4) 能測試一部計算機的表現是「取到」還是「準到」最後一位有效數字，亦即是否在其下一位做過四捨五入；例如可以用 $\frac{1}{6}$ 的小數做此測試。
- (5) 能理解科學記號指數部分的有限性造成「溢位」(Overflow)和「歸零」(underflow)的現象。
- (6) 能根據科學記號數字相加（減）的算則，理解係數部分的有限性會導致小數消失的現象。

### 4. 教學斟酌

- (1) 本條目為處理操作計算器時可能面臨的實際狀況，可趁機協助學生建立數位素養，但是並不是數學本身的學習目標。所以，本條目不宜列入數學本身的評量。
- (2) 本條目的內容不宜集中在一堂課或一個單元裡教授，宜伴隨著學生操作計算機的經驗以及課程對計算機的需求，在適當的時機逐步教授。
- (3) 如果學生發現溢位和歸零的指數並「不對稱」：即使 $10^N$ 發生溢位， $10^{-N}$ 未必歸零，那是因為計算機採取了一種例外措施。當計算機裡的科學記號指數部分已經達到最小值的時候，係數部分就採取例外措施，容許它小於0。教師可指出方向，讓學生自行探索。使用計算機之後，讓部分的數學變成像自然科學一樣，有了觀察的對象。不妨讓學生去觀察。
- (4) 如果學生發現溢位產生的  $\text{Inf}$  還可以繼續做計算，將會發現它具備一些特殊的計算性質。這些性質跟 $\infty$ 的運算性質吻合，學生並不會因此被誤導。如前述，不妨讓學生去觀察並歸納。當有人發現 $0 \times \infty$  或者 $\infty - \infty$ 的結果不再是數值或  $\text{Inf}$  的時候，教師可以引導學生認識這方面的數學，有可能啟發學生的好奇心。如果計算機顯示  $\text{NaN}$ ，那是  $\text{Not a Number}$  的縮寫。請注意，這些現象並非有限性所造成的誤差。
- (5) 類似於前款， $1 \div 0$ 、 $0 \div 0$ 、 $0^0$ 的計算結果也不會出現誤差，其結果應該符合數學理論或慣例。學生如果當時無法理解，教師不妨告知「這是計算機工業根據數學原理而共同制訂的標準」。

### 條目範圍

1. 本條目僅涉及計算機的有限性所造成不吻合數學理論的狀況，不討論演算法造成的穩定性



或收斂性課題。

2. 本條目不含誤差的傳播或擴散現象，也不要延伸到任何誤差分析的課題。

### 錯誤類型

1. 當計算結果顯示  $9.99999999 \times 10^{-7}$ ，學生照實抄錄下來，或者直接認定它就是  $10^{-6}$ ，都不正確。如果指定以三位有效位數作答，則可以回答  $10^{-6}$ ，否則應該懷疑它是  $10^{-6}$ ，並設法以數學方法論述之。
2. 雖然  $\frac{1}{19}$  應該等於循環小數，但是它的循環節有18位數 (052631578947368421)， $\frac{1}{29}$  更長達28位，超出大多數計算機的顯示位數，所以因為計算機的有限性而無法顯示循環節，學生可能誤以為它不是循環小數。並非所有單位分數的循環節長度都接近分母，例如  $\frac{1}{27}$  的循環節只有3位。
3. 如果一個數的絕對值太大，超過了計算機所能處理的上限，可能會顯示 Inf 或 -Inf，它是 infinite (無窮) 的縮寫，但那並不是數學符號  $\infty$  的同義符號。相對的，如果一個數的絕對值太小，就會歸零，可能會顯示 0 或 -0。
4. 因為計算機內有效位數的限制，1 加很小的正數 (但不至於小到歸零) 結果卻仍可能等於 1。發生此現象的最大正數，稱為此計算機的「機器精度」(machine epsilon)。

### 評量

1. 本條目不宜作為直接評量的對象。
2. 在數學課裡使用計算機是為了輔助數學的學習，不應刻意評量計算機產生誤差的原因，也不應利用計算機的誤差而設計評量的誘答方向。
3. 不應要求學生僅根據小數數值而猜測其整數或分數的值。

<b>N-10-6 數列、級數與遞迴關係：</b> 有限項遞迴數列，有限項等比級數，常用的求和公式，數學歸納法。	n-V-5
--	-------

**先備：**已認識常見的數列 (等差、等比) 及其規律性 (包括圖形的規律性)，並能由給定條件求其一般項 (N-8-3、N-8-4、N-8-6)、能利用等差級數求和公式解決生活中相關的問題 (N-8-5)。

**連結：**利用求和公式處理一維數據及二維數據的相關統計量 (D-10-2)。

**後續：**做為學習無窮數列與級數的基礎 (N-12甲-1、N-12甲-2、N-12乙-2)。

### 基本說明

1. 與 99 課綱的差異
  - (1) 國中階段已介紹等比數列的一般項求法，但並未涉及其逆向命題，不同於 99 課綱是在高中階段才正式介紹等比數列，此處可將國中的學習經驗作為出發點，並引導學生做逆向問題之思考。
  - (2) 99 課綱在此條目有介紹  $\sum$  符號及其相關性質，本條目則是不介紹  $\sum$  符號及其相關性質，僅透過條列方式，讓學生具體熟悉與練習有限項級數和的運算及處理方法。

## 2. 學習目標

- (1) 能觀察並具體操作具有規律的數列或圖形，並寫出其遞迴關係式及一般項。
- (2) 能由所給定的條件求出等比數列或等比級數的一般項及項數。
- (3) 能利用遞迴關係式推導出常用求和公式。
- (4) 能了解數學歸納法中所蘊含的遞迴關係，並加以運用作為證明的方法。

## 3. 教學斟酌

- (1) 數列或圖形規律應強調其遞迴關係的建立與連結，若能同時具有與項數或圖形特徵的相關性，會更能協助學生學習此觀念。
- (2) 應介紹等比級數求和公式之推導過程，但不宜將此處理方法延伸至循環小數轉換為分數的問題，因為此處涉及無窮級數與極限的概念，所以在教學設計上勿做過度的延伸。
- (3) 可透過學生熟悉的等差數列及等比數列一般項，帶出以累加法及累乘法處理具有遞迴關係的數列一般項，再進一步引入其他的遞迴關係式求一般項的問題。此處的遞迴關係式若能搭配圖形或數列規律，引導學生先進行歸納、臆測，最後再以代數運算進行推論的驗證，可以讓學生完整體驗數學思考的歷程。同時也要引導學生思考，觀察有限項所做的臆測，不見得正確，需經過驗證的過程才能確認其正確性，此處可選擇適當的例子做為說明。

- (4) 由遞迴關係式推演出一般式的問題以一階為限，但若僅止於遞迴關係式的觀察，則不受此限。(如：費氏數列)

- (5) 可透過代數運算或圖形規律的設計，引導學生進行常用求和公式的推導，僅限於

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}, 1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ 及}$$

$$1^3+2^3+3^3+\dots+n^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2, \text{ 不宜過度延伸其他的級數求和問題。}$$

- (6) 數學歸納法的引入是以做為遞迴關係的應用為出發點，因此有關數學歸納法的學習素材選擇，應同時兼顧遞迴關係式及一般式，並應引導學生進行歸納、臆測、驗證，讓學生完整體驗數學思考的歷程。

## 條目範圍

1. 學生尚未有無窮級數及極限的概念，不宜出現循環小數化為分數的問題。
2. 數學歸納法強調為遞迴關係的應用，此處不宜出現不等式型的數學歸納法問題。
3. 數學歸納法以第一型為限，不宜出現第二型數學歸納法的問題。
4. 本條目不使用  $\sum_{k=n}^m$  表示足標  $k$  從  $n$  迭代到  $m$  的連加，請盡量在具體情境下使用「...」或者輔以文字註解，代替以上符號。因此，涉及  $\sum$  相關運算性質的問題，不宜在此處出現。

**N-10-7 邏輯：**認識命題及其否定，兩命題的或、且、推論關係，充分、必要、充要條件。★#

n-V-6

先備：畢氏定理以及平面幾何的推理。

連結： $\sqrt{2}$  是無理數的證明，各單元中的性質、定理敘述與證明。

## 基本說明

### 1. 與 99 課綱的差異

99 課綱在附錄中介紹命題、充分條件、必要條件、充要條件、反證法等邏輯課題。本課綱雖移入課文中，但不另立章節，搭配課程正常進度中的數學命題說明這些概念，並隨時予以連結和印證。

### 2. 相關約定

- (1) 原則上我們只在數學課程中討論數學命題，亦即可以用數學知識判斷真偽的直述句。
- (2) 若  $P$  表示一個命題，符號「 $\neg P$ 」代表  $P$  的否定，又稱為非  $P$ 。
- (3) 「且」和「或」用文字描述，不用符號。
- (4) 符號「 $P \Rightarrow Q$ 」代表若  $P$  則  $Q$ 。當「 $P \Rightarrow Q$ 」成立時，稱  $P$  為  $Q$  的充分條件， $Q$  為  $P$  的必要條件。
- (5) 以符號「 $P \Leftrightarrow Q$ 」表示「 $P \Rightarrow Q$ 」且「 $Q \Rightarrow P$ 」，此時稱  $P$ 、 $Q$  互為充要條件。
- (6) 當  $P$  和  $Q$  兩個命題同時為真且同時為偽時，稱它們等價；若要使用符號，建議  $P \equiv Q$ 。

### 3. 學習目標

- (1) 認識、理解並能操作數學命題的否定命題。例如  $x > 0$  的否定為  $x \leq 0$ ，正整數  $n$  為質數的否定為  $n = 1$  或是合數， $\sqrt{2}$  為無理數的否定是  $\sqrt{2}$  為有理數。
- (2) 理解「或」和「且」的意義，並能有效溝通。例如  $|x-1| \leq 1$  的解區間和  $|x-1| > 1$  的解區間分別該用「且」還是「或」來描述？（此處可以順便再講解一次：符號  $-1 \leq x \leq 1$  的意義是  $x \geq -1$  且  $x \leq 1$ 。）
- (3) 理解並能操作用「或」或「且」連接的複合命題之否命題。例如前項之兩個解區間互為否命題。
- (4) 理解「充分」、「必要」、「充要」條件的意義，並能有效溝通。例如「 $\triangle ABC$  是直角三角形」是「 $\triangle ABC$  之三邊長滿足  $BC^2 = AC^2 + AB^2$ 」的哪一種條件？「 $\angle A$  為銳角」是「 $\sin A > 0$ 」的哪一種條件？
- (5) 理解「反例」的意義，並能用以判斷命題之偽。例如「 $x^2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$ 」之偽。
- (6) 理解「等價」的意義，並理解數學定義皆為等價的意涵。例如正整數  $n$  為偶數等價於存在正整數  $k$  使得  $n = 2k$ ， $\sqrt{2}$  為有理數的假設等價於存在正整數  $n$ 、 $m$  使得  $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$ 。
- (7) 理解  $P \Rightarrow Q$  與其對偶命題  $\neg Q \Rightarrow \neg P$  等價，並能應用此等價關係。例如若平面上的曲線沒有對稱軸，則它不是二次函數的圖形。
- (8) 理解  $P \Rightarrow Q$  與其逆命題  $Q \Rightarrow P$  不等價，例如「若實數  $x > 0$  且  $y > 0$  則  $xy > 0$ 」正確但是其逆命題錯誤。認識充分但不必要的條件，如前例。
- (9) 理解  $P \Rightarrow Q$  與其否逆命題  $\neg P \Rightarrow \neg Q$  不等價，如前項的例子。
- (10) 從  $\sqrt{2}$  是無理數的證明，認識反證法：若一命題  $\neg P$  導致矛盾，則  $\neg P$  為偽而  $P$  為真；所謂矛盾的意思是，可推論某命題  $Q$  與  $\neg Q$  同時為真。

### 4. 教學斟酌

- (1) 避免使用自然語言的敘述作為邏輯的例證。因為自然語言（特別是中文）有很多模稜兩可或者「歧義」的可能，而且自然語言的陳述跟環境有關，其前提隱諱不明，所以，拿它們當作邏輯的例子，經常造成麻煩，反而讓師生進退維谷無所適從。適當的作法，就是在數學課裡，數學老師專注於「數學命題」的邏輯就好了。至於學生是否將邏輯應用到「生活」和「言談」中，由其他領域的教育來補充。
- (2) 邏輯概念搭配數學課程之學習內容中需要的數學定義、定理、性質、條件來學習，第一次出現的概念為介紹，爾後遇到的同樣概念則為增強其理解。不要另立主題，也不針對邏輯而評量。
- (3) 複合命題「 $P$  且  $Q$ 」、「 $P$  或  $Q$ 」的否定命題，可與集合中的笛摩根定律一併教學。

### 條目範圍

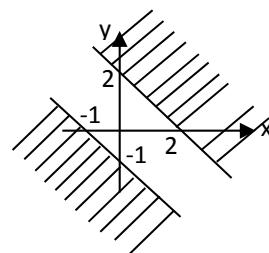
不衍生形式性邏輯運算，不含真值表。

### 釋例

1. 學生較難理解複合命題「 $P$  且  $Q$ 」、「 $P$  或  $Q$ 」的否定命題，搭配易懂的數學概念陳述。例如「 $a=0$  或  $b=0$ 」的否定敘述為  $a \neq 0$  且  $b \neq 0$ ，學生對於「或」、「且」的概念模糊，可試著讓學生理解題目等同於「 $ab=0$ 」的否定敘述「 $ab \neq 0$ 」，再轉為  $a \neq 0$  且  $b \neq 0$ 。
2. 以實例說明「 $P \Rightarrow Q$ 」成立時，「 $Q \Rightarrow P$ 」不一定會成立；以及「 $\neg P \Rightarrow \neg Q$ 」、「 $\neg Q \Rightarrow \neg P$ 」這兩者的區別。例如：「若  $x > 0$ ，則  $y > 0$ 」成立時，則可以推出下列哪一個敘述亦成立？
  - (A) 若  $x \leq 0$ ，則  $y \leq 0$
  - (B) 若  $y \leq 0$ ，則  $x \leq 0$
  - (C) 若  $y > 0$ ，則  $x > 0$
  - (D) 若  $x > 1$ ，則  $y > 0$
  - (E) 若  $y < 0$ ，則  $x \leq 0$
3. 學校規定上學期成績需同時滿足以下兩項要求，才有資格參選模範生。一、國文成績或英文成績 70 分(含)以上；二、數學成績及格。已知小文上學期國文 65 分而且他不符合參選模範生資格。請問下列哪一個選項的推論正確？
  - (A) 小文的英文成績未達 70 分
  - (B) 小文的數學成績不及格
  - (C) 小文的英文成績 70 分以上但數學成績不及格
  - (D) 小文的英文成績未達 70 分且數學成績不及格
  - (E) 小文的英文成績未達 70 分或數學成績不及格

### 錯誤類型

1. 學生不能了解「 $P \Rightarrow Q$ 」成立時，「 $Q \Rightarrow P$ 」不一定會成立的觀念；以及「 $\neg P \Rightarrow \neg Q$ 」、「 $\neg Q \Rightarrow \neg P$ 」這兩者的區別。
2. 「或」、「且」概念搭配圖形，難度增加。例如：  
 下方不等式圖形，小安說其對應式子為  $(x+y-2)(x+y+1) \geq 0$ ，小花說是  $x+y \geq 2$  且  $x+y \leq -1$ ，判斷兩人的對錯。



### 評量

1. 此條目不單獨評量。每一數學學習單元都會有邏輯概念，搭配學習內容做邏輯的培訓即可，不刻意單獨評量邏輯。

2. 可搭配集合單元，結合「或」、「且」與「聯集」、「交集」概念，做整合評量。

<b>G-10-1 坐標圖形的對稱性：</b> 坐標平面上，對 $x$ 軸，對 $y$ 軸，對直線 $x=y$ 的對稱，對原點的對稱。	g-V-2
---	-------

**先備：**線對稱 (S-7-4,5)，三角形的全等 (S-8-5)。

**連結：**直線方程式 (G-10-2)，圓方程式 (G-10-3)，一次與二次函數圖形 (F-10-1)，廣義三角比(G-10-6)。

**後續：**指數函數與對數函數 (F-11A-4)，三角函數圖形 (F-11-A-1，F-11-B-1)。

### 基本說明

#### 1. 與 99 課綱的差異

99 課綱並未明訂這些學習目標。

#### 2. 相關約定

所謂兩點  $P$  和  $P'$  對稱於點  $Q$  的定義是  $Q$  位於線段  $PP'$  的中點。

#### 3. 學習目標

不必訂定獨立的單元，將這些對稱性一次講完。搭配適當的學習單元中，介紹坐標平面上（而非一般平面上）點與點的特殊對稱關係，包括：

- (1) 點  $P(a,b)$  對稱於  $x$  軸的點是  $P_1(a,-b)$ ；
- (2) 點  $P(a,b)$  對稱於  $y$  軸的點是  $P_2(-a,b)$ ；
- (3) 點  $P(a,b)$  對稱於原點的點是  $P_3(-a,-b)$ ；
- (4) 點  $P(a,b)$  對稱  $y = x$  直線的點是  $P_4(b,a)$

以上關係的推論，可連結國中的直角三角形之全等性質。點對稱的觀念穩固之後，再介紹圖形與圖形的（前述）特殊對稱關係。

#### 4. 教學斟酌

- (1) 應提供學生循序漸進的學習機會；建議讓學生先由描點的方式，理解到點與點對稱的情形與特性，再擴及圖形與圖形的對稱關係。
- (2) 學生應可理解圖形自身的對稱性，如二次函數的圖形有對稱軸的意義，但圖形自身對稱於  $y$  軸，與對稱於原點分別稱為偶函數與奇函數的名稱可在 F-12 甲-1 時再介紹。
- (3) 可使用數學軟體輔助教學。
- (4) 在高一時，學生函數觀念尚未鞏固，所以不必使用抽象符號如：圖形  $y = f(x)$  與  $y = -f(-x)$  對稱於原點。

### 條目範圍

本條目是在坐標平面上的特殊對稱關係，不涉及一般的線對稱與點對稱。

### 釋例

1. 判斷直線  $y=2x$  分別對稱於 (1)  $x$  軸 (2)  $y$  軸 (3)  $x=y$  直線的圖形，並探討其斜率。
2. 討論如何將  $f(x) = x^2$  的函數圖形，經由對稱與平移，得到  $y = 1 - (x - 3)^2$  的圖形。
3. 在說明三角比之補角、負角或餘角性質時，可運用或連結廣義角終邊的對稱性。

### 評量

宜評量課內提及的圖形即可， $y = |x - 1|$  的圖形宜在 F-12甲-1 再提及。

<b>G-10-2 直線方程式：</b> 斜率，其絕對值的意義，點斜式，點與直線之平移，平行線、垂直線的方程式。點到直線的距離，平行線的距離、二元一次不等式。	g-V-4
---	-------

**先備：**二元一次聯立方程的幾何意義 (A-7-6)，平行 (S-8-3)，直角三角形的三角比 (S-9-5)。

**連結：**絕對值，廣義角和極坐標，廣義角的三角比 (G-10-5,6)，一次函數 (F-10-1)。

**後續：**平面向量及其運算 (G-11A-1,6、G-11B-1,2)。

### 基本說明

#### 1. 與 99 課綱的差異

直線方程式從十一年級挪到了十年級，看似恢復了 95 暫綱的安排，但是本條目的設計內涵還是比較接近 99 課綱的想法，亦即以直線方程式導引出各種基本的坐標方法，作為向量方法的前置經驗與動機。其次，因為九年級學了直角三角比，正的斜率可連結仰角的正切比。

#### 2. 相關約定

- (1) 直線方程式和 (平面上的) 二元一次方程式可視為同義詞。
- (2) 鉛直線沒有斜率。斜率的絕對值較大時，說直線較「陡」。
- (3) 當直線方程式  $ax + by + c = 0$  可以寫成  $y = mx + k$  形式時，可以說  $y$  是  $x$  的函數，其中  $x$  是自變數而  $y$  是應變數；若可以寫成  $x = py + q$  形式，可以說  $x$  是  $y$  的函數，此時  $y$  是自變數而  $x$  是應變數。國中階段已經有函數觀念，可以與之連結，但是本條目不寫  $f(x)$  這種函數符號。
- (4)  $L: y = 2x$  表示直線  $L$  的方程式是  $y = 2x$
- (5)  $d(P, L)$  表示點  $P$  到直線  $L$  的距離， $d(L_1, L_2)$  表示兩平行線  $L_1$  和  $L_2$  的距離。
- (6) 可善用  $\perp$  符號，稱之為「垂直符號」，唸 perp (是 perpendicular 的簡寫)。例如  $L \perp M$  表示直線  $L$  與  $M$  互相垂直， $L^\perp$  表示直線  $L$  的垂直線， $m^\perp$  表示垂直於斜率為  $m$  之直線的斜率。
- (7) 原則上以語文描述「將變數  $x$  置換成  $x - h$ 」，教師在適合的班級中，可約定使用  $x \mapsto x - h$  之置換符號。

#### 3. 學習目標

- (1) 理解坐標數值的加減，造成點在坐標平面上的平移效果。
- (2) 知道斜率的定義，能從二元一次方程式計算斜率，理解滿足方程式  $ax + by = 0$  的所有點  $(x, y)$  聚集成通過原點且斜率為  $-\frac{a}{b}$  的直線 (當  $b \neq 0$ )。
- (3) 當斜率為正數時，稱直線與  $x$  軸正向所夾的角為直線的仰角，連結九年級的三角比，理解斜率就是仰角之正切比。所以斜率也是九年級說的「坡度」的意思。
- (4) 理解斜率相等的 (不同) 直線皆彼此平行，因此認識到任何直線都是通過原點之同斜率直線的 (水平或鉛直) 平移；而若限定其通過原點，則斜率與直線是一一對應的。在技術上，能操作直線的水平與鉛直平移，並能用以化簡問題。
- (5) 將直線  $L: ax + by + c = 0$  的  $x$  置換成  $x - h$  時，直線左右平移  $h$  單位，將  $y$  置換成  $y - k$

時，直線上下平移  $k$  單位。通過原點且與  $L$  平行的直線是  $L_0: ax + by = 0$ ； $L$  是  $L_0$  的水平「或」鉛直平移，平移的量就是  $L$  的  $x$  截距或  $y$  截距。

- (6) 給定原點以外的一點  $P(a, b)$ ，理解  $P^\perp(-b, a)$  使得線段  $OP^\perp$  是  $OP$  往逆時鐘方向旋轉直角的結果（盡量使用基本的全等三角形技術來推論）；而利用點對稱，得知  $P'(b, -a)$  使得線段  $OP'$  是  $OP$  往順時鐘方向旋轉直角的結果。斜率互為「相反倒數」的直線彼此垂直。
- (7) 理解並能運用點到直線的距離公式，擴及兩平行線的距離公式。
- (8) 能根據情境設立二元一次不等式，理解其「解」的意義，並能在坐標平面上畫出「解區域」的圖示。能以線型不等式表示坐標平面上（含或不含直線）的半平面區域。

#### 4. 教學斟酌

- (1) 應國中階段已經知道二元一次方程式的圖形是直線，且在平面幾何的層次上理解關於平行線與垂直線的基本性質，本條目的學習要確實建立在這些基礎上，進一步以斜率連結所有相關的既有知識，並發展新的坐標幾何方法，展現坐標的功能。
- (2) 以下性質可以當作已知而不再闡述：平面上兩平行線存在公垂線，且這些公垂線互相平行。可以定義平面上的平行線為同時垂直於某直線的兩條直線。
- (3) 關於直線的任何性質或公式，都盡量從通過原點的直線開始學習，再以平移手段獲得一般化的知識，**具體展現以簡馭繁的精神。**
- (4) **應提供學生循序漸進的學習機會。**建議先在坐標平面上練習點的平移，例如將三角形  $APQ$  平移至  $OP'Q'$ ，其中  $A$  點平移至原點，討論  $P'$  和  $Q'$  的坐標。鞏固了點的平移之後，再討論直線的平移。爾後，有圓的平移、二次函數的平移、三次函數的平移，皆屬同一脈絡的學習。
- (5) 直線的「陡」度、三角形面積公式、點到直線的距離公式，都是運用絕對值符號作為溝通工具的絕佳範例。十年級範圍內的絕對值，應該以類似這種脈絡中的絕對值紀錄與操作為主，不要延伸到複雜的不等式與絕對值函數圖形。
- (6) 可藉此條目以集合的描述形式表示半平面區域，例如用  $R = \{(x, y) \mid y \leq 2x\}$  描述坐標平面上的區域  $R$ 。此集合形式的教學是以溝通為目的，不要擴張到集合運算。
- (7) 順時鐘和逆時鐘方向的直角旋轉（前項之第 (5) 點），是認識角有方向性之必要的初步經驗，應該要帶領學生認識。
- (8) 教學與評量過程中，應讓學生有機會察覺：妥善設計的坐標系統，或者妥善利用平移，能簡化問題並且凸顯問題的核心要素

#### 條目範圍

1. 本條目意欲彰顯坐標的功能：它不只提供繪製方程式圖形的一張畫布而已，它有自己的功能。這些功能可以當作向量的前置經驗，但是本條目絕不包含向量觀念，也沒有任何向量操作。向量在數學史上發生得比較晚，顯示它雖然威力強大，卻很可能需要比較高的數學成熟度，本條目為學生準備這種成熟度，但過早引進向量方法很可能是揠苗助長。
2. 本說明雖指出三角形面積的坐標算法，以彰顯直角坐標的功能，並為師生提供好用的工具，但它不是必需的，本條目不含「行列式」，絕不系統性地表述行列式的代數性質。

#### 釋例

1. 判斷直線  $y=2x$  分別對稱於 (1)  $x$  軸 (2)  $y$  軸 (3)  $x=y$  直線的圖形，並探討其斜率。

- 討論如何將  $f(x) = x^2$  的函數圖形，經由對稱與平移，得到  $y = 1 - (x - 3)^2$  的圖形。
- 在說明三角比之補角、負角或餘角性質時，可運用或連結廣義角終邊的對稱性。

### 錯誤類型

若  $h > 0$ ，將點的  $x$  坐標置換成  $x - h$  時，點的位置向左平移。但是將方程式的  $x$  變數置換成  $x - h$  時，滿足方程式的圖形卻向右平移。這裡不能強記，強記則容易混亂，務必要求了解。而平移的想法與技術是最核心的數學方法之一，教師務必讓學生有充分學習的機會。

### 評量

- 請勿過度練習二元一次聯立方程式的求解，不要設計太多等價於求解二元一次聯立方程式的評量題目。
- 不要將使用向量方法的題目，移植到本條目的評量。

G-10-3 圓方程式：圓的標準式。	g-V-4
--------------------	-------

**先備：**熟練兩點之間的距離公式與配方法 (G-8-1、A-8-7)。

**連結：**圓與直線的關係 (G-10-4)，廣義角和極坐標 (G-10-5)。

**後續：**橢圓的標準式與參數式(G-12甲-1)。

### 基本說明

#### 1. 與 99 課綱的差異

本條目與 99 課綱沒有差異，主要希望學生能將圓的定義透過坐標及距離公式找出其代數型式，以連結國中的幾何定義，並作為距離公式的具體應用但是 99 課綱將此學習內容安排在十一年級，而此時改在十年級，在技術上沒有向量可用，學生的成熟度也稍低，期望教師採用較為基礎的工具來發展本條目的內容。

#### 2. 相關約定

通常使用  $C$  或  $\Gamma$  表示一個圓，用  $C: x^2 + y^2 = 1$  表示圓  $C$  的方程式為  $x^2 + y^2 = 1$ 。

#### 3. 學習目標

- 能將圓的幾何定義透過坐標及距離公式，表示成  $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ ，並能理解滿足此方程式的點  $(x, y)$  也會在以  $(h, k)$  為圓心，半徑為  $r$  的圓上。
- 能利用圓的標準式判定平面上一點與圓的相對位置關係：圓內、圓上、圓外。並以圓的不等式表示坐標平面上圓內、圓外（含或不含圓）的區域。
- 能將圓的標準式轉換成二元二次方程式，並能從中找出圓心與半徑。
- 能從所給定的二元二次方程式  $Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0$  判斷所代表的圖形種類（圓、點、無圖形）。

#### 4. 教學斟酌

- 可先由圓心在  $(0, 0)$ ，半徑為 1 的情形開始引入標準式，透過  $x \mapsto x - h$ ， $y \mapsto y - k$ ，讓學生連結方程式平移的概念，最後將圓以原點為中心點進行縮放  $r$  倍，得到標準式：  
 $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ 。
- 此處應強調標準式可表示成二元二次方程式(一般式)，但任意的二元二次方程式(不討



論有  $xy$  項的情況，而是  $x^2$  與  $y^2$  係數不同的情況) 卻不一定代表圓的圖形，可透過實際的例子操作讓學生理解其差異點。

(3) 可連結國中階段的一些幾何性質，如任意三角形必有唯一的外接圓，透過圓的幾何性質或是距離公式進行求解。

(4) 可藉此條目以集合的描述形式表示圓內或圓外的區域，例如用  $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 2y \leq 0\}$  描述坐標平面上的一個圓形區域  $R$ 。此集合形式的教學是以溝通為目的，不要擴張到集合運算。

### 條目範圍

本條目著重在圓的標準式型態的建立，並連結其代數型態，不宜出現給定條件利用坐標求其軌跡方程式的問題。

### 評量

若本條目在不等式之前，則解二次不等式的相關問題不宜出現，例：設  $k \in \mathbb{R}$ ， $\Gamma: x^2 + y^2 + 2kx + 2(k+2)y + 3k^2 + k = 0$  表一圓，求  $k$  範圍。

<b>G-10-4 直線與圓：</b> 圓的切線，圓與直線關係的代數與幾何判定。	<b>g-V-4</b>
--	--------------

**先備：**圓的幾何性質 (S-9-7)，點、直線與圓的關係 (S-9-8)。

**連結：**直線方程式 (G-10-2)。

**後續：**二次曲線 (G-12甲-1)。

### 基本說明

#### 1. 與 99 課綱的差異

99 課綱將圓方程式置於十一年級，但是本課綱則在十年級，並且並無規定教學順序。因此，若本條目置於三角比之後，則近似於 99 課綱；但若本條目置於三角比之前，則僅可應用國中學習的銳角三角比，並應注意某些適合使用三角的課題，延到三角之後再一併處理。另外，若本條目置於不等式之前，則與二次(以上)不等式相關的問題，在此也不宜出現。

#### 2. 相關約定

以集合方式： $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 9\} \cap \{(x, y) \mid x + y \geq 1\}$  表示弓形區域  $R$ 。

#### 3. 學習目標

(1) 透過圖形位置可觀察出，直線與圓的相交情形可分為：相交兩點、相切、不相交。

(2) 了解兩方程式之聯立解，代表兩方程式圖形的交點。

(3) 能已知圓與直線之方程式的條件下，可透過圓心到直線的距離，或兩方程式聯立的解，判定兩圖形的位置關係：直線為圓的割線(交兩點)、切線、或兩者不相交。

#### 4. 教學斟酌

(1) 講解圓與直線位置關係的性質時，先以圓心在原點的實例討論，其他圓心不在原點的圖形，皆可透過平移後而得到圓心在原點的相對位置圖形，如此即可將複雜的代數運算簡化之！

(2) 圓的參數式，依課程安排，講解極坐標概念後，在適當處融入。

- (3) 圓與直線的位置關係，分別以圓心到直線距離的幾何判定，以及代數上從解方程式根的個數，兩種方法判斷之。
- (4) 透過解聯立了解根的個數與圖形交點數的對應關係，例題的選取上，數字應盡量簡化，應避免複雜的數字運算；因此應讓學生了解到將點、圓、直線一起平移，並不會影響交點個數，因此例題的選擇可盡量以圓心在原點的圖形為例子說明。

### 條目範圍

1. 類似  $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 9\} \cap \{(x, y) | x + y \geq 1\}$  的集合表達，僅用於溝通，不涉及其解的範圍問題。
2. 不含兩圓關係，諸如兩圓相交、相切或相離所產生的相關應用問題，皆不講述。

### 釋例

1. 切線與圓的交點為重根的概念，除透過解聯立方程式得到外，也可透過直線的移動，讓學生感覺到兩交點越來越靠近，最後合而為一點。另外，再搭配解聯立的概念，讓學生感受到重根，數形合一。
2. 透過直線移動，讓學生觀察到直線與圓的各種相交情形。

### 錯誤類型

1. 過圓外上一點求圓的切線方程式，設直線斜率為  $m$  的情形下，當其中有一條為鉛直線時，所求的解會只剩另一條的斜率值，學生會誤以為只有一條切線。
2. 直線與圓相切時，圖形上只有一個交點，學生會誤以為解聯立只有一個根，應該要強調是兩相同實根。

### 評量

1. 有關  $y = \sqrt{5 - x^2}$  與直線位置關係的相關應用問題，不宜在此作為評量考題，函數概念的問題宜在高三後再做處理。
2. 有關求切點的問題，此單元題目的選取，應注意數值的計算不可太繁複，主要是讓學生了解解聯立的根即為交點，不應讓學生操作繁雜的計算工作。

<b>G-10-5 廣義角和極坐標：</b> 廣義角的終邊，極坐標的定義，透過方格紙操作極坐標與直角坐標的轉換。	g-V-3
--	-------

**先備：**平面直角坐標系 (G-7-1)。

**連結：**直線方程式 (G-10-2)，廣義三角比 (G-10-6)。

**後續：**複數 (N-12甲-3)，橢圓的參數式 (G-12甲-1)。

### 基本說明

#### 1. 與 99 課綱的差異

增加學生使用量角器、直尺、圓規動手操作的歷程，最後配合計算機的使用，從具體的測量來認識極坐標與直角坐標的關係。此外，99 課綱的安排，通常將極坐標作為廣義角三角比的應用。然而本課綱並未規範極坐標放在三角比之後，反而建議由極坐標和直角坐標的關係，來定義廣義角的三角比。

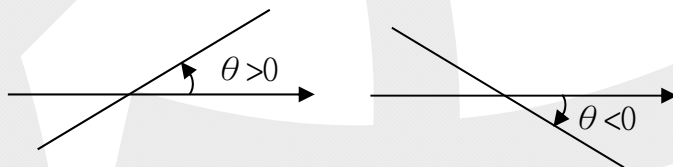
#### 2. 相關約定

(1) 在平面上選定一個點  $O$  (稱為原點或極點)，以  $O$  為端點，向右作一條水平射線 (稱為

極軸)，則平面上一點  $P$  的極坐標的表示法為  $P[r, \theta]$ ，其中  $r$  為  $\overline{OP}$  長， $\theta$  表示由極軸為始邊， $\overline{OP}$  為終邊逆時針旋轉的角度。

(2) 在學習廣義角之前，所謂的「夾角」都是在視覺上可判斷的銳角、直角或鈍角。學習極坐標與廣義角之後，若  $P$ 、 $Q$  之極坐標為  $P[r, \alpha]$ 、 $Q[s, \beta]$ ，定義  $\overline{OP}$  與  $\overline{OQ}$  與之「夾角」為  $|\alpha - \beta|$  在  $0^\circ$  到  $180^\circ$  範圍內的同界角。

(3) 直線  $L$  與  $x$  軸正向所夾之  $\pm 90^\circ$  範圍內的廣義角，稱為  $L$  的斜角。正斜角稱為仰角，負斜角的絕對值稱為俯角。



### 3. 學習目標

- (1) 認識廣義角。
- (2) 明白以  $x$  軸正向為坐標平面上角之始邊，是數學慣例；此慣例與其他學科的慣例不盡相同。
- (3) 明白以逆時鐘方向為廣義角之方向，是數學慣例；此慣例基本上獲得其他自然科學的採納。
- (4) 能使用直角坐標與極坐標兩種方式，正確描述任一廣義角的終邊上的某一定點。
- (5) 透過方格紙，能操作極坐標與直角坐標的轉換。

### 4. 教學斟酌

(1) 在教材的處理上，可以有下列兩種方式：

- 本課綱：按照極坐標原本的定義，在直角坐標平面上做極坐標的點（用量角器、直尺圓規）。學生已經知道  $0^\circ$  到  $360^\circ$  的角，此時只要引進始邊、終邊、負角等觀念即可，並說明超過  $\pm 360^\circ$  的同界角意義。讓學生在實際操作中明白：任一個點都同時可以有直角坐標和極坐標表示法，而且可以互換。坐標互換的關係，不限於第一、第二象限，在第三、第四象限也可以；由此導出定義廣義角三角比的動機。讓學生在操作極坐標與直角坐標時，感受到同一個廣義角，取到終邊上不同點，所得到的直角坐標之間有何關係，便可適時引入廣義角的三角比。
- 習慣教法：在介紹完廣義三角比之後，作為應用的例子，介紹極坐標，再進行操作的活動，這時可以使用計算機幫助印證，並感覺到誤差的存在。

不論採用哪一種教材編法，都要能夠有效銜接舊經驗：九年級的銳角三角比，以及十年級可能放在本條目前面的直線斜率與仰角的關係。

- (2) 本條目之廣義角以  $\pm 180^\circ$  之範圍為原則，以精熟練習為目的時，可以擴及  $\pm 360^\circ$ 。請教師唯有在合理的情境之下，才討論超出  $\pm 360^\circ$  範圍的角。廣義角作為溝通的語言，合理的使用範圍是  $-180^\circ$  至  $360^\circ$  之間；當角的終邊落在第一、第二象限時，除非特殊的情境需求，都應以正角表示，當終邊落在第三、第四象限時，依情境脈絡選擇以負角或正角表示。
- (3) 廣義角的學習，方向性比同界角重要。所以，雖然廣義角的範圍，初以  $-180^\circ$  至  $360^\circ$  為限，將來可在脈絡中推廣之，但是不宜在無情境的環境中過度練習同界角。
- (4) 理解斜角方向性的理由，應帶領學生認識，在平面上，斜率與斜角觀念彼此等價(若確

定斜率，則確定斜角大小，反之亦然)。

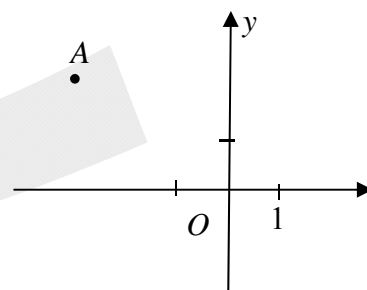
- (5) 要求學生在坐標平面上根據直角坐標或極坐標畫點的時候，盡量採用自然的整數，應避免無動機地使用無理數。可使用計算機搭配畢氏定理從  $(x, y)$  計算  $r$ 。

### 條目範圍

僅介紹極坐標的表達、與直角坐標之間的轉換，不含極坐標方程式。

### 釋例

1. 如右圖，利用直尺、圓規、量角器，並可運用畢氏定理與計算器，分別以直角坐標與極坐標表示  $A$  點的位置。
2. 給定  $P(-3, 4)$ ，在方格紙上畫出點的位置，經過測量而取得其極坐標的近似值。
3. 給定  $P[1, -20^\circ]$ ，在方格紙上畫出點的位置，經過測量而取得其直角坐標的近似值。
4. 教師解釋為何數學以  $x$  軸正向為角之始邊的方法之一，是為了配合  $x$  軸為水平線 (horizontal line) 而  $y$  軸為鉛直線 (vertical line) 的慣例，以及水平為  $0$  度而鉛直為  $90$  度的語言上的習慣。
5. 教師解釋為何數學以逆時鐘方向為正向的方法之一，是延續前項，既然  $x$  軸正向已經是  $0$  度而  $y$  軸正向是  $90$  度，這就是逆時鐘的旋轉方向。另一個線索是三角形面積的坐標算法 (G-10-2)。
6. 某潛艇的雷達偵測到某一時刻有一不明物體出現在其東北方  $10$  公里處，若以該潛艇為原點， $1$  公里為單位，正東方與正北方分別為  $x$ 、 $y$  軸正向，則此不明物體的直角坐標為何？



**G-10-6 廣義角的三角比：**定義廣義角的正弦、餘弦、正切，特殊角的值，使用計算機的  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\tan$  鍵。

n-V-2

s-V-1

g-V-2

**先備：**直角三角形的三角比 (S-9-5)。

**連結：**圓的標準式，廣義角和極坐標，直線斜率與其斜角的正切 (G-10-5、G-10-7)。

**後續：**三角函數 (F-11A-1、F-11B-1)。

### 基本說明

#### 1. 與 99 課綱的差異

以前的高中數學課程都沒有正式使用計算機，新課綱要求學生以計算機的三角比 (乃至於反三角比) 按鍵，搭配在方格紙上實際作圖與測量的結果，具體地從操作中認識三角比。因為計算機的引入，不再查表，也不再以特殊角為主要操作對象。此課綱建議從通過原點的直線，經極坐標而至三角比的脈絡。過去的課程通常將極坐標視為三角比的應用，此課綱則意欲從極坐標定義廣義角的三角比。

#### 2. 相關約定

- (1) 本條目以「度」為角之測量單位，可以採用分、秒作為度的次級單位， $60$ 秒為 $1$ 分， $60$ 分為 $1$ 度。度、分、秒之符號依序為「 $^\circ$ 、 $'$ 、 $''$ 」，唯有最低等級的量才可以用小數，小數之意義為十進制。

- (2) 正弦、餘弦與正切之符號為  $\sin$ 、 $\cos$ 、 $\tan$ ，排版時應使用正體字。令坐標平面原點以外的一點  $P$  之直角坐標與極坐標分別為  $(x, y)$  和  $[r, \theta]$ ，定義

$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}$$

當  $x \neq 0$  時，定義  $\tan \theta = \frac{y}{x}$ ，亦即  $\tan \theta$  等於直線  $OP$  的斜率。

- (3) 補角 (supplementary angles) 和餘角 (complementary angles) 都沒有國際認可的慣用符號，原則上應以文字說明。臨時需要大量使用時，可以局部定義  $\theta^s$  為角  $\theta$  之補角： $\theta^s = 180^\circ - \theta$ ，而  $\theta^c$  為角  $\theta$  之餘角： $\theta^c = 90^\circ - \theta$ 。

### 3. 學習目標

- (1) 明白廣義角的  $\sin$ 、 $\cos$  之定義，與直角三角形上銳角的  $\sin$  與  $\cos$  定義相容，所以廣義角三角比「推廣」了銳角三角比的範圍。
- (2) 能嫻熟地轉換直角三角形上的三角比概念與坐標平面上的三角比概念；後者之概念直接在坐標平面上理解  $\sin$ 、 $\cos$ 、 $\tan$ ，而不必藉助於直角三角形。
- (3) 能熟練地使用特殊角的三角比，所謂特殊角是  $0^\circ$ 、 $30^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $60^\circ$  以及它們在第二、三、四象限的對應角。能熟練地使用計算機求任意角的三角比（近似）值。

### 4. 教學斟酌

- (1) 利用方格紙和計算機，以及早先學過的通過原點的直線，配合直角坐標（向兩軸做垂線）和極坐標的意義，先在第一象限連結國中所學的銳角三角比，然後推廣其形式到第三象限、第二和第四象限。
- (2) 到了高中階段，學習的重點是坐標幾何，不必過度練習平面幾何問題。
- (3) 可連結圓的參數式，如以下釋例，但是不討論動點與軌跡問題。

### 條目範圍

1. 本條目不涉及餘切  $\cot$ 、正割  $\sec$  和餘割  $\csc$ 。
2. 本條目不涉及三角比的「函數」意義。
3. 本說明雖然建議連結圓的參數式，但不宜在十年級引入動點觀念，延伸至軌跡相關的問題。

### 釋例

連結圓的標準式，透過正弦與餘弦的平方關係，讓學生發現點  $(\cos \theta, \sin \theta)$  都滿足圓方程式，故在圓上；進一步理解圓上任一點皆可表示為  $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ ，不但再度連結極坐標，並且可以藉此建立圓的參數式概念。

### 錯誤類型

忽略了廣義角的方向性，誤以為鈍角  $\theta$  的三角比等於其補角的三角比；因為鈍角的終邊在第二象限，而將「角」視為從  $180^\circ$  量起的銳角。

### 評量

盡量引導學生連結「通過原點的直線」與三角比。

<b>G-10-7 三角比的性質：</b> 正弦定理，餘弦定理，正射影。連結斜率與直線斜角的正切，用計算機的反正弦、反餘弦或反正切鍵，計算斜角或兩相交直線的夾角（三角測量#）。	n-V-2 s-V-1 g-V-3
--	-------------------------

**先備：**直角三角形的三角比 (S-9-5)，空間中的線與平面 (S-9-13)。

**連結：**直線方程式、斜率、點與直線之平移 (G-10-2)，廣義角的三角比、使用計算機的  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\tan$  鍵 (G-10-6)。

**後續：**正射影與內積、面積與行列式、兩向量的夾角 (G-11A-6、G-11B-2)。

### 基本說明

#### 1. 與 99 課綱的差異

本條目在 99 課綱是十一年級的內容，此處配合 G-10-2 及 G-10-6 一併於十年級進行學習。主要希望能將斜角的想法與直線的斜率做結合，連結學生在直線方程式的學習經驗，並加以應用。此外，99 課綱將三角測量設為獨立單元，本條目將三角測量融入正弦與餘弦定理在長方體上的應用，不設獨立單元。

#### 2. 相關約定

- (1) 以角度量測量角時，可以用十進制小數表示其單位「度」的量，也可以轉換成「六十進制」(Sexagesimal) 或者「度分秒制」(DMS 或 Degree-Minute-Second)，記作 $^{\circ} ' ''$ 。
- (2) 當使用六十進制時，度與分的數值必為整數，秒的數值則可能為十進制小數。取角度之估計值時，若以「分」為最小單位，習慣上必定約至整數，僅有「秒」單位的數值，可約至小數。所以，在溝通時，只要說將角的度量「約至分單位」，就表示採用六十進制，但將分單位的數值約至整數，不寫秒單位；而說「約至秒單位」則表示將秒單位的數值約至整數；說「約至兩位小數秒」或「約至百分之一秒」則表示將秒單位的數值約至兩位小數。

#### 3. 學習目標

- (1) 能理解正弦定理併用來解決三角形的邊角關係問題。
- (2) 能理解餘弦定理併用來解決三角形的邊角關係問題。
- (3) 能透過三角比理解正射影。
- (4) 能理解直線斜率等於直線斜角的正切值，並能運用計算機求得直線之斜角的近似值。
- (5) 能利用計算器搭配正弦與餘弦定理或直線方程式求出兩直線的夾角。

#### 4. 教學斟酌

- (1) 本條目不含和角與差角公式，因此在坐標平面上處理直線夾角時，可利用直線斜率等於直線斜角的正切值，透過計算機求出兩直線斜角的近似值，再由其差得到夾角，讓學生能實際利用計算機處理非特殊角的相關問題。
- (2) 正弦與餘弦定理並不需要坐標，建議以基本的幾何方法導出。但是，可以搭配坐標而應用之。
- (3) 在沒有坐標的條件下，運用正弦與餘弦定理求得兩直線夾角之正弦或餘弦，再透過計算機求夾角的近似值。使用計算機做反正弦、反正切運算時，可能出現負角 ( $-90^{\circ}$  以上)，這是正確的數學定義，但是不必以「函數值域」的方式對十年級學生講解，只需要說明這是依照「慣例」做的規定即可。要教導學生能夠用計算機從三角比「反查」廣義角的結果，正確回答問題：可能需要取其補角，或絕對值。
- (4) 運用計算機的反三角按鍵取得夾角的近似值時，宜順便介紹六十進制，並以計算機做

十進制與六十進制的角度轉換。

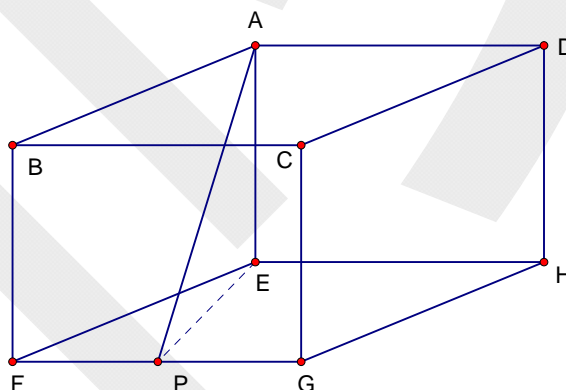
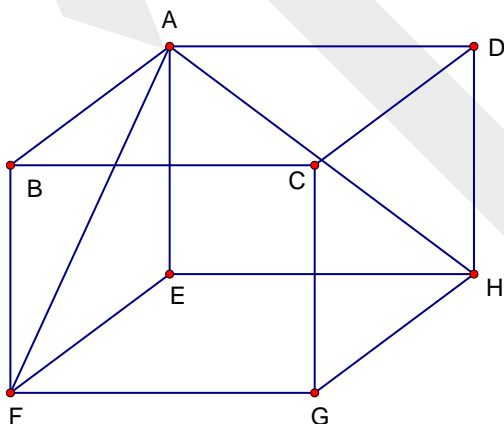
- (5) 國中階段已經知道空間中直線與平面的垂直和平行關係，教師可以藉空間中的測量問題，適度地複習並應用這些觀念，以便鞏固學生的空間概念。儘管如此，本條目的三角測量仍然希望能將問題佈置在長方體上，不但可以銜接學生在國中已經學習過的立體圖形概念，又可以為將來學習空間概念時，作為建立空間坐標系的前置經驗。
- (6) 為因應電腦 3D 技術所衍生的空間概念學習需求，在長方體、柱體、錐體上進行測量練習時，可同時帶領學生認識截面。

### 條目範圍

1. 不透過向量方式或是差角公式來求兩直線夾角。
2. 反正弦、反餘弦、反正切僅用於三角比到廣義角的「反查」，並非反函數概念，此條目不涉及函數觀念。

### 釋例

1. 已知  $L_1: y = x$ ， $L_2: y = 2x$ ，試求  $L_1, L_2$  的夾角。  
此時，由  $L_1$  的斜率為 1，可知  $L_1$  與  $x$  軸正向夾  $45^\circ$ ， $L_2$  的斜率為 2，可知  $L_2$  與  $x$  軸正向夾  $63.4^\circ$  (利用計算機)，所以  $L_1, L_2$  的夾角為  $18.4^\circ$ 。
2. 在本課綱的脈絡中，有一條獲得餘弦定理的新進路：將三角形坐標化為  $\triangle OPQ$ ，其中  $P$  在  $x$  軸上且  $\overline{OP} = a$ 、 $\overline{OQ} = b$ 、 $\angle POQ = \theta$ ，故其極坐標為  $P[a, 0^\circ]$ 、 $Q[b, \theta]$ 。然後轉換成直角坐標而得  $P(a, 0)$ 、 $Q(b \cos \theta, b \sin \theta)$ ，根據距離公式計算  $\overline{PQ}^2$ ，化簡即得餘弦定理。
3. 已知  $\triangle ABC$  三邊長為 5、6、7，則最大角約幾度？  
利用餘弦定理可知，若最大角為  $\theta$ ，則  $\cos \theta = \frac{5^2 + 6^2 - 7^2}{2 \times 5 \times 6} = \frac{1}{5}$ ，則  $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) = 78.46^\circ$ 。
3. 本條目不強調配置情境的三角測量，希望回歸基本，以長方體上的測量為主要學習目標。例如長方體  $ABCD - EFGH$ ， $\overline{AB} = 3$ ， $\overline{AD} = 4$ ， $\overline{AE} = 3$ ，如下圖左，求  $\angle FAH$  至整數度。  
( $\angle FAH = \cos^{-1} \sqrt{0.18} \approx 65^\circ$ ) 此類型的題目順便讓學生認識「截面」，也有機會認識四面體 ( $AEFH$ )，教師還可以引導學生避免一個迷思概念： $\angle FAH$  不是直角， $\triangle AFH$  不是直角三角形！



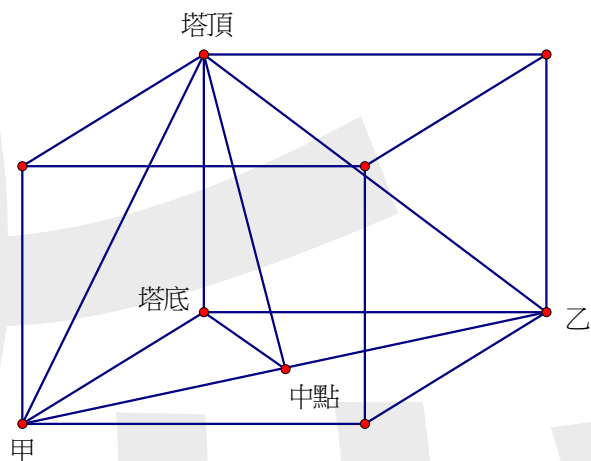
4. 本條目銜接並熟悉國中階段(九年級)的一個基本概念：長方體的任一稜邊垂直於「兩端」的面，所以就垂直於那兩個面上通過垂足的任意直線。這是「法線性質」的前置經驗，可以利用本條目在長方體上的測量問題來複習，並鞏固其概念。例如在上圖右的長方體  $ABCD - EFGH$  上， $BC$  邊垂直於長方形  $DCGH$  上任意通過  $C$  點的直線 (或線段)。若給

定  $\overline{AB} = 3$ ， $\overline{AD} = 4$ ， $\overline{AE} = 3$ ，且  $P$  是  $FG$  的中點，可以求平面  $FGHE$  上之點  $P$  對  $A$  點的

仰角，亦即求  $\angle APE$  ( $= \tan^{-1} \sqrt{\frac{9}{13}} \approx 40^\circ$ )。

5. 參照右圖，甲、乙兩人觀察同一座塔，甲在塔的正南方 10 公里處，觀察塔頂的仰角為 60 度，乙在塔的正東方，觀察塔頂的仰角為 30 度，

- (1) 甲、乙兩地相距多少公里？(商高定理)
- (2) 甲、乙兩地的中點觀察塔頂的仰角為多少度？(利用計算器求角度)
- (3) 丙在甲、乙兩地連線上，且觀察塔頂仰角為 45 度，則乙、丙的距離為多少？(搭配餘弦定理)



### 評量

1. 角的六十進制雖然不是數學領域的重要學習內容，但為連結其他學科（地理科的經緯度）以及生活經驗，宜在適當情境中布置適合以六十進制作答的問題，例如以「秒」表達微小的角差。
2. 釋例中「長方體上的法線性質」僅為九年級概念的複習與應用，並期望銜接至十一年級的空間概念。不要延伸至一般的法線性質，那是十一年級的學習內容。在本條目中利用上述概念時，必須限定在長方體上，且明顯有一稜邊垂直於一個面的情況。

**A-10-1 式的運算：**三次乘法公式，根式與分式的運算。

a-V-1

**先備：**二次式的乘法公式 (A-8-1)，一元二次方程式的解法與應用 (A-8-6)。

**連結：**三次函數的圖形特徵 (F-10-2)，有系統的計數 (D-10-3)，數列級數與遞迴關係 (N-10-6)。

**後續：**函數的極限 (F-12甲/乙-1)，微分 (F-12甲/乙-3)。

### 基本說明

1. 與 99 課綱的差異  
本課綱有特別提到分式運算。
2. 相關約定
  - (1)  $x^3 + y^3$  的分解稱為和立方公式， $x^3 - y^3$  的分解稱為差立方公式。 $(x \pm y)^3$  的展開稱為和或差的立方公式，或者立方和、立方差公式。
  - (2) 所謂最簡根式是指平方根內僅為不含重複質因數的正整數，且係數均為有理數的根式。
  - (3) 所謂雙重根號是  $\sqrt{p+q\sqrt{r}}$  的形式。



### 3. 學習目標

(1) 能展開和或差的立方： $(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$ 。

(2) 能了解立方和與立方差公式的由來。

(3) 能將分母含有平方根式 ( $\sqrt{a}$  或  $a \pm \sqrt{b}$  或  $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ ) 的分式，化簡到最簡根式，以及

根式(例如： $\sqrt{x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}} = |x + \frac{1}{x}|$ ) 運算。

(4) 能化簡形如  $\sqrt{(a+b) \pm 2\sqrt{ab}}$  的雙重根號為  $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$  (其中  $a > b$ )。

(5) 能以符號操作基本的分式運算，含基本的繁分式化簡

例如： $\frac{1}{\frac{1}{2}(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})} = \frac{2ab}{a+b}$ ， $\frac{x^3-1}{x-1} = x^2 + x + 1$ 。

### 4. 教學斟酌

(1) 可透過立方展開讓學生了解立方和公式的由來，或可搭配體積概念說明。亦即

$$(x+y)^3 = (x+y)^2(x+y) = (x^2 + 2xy + y^2)(x+y) = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

接著透過移項得

$$x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$

並說明這兩個公式的相關性。

(2) 將差的立方轉化成和的立方  $(x-y)^3 = [x+(-y)]^3$ ，讓學生了解公式

$$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$
 中那些地方會出現負號。

(3) 以  $(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2 = (a+b) \pm 2\sqrt{ab}$  說明化簡雙重根號的觀念，勿直接以公式的形式讓學生記憶。

(4) 雙重根號的化簡，請以  $\sqrt{p \pm 2\sqrt{q}} = \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$  的形式為主，其中  $p = a+b, q = ab$ ，又  $a > b$ 。

(5) 符號的分式運算與繁分式化簡，都應以國中階段在解方程式的過程中以具體的數值所

做的計算為基礎，做形如  $\frac{x^3-1}{x-1}$  或  $\frac{x+1}{\frac{1}{x-1}}$  或  $\frac{1}{2x} \div \frac{1}{x}$  的運算或化簡，在未來的學習歷

程中適時練習其操作，不要在此條目的教學中做複雜的練習。

### 條目範圍

本條目，以及全部的高中數學必修課程，都限定在實數範圍內。

### 釋例

1. 觀察出  $\alpha^3 + \beta^3$  或  $\alpha^3 - \beta^3$  皆可表為  $\alpha + \beta$  及  $\alpha\beta$  的關係式。

2. 立方差公式也可以連結多項式的除法原理。例如： $x^3 - a^3 = 0$  有一根  $a$ ，所以  $x^3 - a^3$  有因式  $x - a$ ，做多項式除法（長除法即可）得到立方差公式。而立方和公式則僅為符號代換 ( $a \rightarrow -a$ )。

### 錯誤類型

- $\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}} = \sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2} = |\sqrt{a}-\sqrt{b}|$ ，學生會忘了判別  $a, b$  的大小，而直接寫成  $\sqrt{a}-\sqrt{b}$
- 差的立方  $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ ，以及立方差  $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$ ，這兩個公式中的負號出現的位置，學生易搞錯。
- 根式的運算，學生會忘記判斷根式運算出來為正，例：錯誤寫法  $\sqrt{x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}} = x - \frac{1}{x}$ 。

## 評量

根式的化簡，應配合題目實際上的需要，勿過度要求代數計算的技巧。例如不宜處理將

$\sqrt{9-2\sqrt{23-6\sqrt{10+4\sqrt{3-2\sqrt{2}}}}}$  化為  $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$  這類繁複的根式運算。

<b>A-10-2 多項式之除法原理：</b> 因式與餘式定理，多項式除以 $(x-a)$ 之運算，並將其表為 $(x-a)$ 之形式的多項式。	a-V-2
--	-------

**先備：**多項式的意義 (A-8-2)，多項式的四則運算 (A-8-3)。

**連結：**式的運算 (A-10-1)。

**後續：**複數與方程式 (N-12甲-3)，方程式的虛根 (A-12乙-2)。

## 基本說明

### 1. 與 99 課綱的差異

(1) 刪除整係數一次因式檢驗法、找方程式的有理根。

(2) 關於虛根、根與係數關係、代數基本定理等（統稱「方程式論」）之內容，移至選修數甲。

(3) 本課綱之國中階段已刪除多項式除法之「分離係數法」，本條目並未補回。

(4) 將多項式表為 $(x-a)$ 之形式，其實是泰勒展開式，除了99課綱中用來求函數近似值如  $f(0.99)$ ，也可以為多項式函數圖形在局部近似直線的性質做準備。

### 2. 學習目標

(1) 認識多項式的除法原理。

(2) 利用除法原理，理解因式定理與餘式定理。

(3) 使用綜合除法處理多項式除以 $(x-a)$ 之運算。

(4) 能將多項式表示為 $(x-a)$ 之形式的多項式。

### 3. 教學斟酌

(1) 除法原理應配合國中學過的長除法來說明，並特別解釋餘式的次數與被除式次數的關係。

(2) 國中已經取消了分離係數法，而本條目僅需除式為一次式的多項式除法，並不需要補回分離係數法。本課綱建議不必強調分離係數法。

(3) 本條目的主要目的是為準備多項式函數的學習，請勿擴及方程式論與多項式的代數性質。

(4) 雖然可以在本條目的教學中引伸插值多項式（特別是牛頓的插值法），但是十年級的

多項式教學目標，以多項式函數為主要方向，故課綱的設計本意，是將一般的插值多項式觀念，跟三元一次聯立方程式放在一起 (A-11A-2)，而特殊的線性插值，則放在一次函數 (F-10-1) 的教學脈絡裡。

### 條目範圍

1. 不將綜合除法的演算程序推廣至  $ax-b$  形式之除式 ( $a \neq 1$ )。
2. 不含「方程式論」，也就是不含多項式的根與係數關係，不含勘根定理。

### 釋例

1. 設  $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + x + 19 = a(x-2)^4 + b(x-2)^3 + c(x-2)^2 + d(x-2) + e$ ，則以  $(x-2)^2$  除  $f(x)$  所得的餘式為何？
2. 多項式  $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$  除以  $x^2 - 5x - 6$  之餘式可能為下列哪些選項？  
(1)  $x^2 - 3x + 1$  (2)  $3x - 1$  (3)  $-2x$  (4)  $0$  (5)  $5$
3. 可以用立方差公式當作動機，推廣到  $x^n - y^n$  的分解公式。亦即因為  $x^n - a^n = 0$  有一根  $a$ ，所以  $x^n - a^n$  有因式  $x - a$ ，做多項式除法（綜合除法）得到一般的次方差公式。而一般的次方和公式則僅為符號代換。

### 評量

1. 不評量複雜的餘式定理應用，如：已知多項式  $f(x)$  次數高於三次，且  $f(x)$  被  $(x-1)^2$ 、 $(x-2)^2$  除，餘式分別為  $5x-3$ 、 $2x+7$ ，則  $f(x)$  被  $(x-1)^2(x-2)$  除所得之餘式為何？
2. 超過三次以上的多項式因式分解，因整係數一次因式檢驗法已刪除，不適宜做為評量。

<b>F-10-1 一次與二次函數：</b> 從方程式到 $f(x)$ 的形式轉換，一次函數圖形與 $y = mx$ 圖形的關係，數線上的分點公式與一次函數求值。用配方將二次函數化為標準式，二次函數圖形與 $y = ax^2$ 圖形的關係，情境中的應用問題。	f-V-1 a-V-1 g-V-5
---	-------------------------

**先備：**藉由方程式的形式而獲得的初等函數觀念 (F-8,9-1,2)。

**連結：**直線方程式、圓方程式 (G-10-2、G-10-3)。

**後續：**函數、導函數 (F-12甲/乙-1,4)。

### 基本說明

#### 1. 與 99 課綱的差異

在內容上，本條目與 99 課綱的一次與二次函數主題並無太大差異，但本課綱更強調國中經驗的連結，特別要求在課程脈絡中，認識  $f(x)$  之函數符號的必要性與合理性，並且在技術上補綴二次函數的配方程式。

#### 2. 相關約定

- (1) 當  $f(x)$  是一個函數， $f$  就是函數的名稱，不須每逢函數就必命名其應變數。例如，可以說「 $x$  是  $f$  的自變數」，「 $f$  是線型函數」，「 $f$  是單項函數」，「 $f$  是多項式函數」，「 $f$  的圖形」等詞。
- (2) 令  $a \cdot b$  為實數， $n$  為非負整數，稱  $f(x) = ax^n$  為單項函數，稱  $f(x) = ax + b$  為線型函數，稱  $f(x) = a$  為常數函數。若限定  $a \neq 0$ ，則前述三種函數又分別稱為  $n$  次函數或一次函數或零次函數。當  $f(x)$  的「數學表達」是一個以  $x$  為元的  $n$  次多項式，稱  $f$  為多項式函數或  $n$  次多項式函數或  $n$  次函數。

- (3) 當  $f(x) = 0$  稱  $f$  為零函數。零函數可以被考慮為特殊的多項式函數，但是它未必是多項式函數。不要將零函數歸類為多項式函數，所以零函數也就沒有「次數」的問題。
- (4) 在  $xy$  坐標平面上，滿足  $y = f(x)$  之所有點聚集而成的圖形，稱為  $f$  的函數圖形或  $f$  的圖形。
- (5) 以語言的直覺意義描述函數圖形的遞增、遞減和凹向，不訴諸於數學定義。

### 3. 學習目標

- (1) 能以函數名稱（例如  $f$  和  $g$ ）而非應變數（例如  $y$  和  $z$ ）名稱來溝通關於函數的敘述。藉由已經具備基礎的直線方程式與  $y = ax^2$  和  $y = a(x-h)^2 + k$ ，學習函數符號  $f(x)$  的溝通與操作。
- (2) 理解有些方程式，例如直線方程式  $ax + by + c = 0$ ，可以將一個變數「孤立」在等號的左邊（例如  $y = mx + k$ ），當右邊的變數（例如  $x$ ）代入一個數就算出一個對應數時，那兩個變數之間就有函數關係；此時等號右邊的數學式可以用函數符號來表達（例如以  $f(x)$  代表等號右邊的數學式， $f(x) = mx + k$ ）。但是有些方程式，例如圓方程式  $x^2 + y^2 = 1$ ，將任一變數「孤立」在等號左邊之後（例如  $y^2 = 1 - x^2$ ），在右邊代入一個  $x$  並不能確定一個對應的數  $y$ ，則兩變數之間沒有函數關係。
- (3) 知道函數圖形的定義，連結  $f(x)$  的函數圖形就是  $y = f(x)$  的方程式圖形，並能描繪一次與二次函數的圖形。
- (4) 能將給定的二次函數之「數學表達」（一個二次多項式）在一般式  $ax^2 + bx + c$  與標準式  $a(x-h)^2 + k$  之間轉換。
- (5) 知道數線上的分點公式，理解其原因，並能應用於一次函數求值：令  $f(x)$  為一次函數，已知三數  $a$ 、 $b$ 、 $c$  之比例關係，且已知  $f(a)$  與  $f(b)$  時，利用分點公式求  $f(c)$  之值。
- (6) 認知函數符號  $f(x)$  與方程式符號的差異之一，是前者較容易表達變換。能執行  $f(x)$  改為  $f(t)$ 、 $f(2x)$ 、 $f(x-1)$  之類的操作，並連結方程式圖形平移的舊經驗，理解  $f(x-h)$  之圖形乃是  $f(x)$  之圖形的水平平移，而  $f(x)-k$  是鉛直平移。
- (7) 認知所有一次函數的圖形，都是其一次單項函數圖形（也就是同斜率通過原點的直線）的水平「或」鉛直平移。而所有二次函數的圖形，都是其二次單項函數圖形的水平「和」鉛直平移。換句話說，所有一次、二次函數圖形，都與其最高次項函數之圖形「全等」。
- (8) 認識並理解二次函數  $f(ax)$  之圖形與  $f(x)$  圖形的關聯。理解二次函數有最大或最小值，並能用以解決問題。

### 4. 教學斟酌

- (1) 描述函數的時候，應該在情境脈絡中，以語言的直覺意義描述函數的遞增（漸增，圖形上升）或遞減（漸減，圖形下降），一個數被函數對應或不被對應，但不要正式定義遞增、遞減、值域等觀念。注意上述增或減的說法，約定在朝著  $x$  軸正向而言；如果不約定方向，則增減的觀念是混淆的。
- (2) 用計算機和方格紙，讓學生親自計算描點，確實感受函數圖形是「所有」滿足  $y = f(x)$  的點  $(x, y)$  聚集而成的圖形；換句話說，函數圖形上的點坐標之  $y$  值就是函數值。
- (3) 在合理的情境中，可以討論限定在閉區間內的二次函數極值問題，而且該極值可能發生在區間的端點。
- (4) 函數圖形的平移，可以用數學繪圖軟體或 App 輔助學生理解，避免流於背誦規則。

### 條目範圍

本條目不含函數的正式定義及值域、對應域、定義域等概念，也不正式定義函數的遞增、遞減、凹向。因此，也不必分辨「遞增」和「嚴格遞增」。

### 釋例

1. 國中階段只學習了一元二次方程式的配方程序，亦即先將常數全部移到等號右側，以等量公理進行配方程序，然後求未知數的解。本條目需以類似程序直接對二次多項式配方。初步的程序可以連結國中經驗，將函數先改寫成方程式再處理配方。例如欲將  $f(x) = 2x^2 + x + 3$  改寫成完全平方的形式，先改寫成方程式符號  $2x^2 + x + 3 = y$ ，將常數項全部移去右側並將  $x^2$  係數化為 1，得到

$$x^2 + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}$$

以等量公理配方

$$x^2 + 2 \cdot \frac{1}{4}x + \frac{1}{16} = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2} + \frac{1}{16}$$

整理為  $(x + \frac{1}{4})^2 = \frac{1}{2}y - \frac{23}{16}$ ，再將  $y$  孤立為  $2(x + \frac{1}{4})^2 + \frac{23}{8} = y$ ，所以  $f(x) = 2(x + \frac{1}{4})^2 + \frac{23}{8}$ 。

這裡其實是一個練習轉換方程式符號與函數符號的好機會。然而，學生應該最終能夠不經過方程式符號而直接對二次多項式執行配方程序。

2. 二次函數  $f(ax)$  當  $|a|$  越小圖形的「開口」越大，有另一個將來有用的描述，是說圖形越「扁平」。熟悉這個觀念的方式之一，是想像  $|a|$  小到極致就是 0，而此時的函數圖形是水平線（ $y = 0 \cdot x^2$  的平移），非常地「扁平」。

### 錯誤類型

1. 誤以為當  $a > 1$  使得  $f(ax)$  的圖形「變大」。
2. 誤以為「若干點」可以「連成」函數圖形。例如學生誤認為五點可以畫出二次函數圖形，甚至誤以為拋物線上「有五個點」。雖然三點確實可以決定一個不超過二次的多項式函數，但是學生對函數圖形的認知是有待商榷的。
3. 當  $k > 0$ ，將方程式的變數  $y$  置換成  $y - k$  之後，方程式圖形向上移動  $k$  單位。但是，函數  $f(x) - k$  的圖形卻向下移動  $k$  單位。這兩個觀念的連結，在於  $y = f(x)$  是個方程式，而  $y - k = f(x)$  的圖形向上移動，故  $y = f(x) + k$  的圖形向上移動，也就是  $f(x) + k$  的函數圖形向上移動。所以，函數圖形與方程式圖形的平移規則，其實是一樣的。

### 評量

不宜出現與絕對值合成的函數，例如  $f(x) = |x^2 - 3x| + 4x - 6$ 。

<b>F-10-2 三次函數的圖形特徵：</b> 二次、三次函數圖形的對稱性，兩者圖形的大域（global）特徵由最高次項決定，而局部（local）則近似一條直線。	f-V-2 a-V-1 g-V-5
--	-------------------------

**先備：**了解二次函數圖形具有對稱軸的特徵，並能應用於繪製圖形 (F-9-2)。

**連結：**能將二次函數透過配方法表示成標準式 (F-10-1)，能將三次函數表為  $(x - a)$  之形式的

多項式 (A-10-2)，能連結大域特徵與多項式函數圖形 (F-10-3)。

後續：連結函數的奇偶性與圖形的對稱關係 (F-12甲/乙-1)，多項式函數的導函數 (F-12甲/乙-3)。

## 基本說明

### 1. 與 99 課綱的差異

本條目主要希望學生能透過描點與圖形繪製觀察出二次及三次函數圖形的對稱特性，在此並不會介紹奇函數與偶函數的定義，也沒有介紹四次或更高次函數，與 99 課綱有所不同。另外配合條目 A-10-2，可將三次函數表為  $(x-a)$  之形式，藉以讓學生能從此形式了解三次函數在局部區域的圖形會近似於一條直線，此部分內容則是 99 課綱所沒有呈現的。

### 2. 學習目標

- (1) 透過在方格紙上描點，與電腦軟體的輔助，能觀察並歸納出二次函數的線對稱特徵及三次函數的點對稱特徵。
- (2) 能理解將  $x \mapsto x-h$ ， $y \mapsto y-k$  代表函數圖形有水平及鉛直的平移現象。
- (3) 能理解三次函數圖形可經平移對稱於原點。
- (4) 能透過將函數表為  $(x-a)$  之形式理解圖形在局部會近似於一直線的特性。
- (5) 能理解大域的特徵是由最高次項所決定。

### 3. 教學斟酌

- (1) 讓學生透過描點繪製函數圖形的過程，觀察歸納出二次函數單項式  $y = ax^2$  具有  $x \mapsto -x$ ，不影響函數值的特性，發現其對稱  $y$  軸的特性，並藉由將二次函數  $y = ax^2 + bx + c$  表為  $y = a(x-h)^2 + k$  的過程，讓學生理解  $y = a(x-h)^2 + k$  為  $y = ax^2$  平移後得到。
- (2) 讓學生透過描點繪製函數圖形的過程，觀察歸納出三次函數  $f(x) = ax^3$  具有  $x \rightarrow -x$  時， $y \rightarrow -y$  的特徵，觀察出三次函數  $f(x) = ax^3$  具有對稱原點的結果。
- (3) 透過實例，讓學生了解任意三次多項式  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  皆可選取適當的  $h$  值，透過配三次方的過程，變成  $f(x) = a(x-h)^3 + p(x-h) + k$ ，此圖形可由  $g(x) = ax^3 + px$  平移得到，因此了解到任意三次多項式的圖形都會有對稱中心。此處可讓學生比較二次函數與三次函數的不同點，二次函數可透過配方法平移回通過原點的單項式，代表二次函數具有極大值或極小值，而三次函數則可平移回通過對稱中心的圖形。
- (4) 透過將二次函數  $y = ax^2 + bx + c$  表為  $y = a(x-h)^2 + b(x-h) + k$  的過程，讓學生理解在  $x = h$  附近 (局部)，圖形會有近似於一直線的特徵，此處可順便說明直線斜率恰為  $(x-h)$  項的係數。
- (5) 透過實例讓學生理解當  $|x|$  很大時， $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \approx ax^3$ ，藉以說明三次函數的大域性質由最高次項決定。
- (6) 老師在教學上，可利用電腦軟體輔助繪圖，讓學生能透過圖形觀察理解對稱的特徵。

## 條目範圍

1. 本條目著重描點觀察函數圖形的對稱特徵，並未涉及奇函數與偶函數之定義： $f(-x) = -f(x)$ ， $f(-x) = f(x)$ ，僅討論圖形的對稱特性 (連結 G-10-1)。
2. 本條目是藉由泰勒形式的表現方式讓學生能體會  $x = h$  附近 (局部)，圖形會有近似於一直線的特徵，以作為後續學習微分及切線概念的基礎，但此處不宜出現與微分相關的數學問題。

## 釋例

1. 已知下列各函數，觀察它們的圖形，並回答下列問題。

$$y = x^3 \quad y = x^3 + 3x^2 \quad y = x^3 + x \quad y = x^3 + x + 1$$

$$y = -x^3 \quad y = -x^3 + 6x^2 \quad y = -x^3 + 6x \quad y = -x^3 + x - 3$$

$$y = 2x^3 \quad y = x^3 + 3x^2 + 1 \quad y = -x^3 + 6x + 2 \quad y = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$$

- (1) 哪些圖形本身對稱於原點？為什麼？它們的各項次數有何特徵？
- (2) 已知  $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = (x-1)^3 + (x-1)$ ，則這個函數圖形可以從上述哪一個函數圖形平移得到？
- (3) 已知  $h(x) = y = -x^3 + 6x^2 = -(x-2)^3 + 12(x-2) + 16$ ，若把  $h(x)$  下移 16 單位，再向左平移 2 單位，新圖形會對稱於原點嗎？
- (4) 若  $y = x^3 + 3x^2 + 1 = (x-a)^3 + k(x-a) + l$ ，請找出  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $k = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $l = \underline{\hspace{2cm}}$ 。並說明如何平移此圖形，使其對稱於原點。
- (5) 你認為任意三次多項式的圖形都可以經由平移，使其圖形對稱於原點嗎？為什麼？

2. 已知  $f(x) = (x-2)^3 + 6(x-2)^2 + 3(x-2) + 1$ ，透過 EXCEL 的計算，讓學生能透過觀察體會在  $x = 2$  附近，圖形會有近似於一直線的特徵。

$x = 2$ 附近	原函數	直線	誤差
$x - 2$	$f(x) = (x-2)^3 + 6(x-2)^2 + 3(x-2) + 1$	$g(x) = 3(x-2) + 1$	$ f(x) - g(x) $
-0.005	0.985149875	0.985	0.000149875
-0.004	0.988095936	0.988	0.000095936
-0.003	0.991053973	0.991	0.000053973
-0.002	0.994023992	0.994	0.000023992
-0.001	0.997005999	0.997	0.000005999
0.000	1	1	0.000000000
0.001	1.003006001	1.003	0.000006001
0.002	1.006024008	1.006	0.000024008
0.003	1.009054027	1.009	0.000054027
0.004	1.012096064	1.012	0.000096064
0.005	1.015150125	1.015	0.000150125

<b>F-10-3 多項式不等式：</b> 解一次、二次、或已分解之多項式不等式的解區間，連結多項式函數的圖形。	f-V-2 a-V-4
--	----------------

先備：一元一次不等式的意義 (A-7-7)、一元一次不等式的解與應用 (A-7-8)。

連結：區間符號 (N-10-2)、一次與二次函數 (F-10-1)、三次函數的圖形特徵 (F-10-2)。

後續：微分 (F-12甲-3)。

基本說明

### 1. 與 99 課綱的差異

已刪除牛頓整係數一次因式檢驗法，因此三次以上的多項不等式，需是已分解的多項式才能求其不等式的解。

### 2. 相關約定

以  $[a, b]$ 、 $(a, b)$ 、 $[a, b)$ 、 $(a, b]$ 、 $(-\infty, b]$ 、 $(-\infty, b)$ 、 $[a, \infty)$ 、 $(a, \infty)$  等區間符號以及聯集符號  $\cup$  表示解區間；不一定在本條目全部用到。

### 3. 學習目標

- (1) 透過圖形繪製，說明圖形與  $x$  軸的交點，即為方程式的根，並能進一步了解一次與二次不等式解的關鍵，在於求得與  $x$  軸的交點後，即能求出一次、二次不等式的解區間。
- (2) 透過圖形觀察  $f(x) \geq 0$ 、 $f(x) \leq 0$ 、 $f(x) > 0$ 、 $f(x) < 0$ ，其對應的解區間。
- (3) 能已分解的多項式，若為偶數重根，則重根處圖形兩側的值同號；若為奇數重根處，則圖形左右兩側的值異號，即圖形穿越  $x$  軸。
- (4) 了解已分解的三次以上不等式圖形與  $x$  軸的交點處特徵，並能判別圖形在哪些區間位於  $x$  軸上方，哪些區間位於  $x$  軸下方後，即能求得三次以上的已分解不等式的解區間。

### 4. 教學斟酌

- (1) 二次函數的圖形若與  $x$  軸不相交，由圖形觀察出其為恆正或恆負特徵，並透過配方法，驗證恆正或恆負的性質。在此，因為尚未有虛根概念，所以僅說明其無實根。
- (2) 教師可搭配電腦軟體，繪製各種不同的函數圖形，幫助學生觀察不等式解的情形，體會圖形變化的規律與代數解的關係。

### 條目範圍

1. 三次以上未分解的多項式不等式，若告知其因式或一個根，可透過因式定理分解此多項式，即可畫出多項式的簡圖，並求得不等式的解。
2. 三次以上的多項式不等式，若未分解並且未告知其因式，在此不宜出現。
3. 不含分式不等式。

### 釋例

1. 奇數重根與偶數重根在圖形上的差異，宜透過左右兩側的點帶入，觀察其圖形的正、負號，以了解其圖形特徵上的不同。
2. 可與因式定理結合，求出不等式的解。

例：已知  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$  有  $x - 1$  的因式，求  $f(x) \geq 0$  的解。

### 錯誤類型

1. 學生對於不等式  $(x+1)(2-x) > 0$  應先化為係數為正的  $(x-1)(x-2) < 0$  過程不能理解，教師應在這裡提出清楚的說明。
2. 學生過去的經驗，似乎顯示不同的不等式應該有不同的解。但是在此卻可能發現，不同的多項式不等式卻有相同的解，例如  $(x+2)(x^2+x+1) > 0$  與  $(x+2)(x^2+2x+5) > 0$  是不同的不等式，其解卻相同。教師不必刻意教導這個現象，但如果學生產生了疑問，可以先說不同的方程式本來就可能有同樣的根，例如  $2x = 0$  和  $x^3 + x = 0$  的（實）根是一樣的；而前面那兩個三次不等式的情況，可以從那兩個三次函數的圖形來理解，建議教師使用繪圖軟體來輔助講解。

### 評量



1. 絕對值分式不等式不宜出現，例：解不等式  $\left| \frac{x+1}{x-1} \right| \leq 2$ ，得  $x$  的範圍為\_\_\_\_\_。
2. 下列試題在此不宜出現。例：設  $f(x) = x^5 + x^4 - 10x^3 - 10x^2 + x + 5 - a$ ，其中  $a \in \mathbb{Z}$ ，若  $f(x) = 0$  之一根為  $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ ，求  $f(x) \geq 0$  的解。
3. 不要考哪些多項式不等式有相同的解。

**D-10-1 集合：**集合的表示法，字集、空集、子集、交集、聯集、餘集，屬於和包含關係，文氏圖。★#

d-V-1

**先備：**一元一次不等式的解與應用 (A-7-8)，四邊形的基本性質 (S-8-9、S-8-10、S-8-11)。

**連結：**實數，絕對值不等式(N-10-2)，多項式不等式(F-10-3)，複合事件的古典機率(D-10-4)。

**後續：**函數的定義域與值域，複數 (N-12甲-3、N-12乙-1)。

### 基本說明

#### 1. 與 99 課綱的差異

就學習目標而言，沒有差異。但是，在教材安排上，本課綱不鼓勵按照數學知識內容劃分學習內容，關於集合的概念和溝通方式，分散在十年級的課程中，在適當的情境與脈絡中，搭配其他學習內容而一併學習。

#### 2. 相關約定

(1) 大多數關於集合的符號，已有明確的慣例，故從略。惟描述式的集合定義，在一對大括號之內，建議以  $|$  作為分界符號。例如  $\{n \in \mathbb{N} \mid n \div 2 \text{ 餘 } 0\}$ 。差集（集合的減運算）符號為反斜線  $\setminus$ ，集合  $A$  的餘集記作  $A'$  或  $A^c$ 。

(2) 非負整數（全數）並無慣例符號，建議寫成  $\mathbb{N} \cup \{0\}$ 。（應避免  $\mathbb{N}_0$  符號，它看起來像是  $\mathbb{N}$  的某個子集，而且它容易與 Aleph Null 符號  $\aleph_0$  混淆）。

#### 3. 學習目標

(1) 知道集合的定義，能使用表列法與描述法表達集合。

(2) 理解並能用文氏圖表達字集、空集、子集、交集、聯集、餘集的意義。

(3) 以實際的例子與文氏圖解釋笛摩根定律。

(4) 以區間連結多項式不等式的解。

(5) 認識「集合中的元素」，理解屬於和包含關係，前者為元素與集合，後者為集合與集合的關係。

#### 4. 教學斟酌

(1) 適度銜接國中經驗，例如以各種四邊形作為集合運算的範例。

(2) 可視學生程度介紹「解集合」的意義。

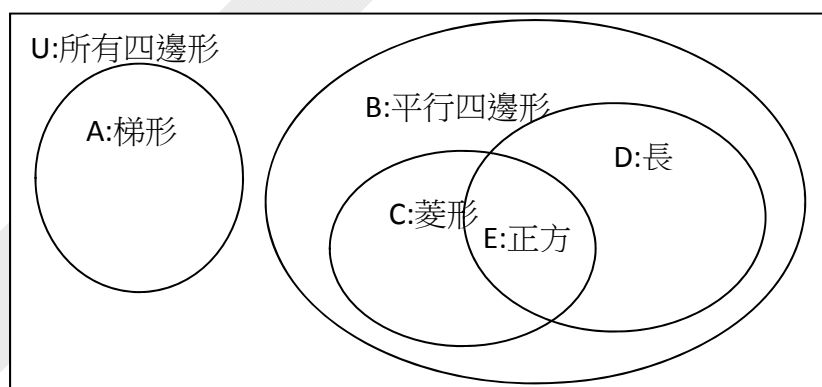
(3) 非負整數  $\mathbb{N} \cup \{0\}$  是認識聯集與「或」之連結的好例子。

### 條目範圍

本條目不設置獨立的教學單元，應融入適當課題，如數系、不等式的解區間或解區域、排列組合與機率問題，在適當的脈絡中引介，並逐步擴充其內涵。

### 釋例

1. 利用文氏圖表達四邊形類型之間的關係如下：



則以集合符號可以表達為：

$$E \subset C \subset B \subset U, (C \cup D) \subset B, A \cap B = \emptyset, C \cap D = E \dots$$

- 利用介紹樹狀圖時，介紹集合的運算，樹狀圖的分支之間即為沒有交集的子集，各分支相當於對字集的一個分割。
- 有甲乙丙丁4人排成一列，若規定甲不在首位且乙不在末位，則有幾種排列方法？除了列舉法，亦可使用文氏圖說明，A 為甲在首位方法，B 為乙在末位方法，則欲求的方法數為  $(A \cup B)'$ 。

### 錯誤類型

- 學生較常在「且」為「交集」，「或」為「聯集」產生混淆。同時對於符號  $\cap$  與  $\cup$ ，需要一些時間才能熟悉。老師可利用形狀的特性，如「且」的前兩筆畫近似交集符號  $\cap$ ，而「或」的韻母  $\sigma$  狀似聯集符號  $\cup$ ，來幫助學生記憶。（此外「且」的韻母  $\sigma$  與英文 AND 的母音相同，「或」的韻母  $\tau$  與英文 OR 的母音相同。）
- 學生對  $\{1,1,2\} = \{1,2\}$  的理解需要說明。一種類比的方法是，同一個電腦資料夾（有如集合）之內，不容同樣名字的兩個檔案。

### 評量

- 建議不列入評量的直接命題對象，可融入其他課題的評量之中。
- 避免純粹符號操弄的題型，例如： $A = \{\emptyset, \{2\}\}$ ，下列敘述何者正確？  
 (1)  $\emptyset \in A$     (2)  $\{2\} \subset A$     (3)  $\{2\} \in A$ 。  
 這種題目即為「以集合為直接評量對象」，不宜。
- 沒有情境的集合考題通常就是「以集合為直接評量對象」，不宜。

<b>D-10-2 數據分析：</b> 一維數據的平均數、標準差。二維數據的散布圖，最適直線與相關係數，數據的標準化。	d-V-2 n-V-2 g-V-5
---	-------------------------

先備：統計數據的分布 (D-9-1)。

連結：客觀機率 (D-11A,B-1)，直線方程式 (G-10-2)。

後續：離散型隨機變數 (D-12甲/乙-1)。

### 基本說明

- 與 99 課綱的差異

就內容而言，與 99 課綱相近。但新課綱將過去九年級的百分位數移到此，且本條目強調

最適直線的教學重點是「先辨識可能有直線關係」，然後才討論其「最適」性。而在教法上，也建議以平均數為 0 的數據搭配通過原點的直線，作為最適直線的教學進路。此外，新課綱在十年級不使用  $\Sigma$  符號。

## 2. 相關約定

- (1) 數據資料的第  $m$  百分位數記作  $P_m$ ，其中  $m$  為正整數 1, 2, ..., 99。其詳細約定，寫在釋例中。
- (2) 此條目不含隨機變數的觀念，但是可以設計其前置經驗，例如以數列呈現數據，並以  $X$  作為數列名稱。然後，可以用  $\bar{X}$  表示數據的平均值，也可以用  $\mu_X$  和  $\sigma_X$  表示  $X$  的平均值和標準差；在不虞混淆的前提下，可以直接用  $\mu$  和  $\sigma$  表示  $X$  的平均值和標準差。
- (3) 約定一組有限數據的標準差是「變異數」的（正）平方根，而變異數是數據與平均值之差平方的平均值。
- (4) 以  $r_{XY}$  代表  $X$  和  $Y$  的相關係數，或在前後文清楚的條件下，以  $r$  代表相關係數。

## 3. 學習目標

- (1) 能綜合運用國中階段所學各種以圖形呈現數據資料的方法，能在嘗試與比對之後，根據數據的特徵而選擇適當表現數據分布狀況的圖示。
- (2) 對適當的數據資料，能將國中的四分位數相關概念延伸至百分位數。
- (3) 知道統計數據可能有略為不同的定義（例如第一四分位數），理解它們可能產生數值略為不同但意義相同的數據。
- (4) 能根據數據的特徵或欲調查之目的，選擇適當的統計量。
- (5) 能理解並計算未分組資料的百分位數，並能用於溝通和解釋。
- (6) 能理解並計算數據的平均值與標準差，並能用於溝通、解釋和預測。
- (7) 能將數據標準化，並能用於溝通、解釋和比較。
- (8) 能做並理解二維數據散布圖，觀察兩數據可能的關係，若有線型關係則能做最適直線並且理解相關係數的意義，能用於溝通、解釋和預測。

## 4. 教學斟酌

- (1) 適度與國中所習的數據圖重疊，但加深加廣其情境：包括長條圖、圓形圖、直方圖、（相對與累積次數）折線圖、盒狀圖等。所有國中階段學習的數據處理工具，都應該持續在高中課程中使用，不但不該刻意避開，反而要在適當情境中經常運用，以達到素養培育的目的。
- (2) 統計量是用來協助我們從資料中洞察趨勢、關聯或特徵的工具，使用刻意設計的特殊數據，可能使得統計量失去其效用。教師可以呈現這些「失效」的可能性，學生也最好能夠辨識這些情況，以便根據資料與目的，選擇適當的統計量。但是，這些例外的情況，不宜喧賓奪主而成為教學的重點，更不宜成為評量的題目。
- (3) 承上，舉例而言，當資料量很少的時候，不適合使用百分位數；當數據之變異性不足的時候（例如雖然有 100 筆數據，卻只有兩種不同的值），並不適合用它們的四分位距表現數據的分散情況，也不宜討論它們的百分位數。
- (4) 最適直線的教學重點是先辨識可能有直線相關，然後討論其「最適」的評量標準；建議先以平均數為 0 的數據搭配通過原點的直線，推論最適直線，然後再擴及一般性的數據。教師應以方便取得的資訊工具，做數據分析的操作示範。

(5) 本條目不使用  $\sum_{k=n}^m$  表示足標  $k$  從  $n$  迭代到  $m$  的連加，請盡量在具體情境下使用刪節號 ...

替代，或者輔以文字註解，代替以上符號；甚至（對於某些學生）只要推論三筆或四筆資料的特例就足夠了。課綱做此限制的理由，是避免在十年級導入太多的符號操作。

建議教師在學生可理解的前提下，使用簡化的  $\sum$  符號表示「全部加起來」，而不涉及足標。例如  $\sum x_k$  就表示數據  $\langle x_k \rangle$  的總和， $\sum x_k^2$  就是數據的平方和。

(6) 本條目應盡量給學生學習操作電腦軟體以解決實際問題的機會。當計算機提供統計功能時，也要讓學生有機會學習使用計算機輸入、編輯數據資料，然後使用統計功能鍵，例如  $\bar{x}$ 、 $\Sigma x$ 、 $\Sigma x^2$ 、 $\sigma$  和  $s$ 。

### 條目範圍

1. 本條目不含隨機變數。
2. 僅處理未分組之數據資料。

### 釋例

未分組數據資料的第  $m$  百分位數  $P_m$  指的是同時滿足以下兩條件的數：

- 小於或等於  $P_m$  的資料數量至少占全部資料量的  $m\%$
- 大於或等於  $P_m$  的資料數量至少占全部資料量的  $(100-m)\%$

當資料中恰有一個滿足上述條件的（原始）數據時，採用它作為  $P_m$ ；當超過一個（原始）數據滿足上述條件時，取它們的平均值作為  $P_m$ 。

### 錯誤類型

1. 兩組數據的相關性，不能被解釋為因果性。
2. 如果不觀察散佈圖而直接計算相關係數，可能忽視了非線性關係的關聯性。

### 評量

不要刻意創造一組特殊數據，使得統計量失去意義或產生無效的結果。

<b>D-10-3 有系統的計數：</b> 有系統的窮舉，樹狀圖，加法原理，乘法原理，取捨原理。直線排列與組合。	d-V-6 d-V-7
--	----------------

**先備：**熟悉兩層以內的樹狀圖操作 (D-9-2)。

**連結：**熟悉集合間的包含關係與文氏圖 (D-10-1)，使用有系統的計數方法處理古典機率問題(D-10-4)。

**後續：**使用有系統的計數方法處理條件機率問題 (D-11A-2、D-11B-2)。

### 基本說明

1. 與 99 課綱的差異

重複組合在 99 課綱是以介紹內容，不介紹符號為原則；本課綱不含重複組合相關內容。另外有關二項式定理在 99 課綱為獨立條目，在本條目中則是以介紹二項式展開做為組合概念的說明例題，本課綱不單獨另立條目。

2. 相關約定

- (1)  $n!$  讀作「 $n$  階乘」， $n$  為非負整數；規定  $0! = 1$ ，當  $n$  為正數則  $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 1$ 。
- (2) 定義  $P_m^n = \frac{n!}{(n-m)!}$ ，表示從  $n$  個相異物中，選出  $m$  個排成一列的方法數，其中  $n$ 、 $m$  為非負整數且  $m \leq n$ 。 $P_m^n$  稱為排列數，建議讀作「PN 取 M」， $P$  是 Permutation 的縮寫。
- (3) 定義  $C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ ，表示從  $n$  個相異物中，選出  $m$  個的方法數，其中  $n$ 、 $m$  為非負整數且  $m \leq n$ 。 $C_m^n$  稱為組合數，建議讀作「CN 取 M」， $C$  是 Combination 的縮寫。
- (4) 條目中的取捨原理也可稱為排容原理。

### 3. 學習目標

- (1) 能藉由生活實例具體操作窮舉法，並有系統地進行表列。
- (2) 能透過繪製樹狀圖解決計數問題。
- (3) 能理解一一對應原理，並用以解決計數問題。
- (4) 能理解加法原理，並用以解決計數問題。
- (5) 能理解乘法原理，並用以解決計數問題。
- (6) 能理解取捨原理，並用以解決計數問題。
- (7) 能理解直線排列的方法與原理，並建立  $P_m^n$  的符號與數學概念的連結。
- (8) 能理解組合的方法與原理，並建立  $C_m^n$  的符號與數學概念的連結。

### 4. 教學斟酌

- (1) 透過具體的操作(如骰子點數、倍數選取、取球…)，讓學生能了解並體驗窮舉法的過程，此處應同時呈現可連結與不可連結加法原理或乘法原理的例子。
- (2) 國中階段已經處理過兩層以內的樹狀圖，本階段教學過程著重在兩層以上及分支數不同的樹狀圖問題，以連結加法原理、乘法原理，以及將來的機率問題。
- (3) 選取適當的例題說明一一對應關係，協助學生體會從初始問題轉化為可具體操作的數學模型的歷程，並能連結常用的計數方法(如直線排列、組合…)。
- (4) 介紹加法原理及乘法原理時，應斟酌選用數據不宜過大，避免因計算量過大造成學習重點失焦。題目設計與選取應著重引導學生能利用窮舉法或樹狀圖分析問題，並綜合使用加法原理及乘法原理。
- (5) 取捨原理應連結文氏圖的概念，限制條件建議在三個以內，主要希望學生能透過文氏圖理解取捨原理並用以解決較為複雜的計數問題。
- (6) 直線排列的介紹以相異物排列、不盡相異物排列、重複排列為原則，以連結乘法原理，做為應用。此處可適當結合窮舉法、樹狀圖、加法原理、取捨原理，但不宜出現條件太過複雜的問題。
- (7) 組合觀念的介紹以延續直線排列的學習結果為出發點，藉以連結  $P_m^n$  與  $C_m^n$  的關係，並能從中了解此兩種計數模型的使用方法。
- (8) 與  $C_m^n$  有關的組合公式甚多，選用時應著重題目情境的合理性進行搭配，不應出現單獨組合公式的推演證明或是由特定組合公式所形塑之情境問題。
- (9) 二項式定理可做為組合觀念的延伸應用，僅討論基本類型及與組合的關聯性，不宜做過多的延伸及變化。

## 條目範圍

取捨原理的問題設計應以三個限制條件以內為原則，不宜出現四個限制條件以上的問題。

## 釋例

將  $0!$  規定為 1，它可以從 Gamma 函數推論而得，只是不方便跟高中生說明。將上述規定寫成等式「 $1 = 0!$ 」有很戲劇的效果，可善加利用。

## 錯誤類型

1. 加法原理與乘法原理的錯誤選用。
2. 處理分堆問題時，不需要排列，會有重複計算。
3. 先選，後選所造成的重複計算問題，例如：要設置 11 人的委員會，至少需有男性委員 4 人及女性委員 4 人，若要從 7 個男生及 7 個女生中組成委員會，則共有多少種組合方式？

## 評量

1. 不建議出現二項式定理的延伸問題如：
  - $\frac{1}{3}C_1^n + \frac{1}{9}C_2^n + \cdots + \frac{1}{3^n}C_n^n > 100$ ，則  $n$  最小值為多少？
  - $[(a+b)^2 + c]^7$  中， $a^8b^2c^2$  的係數為多少？
  - $(x+y+z)^{10}$  有多少不同類項？
2. 可介紹單獨的  $P_m^n$  與  $C_m^n$  的運算問題，如  $P_{n-2}^n = 6$ ， $C_n^{10} = C_6^{10}$ ，藉以熟練其運算規則，但不宜出現由  $P_m^n$  或  $C_m^n$  所組成的解方程式問題。
3. 二項式定理做為組合觀念的應用，可設計求單項係數之問題，或應用於近似值問題。若要進一步結合組合公式，則需考慮此組合公式的情境合理性。此處不宜出現此類問題：求  $(1+x^2) + (1+x^2)^2 + \cdots + (1+x^2)^{15}$  展開式中， $x^6$  項的係數。
4. 排列與組合的所有概念學習皆以  $P_m^n$  與  $C_m^n$  為基本計數模型，主要希望學生能透過樹狀圖、窮舉法對問題進行分析、分類，並透過加法原理、乘法原理、取捨原理解決問題，教學設計與題目選取不需做過多或過度複雜的安排。

<b>D-10-4 複合事件的古典機率：</b> 樣本空間與事件，複合事件的古典機率性質，期望值。	d-V-3
---	-------

先備：認識機率 (D-9-2)，古典機率 (D-9-3)。

連結：集合 (D-10-1)，百分位數 (D-10-2)，有系統的計數 (D-10-3)。

後續：主觀機率與客觀機率 (D-11A,B-1)，條件機率 (D-11A,B-2)，貝氏定理 (D-11A-3)。

## 基本說明

1. 與 99 課綱的差異

(1) 期望值在 99 課綱中放在十二年級的選修上冊，而條件機率與貝氏定理、獨立事件則全部在十年級。本課綱則先在十年級隨同古典機率定義了期望值，但將條件機率與貝氏定理移到十一年級。

(2) 排列組合的教學目標只含基本的排列與組合，因此在古典機率的問題中，不應藉由太繁複的排列組合技術，求樣本空間或事件的數量。

## 2. 相關約定

(1) 試驗是指可在相同條件下重複執行但不確定其結果的程序。試驗的所有可能結果所成的集合，稱為樣本空間。樣本空間的每個元素，亦即試驗的每一種可能的結果，稱為一個樣本或樣本點。樣本空間的子集合，稱為事件。

(2) 樣本空間通常以  $S$  表示，事件  $A$ 、 $B$  的和事件以  $A \cup B$  表示、積事件以  $A \cap B$  表示、餘事件以  $A'$  表示，當  $A \cap B = \emptyset$  時，稱事件  $A$ 、 $B$  為互斥事件。

(3) 事件  $A$  的機率以  $P(A)$  表示。

(4) 因不涉及隨機變數，故直接以  $m_1 p_1 + m_2 p_2 + \cdots + m_k p_k$  定義期望值，其中  $p_i$  是發生事件之值為  $m_i$  的機率， $i = 1, 2, \dots, k$ 。

## 3. 學習目標

(1) 理解以古典機率計算機率的前提是：能窮舉樣本空間的元素，且每個樣本點發生的機會均等。

(2) 透過樣本空間個數與事件個數的比值，定義事件  $A$  的古典機率為  $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ 。

(3) 由實例說明和事件  $(A \cup B)$ 、積事件  $(A \cap B)$ 、餘事件  $A'$  的意義，並進而利用機率的性質求其對應的機率。

(4) 了解期望值，並能與平均值做對比。

## 4. 教學斟酌

(1) 強調古典機率的基本假設：每一個樣本點的機率相等，而所有樣本點的機率總和為 1。

(2) 雖然隨機變數不在高中機率課程的範圍內，但在數學上，樣本空間將是隨機變數的定義域，而隨機變數的機率密度（或分布）當然不見得均等。將來在十一年級學到貝氏定理時，樣本點的機率通常都是不同的。所以，樣本空間的初期教學，須特別留意教材內部的一致性與學生認知的發展脈絡。樣本空間的元素個數，與試驗關注的結果有關，試舉以下兩例。

試驗 A：擲兩枚公正硬幣，試驗的結果僅關注正面、反面出現的次數。

試驗 B：擲公正 10 元硬幣和 50 元硬幣各一枚，試驗的結果關注各枚硬幣正面或反面的狀況。

則試驗 A 的樣本空間  $S_1$  有 3 個元素，但是試驗 B 的樣本空間  $S_2$  有 4 個元素。若要用古典機率來計算  $S_1$  或  $S_2$  之樣本點機率時，教師應先引導學生考慮  $S_1$  和  $S_2$  是否符合古典機率的前提？然後根據古典機率的定義算出機率。此處的教學須避免自相矛盾。

(3) 本課綱不希望在機率課程中引入太多數學的抽象性，所以不正式引進隨機變數與機率密度函數。因此，教材不宜以數學的形式來定義期望值。在脈絡中讓學生了解，可以將試驗的期望值和數據的平均值做一番對比性的連結。

(4) 排列組合只講授基本的排列數與組合數，不含重複組合，因此相對應的求機率問題，也不應有繁複的排列組合問題。

## 條目範圍

不涉及條件機率、獨立事件等相關問題。

## 釋例

1. 投擲兩枚公正的硬幣一次，觀察其正反面，則其樣本空間為  $\{(正、正), (反、反), (正、反), (反、正)\}$  的一種教學方法，教師可用兩枚「不同」的硬幣做實驗，例如一枚 10 元硬幣和一枚 50 元硬幣，分別定義其「正」「反」面。
2. 承上，投擲兩顆公正的骰子一次，觀察其點數，若要說明其樣本空間有 36 個樣本的一種教學法，是教師可用兩顆外形與材質相同但顏色相異的骰子呈現此實驗，以便協助分辨兩顆骰子各自的點數。

### 錯誤類型

1. 因與排列組合相連接，學生易受到物體相同或相異所對應的取法數目不同而影響，忽略古典機率是建立在樣本點出現機會均等的條件下。

● 例： $P_1$  表一次投擲一個均勻的骰子，連續投 3 次，出現 3 次 5 點的機率。

$P_2$  表一次投擲三個均勻的骰子，同時出現 3 個 5 點的機率。

問  $P_1$  與  $P_2$  何者較大？

2. 比率相等的迷思，以為同比例放大，機率就會相等。

● 例：甲、乙兩人玩遊戲，以丟硬幣決定勝負。約定出現正面是甲贏，出現反面是乙贏，每次輸的人要給贏的人 1 元。假設  $p_1$  表示：丟完 2 次後，甲、乙無輸贏的機率； $p_2$  表示：丟完 4 次後，甲、乙無輸贏的機率，

請問： $p_1$  與  $p_2$  何者較大？ (A)  $p_1 = p_2$  (B)  $p_1 > p_2$  (C)  $p_1 < p_2$

### 評量

1. 機率的評量應以機率（或稱不確定性）的思維為主要目標，應避免表面上是機率佈題，但實際上是代數（解方程式）、排列組合、或集合論的評量題目。
2. 機率問題若使用取捨原理，以不超過三個事件為限。
3. 下列類型問題不屬於此條目的評量目標：

● 狡兔有三窟 A 窟、B 窟、C 窟，其習性為：每日夜晚，此兔會決定隔天要繼續留在原窟，或移動至另兩窟之一，而隔日留在原窟的機率為  $\frac{1}{2}$ ，移動之另兩窟之機率分別為  $\frac{1}{4}$ ， $\frac{1}{4}$ 。例如若當日在 A 窟，則隔日在 A 窟之機率為  $\frac{1}{2}$ ，移動之 B 窟、C 窟之機率分別為  $\frac{1}{4}$ ， $\frac{1}{4}$ 。已知第一次此狡兔在 A 窟，試求：第六日仍在 A 窟之機率為\_\_\_\_\_。

此題應以轉移矩陣概念解之較為合適，不宜在此作為命題方向。



<b>N-11A-1 弧度量：</b> 弧度量的定義，弧形與扇形面積，計算機的 rad 鍵。	n-V-7
--	-------

**先備：**圓弧長與扇形面積 (S-9-6)，度度量的六十進制 (G-10-6)。

**連結：**三角函數的圖形 (F-11A-1)。

**後續：**複數與方程式 (N-12甲-3)，方程式的虛根 (A-12乙-2)。

### 基本說明

#### 1. 與 99 課綱的差異

99 課綱原本將本條目安排在高三選修課程，但是微調之後，已將弧度量融入廣義角的三角比。本課綱因為將三角函數圖形移至高二，故本條目的所有內容會在此一併授完，不會分散到高三。此外，新課綱在課程中納入計算機的使用，所以有關角度、弧長、面積等計算，可以使用計算機輔助。

#### 2. 相關約定

弧度量的單位名稱為徑 (radian)，又稱「弧度」。相對地，以度 (degree) 為單位測量角，稱為度度量。弧度量又稱為弧度制，度度量又稱為角度制。

#### 3. 學習目標

- (1) 認識度和徑是兩種測量角的單位，並能互相轉換。
- (2) 使用弧度量計算（圓）弧長與扇形面積。
- (3) 能使用計算機的 rad 鍵與 deg 鍵做角的測量值之換算，並能理解換算過程會有誤差。

#### 4. 教學斟酌

- (1) 弧度制的採用有下列原因：用來繪製三角函數圖形、物理圓周運動之所需，以及當  $|\theta|$  很小時，可以有  $\sin \theta \approx \theta$  之估計。
- (2) 弧度量的單位固然可以稱為「弧度」，但建議用「徑」，原因是「弧度」裡面又有「度」，跟 degree 的「度」容易混淆；而且既然舊單位 degree 對應一個字，新單位 radian 最好也同樣對應一個字。對初學的學生，教師宜不厭其煩地強調單位，刻意不要省略單位詞「徑」，因為如果沒有建立好單位的概念，則容易出現  $\pi = 180^\circ$  的謬誤：左邊的  $\pi$  是數，而右邊的  $180^\circ$  是量，兩者根本不能相比，何來等號？但是逐漸熟練其操作之後，可以省略弧度制的單位，告訴學生那是「默認的」(default)；因為弧度制的定義為兩種長度之比值（弧長對半徑），所以在物理意義上，它是無單位量。
- (3) 教學時，建議可以使用實際的繩長，製作與半徑等長的弧，演示 1 徑的角為多大，以強化學生的心像。
- (4) 既然已經採用計算機做弧度制與角度制的換算，請教師不要總是使用  $p\pi$  徑（其中  $p \in \mathbb{Q}$ ）的弧度量和  $k^\circ$ （其中  $k \in \mathbb{Z}$ ）的度度量，以免限制了學生的經驗，而容易產生迷思概念：以為弧度量總是帶著  $\pi$  而度度量總是整數。其實學生在十年級就有六十進制的度度量經驗，應該已經知道度度量未必為整數，現在應該維持或增強這個概念。
- (5) 在適當的情境中，用計算機將弧度量轉換成度度量之後，讓學生以六十進制（度、分、秒）寫出近似的結果。
- (6) 不論弧度制與角度制的換算、弧長、扇形面積，都用到「比例」的概念，教學時不妨先測試學生的預備知識是否完備，連結 S-9-6。
- (7) 弧度量與度度量的互換，宜在後續學習的脈絡中，經常練習。

## 錯誤類型

學生會誤將  $\pi$  當作是  $180^\circ$ ，這是數學教學中長期忽略「單位」的結果，宜在教學過程中留意。

## 釋例

1. 應強調度和徑是兩種測量角的單位，用不同單位測出來的數值當然不同，例如同樣長度的公分和英吋、同樣溫度的攝氏和華氏溫標。類似地， $\pi$  徑  $\approx 3.14$  徑  $= 180^\circ$  度， $\pi$  和  $180$  是同一個角（平角）用兩種單位測量所得的數值，它們當然不相等： $\pi \neq 180$  而且  $\pi \neq 180^\circ$ ，是「 $\pi$  徑」等於「 $180$  度」。連結生活中「同一個量用不同單位測得不同數值」的經驗，避免度度量 and 弧度量的混淆。

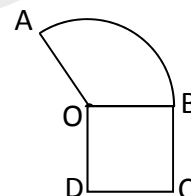
2. 如圖有一個花臺形狀包含一個正方形  $OBCD$  及扇形  $AOB$ ，

扇形的半徑  $\overline{OA} = \overline{OB} = 3$ ， $AB$  弧的長為  $6$ ，則

(1)  $\angle AOB$  為多少弧度？大約幾度？

(2) 扇形  $AOB$  的面積為多少，比正方形  $OBCD$  的面積大還是小？

3. 利用量角器及圓心在原點的單位圓比較 (1)  $\cos 3$ 、 $\cos 3^\circ$  (2)  $\sin 3$ 、 $\sin 3^\circ$  的大小，再使用計算機驗證你的結果是否正確。



## 評量

避免太過複雜與需要特殊技巧的圖形讓學生計算面積或周長。

**S-11A-1 空間概念：**空間的基本性質，空間中兩直線、兩平面、及直線與平面的位置關係，三垂線定理。

s-V-2

**先備：**空間中的線與平面（S-9-13），長方體上的三角測量（G-10-7）。

**連結：**空間坐標系（G-11A-2），空間中的平面與直線方程式（G-11A-9,10）。

## 基本說明

1. 與 99 課綱的差異

就內容而言，與 99 課綱相同。但新課綱特別增訂了空間概念的學習脈絡，例如在七年級透過三視圖熟練空間中的思維，九年級以長方體為具體物件而學習線與線的平行、垂直、歪斜，面與面的垂直與平行，以及線與面的垂直。十年級雖無空間概念條目，但是在三角比的應用上，刻意安排長方體上的測量，鞏固線與面的垂直概念，並練習基本的操作。所以，新課綱的教材，應善用這些提早安排的前置經驗。

2. 相關約定

(1) 所謂「空間」是指三個維度的歐幾里德空間，亦即在日常尺度之下，根據生活經驗而認知的空間。

(2) 歐幾里德的幾何公設固然是最重要的典範，但也有值得檢討之處。十九世紀末以來，產生了幾組不同的歐氏幾何公設系統。本課綱建議以希爾伯特 (David Hilbert) 在 1899 年於「The Foundations of Geometry」(Townsend 譯) 提出的系統為基礎。該系統以不具數學定義的「點」、「直線」與「平面」作為空間中的基本元素，並以一組公設指定它

們之間的關係。希爾伯特公設包括（以下使用通用的語言，而不贅述「決定」、「交點」、「落在」等詞彙的定義）：

- i. （空間中）相異兩點決定唯一的直線。
- ii. 不共線三點決定唯一的平面。
- iii. 若直線上有（相異）兩點落在某平面上，則整條直線落在該平面上。
- iv. 若兩平面有一個交點，則它們至少還有另一個交點。
- v. 至少存在不共面的四點。
- vi. 平面上任給一直線  $L$  與線外一點  $A$ ，在該平面上存在唯一的直線，通過  $A$  點且與  $L$  沒有交點。

其中 vi 是「平行公設」，注意希爾伯特和歐幾里德的表達方式不同。

- (3) 當兩平面交於一條直線，該直線稱為其一平面在另一平面上的截痕。
- (4) 不論直線或平面，垂直與平行的符號皆依序為  $\perp$  和  $\parallel$ 。

### 3. 學習目標

- (1) 理解不共線三點、交於一點的兩直線、直線與線外一點，皆可決定唯一的平面。在空間中的任一平面上，可以運用平面幾何的任何知識。
- (2) 理解空間中的平行線，是指落在同一平面上的不相交直線。
- (3) 理解空間中的「角」落在某一平面上；所謂夾角的測量，是在該平面上操作的。
- (4) 理解空間中一點，能找到至多三條通過該點且互相垂直的直線；那三條直線兩兩決定一平面，這三張平面兩兩垂直。
- (5) 理解直線垂直於平面的定義，理解垂直於同一平面的（相異）直線皆彼此平行，而垂直於同一直線的（相異）平面亦皆彼此平行；當直線不垂直於平面時，所謂直線與平面的夾角並無意義。
- (6) 理解並能運用法線定理：當直線  $L$  與平面  $E$  交於點  $P$ ，若  $L$  垂直於過  $P$  且落在  $E$  上的兩相異直線，則  $L$  垂直於  $E$ 。
- (7) 理解兩平面必存在公垂面；兩平面的夾角（兩面角）是依它們在公垂面（兩平面交線的垂面）上的截痕而測量的。
- (8) 理解三垂線定理。

### 4. 教學斟酌

- (1) 學生在九年級以長方體為具體對象而學習了直線與直線的平行、垂直、歪斜關係，平面與平面的垂直與平行關係，以及線與面的垂直關係。本條目的教學，應善用上述前置經驗。
- (2) 十年級的三角測量，應讓學生憑直覺而認識長方體上若某邊  $L$  垂直於某面  $E$  於  $A$  點，則  $L$  垂直於  $E$  上通過  $A$  的所有直線。這是法線定理的前置經驗。此條目意欲處理一般的直線與平面垂直關係。
- (3) 高中數學課程裡，嚴格來說並沒有空間幾何，而僅為空間概念。此概念的發展，就功能而言有兩大目標：測量距離與夾角，而為了支援這兩項目標，課程儘速提供直角坐標系作為輔助工具。所以，此條目的教學，就是要藉由生活中建立的直觀概念，以及過去（九年級和十年級）在長方體上面建立的概念，延伸到坐標空間的建立、理解與熟悉。一般化的空間幾何課題，宜斟酌其需求性；例如，不一定要在無坐標的條件下探討一般的兩面角問題。

## 條目範圍

空間幾何的內容浩瀚，本條目僅及於支援空間直角坐標系、空間向量、平面方程式與直線方程式的基礎概念。

## 錯誤類型

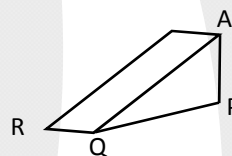
1. 考慮兩平面相交的關係時，誤以為可以交於一點。此錯誤認知可能源自於未能將平面無限延伸，而僅以兩片平板作為概念心像。
2. 當兩條直線分別落在互相平行的兩個平面上，當它們投影到另一平面之後彼此垂直時，學生不認為它們彼此「歪斜」。

## 釋例

1. 法線定理實為空間性質的關鍵基礎。這個定理的建立，可以利用畢氏定理（正逆敘述），也可以僅利用三角形的全等推論；但是，事實上也容許藉由操作而歸納出這個概念。
2. 將教室視為一個（理想化的）長方體，可以提供很方便的空間概念模型。例如張開一扇門的角度，很自然是看門在地板上的張角，而地板是門和牆的公垂面。教室四周的柱子，都是地板的垂線，它們彼此平行。

3. 三垂線的關係，在正規論證之外，希望能讓學生透過生活經驗而理解，例如以下三種理解的方式。

(1) 用三明治形體（如圖）來想像：面對三明治的斜面， $E$  是底面， $AP$  是右後方鉛直的稜邊（ $A$  點在上）， $QR$  是斜面下緣的水平稜邊（ $Q$  點在右），則直線  $AQ$  是斜面右緣的稜邊。 $\angle AQR$  是直角。



(2) 用直角板的旋轉來想像：沿用前面的符號， $E$  是底面，直線  $PQ$  和  $QR$  是平面上垂直於  $Q$  點的兩條直線。放一支直角板在平面上， $\angle PQR$  即為直角，想像將直角板的頂點  $P$  朝平面  $E$  的「正上方」提高到  $A$  點，而固定  $QR$  邊在平面上，則三角板的  $AQ$  邊是原來  $PQ$  邊的旋轉和伸長，而三角板的直角維持不變； $\angle AQR$  保持直角。

(3) 其實這就是兩個垂直面的性質，用地板和牆壁來想像：當直線  $AP$  正交平面  $E$  於  $P$  點，而點  $Q$ 、 $R$  在平面上，其中直線  $QR$  垂直於直線  $PQ$ ，則由  $A$ 、 $P$ 、 $Q$  三點決定的平面  $F$  是  $E$  的垂面，可以想像  $E$  是地板而  $F$  是牆壁，則直線  $QR$  就是地板上垂直於牆壁的一條直線；因為  $QR$  是平面  $F$  的垂線，所以  $QR$  垂直於  $F$  上所有通過  $Q$  點的直線，包括直線  $AQ$ 。

**G-11A-1 平面向量：**坐標平面上的向量係數積與加減，線性組合。

g-V-1

**先備：**以平面直角坐標系、方位距離標定位置 (G-7-1)。

**連結：**空間向量 (G-11A-3)、平面向量的運算 (G-11A-6)、二元一次方程組的矩陣表達 (A-11A-1)、平面上的線性變換 (F-11A-3)。

**後續：**複數 (N-12甲-3, N-12乙-1)。

## 基本說明

### 1. 相關約定

(1) 向量表示為  $\vec{a}$ ，若始點  $A$  終點  $B$  的向量表示為  $\overrightarrow{AB}$ 。

- (2) 零向量  $\vec{0}$  不考慮方向。在提及向量與向量的平行或垂直時，不討論  $\vec{0}$ 。
- (3)  $|\vec{a}|$  表示向量的長度。
- (4) 由兩位置向量  $\vec{OA}$  和  $\vec{OB}$  之線性組合  $\{\alpha\vec{OA} + \beta\vec{OB} \mid 0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1\}$  形成的平行四邊形，稱為由  $\vec{OA}$  和  $\vec{OB}$  「決定」的平行四邊形。

## 2. 學習目標

- (1) 能理解向量同時具有大小及方向的特性；只要此兩特性相等的向量，就是同一個向量。
- (2) 能做平面坐標上  $A$ 、 $B$  兩點所形成的向量  $\vec{AB}$  的坐標表示，以及一點  $A$  的位置向量  $\vec{OA}$  的坐標表示。
- (3) 理解平面向量之加法、減法與係數積運算的意義，能透過圖形或坐標方式操作平面向量的加法、減法與係數積。
- (4) 能計算平面坐標上兩點之內分點坐標。
- (5) 理解平面上一點的位置向量，並能轉換點坐標及其位置向量這兩個概念。
- (6) 理解兩向量之線性組合的意涵，並能操作線性組合；能在平面坐標上標示出如  $\{\alpha(1,0) + \beta(1,1) \mid 0 \leq \alpha \leq 1, 1 \leq \beta \leq 2\}$  的區域。

## 3. 教學斟酌

- (1) 向量概念建議以位置向量為主，銜接十年級以坐標方式學習三角與直線的歷程，並透過位置向量介紹向量的加法、減法及係數積運算，最後再以純向量形式介紹向量的加、減及係數積。
- (2) 學生常忘記向量可移動到任意始點，教學時宜製造機會，讓學生能在脈絡中多練習此操作；可利用自製教具讓學生動手做平面上的向量移動。
- (3) 建議從向量線性組合的觀點來看三點共線性質，順便連結直線參數式，往前可以將分點公式的結果連結十年級已介紹過的數線上的分點公式，往後也可以銜接空間向量的相關性質。
- (4) 教導平面向量的最主要目的，是為空間向量乃至於高維度向量的操作（加、減、係數積與線性組合）建立概念心像；在高維度，向量很難做具體的操作，難免成為概念性的操作，而其概念心像則須依賴於平面向量的操作經驗。而高中的向量教學，總目標是為大學之線性代數和矩陣計算相關課程奠定基礎，並不是支援物理課程的工具，也不是處理平面幾何的利器。在此課程理念之下，平面向量之幾何教學素材，例如三角形的三心相關性質等，還是應聚焦於線性組合觀念的連結。

## 條目範圍

1. 不證明三點共線的充要條件：已知  $\vec{OC} = \alpha\vec{OA} + \beta\vec{OB}$ ， $A$ 、 $B$ 、 $C$  三點共線若且惟若  $\alpha + \beta = 1$ 。
2. 不觸及基底及線性相關、獨立等名稱。

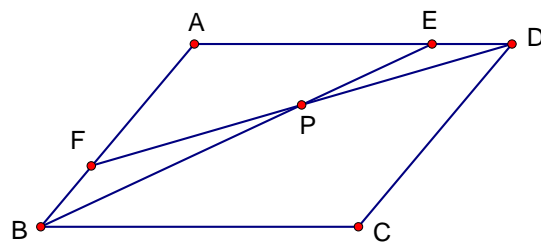
## 錯誤類型

1. 在未確定為位置向量時，誤把點坐標當作向量運算。
2. 誤將向量長度符號當作絕對值使用，例如  $\vec{a} = (2, -1)$ ，則有  $|\vec{a}| = |(2, -1)| = (2, 1)$  的錯誤結果。
3. 忘記向量可移動到任意始點，或者不會操作平面向量。

## 評量

不應設計過度複雜的三點共線之線性組合問題。例如以下題目不宜：

平行四邊形  $ABCD$  中， $E$  是線段  $AD$  上一點，且  $\overline{AE} = 3\overline{ED}$ ， $F$  是線段  $AB$  上一點，且  $\overline{AF} = 2\overline{FB}$ ，若  $BE$  與  $DF$  交於點  $P$ ，且  $\overline{AP} = x\overline{AB} + y\overline{AD}$ ，則數對  $(x, y) = ?$   $\overline{DP} : \overline{PF} = ?$



<b>G-11A-2 空間坐標系：</b> 點坐標，兩點距離，點到坐標軸或坐標平面的投影。
---

<b>g-V-1</b>
--------------

先備：平面直角坐標系(G-7-1)、空間中的線與平面(S-9-13)。

連結：空間概念(S-11A-1)、空間向量(G-11A-3)。

### 基本說明

#### 1. 與 99 課綱的差異

基本上與 99 課綱無差異，唯本課綱在九年級已透過長方體的例子，建立空間中線與線、線與面的位置關係，因此學生對於空間坐標系的了解，應有一定程度的幫助。

#### 2. 相關約定

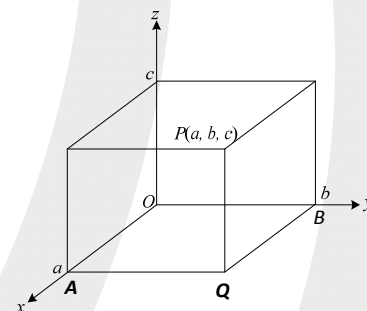
- (1) 以右手系  $x$ - $y$ - $z$  表示空間坐標系 (如右圖)。
- (2) 坐標平面分別以  $xy$  平面、 $yz$  平面、 $xz$  平面表示。

#### 3. 學習目標

- (1) 能在空間坐標系中，做點到坐標平面的正射影點，以及點到坐標軸的正射影點。
- (2) 透過空間坐標系的建立，將空間中的點到坐標軸與坐標平面的距離，與此點的坐標連結。
- (3) 求空間中兩點的距離。

#### 4. 教學斟酌

- (1) 為協助學生建立空間坐標的觀念，在探討空間中（異於原點）某點  $P$  的坐標時，宜以原點和  $P$  點為頂點， $x$ 、 $y$ 、 $z$  軸為邊，做輔助長方體，連結長方體的經驗以幫助觀察與思考。
- (2) 空間坐標中點到坐標平面、點到坐標軸的距離概念，可透過國中已了解的長方體，建立距離及垂直概念。
- (3) 透過點到坐標平面的投影、畢氏定理，及長方體概念，理解空間中兩點的距離公式。



### 條目範圍

空間坐標系的建立，主要讓學生了解由點  $P(a, b, c)$  的坐標，即可得知點  $P$  到  $x$ 、 $y$ 、 $z$  軸的距離，以及點  $P$  到  $xy$  平面、 $yz$  平面、 $xz$  平面的距離，不涉及  $\overline{OP}$  與  $x$ 、 $y$ 、 $z$  軸的夾角問題。

### 釋例

除透過上圖的長方體觀察直線  $PA$  垂直於  $x$  軸外，亦可透過三垂線定理瞭解  $PA$  垂直於  $x$  軸，因此點  $P$  到  $x$  軸的距離為  $\overline{PA}$ ；同理點  $P$  到  $y$ 、 $z$  軸的距離分別為  $\overline{PB}$ 、 $\overline{PC}$ 。

### 錯誤類型

學生會以為點  $P(a, b, c)$  到  $x$  軸的距離是  $|a|$ ，應透過上圖的長方體，讓學生觀察到  $\overline{OA} = |a|$ ，而點  $P(a, b, c)$  到  $x$  軸的距離為  $\overline{PA}$ 。

**先備：**空間中的線與平面 (S-9-13)。

**連結：**空間概念 (S-11A-1)，空間坐標系 (G-11A-2)，空間向量的運算 (G-11-6)，平面方程式 (G-11A-9)，空間中的直線方程式 (G-11A-10)。

### 基本說明

#### 1. 與 99 課綱的差異

就內容而言，與 99 課綱相近。但新課綱將此課題在 B 版中移除。

#### 2. 相關約定

(1) 向量表示為  $\vec{a}$ ，若始點  $A$  終點  $B$  的向量表示為  $\overrightarrow{AB}$ 。

(2) 零向量  $\vec{0}$  不考慮方向。在提及向量與向量的平行或垂直時，不討論  $\vec{0}$ 。

(3)  $|\vec{a}|$  表示向量的長度。

(4) 由兩位置向量  $\overrightarrow{OA}$  和  $\overrightarrow{OB}$  之線性組合  $\{\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} \mid 0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1\}$  形成的平行四邊形，稱為由  $\overrightarrow{OA}$  和  $\overrightarrow{OB}$  「決定」的平行四邊形。

#### 3. 學習目標

(1) 能做空間坐標中  $A$ 、 $B$  兩點所形成的向量  $\overrightarrow{AB}$  的坐標表示，以及一點  $A$  的位置向量  $\overrightarrow{OA}$  的坐標表示。

(2) 理解空間向量之加法、減法與係數積運算的意義，能操作空間向量的加法、減法、係數積。

(3) 能計算空間坐標中兩點之內分點坐標。

(4) 理解空間中一點的位置向量，並能轉換點坐標及其位置向量這兩個概念。

(5) 理解兩向量之線性組合的意涵，並能操作線性組合；能在空間坐標中標示出如  $\{\alpha(1,0,0) + \beta(0,1,1) \mid 0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1\}$  的區域。

#### 4. 教學斟酌

(1) 向量概念建議以位置向量為主，教學時宜以平面向量作為參照，將平面向量之加、減、係數積和線性組合的概念，類比到空間向量，讓學生同時複習平面向量也學習到空間向量新概念。

(2) 因為立體圖形在 3D 轉為平面 2D 圖像後，空間感會受到影響，教學時建議以空心長方體的模型，讓學生在其頂點與邊上的點取為向量的兩端，操作空間向量的加減法；除了坐標化之外，同時提供向量加減法的直觀概念。

(3) 學生常忘記向量可移動到任意始點，除了多連結平面向量的經驗以外，也可以多製造練習此概念的機會。

### 條目範圍

不觸及基底及線性相關、獨立等名稱。

### 錯誤類型

1. 在未確定為位置向量時，誤把點坐標當作向量運算。

2. 誤將向量長度符號當作絕對值使用，例如  $a = (2, -1, -1)$ ，則有  $|a| = |(2, -1, -2)| = (2, 1, 2)$  的錯誤結果。

3. 忘記向量可移動到任意始點，或者不會操作空間向量。

### 評量

評量時採用的空間形體，以能順利置於空間坐標系之內的類型為宜。

**G-11A-4 三角不等式：**向量的長度，三角不等式。

g-V-4

n-V-4

**先備：**三角形的基本性質 (S-8-8)。

**連結：**空間概念 (S-11A-1)。

**後續：**複數 (N-12甲-3、N-12乙-1)，函數的極限 (F-12甲/乙-2)。

### 基本說明

#### 1. 與 99 課綱的差異

本課綱將實數的三角不等式放在此條目，當作向量之三角不等式的特殊狀況。

#### 2. 相關約定

用  $|\vec{a}|$  表示平面向量或空間向量  $\vec{a}$  的長度。

#### 3. 學習目標

(1) 能做平面向量以及空間向量的長度運算。

(2) 理解平面向量的三角不等式，並能類比於實數  $a$ 、 $b$  的同樣不等式形式。

(3) 理解兩空間向量可以落在同一平面上，而它們符合三角不等式。

#### 4. 教學斟酌

(1) 本條目宜融入平面向量與空間向量的教學單元，不必獨立一個單元。

(2) 當  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  不平行，理解三向量  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{a}+\vec{b}$ ，或者  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{a}-\vec{b}$ ，都可以用三角形的三邊作為表徵，利用此表徵發展三角不等式，並說明等號成立的條件。

(3) 因為實數的不等式  $\|x|-|y|\| \leq x \pm y \leq |x|+|y|$  看不到「三角形」的關係，導致對於「三角」不等式的名稱產生疑惑。所以將這個特例放在本條目，提供教師平面上三角形三邊關係的類比。實數的三角不等式。

(4) 三角不等式  $\|x|-|y|\| \leq x+y$  的等號成立條件為  $x, y$  異號，而  $|x+y| \leq |x|+|y|$  的等號成立條件為  $x, y$  同號，學生常忽略兩者之間的差異。對照到向量形式，則應注意平行的狀況有同向與反向兩種，教學上可強化此兩種觀點的連結。

(5) 不等式  $|x|-|y| \leq |x-y|$  也是正確的，教師宜指出這條不等式「顯而易見」而非「錯誤」。

### 錯誤類型

學生可能混淆「求解」的不等式和「恆」不等式，例如求解不等式  $\|x-3|-|x+1|\| \leq 2$  相對於三角不等式  $\|x-3|-|x+1|\| \leq 4$ ，這兩個觀念需謹慎釐清並給予足夠的時間，使學生在合理的脈絡中分辨兩者。

### 釋例

學過向量內積以及柯西不等式之後，可以與三角不等式連結：

$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 \leq |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| + |\vec{b}|^2 = (|\vec{a}|+|\vec{b}|)^2$ ，所以  $|\vec{a}+\vec{b}| \leq |\vec{a}|+|\vec{b}|$ 。再從這裡，運用  $|\vec{a}| = |(\vec{a}-\vec{b})+\vec{b}| \leq |\vec{a}-\vec{b}|+|\vec{b}|$  的技巧推論  $\|\vec{a}-\vec{b}\| \leq |\vec{a}-\vec{b}|$ 。如果能理解內積與柯西不等式不限維度，則三角不等式也不限維度。

**G-11A-5 三角的和差角公式：**正弦與餘弦的和差角、倍角與半角公式。

s-V-1

g-V-4

**先備：**極坐標與直角坐標的轉換 (G-10-5)，廣義角的正弦、餘弦 (G-10-6)，餘弦定理 (G-10-7)。



連結：向量的運算 (G-11A-6)，正餘弦的疊合 (F-11A-2)。

後續：複數的極式 (N-12甲-3)。

## 基本說明

### 1. 學習目標

- (1) 能理解正弦、餘弦的和差角公式推導過程。
- (2) 能透過正弦、餘弦的和差角公式推導出正切的和差角公式。
- (3) 能透過正弦、餘弦的和差角公式推導出正弦、餘弦的倍角與半角公式。
- (4) 能使用正弦、餘弦的和差角、倍角與半角公式解決相關問題。

### 2. 教學斟酌

- (1) 建議連結十年級的極坐標概念，搭配餘弦定理，推導餘弦的差角公式，再搭配三種線對稱及旋轉直角之後的坐標關係，擴展出全部正弦、餘弦的和差角公式。
- (2) 透過正弦、餘弦的和差角公式推導出正切的和差角公式，並連結十年級的直線斜率概念，處理兩直線夾角問題，作為正切的差角公式的應用。
- (3) 透過正弦、餘弦的和差角公式推導倍角及半角公式後，可搭配特殊角(如 15 度、30 度、45 度、75 度)加以驗證或熟練其公式的使用。
- (4) 協助學生釐清為何倍角公式所得到的三角函數值具有唯一性，而半角公式則須依照角度所在的象限進行判斷。
- (5) 請注意連結十年級所學的基礎，以正弦和餘弦為主，正切之對應公式以推論之練習為原則。

## 條目範圍

1. 與差角公式相關的三角恆等式問題不宜作為教學及評量的主要問題。
2. 倍角公式的使用應著重情境的連結，不宜做過多使用乘法公式之相關問題。
3. 不含和差化積與積化和差。
4. 不含  $\cot$ 、 $\sec$ 、 $\csc$  之對應公式。

## 釋例

1. 如果已經學過向量內積，則可以做以下連結：設單位圓上兩點之極坐標為  $P[1, \alpha]$ 、 $Q[1, \beta]$ ，而  $\overline{OP}$  與  $\overline{OQ}$  之夾角  $\theta$  為  $|\alpha - \beta|$  在  $[0, \pi]$  範圍內的同界角，則  $\overline{OP} \cdot \overline{OQ}$  的坐標算法得到  $\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ ，而內積公式得到  $\cos \theta$ 。此時用到  $\cos$  為「偶函數」的重要關鍵，使得  $\cos \theta = \cos(\alpha - \beta)$ ，於是連結了餘弦的差角公式。
2. 承以上符號，如果學過線性組合與二階行列式的面積意涵，則由  $\overline{OP}$  與  $\overline{OQ}$  決定的平行四邊形面積為  $|\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta|$ ，而該平行四邊形的高為  $\sin \theta$ ，故得到  $\sin |\alpha - \beta| = |\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta|$ ；但因為  $\sin$  是「奇函數」所以不能解開絕對值。這就是「為什麼」我們偏好使用餘弦（而不是正弦）來計算夾角的原因。
3. 餘弦的倍角公式  $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$  將來是做  $\sin^2 x$  和  $\cos^2 x$  之反導函數的工具，教師可適度重視此倍角公式。

## 評量

本條目的重點在於正弦和餘弦，關於正切的和差角、倍角、半角公式等，以推論之練習為原則，請勿過度評量。

**G-11A-6 平面向量的運算：正射影與內積，面積與行列式，兩向量的平行與垂直判定，兩向量的夾角，柯西不等式。**

g-V-5

**先備：**直線方程式 (G-10-2)、空間中的線與平面 (S-9-13)。

**連結：**平面向量(G-11A-1)、空間向量(G-11A-3)、空間向量的運算(G-11A-7)、二元一次方程組的矩陣表達 (A-11A-1)。

**後續：**複數 (N-12甲-3)。

## 基本說明

### 1. 相關約定

- (1) 以符號  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  代表兩向量  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  的內積。內積的代數定義，又稱為內積的坐標算法；內積的幾何定義，又稱為內積公式。
- (2) 向量的垂直不討論零向量。
- (3) 兩向量的夾角  $\theta$  取  $0 \leq \theta \leq \pi$ 。
- (4) 為搭配二元一次聯立方程式的矩陣表達以及向量的線性組合習慣，並吻合大學線性代

數的習慣，將兩向量  $\vec{a} = (a_1, a_2)$ 、 $\vec{b} = (b_1, b_2)$  決定的行列式記為  $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ ，也可以簡記作

$$|\vec{a} \ \vec{b}|; \text{ 定義行列式 } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1。$$

### 2. 學習目標

- (1) 能操作向量在指定方向的正射影，知道平面向量內積的坐標算法。
- (2) 兩向量平行與垂直的概念，可與直線的平行與垂直結合。在平面上，向量與斜率皆為決定方向的概念，因此，可透過向量內積求得兩向量及直線的夾角。
- (3) 理解內積公式並能用以解決問題。
- (4) 利用向量內積為投影的概念，得知投影長必不大於原向量長，導出柯西不等式。
- (5) 兩向量  $\vec{a} = (a_1, a_2)$ 、 $\vec{b} = (b_1, b_2)$  所決定的平行四邊形面積  $\sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} = |a_1 b_2 - a_2 b_1|$  恰為行列式之絕對值。

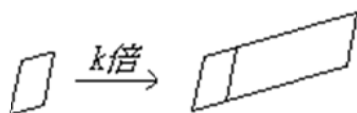
### 3. 教學斟酌

- (1) 向量的正射影為向量內積的相關概念，而定義向量的正射影後，應介紹任意的非零向量皆可表成兩互相垂直向量的線性組合，此即向量分解的概念。
- (2) 可適度強調兩向量相加、相減仍為一向量，但是向量的內積為一純量，如同力與位移有方向性，但兩者相乘後變只有正功與負功，已無方向性的概念。
- (3) 可利用向量內積求兩向量或兩直線夾角的餘弦，並適當引入計算機求夾角的估計值。

## 釋例

1. 可將行列式視為有向面積，行列式的性質除了展開驗證外，也可透過有向面積直觀的解釋。例如：

$$\square(k\vec{a}, \vec{b}) = \square(\vec{a}, k\vec{b}) = k\square(\vec{a}, \vec{b}), \text{ 有向面積變為原來的 } k \text{ 倍。}$$



同樣可以用面積觀點推論行列式的分配律  $|\vec{a} + \vec{b} \ \vec{c}| = |\vec{a} \ \vec{c}| + |\vec{b} \ \vec{c}|$ ，細節從略。

2. 承上，從面積觀點可以輕易得到： $|\vec{a} \ \vec{a}| = 0$ ，再配合行列式的係數積、分配律，可以推論  $|\vec{a} \ \vec{b}| = -|\vec{b} \ \vec{a}|$ 。
3. 雖然以下並非高中數學的範圍，但為了對教師同仁闡述行列式的（解析）幾何意涵，也就

是面積或高維度的體積意涵，我們補充說明  $n$  階行列式可以用以下四個性質定義：前述的係數積、分配律、歸零性質，以及  $|I|=1$ ，其中  $I$  是  $n$  階單位方陣，也就是  $n$  維空間中的單位正方體的有向體積為 1。此定義的動機或模型，顯然就是面積或體積。從這個定義，可以推導所有行列式的運算公式與性質。由此可見，行列式不純然是代數領域的數學物件，它同時也是幾何的。請教師在教學過程中，平衡對待行列式的兩種意義。

4. 讓內積連結正弦與餘弦的差角公式，參閱 G-11A-5。

### 錯誤類型

利用柯西不等式求極值問題，需確認等號成立後，才可得極值。學生會因大部分的題目，極值都恰好會成立忽略此概念。

### 評量

1. 行列式最主要是作為平行四邊形面積的應用連結，以及後面的克拉瑪公式之連結，因此評量上不宜過度操作技巧性的運算，以及複雜的代數計算問題，例如：下列問題不適合做為

評量：求  $\begin{vmatrix} 3+\sqrt{7}-2\sqrt{5} & -6+3\sqrt{7}+\sqrt{5} \\ -1-2\sqrt{7}+3\sqrt{5} & 2+4\sqrt{7}-9\sqrt{5} \end{vmatrix}$  之值。

2. 不過度操作柯西不等式求極值的技巧性問題。例如不宜利用柯西不等式求

$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(9a+4b)$  的極值。

<b>G-11A-7 空間向量的運算：</b> 正射影與內積，兩向量的平行與垂直判定，柯西不等式，外積。	g-V-3
--	-------

先備：平面直角坐標系 (G-7-1)，空間概念 (S-11A-1)。

連結：空間向量(G-11A-3)，平面向量的運算(G-11A-6)，三階行列式(G-11-8)。

後續：平面方程式 (G-11A-9)，空間中的直線方程式(G-11A-10)。

### 基本說明

1. 相關約定

- (1) 以符號  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  代表兩向量  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  的內積， $\vec{a} \times \vec{b}$  代表兩空間向量  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  的外積。
- (2) 向量的垂直不討論零向量。
- (3) 兩向量的夾角  $\theta$  取  $0 \leq \theta \leq \pi$ 。

2. 學習目標

- (1) 能操作向量在指定方向的正射影，知道空間向量內積的坐標算法。
- (2) 理解內積公式，能用它求出空間中兩向量的夾角。
- (3) 能將一向量分解成兩互相垂直的分量。
- (4) 能夠判定空間中的兩向量是否平行或垂直。
- (5) 由平面向量的柯西不等式，推論出空間向量的柯西不等式，並說明等式成立的條件。
- (6) 認識向量外積的定義，並理解兩向量的外積仍為一個向量，其長度等於前述兩向量所決定的平行四邊形面積，而其方向垂直於前述平行四邊形。

3. 教學斟酌

- (1) 在此條目中，每個觀念的引入，大部分都可從平面向量開始，再類比推論到空間向量。引入觀念後，再證明這些性質。然而內積的運算，卻可以在兩向量所決定的平面上，

從三角形的餘弦定理而得到。

- (2) 利用內積的定義，求出空間中兩向量的夾角，教師可以在這邊說明：
  - 空間坐標中的直線不再有斜率觀念，不能用斜率及反正切來計算夾角，所以內積和反餘弦就是計算夾角的主要工具。
  - 將立體圖形自訂坐標之後，可以更快速簡潔的解決問題。
- (3) 在定義外積時，應清楚說明外積  $\vec{a} \times \vec{b}$  是一個向量，外積不具交換性而有負交換性： $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ 。外積的方向性質與右手定則，可以結合物理的力矩概念來說明。
- (4) 延續平面向量中，兩個不平行的向量所決定的平行四邊形面積為  $\sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$ ，代入空間中的向量坐標表示法，化簡的結果與平面向量的結果作比較。此結果再連結到外積的長度。
- (5) 向量的內積運算和外積運算都不滿足消去律，亦即若  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ ，即使  $\vec{a} \neq \vec{0}$  也可能  $\vec{b} \neq \vec{c}$ 。其實這個現象的更根本原因，是向量的內積和外積都不滿足非零性質：即使  $\vec{a} \neq \vec{0}$  且  $\vec{b} \neq \vec{0}$ ，也可能  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  或  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ 。
- (6) 教導柯西不等式時，需特別引導柯西不等式之等號是否成立的觀念；此外，以向量觀點解釋柯西不等式，可建立學生對兩向量夾角動態關係與內積值變化的心像，給不易掌握代數式的學生，提共另一種學習途徑。
- (7) 可將柯西不等式擴展為兩個同樣長度之數列  $\langle a_k \rangle$ 、 $\langle b_k \rangle$ ， $k=1, 2, \dots, n$ ，之間的不等式，並用以解釋二維數據的相關係數範圍。但是可以不必用  $n$  維空間的向量來解釋，因為  $n$  維向量的夾角可能造成困擾，而且「 $n$  維向量」和「二維數據」兩種「維度」觀念，也徒增困擾；僅以二維數據的代數關係來認識即可。
- (8) 利用向量內積或外積求得兩向量夾角之餘弦或正弦之後，可適當引入計算機求夾角的估計值。

### 錯誤類型

1. 學生會把向量內積與外積的符號「 $\cdot$ 」、「 $\times$ 」誤以為是數與數的乘法，唸法也不正確。
2. 學生易混淆以下觀念：向量內積的結果是一個值，向量外積的結果是一個向量，但是在表示內積與外積的運算結果時，寫出錯誤的形式。
3. 學生對於名詞指涉的對象易混淆：正射影長是長度，而向量的正射影是向量。
4. 「負交換」的二元運算 ( $x * y = -(y * x)$ ) 是學生在空間向量的外積才學到的新運算關係，容易忽略也容易產生認知衝突，需謹慎處理並給予足夠的時間使其內化。
5. 學生沒辦法判斷柯西不等式的使用時機，或是沒有正確使用柯西不等式。

### 評量

在情境脈絡中使用內積與外積，並不會特別受到它們的「代數缺陷」的干擾（例如不滿足消去律，向量的內積不再是向量等）。在評量中引導學生正確使用這些工具，不要利用它們的缺陷來命題。

**先備：**直線方程式 (G-10-2)，三角比的性質 (G-10-7)，空間概念 (S-11A-1)。

**連結：**面積與行列式 (G-11A-6)、方陣 (A-11A-3)、空間向量的外積 (G-11A-7)。

### 基本說明

#### 1. 與 99 課綱的差異

就內容而言，與微調後 99 課綱的 B 版教材相同，而本課綱將此內容規劃在 A 類的必修課程裡。在教學脈絡上，則延續 99 課綱著重於幾何觀點的期望。

#### 2. 相關約定

- (1) 令  $\overline{OA}$ 、 $\overline{OB}$ 、 $\overline{OC}$  為空間中的位置向量，所謂  $\overline{OA}$ 、 $\overline{OB}$ 、 $\overline{OC}$  「決定」的平行六面體，是指坐標空間中，符合以下條件的唯一平行六面體：以原點為一個頂點，以  $\overline{OA}$ 、 $\overline{OB}$ 、 $\overline{OC}$  為三個稜邊。
- (2) 所謂三重積是指 Scalar Triple Product，亦即  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ ，其中  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$  為空間向量。
- (3) 當我們寫  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$  出所決定的三階行列式，習慣上依序將  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$  的向量坐標寫在第一、第二、第三列。

#### 3. 學習目標

- (1) 理解「同底等高」的平行六面體之體積皆相等，亦即祖暅原理。
- (2) 理解三重積的絕對值  $|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$  是由  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$  決定的平行六面體體積，並能操作三重積的運算。理解三向量共面的概念。
- (3) 知道三階行列式的運算規則，理解其運算性質及對應的幾何（體積）意涵。
- (4) 認識並理解二階行列式和三階行列式在平面上和空間中的類比關係，以及它們具備同樣的運算性質。
- (5) 理解三重積與三階行列式的等價關係。

#### 4. 教學斟酌

- (1) 祖暅原理是國中階段「同底等高的平行四邊形或三角形之面積皆相等」之性質的空間版本。如果按照本說明手冊的建議，在十年級便可搭配直線方程式的學習，利用平行線（斜率相同的直線方程式）的性質，在坐標平面上發展出平行四邊形或三角形面積的「坐標算法」。如果具備此種前置經驗，此時應該更容易理解祖暅原理，並利用平行面做體積的概念性操作。
- (2) 三重積是空間向量的一種有用的運算，可視為空間向量之運算的延伸學習。而三重積與三階行列式的關聯，是有趣而且基本的知識，值得讓學生知道。但是本條目的最主要學習目標，是三階行列式與體積的關聯。
- (3) 承前項，學生固然應該知道行列式的運算性質，若能透過其幾何意義的理解而記憶那些運算性質，當然是最理想的。但是，對於某些學生，經由二階行列式與平行四邊形的關聯來理解（記憶）那些性質，並直接認定三階行列式「繼承」同樣的性質，也是可以接受的。不論如何，都不應過度練習行列式的運算性質。
- (4) 三階行列式並不僅能從三重積引入。只要能兼顧學生的認知發展以及「三階行列式之幾何（體積）意涵」都可以。
- (5) 二階行列式為 0 時，確實只有發生零（平面）向量或平行向量的情況。但是三階行列式為 0 卻是三（空間）向量共面的情況，學生特別需要注意這種狀況的認識、理解與

熟悉；這將是「線性相關」的重要概念心像。

## 條目範圍

本條目不包含四階或更高階的行列式。

## 錯誤類型

學生經常傾向於從三重積為 0 (或者其三階行列式為 0)，過於簡化地推論存在零向量，或者存在平行向量，而遺漏三向量共面的狀況。

## 評量

1. 不要過度評量行列式的運算性質，例如范德蒙行列式是不宜的評量對象。
2. 建議評量設計能結合線性組合及平行六面體體積的概念，例如：已知由  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$  決定的平行六面體體積為 5 立方單位，問  $2\vec{a}$ 、 $3\vec{a} + 2\vec{b}$ 、 $2\vec{b} - \vec{c}$  所決定的平行六面體體積，是合宜的考題。但是，應避免將目的相同的問題，在抽離幾何意義的情況下，以純粹行列式操作的形式出現。

3. 勿出現過度使用行列式運算技巧進行化簡行列式的問題，如：
$$\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{vmatrix}。$$

**G-11A-9 平面方程式：**平面的法向量與標準式、兩平面的夾角、點到平面的距離。

g-V-4

s-V-2

**先備：**空間中的直線與平面的垂直關係 (S-9-13)，法線定理 (S-11A-1)，向量的運算 (G-11A-6,7)。

**連結：**向量的線性組合 (G-11A-3)，空間中的直線方程式 (G-11A-10)。

## 基本說明

### 1. 學習目標

- (1) 理解平面的法向量觀念，並能利用法向量及平面上一點，寫出平面方程式的標準式。
- (2) 能利用平面法向量求出兩平面的夾角。
- (3) 能推論空間中點到平面的距離公式，並應用於解題。
- (4) 能寫出不共線三點所決定的平面方程式。
- (5) 理解兩位置向量的所有線性組合，形成一個通過原點的平面，並能寫出其方程式。

### 2. 教學斟酌

- (1) 建議從空間概念的法線定理引入法向量觀念。
- (2) 建議沿用十年級處理直線、二次與三次函數、圓方程式的「平移」方法，先聚焦於通過原點的平面，理解任何平面都平行於一張通過原點的平面。如果學過直線方程式，可討論通過原點的法線，然後平移到其他法線。
- (3) 兩個不平行的位置向量（有不共線三點），可以決定一個通過原點的平面，此觀念不僅連結線性組合，也呼應法線定理，而前述兩個位置向量的外積就提供了一個法向量。
- (4) 截距式是不共線三點決定一平面的特例，而且其方程式可對照平面上的直線截距式，可提醒學生注意兩者的類比性。

- (5) 利用法向量垂直平面上任一個向量推導出標準式，應強化學生能從標準式看出平面法向量的能力，並透過向量係數積的想法，提醒學生法向量並不唯一。
- (6) 應提醒學生，空間中的方程式  $ax + by = c$  不是  $xy$  平面上的直線，而是一張垂直於  $xy$  平面的平面；可類比於平面上的方程式  $x = a$  或  $y = b$ 。
- (7) 可連結平面上求直線夾角使用斜率與斜角正切值的觀念，讓學生體會到空間中因為沒有斜率定義，所以必須透過法向量解決夾角問題。此處可順便與空間中兩面角的幾何處理手法作比較。
- (8) 在十年級已經處理過平面上點到直線的距離，此時宜以相同（或可供類比）的思考方法，處理空間中點到平面的距離。
- (9) 若已經學過柯西不等式，可在點到平面的距離公式部分安排適當的題目，同時可使用柯西不等式及公式解題。
- (10) 使用計算機之後，可適度採用較為符合情境的法向量，而不必刻意湊數據。法向量長度、單位法向量、點到平面距離，以及兩平面夾角，都可使用計算機。

### 錯誤類型

1. 類推二維結論，認為  $3x + 2y - z = 2$  在空間中為直線方程式。
2. 誤以為  $3x + 2y = 2$  在空間中為一直線。
3. 誤以為  $x = 2$  在空間中為一直線。

<b>G-11A-10 空間中的直線方程式：</b> 空間中直線的參數式與比例式，直線與平面的關係，點到直線距離，兩平行或歪斜線的距離。	g-V-4 s-V-2
--	----------------

**先備：**直線方程式 (G-10-2)、法線定理 (S-11A-1)、向量的運算 (G-11A-6,7)。

**連結：**空間坐標系 (G-11A-2)、空間向量的運算 (G-11A-7)、平面方程式 (G-11A-9)。

### 基本說明

#### 1. 相關約定

- (1) 與直線平行的向量稱為直線的方向向量，通常以  $\vec{v}$  表之。
- (2) 若空間中直線與平面無交點，則直線與平面平行；若空間中直線與平面恰有一交點，則直線與平面相交；若空間中直線與平面有無限多個交點，則直線在平面上。
- (3) 點到直線距離、兩平行直線距離或兩歪斜線距離，指的都是最短距離，因此兩平行直線距離或兩歪斜線距離，都是公垂線與兩直線的交點距離。

#### 2. 學習目標

- (1) 了解空間中的直線，欲決定其方向時，因為有 3 個變量，所以無法沿用平面上的斜率的概念，而且沒有唯一確定的法向量，只能透過與直線平行的向量(方向向量)來決定其方向。
- (2) 透過一定點  $A$  與動點  $P(x, y, z)$ ，形成與方向向量平行的向量，而推導出空間中直線的參數式與比例式。
- (3) 透過圖形上的觀察，由空間中直線與平面的交點個數，定義直線與平面的位置關係，並可利用解聯立的方法以及向量的方向，分辨直線與平面的關係。
- (4) 了解距離為最短距離的概念後，垂直方向即為最短距離。因此空間中點到直線的最短距離，可透過直線上的動點與定點距離的最小值求得，或向量垂直內積為零的概念求得最短距離，而直線上的動點表示法即為直線的參數式。

(5) 能用兩直線的交點個數及方向，判定空間中兩直線的位置關係。

### 3. 教學斟酌

(1) 空間中直線的參數式講述方式，應讓學生體會到動點是走方向向量的  $t$  倍概念；而比例式中的比值即為參數式中的  $t$  值。

(2) 由空間中直線的參數式，可類比成平面上直線的參數式。

(3) 兩不平行的相異平面聯立 
$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + 3z = 5 \end{cases}$$
 即為兩平面的交線，欲求此交線時，可透過外積求得方向向量，以及任找皆在兩平面上的點；另外，也可透過加減消去法減少變數下求得直線參數式，不過需讓學生理解每次平面的加減運算後，交線上的點仍在運算後的方程式上。

(4) 在空間中，並非沒有交點的兩直線就是平行線，宜連結學生在九年級和十年級藉由長方體的稜邊而建立的兩直線平行、垂直、歪斜概念，並透過方向向量讓學生分辨平行與歪斜的不同。

(5) 空間兩平行直線的距離可轉化為點到直線的距離求得。

### 錯誤類型

1. 求空間中兩歪斜線  $L_1$ 、 $L_2$  的公垂線或兩直線的交點時，直線  $L_1$ 、 $L_2$  上點的參數假設皆習慣以  $t$  表示，但此時欲對這兩直線運算，動點並非同步的移動，因此需將其假設成不同的參數符號(例如： $s$  和  $t$ )。
2. 空間中兩直線沒有交點時，不一定是平行，得透過方向向量分辨平行直線與歪斜線的差異。另外，當兩直線方向向量平行時，也不一定代表兩直線平行，有可能是兩直線重合或者平行。

### 評量

1. 求兩歪斜線的公垂線參數式時，因為計算繁複，應盡量設計簡單的數字運算，以降低困難度。
2. 空間中的直線關係大多數為歪斜，不必做太多直線交點的問題。

<b>A-11A-1 二元一次方程組的矩陣表達：</b> 定義方陣符號及其乘以向量的線性組合意涵，克拉瑪公式，方程組唯一解、無窮多組解、無解的情況。	g-V-4 a-V-3
--	----------------

**先備：**二元一次聯立方程式的解法與應用(A-7-5)，二元一次聯立方程式的幾何意義(A-7-6)。

**連結：**平面向量(G-11A-1)，平面向量的運算(G-11A-6)，矩陣的運算(A-11A-3)。

**後續：**三元一次聯立方程式(A-11A-2)。

### 基本說明

#### 1. 與 99 課綱的差異

強調矩陣運算式的線性組合意涵，此外，以往克拉瑪公式偏重代數觀點，本課綱希望能以向量線性組合與平行四邊形面積切入，以便將來大學銜接線性代數的學習。

#### 2. 相關約定

(1) 二階方陣以方括號紀錄，例如  $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ 。

(2) 做方陣乘以向量的計算時，將向量改寫成方括號的「行矩陣」形式  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ 。



### 3. 學習目標

- (1) 認識方陣符號，能將二元一次方程組  $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$  寫成矩陣運算式

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} .$$

- (2) 能理解二元一次方程組  $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$  可以從向量觀點寫成  $(c_1, c_2) = x\bar{a} + y\bar{b}$  的線性組

合，其中  $\bar{a} = (a_1, a_2)$ 、 $\bar{b} = (b_1, b_2)$ 。據此理解：平面上任一向量皆可唯一表示成兩個互不平行非零向量之線性組合。

- (3) 能從線性組合的觀點，理解克拉瑪公式中， $x$ 、 $y$  值的大小分別為兩平行四邊形面積的比值。  
(4) 能從向量線性組合觀點解釋方程組唯一解、無窮多組解、無解的情況。

### 4. 教學斟酌

- (1) 在國中學生學到以加減消去法解二元一次方程組，在高中學到以矩陣列運算求解，學習了矩陣乘法之後可以利用反矩陣求解，本條目再從向量的幾何觀點引入克拉瑪公式，希望能讓學生對於向量的線性組合意涵有更深刻的理解，未來能在學習線性代數時，順利類比到更高維的向量空間。  
(2) 在教學的順序上，建議先由向量線性組合觀點，解釋方程式無解，與無窮多解的情況，然後在解釋唯一解時，以兩平行四邊形面積的比值即為  $x$ 、 $y$  值的大小，引入克拉瑪公式。  
(3) 教師可以從直線的斜率、直線的法向量與兩直線相交的狀況，與聯立方程組解的關係做連結。  
(4) 應同時透過幾何及代數方法介紹平面上任一向量皆可唯一表示成兩個互不平行非零向量之線性組合。在幾何部分，可藉此熟練向量加、減法的圖形概念與係數積是向量的伸縮概念，在代數部分，可藉此連結線性組合與聯立方程組間的關係。此處應讓學生理解給定向量的分解並不唯一，選定的分解對象不同，分解結果就會不同，連結到代數運算時，可挑選以  $(1,0)$ 、 $(0,1)$  為分解對象及其他的向量為分解對象做比較。  
(5) 建議在此條目之教學時，暫時不必將「行矩陣」推廣為「 $2 \times 1$  矩陣」。矩陣的一般性階數，留到「矩陣」單元再談 (A-11A-3)。

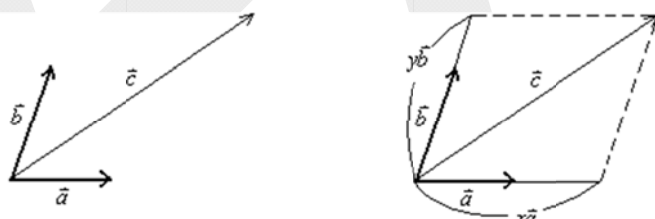
### 釋例

克拉瑪公式也可以使用線性組合、兩向量決定的平行四邊形面積比推得，老師可以斟酌補充，釋例如下。

當克拉瑪之判別式不為 0 時（係數行列式不為 0），例如方程組  $\begin{cases} 3x - 2y = 3 \\ 5x + 4y = 16 \end{cases}$ 。首先  $\bar{a} = (3, 5)$ 、 $\bar{b} = (-2, 4)$ 、 $\bar{c} = (3, 16)$ ，則方程組可以改寫成  $x\bar{a} + y\bar{b} = \bar{c}$ ，亦即

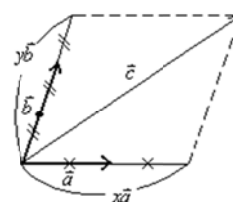
$$x \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 16 \end{bmatrix} \text{ 或 } x(3,5) + y(-2,4) = (3,16) \text{。也就是把 } \vec{c} \text{ 寫成「 } \vec{a} \text{ 與 } \vec{b} \text{ 的線性組合」。}$$

再換句話說，我們將  $\vec{a}$  與  $\vec{b}$  當作基礎的向量，把給定的一個  $\vec{c}$  拆解成  $\vec{a}$  與  $\vec{b}$  的「成分」，而  $x$ 、 $y$  只是  $\vec{a}$  與  $\vec{b}$  的比重而已，如下圖。

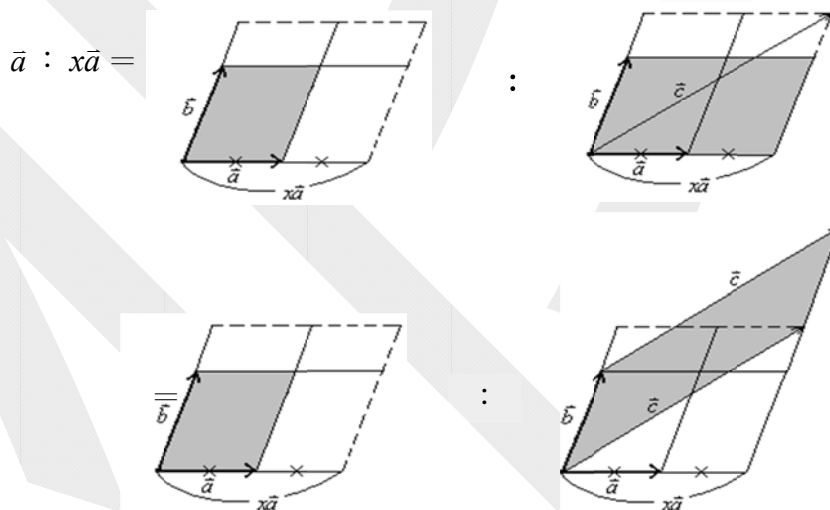


如果我們可以看出  $x\vec{a}$  是  $\vec{a}$  的兩倍，那麼  $x$  當然就是 2；

同樣地，如果  $y\vec{b}$  是  $\vec{b}$  的  $\frac{3}{2}$  倍， $y$  就是  $\frac{3}{2}$ 。



而我們又要怎麼知道  $x\vec{a}$  與  $\vec{a}$  的比例關係呢？我們可以用面積關係來轉換：



可見

$\vec{a} : x\vec{a} =$  「 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  所張出的平行四邊形面積」：「 $\vec{c}$ 、 $\vec{b}$  所張出的平行四邊形面積」

而在代數上， $\vec{a} : x\vec{a} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$

進而知道  $x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} =$

從前面的討論，知道克拉瑪判別式不為 0 的意思就是係數向量  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  不平行，故它們可以決定一個（面積不為 0 的）平行四邊形。如果判別式為 0，意思就是  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ （我們假設  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  皆為非零向量）。此時，如果  $\vec{a} \parallel \vec{c}$ ，也就是  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$  互為平行向量，則方程組有解，而且教師可以展示它有無窮多組解（當  $\vec{c} = \vec{0}$  時也可以推論同樣結論）。如果  $\vec{a} \parallel \vec{b}$  但是  $\vec{c}$  不跟它們平行，則線性組合  $x\vec{a} + y\vec{b}$  只能形成一條直線，但  $\vec{c}$  不在那條直線上，所以無解。

<b>A-11A-2 三元一次聯立方程式：</b> 以消去法求解，改以方陣表達。用電腦求解多元一次方程組的觀念與示範。	g-V-4 a-V-3
---	----------------

**先備：**二元一次聯立方程式（A-7-2,3,4,5,6，A-11A-1）。

**連結：**矩陣的運算（A-11A-3），平面方程式（G-11A-9）。

### 基本說明

#### 1. 與 99 課綱的差異

以消去法求解三元一次聯立方程式的程序，以及其解的三種情況（唯一、不存在、無窮多）之概念理解，這兩項核心課題，與 99 課綱相同。但是新課綱不講述三階克拉瑪公式的解法，所以不強調此條目與三階行列式的連結。新課綱也不強調以三平面的關係來解釋「解」的三種情況，而希望以三向量的線性組合意涵來解釋那三種情況。最後，新課綱希望讓學生認識更多元的方程組，以及求解的資訊工具。

#### 2. 相關約定

(1) 「方程組」是「聯立方程式」的同義詞。

(2) 三階方陣以方括號紀錄，例如  $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ 。

(3) 做方陣乘以向量的計算時，將向量改寫成方括號的「行矩陣」形式  $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ 。

#### 3. 學習目標

(1) 理解插值多項式的意涵，並作為產生三元一次聯立方程式的動機之一。

(2) 認識三元一次聯立方程式的意義，理解其「解」的意義，知道如何做「解」的驗算。

(3) 對照二元一次聯立方程式，理解同樣有代入與消去兩大類的求解方法，其中代入法相當於「降階」，但因為消去法可以發展出一般性的演算法，所以我們偏重於消去法。

(4) 認識「增廣矩陣」的價值在於分離係數，並能用以操作高斯消去法，寫出方程組的解，或者判定無解或非唯一解；理解方程組的解若不唯一，則有無窮多組。

(5) 從二元、三元方程組，經類比而認識更多元的方程組，並知道宜以資訊工具求這些方程組的解，也知道如何驗算其解。

#### 4. 教學斟酌

(1) 可以用三平面的幾何關係，來解釋「解的三種情況」：不存在、唯一、不止一組（則必有無窮多組）。但請勿過度強調三平面幾何關係的代數判定，宜類比於二元一次方程組的線性組合意涵，用線性組合來解釋「解的三種情況」，建立一致性的概念心像。

- (2) 教師應明白高斯消去法可能遇到需要 pivoting 的情況（意思是：消去法的某個步驟，遇到對角線元素為 0，必須先將該列與下方的某列交換，才能繼續進行消去步驟），否則雖然方程組有唯一解卻無法繼續執行消去程序。但是，不必教導這個細節，只要在練習與評量的時候，避免命題發生需要 pivoting 的狀況即可。
- (3) 未必需要以增廣矩陣操作反方陣，所以不需要將高斯消去法程序之後的矩陣，化為單位方陣。
- (4) 求解多元一次方程組的程序，並非計算機 (Calculator) 的適用範圍，教師宜以學生容易合法取得的資訊工具，示範其求解的程序，並做驗算的示範。
- (5) 可在觀念上推廣到更多未知數的一次聯立方程式，說明高階方程組用電腦求解，並應以方便取得的資訊工具電腦軟體示範之。
- (6) 建議將「矩陣的運算」條目內容 (A-11A-3)，放在本條目之後。因此，在本條目教學時，暫時不必將「行矩陣」推廣為「 $3 \times 1$  矩陣」。矩陣的一般性階數，留到「矩陣」單元再談。

### 條目範圍

1. 不談高斯消去法的 pivot 操作，在練習與評量的時候，避免命題發生需要 pivoting 的狀況即可。
2. 以高斯消去法做增廣矩陣至上三角形即可，不必將對角線元素化為 1，也不必做反向消去獲得對角線形式。
3. 高斯消去法之增廣矩陣不延伸至方陣之 rank 觀念。
4. 本條目不含關於「線性獨立」之課題。

### 錯誤類型

1. 學生容易忽略「無唯一解」其實又分為兩種狀況，或者「有解」也分為兩種狀況。
2. 即使是「退化」的插值問題（例如以共線三點或水平三點，求二次插值多項式函數），轉換成聯立方程式之後，仍有唯一解，而非無解或無窮多組解的狀況。
3. 學生誤以為（類似二元一次時）三元一次聯立方程式的無唯一解情況，必發生在兩組係數成比例時。所以，當學生觀察三組係數互不成比例時，就誤認為必有唯一解。

### 釋例

1. 以（相異）三點  $(x_1, y_1)$ 、 $(x_2, y_2)$ 、 $(x_3, y_3)$  決定（最高）二次多項式函數  $y = ax^2 + bx + c$ ，可造成以  $a$ 、 $b$ 、 $c$  為未知數的三元一次聯立方程式。
2. 類比於高斯消去法完成之後的「倒退代入求解」程序，連帶介紹牛頓插值多項式，並理解（對同樣一組插值點）用不同方法得到的插值多項式，是同一個多項式函數。
3. 當學生難以想像空間向量之間的關係時，可適度以類比的方式，用平面向量之線性組合意涵，解釋方程組的唯一解、無窮多組解、無解三種情況；可以探討三個空間向量共面的情況，而不延伸出線性獨立之相關課題。例如用下面的觀點說明之。

$$\text{若將方程組 } \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \text{ 寫成 } \vec{x}\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{d}, \text{ 其中 } \vec{a} = (a_1, a_2, a_3),$$

$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 、 $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ 、 $\vec{d} = (d_1, d_2, d_3)$ ，則方程組的意義為：

求做由  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$  得到  $\vec{d}$  之線性組合的係數。

以下，我們排除  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$  為  $\vec{0}$  的情況，假設  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$  皆為非零向量。

當行列式  $\Delta = \begin{vmatrix} \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \end{vmatrix} \neq 0$ ，則  $\bar{a}$ 、 $\bar{b}$ 、 $\bar{c}$  決定一個平行六面體。類比於 A-11A-1 條目對二元一次方程組的線性組合解釋，讓學生相信此時必有唯一解。令高斯消去法做完之後的方程組為  $x\bar{A} + y\bar{B} + z\bar{C} = \bar{D}$ ，則  $\Delta \neq 0$  的情形，就是  $\bar{A} = (\bullet, 0, 0)$ 、 $\bar{B} = (*, \bullet, 0)$ 、 $\bar{C} = (*, *, \bullet)$  的情形，其中  $\bullet$  表示任意一個非 0 的數，而  $*$  表示任意數。

如果  $\Delta = 0$ ，就知道由  $\bar{a}$ 、 $\bar{b}$ 、 $\bar{c}$  決定的平行六面體體積為 0，此時有以下兩大類的情況。

一、向量  $\bar{a}$ 、 $\bar{b}$ 、 $\bar{c}$  互相平行，也就是  $\bar{a} = \beta\bar{b} = \gamma\bar{c}$  或者  $\bar{A} = (\bullet, 0, 0)$ 、 $\bar{B} = (\bullet, 0, 0)$ 、 $\bar{C} = (\bullet, 0, 0)$  的情形。此時，向量  $\bar{a}$ 、 $\bar{b}$ 、 $\bar{c}$  的所有線性組合，僅能形成一條直線，稱它為  $L$ 。如果  $\bar{d}$  不平行於  $L$ ，則方程組無解；如果  $\bar{d}$  平行於  $L$ ，也就是  $\bar{D} = (*, 0, 0)$ ，則方程組有解，但是此時有無窮多組解。詳情請教師自行引導。

二、向量  $\bar{a}$ 、 $\bar{b}$ 、 $\bar{c}$  雖然不完全互相平行，但是其中一個是另外兩個的線性組合（請教師適度解釋細節，並獲得一般性的概念），或者  $\bar{A} = (\bullet, 0, 0)$ 、 $\bar{B} = (\bullet, *, 0)$ 、 $\bar{C} = (\bullet, \bullet, 0)$ 。此時，向量  $\bar{a}$ 、 $\bar{b}$ 、 $\bar{c}$  的所有線性組合，僅能形成一個平面，稱它為  $P$ 。若向量  $\bar{d}$  不平行於  $P$ ，則  $\bar{d}$  不可能是  $\bar{a}$ 、 $\bar{b}$ 、 $\bar{c}$  的線性組合，所以方程組無解；如果  $\bar{d}$  平行於  $P$ ，也就是  $\bar{D} = (*, *, 0)$ ，則方程組有解，但是此時有無窮多組解。

## 評量

1. 更多未知數的多元一次聯立方程式，僅作概念上的介紹，並示範以資訊工具（電腦軟體）求解，不必列入評量範圍。
2. 無須直接評量三平面幾何關係的代數判定。

**A-11A-3 矩陣的運算：**矩陣的定義，矩陣的係數積與加減運算，矩陣相乘，反方陣。將矩陣視為資料表，用電腦做矩陣運算的觀念與示範。

a-V-3

**連結：**方陣乘以向量的線性組合意涵（A-11A-1、A-11A-2），矩陣的應用（F-11A-3）。

## 基本說明

1. 與 99 課綱的差異  
本課綱新增「將矩陣視為資料表」。
2. 相關約定

(1) 矩陣以方括號紀錄，例如  $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix}$ ，其中  $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$  稱為矩陣的第 1 行，其右（如果存在）依

序稱為第 2 行、第 3 行...；而  $[a_1 \quad b_1]$  稱為矩陣的第 1 列，其下（如果存在）依序稱為第 2 列、第 3 列...。

- (2) 每行  $m$  個數、一共有  $n$  行的矩陣，稱為  $m \times n$  階矩陣（讀作  $m$  乘  $n$  階），其中  $m$ 、 $n$  為正整數。方陣是當  $m = n$  時的矩陣特例， $n \times n$  階矩陣稱為  $n$  階方陣。
- (3) 用兩個正整數  $i$ 、 $j$  的有序對  $[i, j]$  指稱矩陣內第  $i$  列、第  $j$  行的位置，其中  $1 \leq i \leq m$ 、 $1 \leq j \leq n$ ，而  $m \times n$  是矩陣的階數。矩陣的一般性表達法為  $A = [a_{ij}]$ ，其中  $a_{ij}$  表示矩陣  $A$  在  $[i, j]$  位置的元 (element)。
- (4) 當  $A$  是二階或三階方陣，可用  $\det A$  表示它的行列式，故  $|\det A|$  是其行列式的絕對值。

- (5) 矩陣  $A$  的第一行可以記作  $A_1$ ，依此類推  $A_j$  表示第  $j$  行。
- (6) 每一個元都是 0 的矩陣，稱為零矩陣，通常記作  $O$  或  $O_{m \times n}$ 。
- (7) 令  $A = [a_{ij}]$  為一個  $n$  階方陣，則  $a_{11}$ 、 $a_{22}$ 、...、 $a_{nn}$  稱為  $A$  的對角線元。
- (8) 對角線元皆為 1，其他元皆為 0 的  $n$  階方陣，稱為  $n$  階單位方陣，通常記作  $I_n$  或者  $I$ 。
- (9) 如果方陣  $A$  存在反方陣，則稱  $A$  為可逆方陣，其反方陣記作  $A^{-1}$ 。

### 3. 學習目標

- (1) 能了解矩陣的符號、階數的定義，並能指稱矩陣的行、列和元的位置。
- (2) 能操作矩陣的加法、減法及係數積的運算。
- (3) 能操作矩陣相乘的運算，並與線性組合連結。
- (4) 能算出二階方陣的反方陣。

### 4. 教學斟酌

- (1) 如果已經先安排了 A-11A-1 和 A-11A-2 的條目內容，建議將矩陣視為方陣的一般化，並先將方陣乘以向量的運算，推廣到矩陣乘以行矩陣的運算，以便合理說明矩陣乘法的階數搭配原理。然後將  $A$ 、 $B$  兩個矩陣的乘法運算  $AB$ ，理解為  $A$  分別乘以  $B$  的第一行、第二行、...
- (2) 有關矩陣的定義建議從情境問題中引入，強調矩陣作為簡化問題工具的角色，並藉此將矩陣作為資料表使用，賦予矩陣加減法及係數積的具體功能，而不僅只是數字操作。
- (3) 有關矩陣乘法之結合律、分配律及「不可交換」律的介紹，宜從從情境中出發，特別注意連結二元一次聯立方程式的經驗，讓學生感受其是否成立，避免純代數運算的驗證。
- (4) 建議將二階反方陣與求解二元一次聯立方程式做連結，更進一步可以作為平面上的線性變換的基礎概念。
- (5) 可以在概念上探討任意階的反方陣，但若要確切算出反方陣，則僅限 2 階。
- (6) 本條目的運算可透過電腦輔助方式(如 EXCEL)，讓學生實際從電腦表單中操作數據的變化，強化學生對於矩陣為資料表的心像。
- (7) 本條目雖然沒提到矩陣的轉置運算，但是可以在合理的情境裡介紹此觀念。但不宜在沒有脈絡的題目裡操作轉置。

### 條目範圍

不含三階以上的反方陣計算。

### 評量

請掌握矩陣的學習目標，在評量中彰顯矩陣的用途，勿過度與其他單元做連結，例如勿刻意求矩陣各元之和，也不要將矩陣相等的概念性問題轉換成複雜的聯立方程式問題。

<b>A-11A-4 對數律：</b> 從 $10^x$ 及指數律認識 $\log$ 的對數律，其基本應用，並用於求解指數方程式。	a-V-1 n-V-2
---	----------------

先備：常用對數 (N-10-4)。

連結：指數與對數函數 (F-11A-4)。

### 基本說明

## 1. 與 99 課綱的差異

十年級已講述過以 10 為底的常用對數，學生學習對數的經驗，和以往迥然不同。在此希望透過解指數方程式的需要，理解即使底數不為 10，仍可以用對數表示其解。且本條目仍需使用計算機融入課程，學習目標不含查表。

## 2. 相關約定

- (1) 給定任意  $0 < a \neq 1$ ，則任意正數  $x$  皆可改寫成  $x = a^{\log_a x}$ 。相對於  $\log x$  稱為  $x$  的對數，現在  $\log_a x$  稱為以  $a$  為底  $x$  的對數；此外，在  $\log_a x$  中，稱  $a$  為底數， $x$  為真數。
- (2) 常用對數  $\log x = \log_{10} x$ 。

## 3. 學習目標

- (1) 將  $x = 10^{\log x}$  推廣到  $x = a^{\log_a x}$ ，其中  $0 < a \neq 1, x > 0$ 。
- (2) 透過指數律認識對數律，並利用對數律解決對數相關問題。
- (3) 能用對數律解指數方程式。

## 4. 教學斟酌

(1) 適當的複習十年級中底數為 10 的對數運算。

- 例如：當最後解到  $10^x = 3 \Rightarrow x = \log 3$ ，此時利用計算機求  $\log 3$  的近似值。

(2) 沿用十年級所學的  $x = 10^{\log x}$ ，其中  $x > 0$ ，則對數律其實都是指數律的另一個形式。

- 例如：對任意正數  $x$  和  $y$ ，則  $xy = 10^{\log xy}$ ，  
而另一方面  $xy = 10^{\log x} \cdot 10^{\log y} = 10^{\log x + \log y}$ ，  
比較 10 的指數部分，得到  $\log xy = \log x + \log y$ 。

以上論述可以把底數 10 換成任意  $a$ ，其中  $0 < a \neq 1$ 。

(3) 對數的引入，可搭配解指數方程式的過程，對於解底數不是 10 的指數方程式，也可透過將底數皆換成底數 10 來解之。

- 例如： $2^x = 3 \Rightarrow (10^{\log 2})^x = 10^{\log 3} \Rightarrow x \cdot \log 2 = \log 3 \Rightarrow x = \frac{\log 3}{\log 2}$

以前，如果先定義  $\log_2 3$  再導出像  $\log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2}$  這樣的關係稱為「換底公式」。但是如果

沿用上述的脈絡，其實這樣的關係是  $\log_2 3$  的定義，亦即  $\frac{\log 3}{\log 2} =: \log_2 3$ 。

(4) 「換底公式」的意義就是「對數的底並不重要」，而「換底公式」的教學目標是：理解對數可以使用「任意底」 $0 < a \neq 1$ ，但是任意底皆可換成一組方便的標準底。以目前的國際慣例而言，存在三個常用的標準底：10、 $e$ 、2。學生使用的計算機上，可能已經提供以 10 和  $e$  為底的兩種對數，學生應能運用這些功能計算任意底的對數值。計算機上不存在「任意底」的對數按鍵，足以表示「任意底」的對數並不重要，勿過度強調它。

## 釋例

複雜的指數方程式除了善用以 10 為底的對數概念外，也應設計搭配計算器的問題。例如求解  $2^{10^x} = 10^6$  等價於  $(10^{\log 2})^{10^x} = 10^6$ ，比較指數得到  $\log 2 \cdot 10^x = 6$ ，亦即  $10^x = \frac{6}{\log 2}$ ，

再搭配計算機求得  $x = \log\left(\frac{6}{\log 2}\right)$  的近似值。

## 錯誤類型

1. 學生對於對數律的了解不夠透徹時，易有誤用情形。

例如：誤以為  $\log(a+b) = (\log a)(\log b)$ 。

2. 解  $5^{100}$  展開後之整數部分為幾位數？其最高位數字為何？這類問題時，學生若採用取  $\log$  的策略時，最後求出  $\log 5^{100}$  的值後，會誤以為就是  $5^{100}$  的值，或是首數的值與最高位數的連結不易了解。建議這類型的題目可改換為以 10 為底的指數，並搭配計算機解之。

### 評量

1. 過度操作對數律的對數問題不適合做為評量主要概念

例如： $9^{\log_3 2} + 2^{-\log_4 9} - 5^{\frac{\log 2}{\log 5}}$ 。

2. 首數尾數相關問題，重點在於與科學記號相呼應，不應過度操作下列衍伸問題。
- 例如此題不宜：設  $1 < x < 100$ ，且  $\log 4x$  之尾數為  $\log x$  之尾數的 3 倍，求  $x$ 。

<b>F-11A-1 三角函數的圖形：</b> $\sin, \cos, \tan$ 函數的圖形、定義域、值域、週期性，週期現象的數學模型。(cot, sec, csc 之定義與圖形※)	f-V-3 n-V-7 g-V-2
---	-------------------------

先備：廣義三角比 (G-10-6)。

連結：弧度量 (N-11A-1)、正餘弦的疊合 (F-11A-2)。

後續：函數 (F-12甲/乙-1)

### 基本說明

1. 與 99 課綱的差異

99 課綱將本條目放在十二年級，本課綱移至十一年級 A 版，但是將 cot, sec, csc 列為進階教材，建議全國性考試不列入範圍。

2. 相關約定

(1) 探討三角函數（而不是三角比）時，自變量一律以弧度為單位。

(2) 平移與伸縮變化的正弦函數  $B + A\sin(\omega x + \phi)$  又稱為正弦波 (sinusoidal wave)， $B$  稱為基準值或基線 (baseline)， $A$  稱為振幅， $T = \frac{2\pi}{\omega}$  稱為週期， $\phi$  稱為相位角。

3. 學習目標

(1) 能正確描繪出  $\sin, \cos, \tan$  三個函數圖形，且知道其定義域與值域。

(2) 了解三角函數圖形的重要特徵：週期、振幅、對稱性。

(3) 能用計算機做弧度量的三角函數值。

(4) 能透過水平與鉛直平移、水平與鉛直伸縮，來變化三角函數的圖形，並理解它們對應的意涵：相位角、基準值、週期、振幅。

(5) 能利用三角函數圖形求方程式與不等式的解。

(6) 認識週期性現象，並能用正弦函數的伸縮平移  $B + A\sin(\omega x + \phi)$ ，也就是正弦波，作為該現象的數學模型。

4. 教學斟酌

(1) 在十年級雖然有多項式函數，但是因為沒有其他函數的參照，所以沒有提及它們的定義域與值域。在 11A 課程中，宜以多項式函數、三角函數與指對數函數彼此參照，並利用它們為具體範例，講解函數圖形（相對於方程式圖形）的特徵：例如利用繪製鉛直線檢定，以及定義域和值域的觀念；一般性的函數觀念，則待 F-12 甲/乙-1 再講。



- (2) 課綱建議「方格紙、計算機」作為本條目之教具，是希望學生能有親手描繪  $\sin$ 、 $\cos$ 、 $\tan$  函數圖形的經驗。此外，推薦使用透明描圖紙，讓學生有機會實際觀察  $\sin$  與  $\cos$  圖形的對稱和平移關係。
- (3) 建議在學生操作描點法繪製函數圖形之後，以數學軟體繪製圖形，輔助學生理解三角函數圖形是平滑的曲線，也用來觀察圖形經平移及伸縮後的變化。
- (4) 因為餘弦函數是正弦函數的特殊相位，所以不必討論以餘弦函數作為模型的週期性現象。
- (5) 斟酌學生的學習狀況與需求，在此可以暫時不講  $\cot$ ,  $\sec$ ,  $\csc$ 。

### 釋例

1. 參照圓的方程式，帶領學生從函數的對應關係，理解函數圖形與方程式圖形的差異，進而理解  $y = f(x)$  之函數圖形，與任一條鉛直線最多僅能有一個交點。
2. 參照多項式函數，正、餘弦函數的定義域像它們一樣，為全部實數（整條  $x$  軸），但是正切函數的定義域則不一樣。如果先學過指對數函數，也參照它們的定義域。
3. 值域的教學，宜先連結多項式函數的舊經驗：一次和三次函數的值域為全部實數（整條  $y$  軸），但二次函數則否；可見函數的值域未必是全部實數。在對照之下，凸顯正弦與餘弦函數值域的特殊性：它們是閉區間。如果先學過指對數函數，也參照它們的值域。
4. 在坐標平面上觀察函數的週期性，是很直觀的。但是生活中也常使用「頻率」，教材與教師可透過生活中的實例，引導學生連結週期與頻率的意義。原則上，當自變數（坐標的橫軸）表示時間，則  $f = \frac{1}{T}$  即為頻率。
5. 函數平移的習慣符號是「減」平移量，例如  $f(x-h)$ ，但是正弦波的習慣符號，卻是「加」相位角  $\sin(\omega x + \phi)$ 。這個習慣上的差異，是因為相位角的意義並不強調平移，而是指定一個波的「起始相位」：當時間  $x=0$  時，波的位置相當於角  $\phi$  的正弦值。如果連結相位角與函數平移的觀念，還要留意波形的平移單位數，並不僅是相位角  $\phi$ ，也受到  $\omega$  的影響。
6. 透過實際操作或以電腦演示，讓學生體認：如果橫軸和縱軸的單位長相同，則弧度制單位的三角函數圖形比角度制的圖形「好看」得多。如果縮短橫軸的單位長，固然可以讓角度制的三角函數圖形變得好看，但是曲線的「切線斜率」就失真了；事實上，在單位長不相等的坐標平面上，「切線斜率」失去了經驗的連結。這就是數學選擇三角函數的自變數採用弧度制的理由。

### 錯誤類型

1. 學生會誤以為正弦函數是由一些半圓弧連接而成。
2. 正弦函數與餘弦函數的圖形互為平移，學生易混淆。

### 評量

1. 本單元的三角方程式與不等式，限於使用三角函數圖形即可解出的，勿過於複雜。提醒：可以利用計算機的三角或反三角按鍵。
2. 可以利用三角方程式的有解或無解，連結三角函數的值域觀念。
3. 高二時的評量，應避免合成函數型態試題，例如以下試題不宜：  
 函數  $f(x) = 3\sin^2 x - 5\sin x + 1$ ，則 (1)  $f(x)$  的最大值與最小值各為多少？(2) 在  $0 \leq x < 2\pi$  的範圍內，解不等式  $f(x) \geq 0$ 。

**F-11A-2 正餘弦的疊合：**同頻波疊合後的頻率、振幅。

f-V-3  
s-V-1

**先備：**廣義的三角比 (G-10-6)。

**連結：**三角的和差公式 (G-11A-5)，三角函數的圖形 (F-11A-1)。

### 基本說明

#### 1. 與 99 課綱的差異

本條目 99 課綱中是在十二年級，本課綱將三角函數的圖形與正餘弦的疊合移到 11 年級，讓三角函數的學習在十一年級能完整學習。

#### 2. 學習目標

- (1) 理解  $f$  和  $g$  兩個函數圖形的疊合，等同於  $f + g$  的函數圖形。應用於正、餘弦函數，則是正弦波和餘弦波的疊合。
- (2) 理解一個正弦波和一個同頻率餘弦波的和，是一個同頻率的正弦波（但振幅或相位角可能不同）。
- (3) 理解餘弦波是（同頻率）正弦波의 平移，所以兩個同頻率正弦波的和仍是同頻率正弦波。

#### 3. 教學斟酌

- (1) 課綱建議「方格紙、計算機」作為本條目之教具，是希望學生能有親手描繪正餘弦疊合圖形的經驗。此外，推薦使用透明描圖紙，讓學生有機會實際操作兩函數的「疊合」並有機會觀察正弦波的「相位」。
- (2) 運用和角公式，含相位角的正弦波  $\sin(\omega x + \phi)$  可以轉換成無相位差（相位角為 0）的正餘弦疊合；而本條目的主題，是前述轉換的逆運算。
- (3) 相位角的意義可以是數學上的函數圖形平移，但是工程和物理上的看法比較直接：它就是指此波的起始角，亦即當  $x = 0$  時，波的位置（相位）是  $\sin \phi$ 。
- (4) 可運用數學歸納法，說明將任意（有限）多個同頻正弦波的疊合，仍然是一個同頻率的正弦波。

### 條目範圍

1. 本條目不討論不同頻率的正弦波疊合。
2. 本條目不討論波速，所以也沒有波長。

### 錯誤類型

1. 當正弦波  $A\sin(\omega x + \phi)$  的角頻率  $\omega \neq 1$  時，波形的平移單位數，並不是相位角  $\phi$ ；這雖然是函數圖形之伸縮平移的基本知識，但是學生經常忽略。例如學生無法分辨  $\sin(2x + \frac{\pi}{3})$  與  $\sin 2(x + \frac{\pi}{3})$  的差異。
2. 學生常忽略限定範圍內的極值問題，例如：試求函數  $y = 2\sqrt{3}\sin x - 2\cos x + 1$  在  $0 \leq x \leq \pi$  範圍內的最大值與最小值，忽略了自變數限定在  $0 \leq x \leq \pi$ 。

### 評量

不必過度評量疊合之後的極大值和極小值，也不要過度評量從三角函數合成出來的極大值

和極小值，因為它們都不是本條目的學習目標。例如不宜求函數  $f(x) = \frac{1 - 6\sin x}{3 + \cos x}$  的最大值。

<b>F-11A-3 矩陣的應用：</b> 平面上的線性變換，二階轉移方陣。	f-V-5 a-V-3
--	----------------

**先備：**廣義角三角比 (G-10-6、G-10-7)，圖形的對稱 (G-10-1)。

**連結：**矩陣相乘 (A-11A-3)，平面向量的線性組合 (G-11A-3)，事件的獨立性 (D-11A-2)。

### 基本說明

#### 1. 與 99 課綱的差異

99 課綱原本有三階轉移方陣，微調之後改限二階。本課綱維持二階轉移方陣的原則。但 99 課綱在十年級安排獨立事件之機率課程，故十一年級必然已經具備學習轉移矩陣先備知識，可是本課綱將獨立事件與轉移方陣都安排在十一年級，教材須留意兩個課題的前後關係。

#### 2. 學習目標

- (1) 理解平面上的四種線性變換：鏡射、旋轉、推移及伸縮。
- (2) 能求出平面上的四種線性變換所對應的矩陣。
- (3) 理解平面上的四種線性變換對於圖形面積的影響。
- (4) 理解轉移方陣的定義。
- (5) 能操作轉移方陣解決情境問題。

#### 3. 教學斟酌

- (1) 建議可連結平面上向量的線性組合觀念，將圖形上的每個點視為從原點出發的一個向量，此向量必可以坐標平面上的 2 個基底向量(1,0)、(0,1)進行線性組合，則平面上的四種線性變換就相當於將原基底(1,0)、(0,1)轉換成為四種不同的矩陣。透過將向量以基底進行分解，再將平面變換對應到基底的轉換，可讓學生對於平面變換所對應的矩陣更加有所感覺，而且對於平面變換所造成的面積影響也能一併說明。
- (2) 此處可選取或設計適當的數學軟體（如 GGB），讓學生調整二階方陣的各元數值，觀察其對應的圖形變化，並透過矩陣乘法連結解二元一次方程式，讓學生能實際算出二階方陣的變換結果。
- (3) 對於適當的學生，可嘗試解釋任意二階方陣皆可定義一個線性變換，而它們可以視為把平面上的點映射到另一點的函數。方陣相乘  $AB = C$  的意義，是依序用  $B$  和  $A$  做線性變換的結果，等於用  $C$  做一次線性變換。這可以推論：依序做任意多個線性變換的結果，仍然是一個線性變換。
- (4) 介紹轉移矩陣的定義之前，必須先有獨立事件的機率觀念，明白獨立的重複試驗之機率算法。所以，如果教材先安排矩陣課程，則宜將轉移方陣延後至機率的章節，當作矩陣的連結與應用。關於轉移矩陣的乘法結果仍為轉移矩陣，亦可透過各事件機率和為 1 的結果，讓學生有所體驗。
- (5) 注意在轉移方陣的主題裡，也可以綜合運用古典、主觀和客觀機率。

- (6) 可利用樹狀圖條列方式協助學生將情境問題的條件轉化成轉移矩陣，再利用轉移矩陣進行解題，但因高中並未教授馬可夫鏈相關問題，也還沒有正式介紹極限觀念，所以不宜涉及穩定狀態之求解。

### 條目範圍

1. 不含三階以上的轉移矩陣及相關問題。
2. 不含有關穩定狀態的轉移矩陣問題。
3. 不含任意變換可分解為四個基本變化的合成。

### 釋例

對適當的學生，可以解釋線性變換之所以被稱為「線性」，乃至於線性組合之所以被稱為「線性」，是因為這種變換「保持直線」：它們把直線映成直線（假設變換的方陣為可逆方陣）。說明的方式之一如下。

由於直線可由點及方向向量組成，而點經過矩陣變換亦為點，向量經過矩陣變換亦為向量（將點視為位置向量），可將直線  $L$  以參數式  $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$  表示，其中  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  且  $t \in \mathbb{R}$ ，

即  $L$  上任一點  $(x, y)$  可表示為  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ 。經過方陣  $A$  的變換為

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A \left( \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right) = A \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + tA \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_0 \\ y'_0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix}$$

其中  $\begin{bmatrix} x'_0 \\ y'_0 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ 、 $\begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ 。假設  $A$  為可逆方陣，則  $\begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ，所以方陣  $A$  把直

線  $L$  變換成另一直線  $L'$ 。

### 錯誤類型

平面變換的順序會造成結果不同，例如：先對直線： $x + y = 1$  以原點為中心旋轉  $30^\circ$ ，再

以  $x$  軸為對稱軸做鏡射，應寫成： $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ 1-t \end{bmatrix}$ ，而不是

$$\begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ 1-t \end{bmatrix}。$$

### 評量

轉移矩陣的穩定狀態其實就是特徵向量問題；本條目不含穩定狀態，當然也不引伸到特徵值和特徵向量，請勿評量這些關於方陣的課題。

<b>F-11A-4 指數與對數函數：</b> 指數函數及其圖形，按比例成長或衰退的數學模型，常用對數函數的圖形，在科學和金融上的應用。	f-V-4 g-V-2
--	----------------

先備：常用對數 (N-10-4)。

連結：對數律 (A-11A-4)。

後續：函數 (F-12甲-1)、微分 (F-12甲-3)

基本說明

### 1. 與 99 課綱的差異

因為計算機的引入，對數查表不再是學習目標。

### 2. 相關約定

(1)  $f(x) = a^x$  稱為以  $a$  為底的指數函數，其中  $0 < a \neq 1$ 。

(2)  $y = f(x) = \log_a x$  稱為以  $a$  為底的對數函數，其中  $0 < a \neq 1$ 。

### 3. 學習目標

(1) 定義指數函數、對數函數，並說明兩函數的底數限制。

(2) 學習指數函數與對數函數的圖形。

(3) 能了解指數函數與對數函數圖形中遞增、遞減與底數的關係、以及透過觀察圖形，能直觀了解圖形的漸近線、凹向性。

(4) 給定  $a, 0 < a \neq 1$ ，將指數函數  $y = a^x$  與對數函數  $y = \log_a x$  的圖形繪在同一坐標平面上，觀察兩者對稱於直線  $y = x$ ，讓學生了解兩函數圖形點  $(x, y) \leftrightarrow (y, x)$  的互換關係。

(5) 給定任意兩個數  $a, b, 0 < a \neq 1$  和  $0 < b \neq 1$ ，不僅對數函數可以換底： $\log_a x = \frac{1}{\log_b a} \log_b x$ ，

指數函數也可以換底： $a^x = b^{kx}$ ，其中係數  $k = \log_b a$ 。

(6) 讓學生了解指數函數、對數函數在科學和金融上的應用。

### 4. 教學斟酌

(1) 指數函數與對數函數的學習，應搭配方格紙、計算機，先透過描點繪圖認識指數函數與對數函數在局部範圍內的圖形，再使用輔助軟體觀察指數函數與對數函數的完整圖形。此外，推薦使用透明描圖紙，讓學生有機會實際觀察指數函數與（同底）對數函數的對稱情形。

(2) 在十年級雖然有多項式函數，但是因為沒有其他函數的參照，所以沒有提及它們的定義域與值域。在 11A 課程中，宜以多項式函數、三角函數與指對數函數彼此參照，並利用它們為具體範例，講解函數圖形（相對於方程式圖形）的特徵：例如鉛直線檢定，以及定義域和值域的觀念；一般性的函數觀念，則待 F-12 甲/乙-1 再講。

(3) 指數函數與對數函數的圖形的性質（增減性、凹向性、漸近線）的了解，不須數學化的說明，僅須透過圖形上的觀察，直觀的認識，再輔以數值化的說明。

(4) 就好像給定任何一個  $a, 0 < a \neq 1$ ，就有一個指數函數  $a^x$ ，同理，給定一個  $a, 0 < a \neq 1$ ， $\log_a x$  也要視為一個由  $a$  決定的函數，不要在教學和評量中讓  $a$  和  $x$  皆為變數。

(5) 一正數  $a$  的科學記號數字  $m \times 10^n$  若改寫成  $10^{\log a}$ ，則科學記號的指數  $n$  就是  $\log a$  的整數部分，也就是首數；而係數  $m$  就是 10 的「 $\log a$  的小數部分」次方，也就是 10 的尾數 (mantissa) 次方，這是為什麼英文稱科學記號的係數為「尾數」。

(6) 透過實例說明指數函數、對數函數在科學（例如：Ph 值或地震規模...）和金融上的應用（例如：利率問題...）。

### 條目範圍

1. 指數函數與對數函數互為反函數的概念，只需透過圖形觀察了解點的對稱性，不需數學化的說明。

2. 有關自然指數  $e$ ，僅建議搭配計算機讓學生感受到此數的存在，不做數學上的定義與介紹。

### 釋例

1. 參照多項式函數，指數函數的定義域像多項式函數一樣，為全部實數（整條  $x$  軸），但是對數函數的定義域則不一樣。如果先學過三角函數，也參照三角函數的定義域。

2. 值域的教學，宜先連結多項式函數的舊經驗：一次和三次函數的值域為全部實數（整條  $y$  軸），但二次函數則否；可見函數的值域未必是全部實數。指數函數的值域並非全部實數。如果先學過三角函數，也參照三角函數的值域。

- 指數函數的換底，較少受到重視。其實，在工程和科學上，將來全部的指數函數全都換成標準的指數函數  $\exp(kx)$ ，也就是以  $e$  為底的指數函數。
- 可搭配計算機，讓學生操作當每年複利一次、每月複利一次、每天複利一次、每小時複利一次、每分複利一次、每秒複利一次、每 0.1 秒複利一次... 的利息變化，體會何謂連續複利，並發現標準指數函數的底數  $e$ 。

### 錯誤類型

學生易忽略指數、對數函數的基本條件限制，例如：方程式  $x^2 = 2^x$  與方程式  $2 \log_2 x = x$  不相等。

### 評量

- 指數函數與對數函數在不同底數下的交點數不同，這類概念不應納入正式的評量。
  - 例如此題不宜：下列選項何者正確？  
若  $0 < a < 1$ ，則  $y = a^x$  的圖形與  $y = \log_a x$  的圖形恰有 1 個交點。
- 將  $\log_a x$  視為一個函數，變數僅為  $x$ ，不要在評量中讓  $a$  和  $x$  都在變化，這並不是學習對數函數的目標。例如求解  $\log_x 100 = 3 \log x + 5$ ，或者若方程式  $\log_a |x| + 2x^2 - 11 = 0$  恰有兩實根  $\alpha, \beta$ ，且已知  $|\alpha - \beta| = 4$ ，求  $a$  之值，皆為不宜的評量考題。

<b>D-11A-1 主觀機率與客觀機率：</b> 根據機率性質檢視主觀機率的合理性，根據已知的數據獲得客觀機率。	d-V-3 d-V-5
---	----------------

**先備：**認識機率 (D-9-2)、複合事件的古典機率 (D-10-4)。

**連結：**條件機率 (D-11A-2)、貝氏定理 (D-11A-3)，轉移方陣 (F-11A-3)。

**後續：**離散型隨機變數 (D-12甲/乙-1)。

### 基本說明

#### 1. 與 99 課綱的差異

99 課綱並沒有明白指出這兩個觀念，但是在條件機率與貝氏定理的操作練習中常使用客觀機率。

#### 2. 相關約定

- 本課綱所謂的客觀機率就是頻率機率，也就是以調查或試驗而獲得的事件發生頻率(相對次數)，當作事件發生的機率。
- 所謂主觀機率就是在缺乏調查或試驗資料，而且不能運用古典機率的情況下，對於不確定性現象的主觀量化估計。
- 主觀機率和客觀機率並不是獨立的觀念，而是兩種除了古典機率以外，獲得機率之數值的常用方法。因此，它們沒有專屬的符號。

#### 3. 學習目標

- 理解機率是不確定性的量化數值。
- 能套用古典機率發展出來的機率性質，作為主觀機率和客觀機率的推論依據，或用那些性質來檢核主觀機率和客觀機率的合理性。

#### 4. 教學斟酌

- 透過主觀機率與機率性質的推論，讓學生體會機率在個人生活與社會情境中的價值：在不確定的情況下，協助理性的思考與決策。
- 透過客觀機率，讓學生認識機率與統計的連結，並理解生活經驗中獲得的機率，經常屬於客觀機率。建議以計算機作為本條目之教具，用來計算統計的相對發生次數。教師可以採用更合適的資訊工具進行此項教學，也務請留意勿僅限於教師演示，讓學生

有機會習得使用資訊工具獲得客觀機率的估計。

- (3) 關於機率類型的用語，還沒有趨於統一，宜提醒學生留意不同的用語。
- (4) 注意在轉移方陣的主題裡，也可以綜合運用古典、主觀和客觀機率。
- (5) 本條目教學中援引的情境，請盡量符合現實，盡量使用真實數據，與學生個人與社會的生活經驗相呼應，並留意高中社會領域課程中的應用。

### 條目範圍

此條目不含隨機變數的觀念，也不含抽樣和隨機試驗。所以，討論客觀機率時，不討論因為抽樣而造成統計數據的不確定性。

### 釋例

1. 對於單一事件，任何介於 0 與 1 之間的主觀機率都符合機率理論。但是，經由古典機率發展出來的機率理論，可以用來判斷主觀機率的合理性。例如拋一只圖釘，如果認為針尖朝上的機率是 0.5，又認為不朝上的機率是 0.6，則不合理而應該修訂。
2. 以下舉隅關於機率類型的用語。所謂機率類型就是獲得機率之數值的方法。主觀機率當然與個人經驗有關，但是一般文獻所謂的「經驗機率」並非主觀機率，反而是客觀機率；在那些文獻中，所謂「經驗」是調查或試驗的意思。有些文獻把古典機率和頻率機率合稱為客觀機率。除了高中課程中認識的三種類型以外，還有一類稱為形式機率，運用機率密度函數的定積分而獲得的機率，即屬此類。

### 評量

此條目的評量請盡量吻合學生的生活經驗：包括個人的、校園的與社會的。

<b>D-11A-2 條件機率</b> ：條件機率的意涵及其應用，事件的獨立性及其應用。	d-V-3
--	-------

**先備**：複合事件的古典機率 (D-10-4)。

**連結**：主觀機率與客觀機率 (D-11A-1)，貝氏定理 (D-11A-3)，轉移方陣 (F-11A-3)。

### 基本說明

1. 與 99 課綱的差異  
99 課綱將條件機率安排在十年級，本課綱則將此內容延後到十一年級，使得本條目可綜合運用主觀機率與客觀機率，與單純的古典機率有所區隔。
2. 相關約定  
在事件  $A$  發生的條件下，事件  $B$  發生的條件機率表示為  $P(B|A)$ 。
3. 學習目標
  - (1) 能在情境中辨識條件機率。
  - (2) 在古典機率的情境中，能計算條件機率  $P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$ 。
  - (3) 能在古典機率的情境中，了解事件獨立性的定義，並能判別給定的事件是否獨立。
  - (4) 能理解並應用獨立事件的餘事件推論：若  $A, B$  兩事件獨立，則  $A$  的餘事件也與  $B$  獨立。
  - (5) 能理解並應用獨立事件的乘法法則：若  $A, B$  兩事件獨立，則  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ 。
  - (6) 在主觀機率與客觀機率的情境中，能理解獨立事件的意義，並運用乘法法則解決問題。
4. 教學斟酌

- (1) 主觀機率是依照個人信念或既有經驗而決定的，但是它也可以隨著新訊息的出現而調整其判斷，而這種現象可以作為條件機率的直覺認識。
- (2) 教學時，應引導學生從情境或題意中，辨別所求得的是否為條件機率。
- (3) 在古典機率的情境中  $P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$ ，但是在概念上宜闡釋該式的意義是縮小樣本空間到事件  $A$  的意思，而  $A \cap B$  宜在情境中闡釋為  $A$  集合裡面的  $B$  子集，不宜強調集合的操作。
- (4) 獨立事件的定義，幾乎僅在古典機率的情境中才能驗證，但是在實際應用時，獨立性幾乎都是先驗的假設。教學過程中，教師宜多在情境中舉例，讓學生感受獨立性，建立直觀，進而將古典機率情境中的獨立性質，運用在主觀機率與客觀機率的情境中，以解決問題。
- (5) 學生容易弄混獨立事件與事件互斥，教師宜舉例說明解除學生迷思。

### 條目範圍

在情境問題中處理獨立事件的個數，以兩個或三個為原則。

### 釋例

單純的主觀機率並不多見，因為或多或少我們都會參考客觀數據後再決定主觀機率，這說明機率的形成是揉合主觀與客觀。而受到客觀條件影響的主觀機率，就是條件機率的直觀認識。例如「下週日天雨」的主觀機率，應該會受到現在是四月還是十月的影響，也應該會因為今天是週一還是週五而有所不同。

### 錯誤類型

1. 學生將條件機率  $P(B|A)$  誤以為是積事件  $P(A \cap B)$  的機率。因此題目的敘述上務求清楚明瞭，尤其條件機率的敘述，應強調在什麼的條件下。
2. 學生在文氏圖裡建立了錯誤的獨立事件心像（誤以為互斥事件）。

### 評量

此條目的評量請盡量吻合學生的生活經驗：包括個人的、校園的與社會的。例如：溫布頓男子網球賽採五戰三勝制(即先勝三局者獲勝晉級)，根據過去紀錄知 A 選手與 B 選手實力有段差距，A 選手與 B 選手獲勝的機率比為 4：1，但比賽前兩局 A 選手因失誤過多致二局皆敗。假設經過短暫休息後，A 選手恢復原來水準，假設沒有其他特殊狀況發生，請問比賽最後結果誰獲得晉級的可能性較大？

**D-11A-3 貝氏定理：條件機率的乘法公式，貝氏定理及其應用。**

d-V-3

**先備：**複合事件的古典機率 (D-10-4)。

**連結：**主觀機率與客觀機率 (D-11A-1)，條件機率 (D-11A-2)。

### 基本說明

#### 1. 與 99 課綱的差異

99 課綱將條件機率與貝氏定理安排在十年級，本課綱則將此內容延後到十一年級，使得本條目可綜合運用主觀機率與客觀機率，與單純的古典機率有所區隔。

#### 2. 學習目標

- (1) 能在古典機率的情境中推論條件機率的乘法公式：



$$P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A) = P(A|B) \cdot P(B)。$$

- (2) 在主觀機率與客觀機率的情境中，能理解條件機率之乘法公式的意義，並將之視為「法則」而予以應用。
- (3) 能理解貝氏定理所求出的機率值為條件機率的概念。
- (4) 能推導並理解出貝氏定理的一般化結果，並用以解決問題。

### 3. 教學斟酌

- (1) 貝氏定理強調的是樣本空間的分割概念，通常不再能窮舉樣本空間與事件的元素，甚至即使能夠指出樣本點，也不再符合古典機率之機會相等前提。此處要特別提醒學生，以凸顯貝氏定理跟古典機率的差異之處。
- (2) 可透過條件機率及貝氏定理的問題，強化學生對於探討機率問題時，應特別留意樣本空間的觀念。

### 條目範圍

此條目不含隨機變數的觀念，所以也不正式引用機率質量函數。

### 釋例

應用條件機率和貝氏定理時，實際上經常搭配古典機率、主觀機率與客觀機率使用。例如以  $P(A|B) \cdot P(B)$  計算  $P(A \cap B)$  時，可能  $P(A|B)$  用古典機率決定，而  $P(B)$  則使用主觀或客觀機率。

### 錯誤類型

貝氏定理為條件機率的應用，因此條件機率所強調的在哪一個樣本空間的概念，學生還是很容易迷失。例如下列問題：假設有三個保險箱，每一個保險箱各有兩個抽屜，第一個保險箱的每一個抽屜裡各放一個金幣，第二個保險箱裡的一個抽屜放一個金幣，另一個抽屜放一個銀幣；第三個保險箱的每一個抽屜各放一個銀幣。若隨意打開一保險箱中的一個抽屜，發現裡面放的是一個金幣，則這個保險箱的另一個抽屜也是放金幣的機率是多少？

### 評量

此條目的評量請盡量吻合學生的生活經驗：包括個人的、校園的與社會的。

## 伍、素養導向教材編寫原則

### 一、素養導向教材編寫原則說明

素養導向教材撰寫的核心想法在於「來龍去脈」的建構。教材應營造生活、歷史或是數學的情境，讓學習者認知到特定數學知識發生的脈絡或與日常生活之間的關聯。學習任務安排應有一條明確的主軸，引領學生建立基礎的數學概念與發展相關的技能，進行探索，問題解決、找出模式並與他人溝通，幫助學生知道所學的內容在現實生活中、往後的數學學習或是專業科目的用處為何。素養導向教材須提供學習者對於數學有感的學習機會，讓學生認知到除了實用性之外，數學也有其人文、歷史或美學的層面。

以下分別說明教材的編寫原則。

#### (一) 透過現實情境、寓言故事或數學史引入教材，營造數學學習需求

教材設計可透過生活情境或是數學史來引入教學題材，讓學生認識數學在生活中的用處、特定的數學知識是如何發展起來、或是鋪排要用到某個特定的數學知識的情境，以激發學生的學習動機。教師可設想一條數學知識創造的路徑，它不一定與數學知識發展的歷史進路相符；不過，這一條路徑要帶領學生在有限的時間內，在課堂中自然地進到脈絡中學習數學、發現或創造某個知識。在學習的過程中，學生可接觸到數學的人文與歷史層面，感受到特定的數學知識為何被創造出來以解決問題或是滿足人類探索的好奇心，來引動學生的學習興趣，培養對於數學的正向態度。

#### (二) 以任務鋪陳數學學習脈絡，引導學生進行探索與發展概念

數學素養的培養著重學習者能把情境問題轉換成數學問題求解，再把數學解答帶回原先的情境進行詮釋與決策。學習任務的安排應彰顯數學做為擬經驗科學的本質，讓學生在真實或數學的情境中，在教師的引導下，進行操作、探索、分析、比較，從中歸結出相關的原理原則。情境脈絡在素養教材中具備兩種功能：首先是讓學生應用學到的知識或技能；另外一個為運用情境脈絡的安排與鋪陳來發展學生相關的數學概念，讓學生有機會去學習重要數學內容與發展數學思維。

#### (三) 讓學生運用相關數學知識與能力解決問題，提出合理的觀點與他人溝通

素養教材除了引導學生探索概念、建構知識與發展相關技能之外，也設計讓學生須應用所學到之知識或技能來解決的問題。這些問題不一定是日常生活中的問題，也可以是數學本身的問題。學生在解決問題之後，教師應提供機會讓學生針對答案提出個人詮釋並和他人溝通想法；經由和老師與同儕之間的互動，討論、質疑與辯證中建構數學知識。教師可藉由鼓勵不同觀點的提出，提供參與學習的機會，幫助學生經由課室的討論來澄清與反思自己的想法。

#### (四) 教材安排從具體到抽象，提供學生有感的學習機會

素養教學活動設計讓學生在任務中進行操作、探索，再逐步進到抽象概念的學習；提供學生機會去感受數學是人類的活動，而不只是一堆冷冰冰的公式、符號或是反覆的解題練習。當學生在情境脈絡中進行數學活動，像是識別規律、建立模式與進行論證，和同儕共同合作解決問題或是挑戰彼此的想法等等，他們就有機會經驗到類似數學家在數學社群中的活動，感受到數學的人文成分，這樣的數學學習是活的、有感覺的。

#### (五) 教材設計具備多重表徵

素養教材應運用表格、圖形、文字與數字等多種表徵，在中學階段可引進計算機工具與動態幾何環境等資訊工具，打造豐富的學習環境，讓學生進行表徵間的轉換，並鼓勵學生運用多種表徵表達他們的想法並和同儕、教師進行數學對話。多重表徵對於學生的數學概念與關係的理解以及現實生活的應用相當重要，它可以幫助學生有效組織其想法與和教師、同儕進行溝通。以多重表徵進行教學有助於學生認知思考層次的提昇與靈活思考，發展邏輯的解題策略，促進有意義的學習連結不同的表徵並應用於解題中。

#### (六) 學習任務具備形成性評量的功能，以評估與促進數學學習

當教師應用素養教材進行教學時，必須整合教學與評量，評量是教學重要的一環，而不是只有教學結束後為之，才能對所有學生提供高品質的教學與促進深入理解。因此，學習任務須具備形成性評量的功能，要求學生說明想法或是解法以及提出論述。當學生在進行學習任務時，教師可以從學生的作答瞭解其學習狀況，發生了哪些困難或是迷思概念，以及確認學生的學習現況與學習目標之間的落差，並以此為基礎規劃後續的教學以促進數學的學習。

## 二、學習表現與學習內容雙向細目表參考示例

以下分階段以表格呈現如何結合學習表現與學習內容來開發素養導向教材。

### (一) 國民小學教育階段

以核心素養「數-E-A2 具備基本的算術操作能力、並能指認基本的形體與相對關係，在日常生活情境中，用數學表述與解決問題」為例，素養教材設計如下表所示：

<b>學習表現</b>	s-III-1 理解三角形、平行四邊形與梯形的面積計算。
<b>學習內容</b>	n-III-11 認識量的常用單位及其換算，並處理相關的應用問題。
<b>S-5-2 三角形與四邊形的面積：操作活動與推理。利用切割重組，建立</b>	第三學習階段：五年級○學期（看課程安排） 單元名稱：三角形與四邊形面積公式的應用 學習目標：

<p>面積公式，並能應用。</p> <p>N-5-12 面積：「公畝」、「公頃」、「平方公里」。生活實例之應用。含與「平方公尺」的換算與計算。使用概數。</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 能夠切割拼合平面圖形，知道面積在此操作下的影響。</li> <li>2. 以切割拼合方式，學習如何計算三角形和四邊形的面積。</li> <li>3. 將面積計算和「公畝」、「公頃」、「平方公里」的學習結合，可以計算大區域之面積。</li> <li>4. 引入大面積有關之應用問題，讓學生討論與應用。</li> </ol>
--	--

<p><b>設計說明：</b></p> <p>學習日常生活中和面積相關的問題，在設計上的基本理念，可先透過面積公式的揭露，利用圖形的切割組合，讓學生理解各種面積計算的由來，並歸結為面積公式，來解決生活中有關面積的問題。</p> <p>(完整的單元教案請閱柒、教學單元案例，此教案假設為 N-5-12 教學完成後之應用，並作為 S-5-2 教學之前置活動。)</p>
--

## (二)國民中學教育階段

以核心素養「數-J-A2 具備有理數、根式、坐標系之運作能力，並能以符號代表數或幾何物件，執行運算與推論，在生活情境或可理解的想像情境中，分析本質以解決問題」為例，素養教材設計如下表所示：

<b>學習表現</b> <b>學習內容</b>	S-IV-12 理解直角三角形中某一銳角的角度決定邊長的比值，認識這些比值的符號，並能運用到日常生活的情境解決問題。
<p>S-9-5 直角三角形的三角比：對直角三角形的一個銳角定義「斜邊」、「鄰邊」、「對邊」，並引入符號 <math>\tan A</math>、<math>\sin A</math>、<math>\cos A</math>；直角三角形內，給定一邊的長和一個銳角的角度，決定另一邊的邊長。(學生無使用計算機時，角度限於 30 度、45 度、60</p>	<p>第一學習階段：九年級 ( 實施 5 節課 )</p> <p>單元名稱：直角三角形的三角比</p> <p>學習目標：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 認識坡度的計算方式，即直角三角形中某一銳角的對邊與鄰邊的比值。</li> <li>2. 透過製圖、測量發現不同坡度的直角三角形與所對應的銳角度數的關係；相同坡度，大小不同的直角三角形，其對應的銳角度數相等。</li> <li>3. 認識直角三角比 <math>\tan A</math>、<math>\sin A</math>、<math>\cos A</math> 的意義。</li> <li>4. 計算特殊角的直角三角比。</li> <li>5. 透過計算機的直角三角比(<math>\tan A</math>、<math>\sin A</math>、<math>\cos A</math>)的按鍵，幫助解決生活中的應用問題。</li> </ol>

度)。	
-----	--

**設計說明：**

自九年一貫實施後，三角函數這個單元已經沒有再出現於國中的課程綱要與教科書中，雖然高中數學課程也對此單元做了鋪陳，然而整體成效已不如早期課程安排分屬於國中、高中二階段的學習方式。因此十二年國民基本教育數學領域課程綱要參考以往的數學課程標準與其他國家的做法，以及考量三角函數的學習銜接與成效，將直角三角比放入國中階段的九年級教授。教學內容聚焦在直角三角形特殊角的邊角性質與應用，並引入計算機，至於在以往課程所教授的三角函數關係：倒數關係、平方關係與商數關係與餘角關係，則延後至高中數學教授。(完整的單元教案請閱柒、教學單元案例。)

**(三)普通型高級中等學校教育階段**

以核心素養「數-S-U-B1 具備描述狀態、關係、運算的數學符號的素養，掌握這些符號與日常語言的輔成價值；並能根據此符號執行操作程序，用以陳述情境中的問題，並能用以呈現數學操作或推論的過程。」以及「數-S-U-B2 具備正確使用計算機和電腦軟體以增進學習的素養，包含知道其適用性與限制、認識其與數學知識的輔成價值，並能用以執行數學程序。能解讀、批判及反思媒體表達的資訊意涵與議題本質。」為例，素養教材設計如下表所示：

學習表現 學習內容	n-V-1 理解實數與數線的關係，理解其十進位表示法的意義，理解整數、有理數、無理數的特質，並熟練其四則與次方運算，具備指數與對數的數感，能用區間描述數線上的範圍，能用實數描述現象並解決問題。
N-10-1 實數：數線，十進制小數的意義，三一律，有理數的十進制小數特徵，無理數之十進制小數的估算 ( $\sqrt{2}$ 為無理數的證明 ★)，科學記號數字的運算。	<p>第四學習階段：10 年級第一學期 ( 實施 4 節課 )。</p> <p>單元名稱：科學記號與 10 的冪次。</p> <p>學習目標：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 理解「取三位小數」、「準至千分位」、「以兩位有效數字作計算」等類型的語言，並能用以溝通，例如將任意數依指令寫成正確的概數。</li> <li>2. 能操作科學記號的加減乘除運算。</li> <li>3. 能使用計算機做四則運算、計算 <math>10^x</math> 的值、計算 <math>\log x</math> 的值，並明白其值僅為估計。</li> <li>4. 能用計算機的 <math>x^y</math> 功能，探索形如 <math>(1.01)^x = 2</math> 之方程式的近似解。</li> </ol>

<p>N-10-4 常用對數:<math>\log</math> 的意義, 有效位數與科學記號連結, 使用計算機的<math>10^x</math> 鍵和 <math>\log</math> 鍵。</p>	<p>5. 能轉換科學記號數字與 10 的冪次, 藉以理解 <math>\log</math> 數值之整數與小數部分的意義, 並建立 10 的冪次與對數的數感 (亦即不使用計算機而粗略估計 10 的冪次或對數的值)。</p> <p>6. 理解 <math>\log a</math> 的意義就是 <math>10^{\log a} = a</math>, 其中 <math>a</math> 為正數。反之, 任意正數 <math>a</math> 都可以改寫成 <math>10^{\log a}</math>。能用 <math>\log</math> 符號紀錄或表達數值。</p>
--	---

**設計說明：**

以往的課程安排,「科學記號的運算」是在國一上學期,待國二學習理化的時候才使用,這對許多學生來說,造成一些學習上的困難。現今國中的理化課程已將科學記號使用的部分簡化,所以 107 課綱將其移至高一(10 年級),並建議它出現在上學期的第一章,不僅能使國高中的課程銜接順暢,也顧及學生學習的成熟度。同時,「10 的冪次方與常用對數符號」原本為高一上學期第三章「指對數函數」的一部分,基於新課綱『先(高一)建立以符號表達數量的基本觀念,第二次教學(高二介紹指對數函數)再進入形式運思,也就是**抽象概念與代數性質**』的精神,這裡的教材應著重培養數量感與符號理解。

在資訊流通量爆炸的時代,如何使用正確的數學語言來溝通,培養正確的數感,是科學素養的一部分。本單元教材選取了高中生所知道的自然科學情境中,使用數學來處理極大數與極小數的那一部分,連結到數學知識與符號的使用,在情境中解決數學問題、學習使用計算器輔助,同時體會到符號出現的脈絡與必要性,達到符合數學素養教材的目標。(完整的單元教案請閱柒、教學單元案例。)

## 陸、數學領域之議題融入說明

面對變化快速的時代，學校教育需與社會脈動緊密連結，在課程發展中融入相關議題。議題融入的目標在培養學生批判思考及解決問題的能力，提升面對議題的責任感與行動力，實踐「尊重多元、同理關懷、公平正義、永續發展」等核心價值，成為健全個人、良好國民與世界公民。

### 一、融入議題之選擇

本領域融入議題的選擇為呼應總綱及領綱的核心素養，並連結、延伸、統整及轉化本領域的學習重點，包含十九項議題。課程綱要「附錄二」中明列了「性別平等教育、人權教育、環境教育、海洋教育」四項議題之學習主題與實質內涵，其不但是國家當前重要政策，且為延續九年一貫課程之重大議題，以及培養現代國民與世界公民之關鍵內涵。十五項相關議題有「品德教育、科技教育、家庭教育、生涯規劃教育、多元文化教育、閱讀素養教育、戶外教育、國際教育」等。其中「品德教育、多元文化教育、國際教育」已納入《總綱》核心素養，且轉化為領綱核心素養。「科技教育、家庭教育、生涯規劃教育、閱讀素養教育、戶外教育」等議題之內涵，亦能呼應本領域之學習重點，深化與拓展本領域的學習。

### 二、議題融入之做法

議題多來自於生活事件或社會現象，故在設計議題融入課程，應思考本領域之「學習重點」與議題「學習主題和實質內涵」兩者呼應關係，並透過連結、延伸、統整與轉化等方式，發展學習目標，設計適切的課程內容，彰顯總綱及領綱之核心素養。

議題融入之作法，宜結合學生的舊經驗、生活情境或時事，善用多元的教學方法，透過體驗、省思、實踐的歷程，增進學生學習品質及培養探究、思辨與實踐的能力。再者，素養導向的課程歷程隱含著議題的潛在學習，學生透過任務或問題的覺察、規劃和執行，或與他人共同合作，其間所產生各種互動情境，如：爭執或協商等，皆可成為教師適時引導達成人權教育、性別平等教育、法治教育等實質內涵的具體做法。此外，議題亦具有跨學科性質，可藉由跨領域統整課程突顯議題教育的特色，拓展學生學習視角，期使對生活現象獲致較豐富多元與完整的認識，裨益核心素養的陶養。有關議題融入的具體作法可參考「議題融入說明手冊」。

### 三、議題融入之示例說明

四項議題融入本領域學習重點示例的說明，係以本領域課程綱要「附錄二」為發展依據，茲舉例如下：

## (一) 性別平等教育議題

學習主題	實質內涵	融入課程綱要學習重點之示例	說明
性別權益 與公共參與	性 E9 檢視校園中空間與資源分配的性別落差，並提出改善建議。	d-III-1 報讀圓形圖；製作長條圖、折線圖與圓形圖，並據以做簡單推論。 d-III-2 能從資料或圖表的資料數據，解決關於「可能性」的簡單問題。	透過長條圖、折線圖與圓形圖等製作，運用校園空間與資源分配等數據資料，如：廁所間數，以檢視與了解可能存在的性別資源落差，並提出改善的方法。
	性 J10 探究社會中資源運用與分配的性別不平等，並提出解決策略。	d-IV-1 理解常用統計圖表，並能運用簡單統計量分析資料的特性及使用統計軟體的資訊表徵，與人溝通。 D-7-1 統計圖表：蒐集生活中常見的數據資料，整理並繪製成含有原始資料或百分率的統計圖表：直方圖、長條圖、圓形圖、折線圖、列聯表。遇到複雜數據時可使用計算機輔助，教師可使用電腦應用軟體演示教授。	1.在學習統計概念時，如：百分比、統計圖表等，可透過校園空間、資源分配運用等資料，進行統計圖表分析中，以理解資源運用與分配在性別上的差異。 2.可利用性別統計資料來設計學習任務或布題，讓學生在學習數學能力過程中，藉此認識與提昇性別平等意識。

## (二) 人權教育議題

學習主題	實質內涵	融入課程綱要學習重點之示例	說明
人權與責任	人 J2 關懷國內人權議題，提出一個符合正義的社會藍圖，並進行社會改進與行動。	d-IV-1 理解常用統計圖表，並能運用簡單統計量分析資料的特性及使用統計軟體的資訊表徵，與人溝通。	能運用統計圖表，針對國內外相關人權議題的數據資料進行簡單統計量分析與解讀，並透過數字理解真實社會存在的偏見、貧窮、不公平、不正義等現象，擬定社會改進與行動策略，培養



學習主題	實質內涵	融入課程綱要學習重點之示例	說明
			道德思辨的素養與公平正義的價值。

### (三)環境教育議題

學習主題	實質內涵	融入課程綱要學習重點之示例	說明
災害防救	環 U9 分析實際監測數據，探究天然災害頻率的趨勢與預估。 環 U11 運用繪圖科技與災害資料調查，繪製防災地圖。	d-V-4 認識隨機變數，理解其分佈概念，理解其參數的意義與算法，並能用以推論和解決問題。	在數學學習任務中，藉由觀察、蒐集、記錄、分析等方式，探討或推測天然災害頻率的趨勢和發展，並運用分佈概念，進行災害資料調查與防災地圖繪製。

### (四)海洋教育議題

學習主題	實質內涵	融入課程綱要學習重點之示例	說明
海洋科學與技術	海 U12 了解海水結構、海底地形及洋流對海洋環境的影響。	d-V-3 理解事件的不確定性，並能以機率將之量化。理解機率的性質並能操作其運算，能用以溝通和推論。	以海水結構、海底地形或洋流做為學習任務的情境設計，結合不確性的概念及量化分析，處理相關問題並提出合理的見解。

## 柒、教學單元案例

數學素養導向教學依據數學領綱前導研究的建議，應兼具「知」、「行」、「識」三個面向。「知」就是「學什麼」或者「是什麼」，指的是數學內容。「行」就是「怎麼做」或者「怎麼用」，指的是學生所能展現出來的數學能力，包括問題解題、程序執行、溝通、論證等等現今數學教育著重之能力面向。「識」就是「為什麼」、「你認為」、「是什麼」，指的是對數學的內在認知與情意涵養，包括概念理解、連結、後設認知、以及欣賞數學的美等。再者，數學教育工作者可參考第伍章所列出之六項編寫原則進行素養導向教材設計與發展。以下分別呈現國小、國中、普高教育階段教學單元案例，具體展現新課綱素養導向的精神以及議題融入數學教學的做法。

### 一、國小組—三角形與四邊形面積公式的應用

#### (一) 教學設計理念說明

##### 1. 背景

本單元主要透過將長方形、三角形的重新切割及組合，讓學生理解面積的意義，並且能透過理解面積公式進而應用公式來解決生活中有關面積的問題。

##### 2. 設計理念

在數學的領域中，點、線、面的觀念常常被提到，生活中也常常會遇到面積的問題，例如比較物品表面大小等問題，透過面積公式雖然可以輕鬆解決問題，但在數學領域講究的是理解，因此在設計上的基本理念，主要先透過面積公式的揭露，然後利用各種圖形的圖片切割組合，來讓學生理解各種面積公式的由來，而且能夠將面積公式作應用，來解決生活中有關面積的問題。

#### (二) 教學單元案例

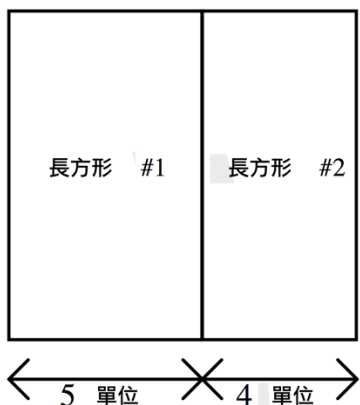
領域/科目	數學	設計者	林淑君
實施年級	五年級	總節數	共 3 節，120 分鐘
單元名稱	三角形與四邊形面積公式的應用		
設計依據			
學習重點	學習表現	核心素養	
	s-III-1 理解三角形、平行四邊形與梯形的面積計算。 n-II-9 理解長度、角度、面積、容量、重量的常用單位與換算，培養量感與估測能力，並能做計算和應用解題。認識體積。 n-III-5 理解整數相除的分數表示		數-E-A2 具備基本的算術操作能力、並能指認基本的形體與相對關係，在日常生活情境中，用數學表述與解決問題。 數-A3 具備轉化現實問題為數學問題的能力，並探索、擬定與執行解決問題計畫，以及從多元、彈性

		<p>的意義。</p> <p>n-III-9 理解比例關係的意義，並能據以觀察、表述、計算與解題，如比率、比例尺、速度、基準量等。</p>		<p>與創新的角度解決數學問題，並能將問題解答轉化運用於現實生活。</p> <p>數-E-B1 具備日常語言與數字及算術符號之間的轉換能力，並能熟練操作日常使用之度量衡及時間，認識日常經驗中的幾何形體，並能以符號表示公式。</p>
	學習內容	<p><b>S-5-2 三角形與四邊形的面積：</b>操作活動與推理。利用切割重組，建立面積公式，並能應用。</p> <p><b>N-5-9 整數、小數除以整數（商為小數）：</b>整數除以整數（商為小數）、小數除以整數的意義。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。能用概數協助處理除不盡的情況。熟悉分母為 2、4、5、8 之真分數所對應的小數。</p> <p><b>N-5-12 面積：</b>「公畝」、「公頃」、「平方公里」。生活實例之應用。含與「平方公尺」的換算與計算。使用概數。</p> <p><b>N-5-10 解題：</b>比率與應用。整數相除的應用。含「百分率」、「折」、「成」。</p>		
議題融入	學習主題	<p>人權教育：人權違反與救濟</p> <p>環境教育：永續發展</p>		
	實質內涵	<p>人權教育：人 E7 認識生活中不公平、不合理、違反規則和健康受到傷害等經驗，並知道如何尋求救助的管道。</p> <p>1. 環境教育：環 E5 覺知人類的生活型態對其他生物與生態系的衝擊。</p>		
	與其他領域/科目的連結	自然、社會、健康教育		
	教材來源	自編教材		
<b>教學活動設計</b>				
	教學活動內容及實施方式		時間	備註

活動一：

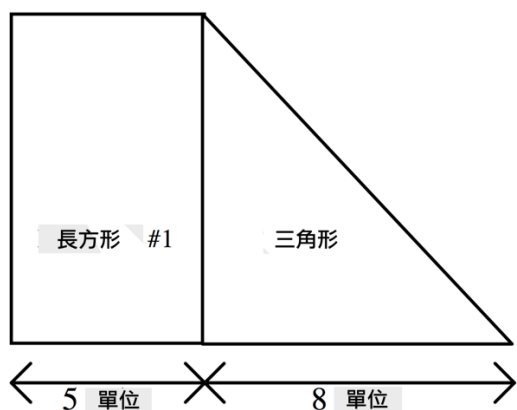
教師布題：

1. 下面兩個長方形中，哪一個面積比較大？你怎麼知道的？



教師布題：

2. 下面的長方形和三角形，哪一個面積比較大？你怎麼知道的？



教師布題：

3. 邀月社區和摘星社區的住戶，互相在爭論一件事情，他們都覺得自己的社區比對方的社區大。誰是對的？寫一個解決這個爭論的解釋。

問題 1

10 分鐘

- 分組教學，教師布題，說明題意，並確認學生理解題意。

- 學生分組討論並發表。
- 學生雖熟悉長方形面積的計算方式，但本題並沒有假設另一邊長。學生可以靠視覺的直覺，也可以察覺長方形#2 可以擺在長方形#1 內。

問題 2

10 分鐘

- 引導學生觀察此三角形面積其實和上題的長方形#2 面積一樣。

- 由此初步討論直角三角形面積的計算方式。

問題 3

20 分鐘

- 教師引導學生認識梯形的面積要如何恰當的和右邊長方形比較。

- 由此初步討論梯形面積的計算方式。

後續數學課程建議：

- 利用這些切割拼合的經驗，後續教案可以討論一

邀月社區

摘星社區

12 公里

15 公里

20 公里

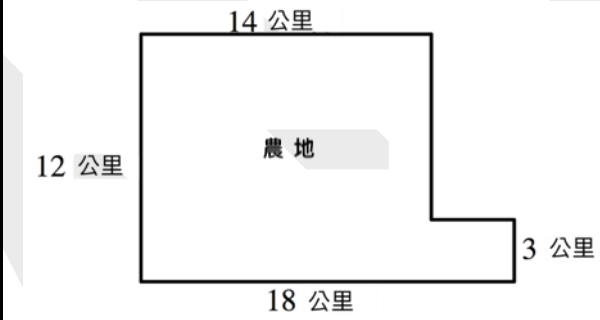
15 公里

※除了邀月社區的西邊界，所有邊界都是南北向或東西向。

般三角形或梯形、平行四邊形等四邊形的面積計算方式，並以公式記錄其計算方式。才能完成 S-5-2。

- N-5-12 並未完成，但也可作為 N-5-12 教學的應用單元。

活動二：  
教師布題：  
1. 下圖是黎明社區的農地。構成邊界的線段都是互相垂直的線段。



今年春天，社區的農民打算引進空中噴灑農藥的技術，他們的計畫如下：

- 空中噴灑估計的費用是每公頃 2200 元。
- 1 平方公里是 100 公頃。
- 他們引用一項研究，指出每消費 1 元殺蟲劑，農民將通過增加農業生產獲得 4 元。

- 根據上面的條件，回答下面的問題：
- (1)黎明社區的面積是多少平方公里？多少公頃？
  - (2)噴灑整個社區的成本是多少？
  - (3)農民可以從中獲利多少元？

問題 1  
20 分鐘

- 分組教學，教師布題，說明題意，並確認學生理解題意。
- 學生分組討論並發表。
- 本題首先要討論面積如何計算，因為策略多元，適合討論發表。
- 另一重點是 1 平方公里等於 100 公頃。教師要明白告知此單位換算。

<p>教師布題：</p> <p>2.世界衛生組織 ( WHO ) 於 2006 年報告指出，全球每年約有 300 萬人農藥中毒，死亡人數超過 25 萬人，請問 2006 年農藥中毒人口的死亡率大約是多少？</p>	<p>問題 2</p> <p>10 分鐘</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>•引導學生運用整數相除求出死亡率。</li> </ul>
<p>教師布題：</p> <p>3.根據 2009 年全民健保資料指出，臺灣仍有 392 人因非蓄意性農藥中毒而住院。小明根據這項資料，他覺得：「這相當於每一天都有人受到農藥傷害。」這樣的聲明，你認為正確嗎？</p>	<p>問題 3</p> <p>10 分鐘</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>•引導學生運用整數相除求證是否平均一天有一人受到農藥傷害。</li> </ul>
<p>活動三：</p> <p>將學生分成兩組，分別代表農民及環保團體，從兩種不同的觀點搜集「噴灑農藥來提高農作物產量」以及「噴灑農藥度環境、人的健康造成的影響」的相關資料，然後讓學生進行辯論。</p>	<p>40 分鐘</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>•引導學生搜集相關資料 ( 可與社會、自然、健康教育相關課程結合 )。</li> <li>•利用辯論活動，鼓勵學生運用數學協助計算立論之證據，讓學生發表所支持觀點的理由。</li> </ul>

#### 教學參考資料

1. 建議教師在引導學生搜集辯論主題的相關資料時，能提供學生一些搜集資料的框架，讓孩子能更完整全面的了解農藥的使用與環境、人體健康的密切相關性。例如：農藥的使用可以提升農作物產量與農民收益，解決糧食問題。但相對的，農藥的使用對社區健康所可能造成的成本，還有環境汙染可能造成的成本。
2. 就人權的教育而言，教師也應引導學生反思公共決策的公平性問題，即公共決策不能犧牲人性尊嚴，若造成人體健康或環境不可逆轉的侵害，即應被拒絕或禁止。
3. 雖然五年級的學生仍無法使用較複雜的數學評估增加農藥使用的人體健康與環境汙染的成本數值，但教師仍可以引導學生思考：「若農藥的使用會使人造成無法恢復的侵害，這樣可以嗎？」可藉此帶進人權的絕對保障觀念。甚者，也可詢問：「你們知道若遇到汙染的狀況，可以如何尋求救助嗎？」藉此讓學生認識汙染的通報機制，帶出學生行動面的學習。

## 二、國中組—直角三角形的三角比

### (一) 教學設計理念說明

#### 1. 背景

原先在 83 年課程標準、74 年課程標準與 61 年課程標準均有放入銳角三角函數的內容，以 83 年課程標準所出版的數學教科書(國立編譯館，2000)為例，將銳角三角函數放到第六冊的選修數學，其標題為「銳角三角函數及其簡易應用」，在基礎篇中，課本營造問題情境，並界定鄰邊、對邊與複習相似形的概念，而後教授兩個特殊直角三角形( $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ 與  $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ )的邊長比，才介紹正弦、餘弦與正切函數的概念，至於餘切、正割與餘割函數的概念因時間與篇幅關係略去不教，並明確說明商數關係、平方關係與餘角關係；在應用篇中，課本介紹作圖法、查表法與運用電算器求三角函數值，之後進行三角函數的簡單應用。

#### 1. 設計理念

自九年一貫實施後，三角函數這個單元已經沒有再出現於國中的課程綱要與教科書中，雖然高中數學課程也對此單元做了鋪陳，然而整體成效已不如早期課程安排分屬於國中、高中二階段的學習方式。因此十二年國民基本教育數學領域課程綱要參考以往的數學課程標準與其他國家的做法，以及考量三角函數的學習銜接與成效，將直角三角比放入國中階段的九年級教授。教學內容聚焦在直角三角形特殊角的邊角性質與應用，並引入計算機，至於在以往課程所教授的三角函數關係：倒數關係、平方關係與商數關係與餘角關係，則延後至高中數學教授。

### (二)教學單元案例

領域/科目	數學	設計者	原作者：鄧家駿教師、曾明德教師 改寫者：莊國彰校長、賴政泓教師
實施年級	九年級	總節數	共 5 節，225 分鐘 ( 摘錄 2 節 )
單元名稱	直角三角形的三角比		
設計依據			
學習重點	學習表現	S-IV-12 理解直角三角形中某一銳角的角度決定邊長的比值，認識這些比值的符號，並能運用到日常生活的情境解決問題。	核心素養 數-J-A2 具備有理數、根式之運作能力，並能以符號代表數或幾何物件，執行運算與推論，在生活情境或可理解的想像情境中，分析本質以解決問題。 數-S-A2 具備數學模型的基本工具，以數學模型解決典型的現實問
	學習內容	S-9-5 直角三角形的三角比：對直角三角形的一個銳角定義「斜邊」、「鄰邊」、「對邊」，並引	

		入符號 $\tan A$ 、 $\sin A$ 、 $\cos A$ ；直角三角形內，給定一邊的長和一個銳角的角度，決定另一邊的邊長。(學生無使用計算機時，角度限於 30 度、45 度、60 度)。		題。瞭解數學在觀察歸納之後還須演繹證明的思維特徵及其價值。 數-J-B1 具備處理代數與幾何中數學關係的能力，並用以描述情境中的現象。能在經驗範圍內，以數學語言表述平面的基本關係和性質。 數-J-B2 具備正確使用計算機以增進學習的素養，包含知道其適用性與限制、認識其與數學知識的輔成價值、並能用以執行數學程序。
<b>議題</b>	<b>學習主題</b>	校園安全		
<b>融入</b>	<b>實質內涵</b>	安 J8 演練校園災害預防的課題。		
<b>與其他領域/ 科目的連結</b>				
<b>教材來源</b>				
<b>教學設備/資源</b>		方格紙、直尺、捲尺、量角器、計算機。		
<b>學習目標</b>				
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 認識坡度的計算方式，即直角三角形中某一銳角的對邊與鄰邊的比值。</li> <li>2. 透過製圖、測量發現不同坡度的直角三角形與所對應的銳角度數的關係；相同坡度，大小不同的直角三角形，其對應的銳角度數相等。</li> <li>3. 認識直角三角比 <math>\tan A</math>、<math>\sin A</math>、<math>\cos A</math> 的意義。</li> <li>4. 計算特殊角的直角三角比。</li> <li>5. 透過計算機的直角三角比 (<math>\tan A</math>、<math>\sin A</math>、<math>\cos A</math>) 的按鍵，幫助解決生活中的應用問題。</li> </ol>				
<b>教學活動設計</b>				
<b>教學活動內容及實施方式</b>			<b>時間</b>	<b>備註</b>
引起動機： 以生活中險升坡的交通標誌，引起學生對於坡度的好奇心。 在網站的自行車討論綜合區出現以下的照片與一長串的討論：			5 分鐘	



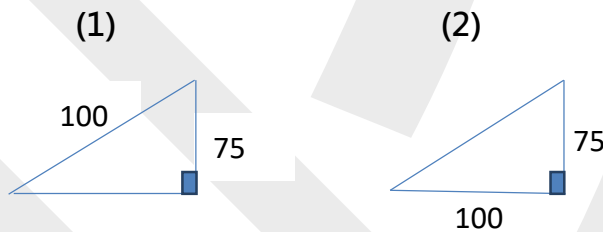


阿文：「這是環島時拍到的，這個交通標誌是不是標示錯誤！」

小堅：「忘了點小數點吧，或者是你漏看，如果是 7.5%，看起來滿像的。」

阿文：「真的是寫 75% 不是 7.5%，google 地圖，附上連結，可以看到 google 上面的照片，」

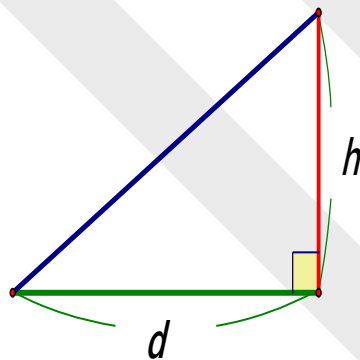
**任務一**：請畫出該險升坡，並在圖中呈現「75%」這個訊息。



教師可以請學生指出學生手冊上所描述「75%等於是每前進 100 公尺會上升 75 公尺。」的圖形是他們所畫的哪一個？

**結論：**

坡度的意義和表示方式：  
以坡面上兩點間的「高度差」  
除以兩點間的「水平距離」，  
即  $T(\text{坡度}) = \frac{\text{高度差}}{\text{水平距離}} = \frac{h}{d}$ ，  
其中  $h$  表示高度差， $d$  表示  
水平距離。坡度在道路上的  
標示常以「百分率」的形式  
出現。



藉由畫圖的方式，引導出學生將生活情境的問題抽象成數學情境。

因為此目標是要學生了解坡度的意義，尚無需在方格紙上作圖。

10 分鐘

總結學生的討論與引導，依據學生手冊上的說法，將每前進 100 公尺解釋成水平距離，而不是斜邊（實際路面）。

**任務二**：給定 75% 和 7.5% 的坡度，讓學生在方格紙(附件一)上畫出對應的直角三角形，並以量角器量出此角的角度。

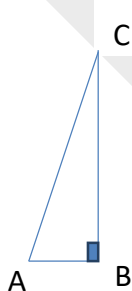
1. 建議在製圖前先跟學生約定製圖時的水平方向與斜邊繪製的位置，以確認學生知道測量角度是指水平方向與斜邊的夾角。
2. 學生可能的答案：  
學生使用量角器測量兩個直角三角形的角度，「坡度 75%」大約是 36~37 度，另一個「坡度 7.5%」大約 4~5 度。
3. 學生在畫坡度 7.5% 時，有的會反應方格紙不夠大張，教師可以透過約分或擴分來提示，例如  $\frac{7.5}{100} = \frac{75}{1000} = \frac{3}{40} = \frac{?}{20} = \frac{?}{4}$ 。

**課堂討論(一)：**

坡度(比值)相同時，可由 SAS 相似條件得知三角形皆相似，並依三角形相似性質可得此時：水平方向與斜邊的夾角相同。

**任務三**：讓學生繪製一個  $\angle A = 60$  度的直角三角形，計算其坡度，並討論與「坡度 75%」、「坡度 7.5%」的直角三角形比較。

1. 跟學生約定將  $\angle A = 60$  度擺放在水平方向與斜邊的夾角。



2. 仍請學生繪製在附件一的方格紙，以方便跟「坡度 75%」、「坡度 7.5%」的直角三角形比較。
3. 學生估算出來的坡度，是透過直尺測量高度  $h$  (60 度的對邊長)、水平距離  $d$  (60 度的鄰邊長)，將高度  $h$  除以水平距離  $d$ ，可以得到比較好的估算結果約為 1.7 左右。

15 分鐘

讓學生思考同一坡度的直角三角形，畫出來可能大小不盡相同，但量出來的角度應是「大約」相等或是「必定相等」。

讓學生思考如何在有限範圍的方格紙中，畫出 75% 和 7.5% 的坡度(相似形性質的應用)

15 分鐘

學生在此須思考並決定此直角三角形的水平距離。讓學生使用量角器畫出 60 度角。

**課堂討論(二)：**

角度相同時，可由 AA 相似條件得知三角形皆相似，並依三角形相似性質可得此時：高度與水平距離的比值相同。

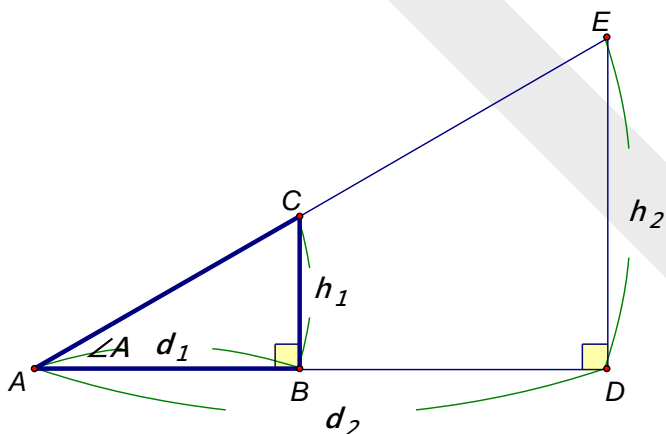
**第一節結束**

**任務四**：繪製「坡度 1」的直角三角形，來推算角度。

**任務五**：繪製  $\angle B = 45^\circ$  的直角三角形，來推算坡度。

**結論：**

由前面的兩個任務可以發現，兩個直角三角形，當銳角的角度相等時，其  $\frac{h}{d}$  的比值也會相等。  
同樣地，兩個直角三角形，當它們  $\frac{h}{d}$  的比值相等時， $h$  的對角角度也會相等。



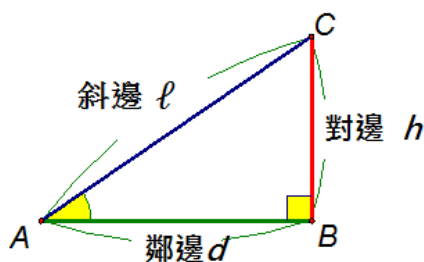
讓學生思考，當角度相同，大小不同的直角三角形，其坡度應是「大約相等」或是「必定相等」。

呼應課堂討論(一)，並由此題得到精確角度。

20 分鐘

呼應課堂討論(二)，並由此題得到精確比值。

■直角三角形中，對於某一個銳角而言，介紹其鄰邊與對邊。



### 由坡度的計

$$\tan A = \frac{h}{d} = \frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}, \text{ 舉例並計算}$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3} \approx 1.732 \text{ 呼應 } \boxed{\text{任務三}} \text{ 的結果。}$$

實例：無障礙坡道的規定

在公共空間，如校園、公園等等，常設有無障礙坡道來方便使用輪椅或行動不便者的通行。

而根據內政部營建署《建築物無障礙設施設計規範》，無障礙通路之設計需符合以下規定。

- (1) 坡道之坡度（高度與水平長度之比值）不得大於 1 : 12。
- (2) 坡道之起點及終點，應設置長、寬各 150 公分以上之平台。此處的長，指的是水平長度，而非斜面的長度。
- (3) 坡道的中間應設置適當數量的平台，使得每段坡道的高差不超過 75 公分，且平台的水平長度至少 150 公分。
- (4) 各平台之坡度不得大於 1 : 50。

**任務六**：請同學先想像其能接受的無障礙坡道，其坡面與水平地面的夾角  $B$ 。並根據規定(1)，請繪製坡道之坡度（高度與水平度之比值）等於 1 : 12 之直角三角形。

**任務七**：利用  $\tan A$  的定義，使用計算機估算角度  $A$ ，其中  $A$  為坡道與水平地面的夾角，並且討論此角度  $A$  與學生想像中無障礙坡道的角度  $B$  之大小關係。

### 算引入

呼應了學習內容 S-9-4 相似直角三角形邊長比值的不變性：直角三角形中某一銳角的角度決定邊長比值，該比值為不變量，不因相似直角三角形的大小而改變。

5 分鐘

讓學生利用計算機嘗試，並估算滿足  $\tan A = \frac{1}{12}$  的角度  $A$  ( $A$  約在  $3^\circ$  和  $4^\circ$  之間)

10 分鐘

學生可經由測量無障礙坡道的高度和水平長度，並得到其比值；或直接測量坡面與水平地面的夾角，利用  $\tan A$  的比值，來判斷是否符合規定。

<p><b>任務八</b>：實際測量或計算校園中無障礙坡道的坡度是否滿足規定(1)坡道之坡度（高度與水平長度之比值）不得大於 1：12？</p> <p><b>任務九</b>：與學校商借輪椅，讓學生親身體驗無障礙坡道使用的心得。</p> <p style="text-align: center;"><u>第二節結束</u></p>	10 分鐘	<p>融入安全教育議題，激發學生對「無障礙坡道使用者」的同理心，與幫助行動不便者的愛心。</p>
<p>試教成果：</p>		
<p>參考資料：</p> <p>本教案改寫自「素養導向教學模組-直角三角比單元」之學生手冊與教師手冊</p> <p>網址：<a href="http://12cur.naer.edu.tw/category/post/277">http://12cur.naer.edu.tw/category/post/277</a></p>		
<p>附錄：</p>		

### 三、高中組—科學記號與 10 的冪次

#### (一)教學設計理念說明

##### 1. 背景

107 課綱將科學記號的運算從國中移到高中，指對數中的「10 的冪次」、「認識常用對數的符號」與「計算機的使用」皆在高中課程中第一次出現。

##### 2. 設計理念

以往的課程安排，「科學記號的運算」是在國一上學期，待國二學習理化的時候才使用，這對許多學生來說，造成一些學習上的困難。現今國中的理化課程已將科學記號使用的部分簡化，所以 107 課綱將其移至高一（10 年級），並建議它出現在上學期的第一章，不僅能使國高中的課程銜接順暢，也顧及學生學習的成熟度。同時，「10 的冪次方與常用對數符號」原本為高一上學期第三章「指對數函數」的一部分，基於新課綱『先（高一）建立以符號表達數量的基本觀念，第二次教學（高二介紹指對數函數）再進入形式運思，也就是抽象概念與代數性質』的精神，這裡的教材應著重培養數量感與符號理解。

在資訊流通量爆炸的時代，如何使用正確的數學語言來溝通，培養正確的數感，是科學素養的一部分。本單元教材選取了高中生所知道的自然科學情境中，使用數學來處理極大數與極小數的那一部分，連結到數學知識與符號的使用，在情境中解決數學問題、學習使用計算器輔助，同時體會到符號出現的脈絡與必要性，達到符合數學素養教材的目標。本單元教材並融入了「安全教育」議題。

#### (二) 教學單元案例

領域/科目	數學科		設計者	吳汀菱、洪瑞英
實施年級	十年級		總節數	共 4 節，200 分鐘
單元名稱	科學記號與 10 的冪次			
設計依據				
學習重點	學習表現	n-V-1	核心素養	B1 符號運用與溝通表達
	學習內容	N-10-1、N-10-4		B2 科技資訊與媒體素養
議題融入	學習主題	安全教育概論		
	實質內涵	安 U1 預防事故傷害的發生。		
與其他領域/科目的連結	物理、化學			
教材來源	自編教材			
教學設備/資源	計算機、A3 紙張若干、膠帶。			
學習目標				
1. 理解「取三位小數」、「準至千分位」、「以兩位有效數字作計算」等類型的語言，並能用以溝通，				

例如將任意數依指令寫成正確的概數。

2. 能操作科學記號的加減乘除運算。
3. 能使用計算機做四則運算、計算  $10^x$  的值、計算  $\log x$  的值，並明白其值僅為估計。
4. 能用計算機的  $x^y$  功能，探索形如  $(1.01)^x = 2$  之方程式的近似解。
5. 能轉換科學記號數字與 10 的冪次，藉以理解  $\log$  數值之整數與小數部分的意義，並建立 10 的冪次與對數的數感（亦即不使用計算機而粗略估計 10 的冪次或對數的值）。
6. 理解  $\log a$  的意義就是  $10^{\log a} = a$ ，其中  $a$  為正數。反之，任意正數  $a$  都可以改寫成  $10^{\log a}$ 。能用  $\log$  符號紀錄或表達數值。

### 教學活動設計

教學活動內容及實施方式	時間	備註
<p>下列活動皆為分組進行，兩人一組。</p> <p>活動一：</p> <p>觀察計算機計算出極大數或極小數的結果時，請學生猜測螢幕上顯示的符號意義，再介紹科學記號的表示法及其加減乘除的運算。</p> <p>活動二：</p> <p>教師帶領閱讀科普短文「宇宙的大小」，並將學生分組進行文中引導的摺紙活動，將太陽系中的所有行星相對位置摺在一長條紙上，並作記號，最後，請同學思考要如何驗證其正確性。</p> <p>學習單列出將各行星到太陽之間的距離(以科學記號表示)，學生可以利用計算機進行運算，驗證摺紙出來的結果是否正確。</p>	<p>15 分鐘</p> <p>35 分鐘</p>	<p>為避免少數學生對於文中敘述無法理解，教師可以從旁協助。</p>

活動三:

小丁負責籌畫社團晚會，為了營造氣氛，他決定購買一些固體乾冰。

小丁購買回家之後，發現外包裝有下列警語:

“在低濃度時，二氧化碳氣體是無味的，但在較高濃度時會使人感到刺痛甚至窒息。這是因為當吸入濃度比大氣層平常濃度(二氧化碳約占 350ppm)高很多的二氧化碳時，氣體溶解在黏膜和唾液中，產生了碳酸，所以會有酸的味道且鼻子和喉嚨會產生刺痛感。

研究發現，二氧化碳高於 5,000 ppm 的時候，會影響健康，而高於約 50,000 ppm 的濃度(相當於空氣中 5%的體積)被認為是有危險性的。”

小丁想:糟糕，我買了這麼多乾冰(10 公斤!)，而晚會場地為密閉空間，那會不會造成危險呢?

我們來幫他想一想:

1. 二氧化碳的分子量為 44，表示一莫耳的  $\text{CO}_2$  重量為 44 公克，一莫耳物質中含有約  $6 \times 10^{23}$  個粒子，廠商將乾冰切成每一小塊為正立方體，邊長為 3cm，又已知乾冰密度為  $1.56\text{g/cm}^3$ ，請問每一小塊固體乾冰裡，有多少個  $\text{CO}_2$  分子呢?
2. 若不計空氣中原有的  $\text{CO}_2$  的濃度，10 公斤乾冰全部變成二氧化

20 分鐘

融入環境議題中的公共安全教育。提醒同學塵爆事件的教訓，在規劃團體活動時應提高警覺，注意安全。

如何估計教室



<p>碳氣體，請幫忙計算晚會場地的體積至少要多少立方公尺，才不會影響健康？</p> <p>3. 再估計一下，這個場地大約是幾個你們的教室大小呢？</p>	<p>40 分鐘</p>	<p>大小，可請師生發揮創意，不拘泥於精確的答案。</p>
<p>活動四:</p> <p>1. 阿丁在實驗室,發現有兩瓶鹽酸，一瓶內含 pH 值為 3 的鹽酸 1 公升,另一瓶內含 pH 值為 4 的鹽酸 1 公升,他將兩溶液混合在一起,請問混合溶液的 pH 值為多少？</p> <p>2. 將 pH 值為 3 的鹽酸與 pH 值為 4 的純水，所以取體積分別為 1 公升與 3 公升，將兩溶液混合在一起，請問混合溶液的 pH 值為多少？</p>	<p>25 分鐘</p>	<p>應先了解學生是否懂得莫耳濃度計算的方法。</p>
<p>活動五:</p> <p>利用計算機探索 10 的幾次方是 5.5。</p> <p>利用 <math>y^x</math> 鍵學習輸入計算 <math>10^{0.2}</math></p> <p>輸入 10 → 按下 <math>y^x</math> 鍵 → 輸入 0.2 → 顯示</p> 	<p>10 分鐘</p>	<p>在活動四中，發現無法直接得到 pH 值，所以才進行活動五探討 10 的幾次方會是 5.5。</p> <p>活動完畢，回頭將剛才計算出的濃度都換</p>

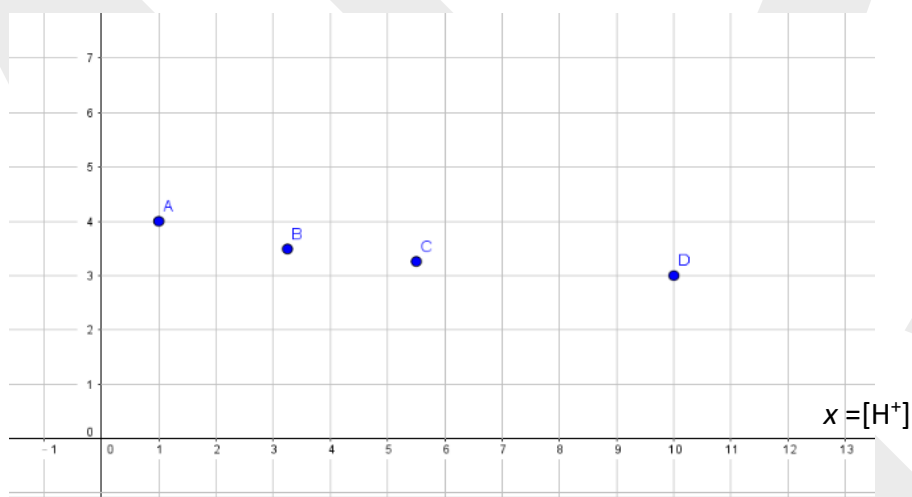
由上述計算氫離子濃度與 pH 值得到的結果，我們可以將其中 4 個資料製成一個表格：

[H <sup>+</sup> ]	10 <sup>-1</sup>	10 <sup>-2</sup>	10 <sup>-3</sup>	5.5×10 <sup>-4</sup>	3.25×10 <sup>-4</sup>	10 <sup>-4</sup>	10 <sup>-5</sup>	10 <sup>-6</sup>	10 <sup>-7</sup>
pH	1	2	3	3.26	3.49	4	5	6	7

如果將這些資料，畫在一個橫軸為[H<sup>+</sup>]，縱軸為 pH 值的坐標軸上，則上面這些資料點是否符合「[H<sup>+</sup>]與 pH 值為線性關係」？

下圖為氫離子濃度與 pH 值的關係圖，可以發現這些點並不在一直線上：

y = pH 值



A(1×10<sup>-4</sup>,4) · B(3.25×10<sup>-4</sup>,3.49) · C(5.5×10<sup>-4</sup> , 3.26) · D(10<sup>-3</sup>,3)

活動六：

將一張厚度為 0.1mm(公釐)的紙，對摺再對摺，一直對摺多少次之

算出其 pH 值。

網路上有不少關於將紙對摺後厚度的討論

後，它的厚度會超過 1 公里呢？

活動七：

計算機有沒有功能可以直接求出  $x$ ，使得  $10^x=2$  ？

試試看： 輸入 2 → 按下 log 鍵 → 顯示？



符號  $\log 2=0.3010$  表示甚麼呢？ 你能再求出  $\log 4$  與  $\log 5.5$  嗎？

利用計算機，完成下列表格:(四捨五入到小數第四位)

$x$	$\log x$	$10^{\log x}$
2		
3		
4		
5		
5.5		
7		
8		
9		
10		
20		
21		
38		
520		
1314		
100000		
0.01		

20 分鐘

與影片，老師也可以稍加補充。

5 分鐘

30 分鐘

這裡可以與同學討論一下關於計算機產生誤差的原因。

0.0002

有沒有甚麼發現呢?你能解釋為什麼嗎?

原來  $10^{\log x} = x$ !

受限於計算機的顯示，我們只能找到  $\log x$  的近似值，不過，當  $x=10^1, 10^2, 10^4, 10^{-3}, \dots$  時(為 10 的整數冪次)，它的值就會是整數(也就是這個冪次方的大小)。

**對數的定義:  $a$  為實數，若  $10^a = x$ ，則  $a = \log x$**

從定義可以知道，因為  $10^a$  必為正數，因此  $\log x$  中的  $x$  必為正數。

**【任務】**

- 1.想一想: $\log 200$  大約是多少?你怎麼得到這個結果的?
- 2.想一想: $\log 56789$  的值，整數部分是多少? 你怎麼得到這個結果的?
- 3.想一想: $\log 0.000001 = ?$

**試教成果 : ( 非必要項目 )**

**參考資料 : ( 若有請列出 )**

1.宇宙的大小 2013/06/27 作者：Shane L. Larson、翻譯：黃于薇

<http://pansci.asia/archives/43718>

原文出處

<https://writescience.wordpress.com/2013/01/19/the-size-of-the-cosmos/>

2. 乾冰使用不當的新聞報導

<https://kknews.cc/zh-tw/entertainment/qy3kp6r.html>

附錄：

## 捌、新舊課綱之課程實施銜接分析與建議

十二年國教數學領綱承續國中小九年一貫課綱及普高 99 課綱的基礎，納入核心素養的理念加以深化與統合而成，並依照不同教育階段逐年實施。因此本章目的在提出新舊課程綱要銜接分析與建議，主要針對學生從六年級（使用舊課綱）升上七年級（使用新課綱），以及九年級（使用舊課綱）升上十年級（使用新課綱）時，因為學習內容中知識點的缺漏或新增，以及學習內容的差異所產生的銜接需求，進行分析與銜接建議，以提供教材編選與教學實施之參考。

### 一、新舊課綱之課程實施銜接分析

數學領域課程綱要研修採取「減法原則」，銜接所產生的問題極小，都可以在課堂內調整達到銜接目的，詳細請參見下面分析及建議。

### 二、新舊課綱之課程實施銜接建議

十二年國民基本教育數學領域課程綱要（六升七年級）概念銜接與補充建議表

主題	學習表現 /學習內容	年段		教學實施配套
		十二年國教	九年一貫	
D-6-2 解題：可能性	從統計圖表資料，回答可能性問題。機率前置經驗。「很有可能」、「很不可能」、「A比B可能」。	6年級新增	無	9年級於D-9-2(認識機率)條目之前，於適當時機教授，預計一節課
備註	在九年一貫9年級的課程內容有兩圓關係、能理解多邊形內心與外心的意義和相關性、二次函數的配方與其應用問題、百分位數，但在107課綱已將這些內容刪除或移至高中(請參見附錄一)，並且將九年一貫9年級的課程內容的統計圖表與統計數據調移至7年級、統計資料處理調移至8年級。雖然新增了直角三角形的三角比(S-9-5)和空間中的線與平面(S-9-13)，估計尚有很充裕的時間調整出一節課作為D-6-2(解題：可能性)的銜接課程教學。另一方面，在D-9-2(認識機率)的教學前，先作D-6-2的機率前置經驗的學習，更加促進學生對機率學習的效率。			

十二年國民基本教育數學領域課程綱要(九升十年級)概念銜接與補充建議

主題	學習表現 /學習內容	年段		教學實施配套
		十二年國教	九年一貫	
S-7-2 三視圖	立體圖形的前視圖、上視圖、左(右)視	7年級新增	無	三視圖加強學生對於空間概念的成熟度，在國

主題	學習表現 /學習內容	年段		教學實施配套
		十二年國教	九年一貫	
	圖。立體圖形限制內嵌於 $3 \times 3 \times 3$ 的正方體且不得中空。			中階段已經發展到 S-9-13 的條目內容。所以高中階段僅作 S-9-13 的銜接教學。
<b>N-8-6 等比數列</b>	等比數列；給定首項、公比計算等比數列的一般項。	8 年級新增	無	10 年級於 N-10-6 講解遞迴數列時融入，預計一節課。
<b>S-9-5 直角三角形的 三角比</b>	對直角三角形的一個銳角定義「斜邊」、「鄰邊」、「對邊」，並引入符號 $\tan A$ 、 $\sin A$ 、 $\cos A$ ；直角三角形內，給定一邊的長和一個銳角的角度，決定另一邊的邊長；學生無使用計算機時，角度限於 30 度、45 度、60 度。	9 年級新增	無	10 年級於 G-10-6 條目之前，於適當時機教授，預計三節課 <sup>①</sup> 。
<b>S-9-13 空間中的線與 平面</b>	長方體與正四面體的示意圖，利用長方體與正四面體作為特例，介紹線與線的平行、垂直與歪斜關係，線與平面的垂直與平行關係。	9 年級新增	無	10 年級於 G-10-7 條目之前，於適當時機教授，預計一節課 <sup>①</sup> 。
<b>備註</b>	①107 課綱在 10 年級的課程內容有絕對值、科學記號的運算、二次函數配方、百分位數，但九年一貫的國中生已習完這些單元，預估可以省下六節課。			

## 玖、實施要點重點說明

為達成十二年國教數學課程目標之第一點：「提供所有學生公平受教、適性揚才的機會，培育其探索數學的信心與正向態度」，數學領綱在「實施要點」提出兩項重點：「數學差異化教學」和「數學奠基活動」，本章針對這兩點說明如下：

### 一、數學差異化教學

相對於把班級學生視為均質的群體，差異化教學為教師根據班級學生在學習特徵、準備度、以及興趣等諸多面向之不同，透過多樣的教學設計，極大化學生之學習參與。教師在擬定教學計畫時應考量到學生的背景、學習準備度、學習興趣、語言、以及學習條件，識別其個別需求，提供適當的學習支持，幫助每一位學生發揮其潛能，以達到最佳的學習效果。差異化教學的先決條件在於識別學生的學習準備度，其教學基礎建立在經由評量了解學生的特質。「形成性評量」為差異化教學的核心。進行差異化教學時，教師必須運用形成性評量蒐集學生的學習證據，進行學習診斷，瞭解不同學生學習現況與學習目標之間的差距，識別其學習問題、困難和迷失概念；從而在學生現有的學習基礎上，進行相應的教學活動，幫助他們達到學習目標。

再者，差異化的教學設計須提供不同程度學生最大的學習參與機會，這也是十二年國教數學領綱理念的實踐。數學差異化教學的活動與評量應圍繞著此一理念而展開，鼓勵與邀請所有學習者參與課堂學習活動。在課程計畫與實施的過程中，教師可就「課程內容」、「實施過程」、「學習成果」、「情意感受」、以及「學習環境」等五項要素上，設計多層次的差異化教學活動，提供有感的學習機會，照顧學習需求不同的孩子。相關文獻建議有效的數學差異化教學有以下四種作法：

1. 根據同一教學目標，提供兩個或以上能搭配學生程度的類似任務，讓不同學習能力的學生獲得適合自己程度的學習任務，對於數學學習單元賦予類似任務可有效驅動學生進行分組討論。
2. 為教學目標設定不同層次，提供對應的活動讓一般程度與低程度學生有精熟指定目標的機會，並避免高成就學生將學習時間浪費在反覆練習上。
3. 運用與其他學科能力結合的多中心小組活動，讓數學學習有困難的學生，除了接受數學能力較佳的同學協助之外，仍能運用自己較佳的其他能力（如演說或繪圖等），在小組活動中做出貢獻，提升學習成就感。
4. 設計多種答案的問題或是多元解題路徑的問題（開放性問題），最好是「低地板、高天花板」，使得學習低成就學生能夠參與解題，同時讓高成就學生覺得問題具挑戰性，鼓勵所有學生參與課堂學習。

數學差異化教學的案例，可參考國家教育研究院的「協力同行」網站項下的「課綱實施支持資源」/「十二年國教領域課綱素養導向教材教學模組」/「數學領域」。網址：<http://12cur.naer.edu.tw/category/post/277>



## 二、數學奠基活動

數學奠基活動的最大特點就是「數學好好玩、好好玩數學」！

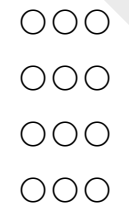


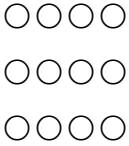

既有知識與經驗的建立與充分連結是促進有感學習的基礎。數學抽象化的本質與太快速形式化的教學模式，在在讓學生對數學怯步，呈現「低學習動機」的現象。數學的奠基活動主要是在正式上數學課之前，提供學生充分參與活動的機會；活動歷程中，啟動學生思考而激發內在動機，因而建立其對相關內容的具象經驗，確實奠立未來課室內有感數學學習的基礎。例如：動手操作、數學遊戲、數學繪本閱讀等等。

數學奠基活動的重要特性就是「有感學習」。學生藉由操作奠基活動將自己遊戲中的所感、所知用自己的語言表達出來，沒有被框架限制住思維的自然語言。學生試著去分類、歸納、比較、梳理活動中蘊含的數學屬性，保持一顆探究的心，學習便能長長久久。

以奠基遊戲「長方形數」為例。學生透過操作不同數量的圍棋，具體圍出型式不同的長方形，而組成這個長方形的圍棋數量則稱為「長方形數」。學生在動手操作的過程中討論、分類與歸納「長方形數」的正例與非例，並搭配競賽計分的方式，激發學生求知的慾望。

舉例來說，如圖 1，甲學生排出每列三顆棋子共四列或每列四顆棋子共三列的長方形圖形，「12」便是一種長方形數。學生更能在活動中理解並歸納這兩種型式的長方形圖形經旋轉後為同一種長方形；如圖 2，乙學生排出每列兩顆棋子共兩列的長方形圖形，「4」亦是一種長方形數。學生在操作討論的遊戲過程中，將很自然地辨識出「4」不但是一種長方形數，亦是一種正方形數。正方形是一種特殊長方形，包含在長方形中的有感學習便悄然發生。

更因為每顆棋子視為一個點，排成一直線的圖形不是一種長方形數。如圖 3，當有學生發現「7」只能排出一列 7 顆棋子的圖形，既然不是「長方形數」，他便將「7」這種數因為沒人可得分而稱為「不分數」或可不讓對手得分的「勝利數」。學生在有感學習後說出的語言當然沒有數學的嚴謹性或共通性，但卻在遊戲歷程中奠下了未來學習「質數」的具體心像。

		
或 		或 
圖1	圖2	圖3

教師因為學生的有感學習，教學更有信心，持續不斷去做，實質上就有不同層次的教學能量提升，教學相長的意涵莫此為甚。

引導學生進行數學奠基活動的注意事項:

- 一、絕大部分活動時間都應提供給學生玩。教師的介入要控制在大約總時間的六分之一以內，其餘時間都應提供給學生玩，教師以清楚說明活動規則為主。
- 二、數學奠基活動的評量，以形成性評量當下的觀察為主。例如學生在動作表徵與圖像表徵間交錯來回操作，建立具體心像的過程；以及在符號表徵下受惠於「符號化」的功能，進行「一般化」的推理，都是評量的重點，學生活動後的工作單回饋則是重要的教學材料，可提供教師正式上課前參考。
- 三、數學奠基活動的遊戲，如果有些學生不能有感在玩，教師應適度簡化遊戲的認知負荷，例如八張牌降為四張牌(從 8 個數相加減到 4 個數相加)，換句話說，同樣的遊戲，一班學生玩的“負荷”可以不同。

數學奠基活動的案例，可參考國立臺灣師範大學之「數學教育中心」網站。網址：  
<http://www.sdime.ntnu.edu.tw/main.php>

Q 問題	A 回答
Q1：十二年國教和九年一貫的數學課程理念差異為何？	<p>A1：</p> <p>一、<b>素養培養</b>：十二年國教數學課程理念強調核心素養的培養，為下一代的進階學習與職涯發展做好準備，促成社會的良好運作以及個人人生目標的實現，符合世界主要國家在新一波的數學教育改革的趨勢，這與以往九年一貫課程強調基本能力的開展相當不同，新課程強調培養有能力、有意願進行終身學習的學習者，能解決生活情境中所遇到的問題，並能因應社會與時代變遷而不斷自我精進。</p> <p>二、<b>機會均等</b>：把每一位學生帶上來、適性揚才是十二年國教的重要理念，也是數學教育「公平」理念的實踐，故十二年國教數學教育的重要目標為提供所有學生公平受教、適性揚才的機會，培育其探索數學的信心與正向態度，這與九年一貫的課程目標相當不同。</p> <p>三、<b>層次明確</b>：十二年國教的數學內容安排注重學習的層次性，從直觀的學習開始，逐步進到抽象的層次。以國中幾何主題為例，七年級為「直觀幾何」、八年級為「測量幾何」、九年級為「論證幾何」。同樣的道理，在規畫指數、對數、三角等學習內容時，先從數的觀點出發，之後才切入函數的概念、畫函數圖形、求導函數、函數積分等等。</p>
Q2：學生在數學學習成果落差很大，對於落後學生，有何規劃？	<p>A2：課綱於「實施要點」鼓勵教師於課堂中進行差異化教學，提供所有學生學好數學的機會，並規範對於學習落後的學生，學校及教師應考量其學習方法、學習態度與學習能力，發展補救教學課程。在國中小階段，可運用彈性課程時間及時補救；並於高一上學期，針對會考成績不力的學生，要求各校設計「基礎數學」課程，補足其應有的數學基礎能力。另外，為了達成適性揚才的目標，所以數學領綱在高二規劃了 A、B 兩類課程，並鼓勵各校可發展各類選修課程，為學習落後學生提供學好數學的機會。</p>
Q3：為何十二年國教數學課程要於學習重點引入計算機？	<p>A3：為符合國際教育趨勢，並發展學生能運用計算機進行數學探索與建模以及<b>正確使用計算機的態度</b>，因此於十二年國教數學課程加入計算機的相關內容。由於計算機的計算有一定的誤差，</p>

<p>有何配套措施？</p>	<p>應強調其使用時機及侷限。學生在熟練計算原理後，為避免繁複計算因而降低學習效率，可適當使用計算機，執行複雜數字、統計數據、指數、對數及三角比的計算。實施時機以國、高中階段為宜。教師可在適當時機使用電腦輔助教學。</p> <p>為落實計算機教學，有別於歷年數學課程綱要僅在實施要點內敘明教學可使用計算機，本次學習重點特別在適當條文中，納入教導使用計算機的方法及正確態度。此外，領綱研修團隊建議教育部於大型入學考試中，允許考生使用計算機。</p>
<p>Q4：引入計算機可能造成許多問題(例如：城鄉差距、學生過度依賴等)，其因應方式為何？</p>	<p>A4：提供計算機的規格建議，讓業界、課綱和考試，都有所依循，並諮詢業界意見，確定符合規格的計算機價格是合理的。再者，計算機教學是從七年級開始，小學階段先培養好基本的算術操作能力，了解算則的基本原理，強調計算機使用的<b>正確態度</b>。</p>
<p>Q5：研修過程中，如何確保數學課程一到十二年內容的連貫性？</p>	<p>A5：由於九年一貫課程已確立國中、國小課程內容的連貫，十二年國教課程研修參酌九年一貫課程的課程架構，以確保國中、小課程的連貫性；並於高中課綱研修時，以九年級數學學習內容/表現，當做十年級學生的起點行為，以確保國、高中課程的連貫性。再者，在研修機制中，由召集人運用核心會議，讓國小、國中、高中階段數學領綱副召集人共同討論與確定課程內容的連貫，並經全體委員會議討論與確認課程內容的連貫性。</p>
<p>Q6：時常有其他科目已經用到數學的概念，可是數學教師卻還沒教到，課程銜接不上，如何與其他科目連結？</p>	<p>A6：數學做為其他學科學習的基礎，為確保課程內容能服務其他學科學習的需要，並能與其他學科做統整，課綱研修機制運用領綱研修聯席會議，讓各領綱正、副召集人能彼此討論與交流課綱研修的規畫與內容，期能使各領域的學習重點能夠統整與沒有無謂重複之處。</p>
<p>Q7：數學做為語言與工具學科與其他各學科的課綱協作有何規劃？</p>	<p>A7：數學為科學之母，除了在國中階段介紹三角比與三角符號外，在高一也介紹對數符號，提供基礎科學學科教學使用。另外並提供相關有關按比例成長或衰退的數學模型、地震及週期現象等自然或科學現象教材進行說明。</p> <p>對於社會學科的教學協作，除了既有的機率統計內容外，也針對社會組學生的地理經緯度與經濟學中的連續複利、邊際意涵及金融與理財進行介紹。</p> <p>針對藝術設計等學科包括相關比例等生活情境與平面幾何的</p>

比例設計概念進行教學。

## 第二部分 國民小學教育階段篇

Q 問題	A 回答
Q1：十二年國教國小課綱與九年一貫課綱有哪些差異？	A1：十二年國教領綱研修小組檢視九年一貫課程實施的情況，並對中小學數學教師實施問卷調查以及進行座談會徵詢數學教育專家學者的意見，調整數學學習內容，例如：刪除等量公理、強化模式觀察、強調數學素養之培養。(詳見附件一對照表)
Q2：在第一學習階段，十二年國教比起九年一貫課綱每週多出一堂數學課，請問領綱對於多出了一節課有何規劃？	A2：相較於九年一貫課程，十二年國教課程在第一學習階段基本上未因節數增加而增加學習內容(除了初步認識單位分數)，目的是讓教師能更從容地教授數學基礎，讓學生有更充裕的時間探索數學概念與學好數學。

## 第三部分 國民中學教育階段篇

Q 問題	A 回答
Q1：國中課綱與九年一貫課綱有哪些差異？	A1：十二年國教領綱在國中階段研修有兩大原則：「連貫性」與「減法原則」。 <b>連貫性</b> ：先進國家的數學課程改革，注重「連貫」、「聚焦」與「嚴謹」，其中以「連貫性」最為重要。為達成課程連貫，本次課綱研修調整相關單元的學習年級。在九年一貫課程的基礎上，考量學生心智成熟階段，調整相關學習內容的順序，進而達成數學素養之培養。(詳見附件二對照表)。 <b>減法原則</b> ：研修小組檢視九年一貫課程實施的情況，並對中小學數學教師實施問卷調查以及進行座談會徵詢數學教育專家學者的意見，調整數學學習內容。例如：兩圓關係、圓的弦切角、二次函數配方等繁雜內容。

<p>Q2：三角比值回到國中教學對學生負擔是否太大？</p>	<p>A2：在國中階段談到的三角課題，主要為直角三角形相似性質的延伸，開啟高中職三角函數學習的序幕。許多國家皆在九年級就教授直角三角比，以英國與芬蘭為例，兩國都是在九年級從比值切入，而且是接在畢氏定理單元之後，在相似三角形單元之前教授。</p> <p>「直角三角比」的內容教授概念，先讓學生認識<b>相似直角三角形邊長比值的不變性</b>與 <math>\sin</math>、<math>\cos</math>、<math>\tan</math> 的符號。並解決簡單的三角測量問題。至於商數關係、平方關係等內容留到高中職教授。</p>
--------------------------------	--

第四部分 普通型高級中學教育階段篇

Q 問題	A 回答
<p>Q1：這次高中二年級的課綱分成 A、B 兩類，與 99 課綱分成甲、乙兩版有何不同？</p>	<p>A1：99 課綱分成甲、乙兩版，而甲版包含乙版，僅有內容多寡的差異。十二年國教數學從高二起分成 A、B 兩類不同課程，提供不同學習需求的學生選修，以達成適性揚才的理想。</p>
<p>Q2：請問不同學習需求的學生該如何選讀 A、B 兩類課程？</p>	<p>A2：學生修習數學，從高二起分為三個軌道。對於高數學需求（例如理工資電傾向）的學生，可以修習數學 A、然後修習數學甲。對於不同面向數學需求（例如商管醫農商管傾向）的學生，可以修習數學 A 或數學 B、然後修習數學甲或數學乙。對於低數學需求（例如文史法藝術傾向）的學生，可以只修習數學 B。</p> <div data-bbox="523 1368 1417 1771" style="border: 1px solid black; border-radius: 15px; padding: 10px; text-align: center;"> <p>高二起數學分為三個軌道的學習路徑圖</p> <pre> graph LR     A[高數學需求] --&gt; B[高二數學 A]     B --&gt; C[高三數學甲]     D[不同面向數學] --&gt; B     D --&gt; E[高二數學 B]     B --&gt; F[高三數學乙]     E --&gt; F     G[低數學需求] --&gt; H[高二數學 B]     H --&gt; I[高三自行選修或不選]           </pre> </div>
<p>Q3：請問 A、B 兩類課程的差異為何？如何銜接三年級？</p>	<p>A3：大抵而言 A 類課程包含 B 類課程，不過部分 B 類課程的內容係針對不同面向數學需求與低數學需求的學生所設計，而 B 類課程與 A 類課程仍保有相當程度的關聯性，以利高二選讀 B 類的學生於高三時銜接數乙。</p>
<p>Q4：現今普通型高中</p>	<p>A4：為讓綜合高中學生能於高二順利轉銜學術學程或專門學程，數</p>

<p>與技術型高中課綱的內容編排造成綜合型高中學生轉銜有很大的問題，此次課綱研修是否有因應的方式？</p>	<p>學課綱研修團隊納入部分技術型高中課綱研修委員，且領綱研修正、副召集人出席技術型高中數學領綱研修會議，以溝通、交流兩邊的想法，並適時召開普通型高中、技術型高中及綜合型高中課綱研修聯席會議，以協助綜合型高中學生順利轉銜。</p>
<p>Q5：課綱內容結合計算機使用，學校端能否準備充裕的上課器材？</p>	<p>A5：計算機在課綱的內容設定上僅需要一些基本功能，經調查，基本型計算機售價約在兩百元，一般學生應該有能力自行購買使用。對於特別困難的學生，可由主管教育行政機關協助，或請熱心團體及企業贊助。</p>
<p>Q6：課綱內容結合計算機使用，如何與未來考試有所結合，以達課程順利進行？</p>	<p>A6：數學領綱已於「實施要點」敘明全國性測驗評量宜參考國際上類似考試，准許學生攜帶標準型計算機進入考場，用以解題與作答。課綱相關會議也都有邀請大考中心研究員與會，共同研商計算機納入考試的可行性，以期達到學習與考試同步的目的。</p>
<p>Q7：未來高三課程大量開設選修課程，行政端與教學端如何搭配？</p>	<p>A7：建議以 4 至 6 個班為一個班群，共可開設 6 至 9 門課，每位教師可教授 2 至 3 門課。 開課方式建議可採同一年段結合其他科目共同科設選修課程，混班上課。 空間使用須結合專科教室及一般教室。</p>
<p>Q8：許多單元被切割，請問原因為何？</p>	<p>A8：新課綱的理念之一，將較困難單元的學習，第一次先建立以<b>符號</b>表達數量的基本觀念，第二次教學再進入形式運思，也就是<b>抽象概念與公式</b>使用的部分。所以將指對數分在高一與高二、三角函數則分成各年級都有，其中數甲的部分與現行課綱相同。</p>

## 附錄一：十二年國教數學領域課程綱要與九年一貫課程差異對照表

### 一、國民小學學習階段

主題	學習內容	年段				
		新增	分拆	調移	弱化	刪減
數與量 (N)	N-1-4 解題：1元、5元、10元、50元	一(部分新增)				
	N-2-5 解題：100元、500元	二(部分新增)				
	N-4-4 解題：對大數取概數	四(部分新增)				
	(九年一貫)3-n-11 能在具體情境中，初步認識分數，並解決同分母分數的比較與加減問題。		三→ 二、 三			
	(九年一貫)3-n-09 能由長度測量的經驗來認識數線，標記整數值與一位小數，並在數線上做大小比較、加、減的操作。		三→ 三、 四			
	(九年一貫)4-n-01 能透過位值概念，延伸整數的認識到大數(含「億」、「兆」之位名)，並做位值單位的換算。		四→ 四、 五			
	N-4-8 數線與分數、小數			三、 四、五 →四		
	N-5-6 整數相除之分數表示			四→五		
	N-5-11 解題：對小數取概數			六→五		
	N-6-5 解題：整數、分數、小數的四則應用問題			五、六 →六		
	(九年一貫)1-n-06 能做一位數之連加、連減與加減混合計算。			一→二	二	
	(九年一貫)2-n-14 能理解用不同個別單位測量同一長度時，其數值不同，並能說明原因。					二(內容保留)



(九年一貫)5-n-01 能熟練整數乘、除的直式計算。					五(內容保留)
(九年一貫)6-n-10 能理解正比的意義，並解決生活中的問題。					六
(九年一貫)6-n-11 能理解常用導出量單位的記法，並解決生活中的問題。					六

### 刪除 97 課綱(分年細目)

- 2-n-14 能理解用不同個別單位測量同一長度時，其數值不同，並能說明原因。(刪除原因：原條目太細，併入長度與一般量的探索活動。)
- 5-n-01 能熟練整數乘、除的直式計算。(刪除原因：原條目本為檢查性項目，僅刪除條文，但原條目精神併入其他教學完成。)
- 6-n-10 能理解正比的意義，並解決生活中的問題。(刪除原因：主要是刪除正比的概念，但原來相關比例文一併入比例教學，正比關係之觀察可在 R-6-2 進行，但不急著介紹更多的概念。)
- 6-n-11 能理解常用導出量單位的記法，並解決生活中的問題。(刪除原因：導出量單位較抽象，在學除速度外也缺乏其他理想又必要的範例，故保留在速度中認識即可。)
- 6-a-01 能理解等量公理。(刪除原因：教師和教科書經常進行過多教學，刪除不影響國中教學)

### 新修課綱「假」新增部分 (即本已有內容，特分開名列之部分)：

- N-2-3 解題：加減應用問題
- N-3-6 解題：乘除應用問題
- R-4-3 以文字表示數學公式
- N-5-7 分數除以整數
- N-5-9 整數、小數除以整數 (商為小數)
- R-6-1 數的計算規律
- R-6-2 數量關係
- R-6-3 數量關係的表示

### 新修課綱新增部分：

- S-3-4 立體形體與展開圖
- R-3-2 數量模式與推理 ( I )
- R-4-4 數量模式與推理 ( II )
- D-6-2 解題：可能性

### 較大移動部分：

1. 分數將小三部分提前至二年級。大致規劃：小二：初步認識單位分數，小三：簡單分數(真分數和假分數)及其運算。
2. 併式教學完全移到四年級。
3. 數線：小三整數，小四分、小數。
4. 整數相除移到五年級。
5. 統計/資料部分，圖表學習名列小四報讀長條圖與折線圖，小五製作長條圖和折線圖，小六圓形圖。

## 二、國民中學學習階段

主題	學習內容	年段				
		新增	強化	調移	弱化	刪減
數與量(N)	N-8-6 等比數列	八				
	計算機的使用(N-7-9、D-7-1、D-7-2、N-8-2、D-8-1、N-9-1、S-9-5、D-9-1、D-9-3)		七、八、九			
	N-9-1 連比			七→九		
	N-8-5 等差數列求和				八	
	A-8-3 多項式的四則運算				八	
	(九年一貫)7-n-05 能認識絕對值，並能利用絕對值比較負數的大小				七	
空間與形狀 (S) 坐標幾何 (G)	S-9-5 直角三角形的三角比	九				
	S-9-13 空間中的線與平面	九				
	S-7-1 簡單圖形與幾何符號			八→七		
	S-7-2 三視圖	七				
	S-7-3 垂直			八→七		
	S-7-4 線對稱的性質			八→七		
	S-7-5 線對稱基本圖形			八→七		
	S-9-6 圓弧長與扇形面積			八→九		
	(九年一貫)圓的弦切角、兩圓的外公切線長與內公切線長					八
	(九年一貫)凸多邊形外角和公式。					八
	(九年一貫)兩圓關係					九
	(九年一貫)9-s-08 能理解多邊形外心的意義和相關性質					九

	(九年一貫)9-s-09 能理解多邊形內心的意義和相關性質					九
代數(A)	無					
函數(F)	F-8-1 一次函數			七→八		
	F-8-2 一次函數的圖形			七→八		
	(九年一貫)二次函數的配方					九
資料與不確定性(D)	D-7-1 統計圖表			九→七		
	D-7-2 統計數據			九→七		
	D-8-1 統計資料處理			九→八		
	(九年一貫)9-d-04 能認識百分位數的概念，並認識第 10、25、50、75、90 百分位數					九

### 三、高級中等學校學習階段

刪除：必修部份 (相對於 99 課綱數學 I, II, III, 和 IV-A)						
1	多項式函數的拉格朗日插值法、有理根判定、勘根定理。					
2	複數系、方程式的虛根、代數基本定理。					
3	重複組合。					
4	連加符號 $\Sigma$ 。					
5	三角比與對數值的查表。					
6	線性規劃。					
	A 類必修			B 類必修		
7	二次曲線。			7	三角的和差公式。	
				8	三角不等式、柯西不等式。	
				9	線性變換、轉移方陣。	
				10	空間概念之三垂線定理。	
				11	空間中的直線、平面方程式。	
				12	三元一次聯立方程式、三階行列式。	
刪除：選修部份 (相對於 99 課綱數學 IV-B+ 選修數學甲、選修數學乙)						
1	抽樣與統計推論。					
	選修甲			選修乙		
				2	一般三角函數的性質與圖形。	
				3	數列及其極限。	

弱化				
1	含絕對值的一次方程式、絕對值不等式。			
2	排列組合：教學目標設定在得到古典機率所需的計數範圍，以及二項式展開。			
3	三角測量：不另立單元，並且以長方體為主要模型。			
4	一般底的對數。			
5	平面向量的幾何表示（不在坐標平面上的平面向量）。			
6	三元一次聯立方程式的三平面關係。			
	A 類必修+選修乙		B 類必修	
7	複數系、方程式的虛根。		7	三角恆等式。
			8	(認識) 圓錐曲線。
搬移				
1	複數系、方程式的虛根：10 → 12 年級選修（甲、乙有所區隔）。			
2	勘根定理：10 年級 → 選修數學甲（在 10 年級以「十進制小數的估計」呈現）。			
3	有理數指數與常用對數，在 10 年級先以記號的形式出現。			
4	指數與對數函數：10 → 11 年級（A、B 類有所區隔）。			
5	連加符號 $\Sigma$ ：10 → 12 年級（選修甲、選修乙）。			
6	條件機率與貝氏定理：10 → 11 年級。			
7	極坐標、廣義角：11 → 10 年級。			
8	直線方程式、圓方程式：11 → 10 年級。			
9	廣義角的三角比（正弦定理、餘弦定理）：11 → 10 年級。			
10	線性規劃：11 年級 → 選修數學乙。			
11	二次曲線：11 年級 → 選修數學甲。			
12	弧度量、三角函數：12 年級選修甲、乙 → 11 年級（A、B 類有所區隔）。			
13	正餘弦函數的疊合：12 年級選修甲 → 11 年級 A 類。			
新增				
1	計算機融入教學，附帶科學記號數字與有效數字。			
2	二次、三次函數的局部圖形近似於一條直線。			
3	(數據分布) 百分位數。			
4	(10 年級古典機率) 期望值。			
5	主觀機率和客觀機率的概念。			
	A 類必修		B 類必修	
			6	認識球面上的經線與緯線。
			7	連續複利與 $e$ 的認識。

		8	列聯表與文氏圖的關聯。
<b>選修甲</b>		<b>選修乙</b>	
6	幾何分布。	6	多項式函數的微分及其應用。
7	認識指對數函數的標準底 $e$ 。	7	多項式函數的積分及其應用。
8	牛頓求根法。		
9	認識含 $xy$ 項的二元二次方程式的圖形。		

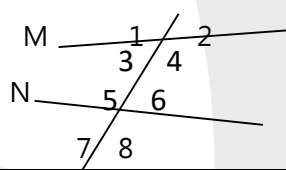
## 附錄二：數學名詞解釋（暫放九年一貫資料參考）

數與量	
等號	兩運算式(數)之值相等，可以「 $=$ 」記之，唸為【等於】，如 $4 + 3 = 7$ 。
大於、小於	甲大於 4，可以記為 $甲 > 4$ ，或 $4 < 甲$ ，前者唸為 甲大於 4，後者唸為 4 小於甲。
大於等於、小於等於	甲大於 4 或者可能等於 4，可記為 $甲 \geq 4$ ，和甲不小於 4 同義。也可記為 $4 \leq 甲$ ，即為 4 小於或等於甲。
加	$4 + 3 = 7$ ，4 為被加數，3 為加數，7 為和。
減	$4 - 3 = 1$ ，4 為被減數，3 為減數，1 為差。
乘	$4 \times 3 = 12$ ，4 為被乘數，3 為乘數，12 為積。
除	$14 \div 4 = 3 \dots 2$ ，14 為被除數，4 為除數，3 為商，2 為餘數。當餘數為 0 時，稱為整除，如 $12 \div 4 = 3$ 。
自然數	自然數 1、2、3... 為人類用來數物的數，可稱為計物數，又稱正整數。
整數	正整數、0 和負整數合稱為整數。
偶數	個位數為 0、2、4、6、8 的整數稱為偶數，又稱雙數。
奇數	個位數為 1、3、5、7、9 的整數稱為奇數，又稱單數。
絕對值	若 $a \geq 0$ ，則定義 $ a  = a$ ，唸為 $a$ 的絕對值等於 $a$ ，如 $ 7  = 7$ ；若 $a < 0$ ，則定義 $ a  = -a$ ，如 $ -7  = -(-7) = 7$ 。
分數	能化為 $\frac{q}{p}$ 的型態，且 $p$ 、 $q$ 皆為整數者其中 $p \neq 0$ ，稱為分數； $p$ 稱為分母， $q$ 稱為分子；若 $0 < q < p$ 時， $\frac{q}{p}$ 稱為真分數；否則， $\frac{q}{p}$ 稱為假分數；形如 $2\frac{1}{3}$ 的分數，則稱為帶分數。
最簡分數	一分數經化簡後(合併符號、約分)，若分子與分母的絕對值互質，此分數稱為最簡分數。
等值分數	一分數分子、分母同乘一整數，所得的分數稱為原分數的擴分；一分數分子、分母同除一公因數，所得的分數稱為原分數之約分；一分數擴分或約分後所得的分數，其值和原分數相同，稱為等值分數。
因數、倍數	一正整數 $a$ 若能整除另一正整數 $b$ ， $a$ 稱為 $b$ 的因數， $b$ 稱為 $a$ 的倍數。
公因數、最大公因數	一正整數 $a$ 同為兩個以上正整數的因數時，則 $a$ 為這些數的公因數。在所有公因數中最大者稱為最大公因數。
公倍數、最小公倍數	一正整數 $a$ 同為兩個以上正整數的倍數時，則 $a$ 稱為這些數的公倍數。在所有公倍數中最小者稱為最小公倍數。
質數	一大於 1 的正整數只有 1 及本身兩個因數時，稱為質數。
合數	又稱合成數，大於 1 的正整數中不是質數者稱之。
互質	兩正整數若除了 1 以外無其他公因數，則稱此兩數互質。
質因數	某數的因數如果也是質數，稱為該數的質因數。

短除法	<p>判別一數或一數以上的因數時只寫出除數和商，並不詳細運算除法過程，如</p> $\begin{array}{r} 2 \overline{) 12} \\ 2 \overline{) 6} \\ 3 \end{array}$ <p>其計算型態為短除法。若除數皆為質數，其過程即稱為質因數分解。</p>
平方	一數自乘兩次，稱為平方。如 $5 \times 5 = 25$ ，25 稱為 5 的平方。
平方根	$a^2 = b, b \geq 0$ ，則 $a$ 為 $b$ 的平方根(二次方根)，如 $2^2 = 4, (-2)^2 = 4$ ，2、-2 皆為 4 的平方根，其中 2 為正平方根，-2 為負平方根，合記為 $\pm\sqrt{b}$ 。
四捨五入	概數(近似值)的取法之一。若一數指定位數之下一位值小於 5，則將指定位數之下的數皆記為 0(捨去)；若大於等於 5，則在該指定位數加 1，並將以下所有數皆記為 0(進入)，稱為四捨五入。例如：325587 在千位四捨五入得 326000；3.1416 在百分位四捨五入得 3.14。
十分逼近法	為估計一數值(如 $\sqrt{7}$ )，先找出此數值位於那兩連續的整數之間，並視實際需要，可在兩數的十等分點再找出連續的兩點做逼近估計，依此類推當可求出我們所想知道此數的近似值。
比	兩數量以「：」區隔並據以呈現兩量之大小關係稱為比，如：兩人體重比為 56：43，披薩個數與價錢之比為 2：600。
比值	由比的相等關係，導引出比之前項除以後項，其值不變，稱為比值，如 3:4 的比值為 $\frac{3}{4}$ 或 0.75。
百分率	將一純小數乘上 100 後附加%記號，稱為百分率，如 $0.23 = 23\%$ 。
正比	兩變量 $x$ 及 $y$ ，若可寫成關係式 $y = kx$ ， $k$ 為常數(一固定數)，則稱 $x, y$ 成正比。
反比	兩非 0 變量 $x$ 及 $y$ ，若可寫成關係式 $xy = k$ ， $k$ 為非 0 常數，則稱 $x, y$ 成反比。
等差數列	一數列任意相鄰兩項的差(後項減前項)皆相等，稱為等差數列，其差稱為公差，第一項稱為首項，最後一項稱為末項。
等差中項	若三數成一等差數列，中間項稱為等差中項。
等差級數	將等差數列每一項以加號連接求和，稱為等差級數。
<b>幾何</b>	
角	共同端點的兩射線所成的角。
銳角	角度小於 90 度的角稱為銳角。
鈍角	角度大於 90 度的角稱為鈍角。
直角	角度等於 90 度的角稱為直角。
平角	180 度的角稱為平角。
周角	360 度的角稱為周角。

順時針、 逆時針	順著時針轉動方向移動稱為順時針，反之稱為逆時針。
互補	兩角度數和為 180 度。
互餘	兩角度數和為 90 度。
對頂角	兩直線相交而成不相鄰的兩角。兩對頂角相等。
銳角三角形	三個內角皆為銳角的三角形。
鈍角三角形	有一個內角為鈍角的三角形。
直角三角形	有一個內角為直角的三角形。
等腰三角形	有兩邊相等的三角形。此相等的兩邊稱為腰。
頂角、底角	等腰三角形兩腰的夾角稱為頂角，另外兩角稱為底角。若頂角為直角則稱為等腰直角三角形。
畢氏定理	直角三角形斜邊平方等於兩股平方和，又稱商高定理或勾股定理。
平行四邊形	兩雙對邊互相平行的四邊形。
菱形	四邊等長的四邊形。
箏形	有兩組鄰邊相等的四邊形。
梯形	只有一組對邊(稱為上底與下底)平行的四邊形。非上底與下底的兩邊，稱為梯形的腰。
等腰梯形	兩腰等長的梯形。
矩形(長方形)	四個角均為直角的四邊形。
正方形	四個角均為直角且四邊等長的四邊形。
多邊形對角線	多邊形內一頂點和不相鄰頂點的連線段。
多邊形內角	多邊形內由一頂點和兩夾邊所連成的角。
多邊形外角	若一內角小於 180 度時，由此角一邊向頂點外側所做的角。若一內角大於 180 度時，不定義外角。
垂直	兩直線交角 90 度稱兩直線互相垂直。
垂足	兩垂直線的交點。
平行	平面上兩直線沒有交點，稱此兩直線互相平行。
周長	一圖形周界之長度。
尺規作圖	利用直尺(沒有刻度)、圓規繪製幾何圖形稱為尺規作圖。
中點	線段上一點到兩端點等距離，稱該點為此線段的中點。
垂直平分線	過一線段中點且垂直的線稱為此線段的垂直平分線，又稱為中垂線。
角平分線	將一角分成兩相等角的線稱為角平分線，又稱分角線。
全等	兩圖形可完全疊合，稱兩圖形全等。相對應之點、邊、角稱為對應點、對應邊、對應角。



對稱軸	若兩圖形或一圖形對一直線對稱，則此直線稱為對稱軸，相對應之點、邊、角，則稱為對稱點、對稱邊、對稱角。
截線	在同一平面上，直線 L 分別與直線 M、N 相交於不同兩點，L 叫做 M 與 N 的截線。 
同位角	上圖中， $\angle 1$ 和 $\angle 5$ ， $\angle 2$ 和 $\angle 6$ ， $\angle 3$ 和 $\angle 7$ ， $\angle 4$ 和 $\angle 8$ 分別稱為同位角。
同側內角	上圖中， $\angle 3$ 和 $\angle 5$ ， $\angle 4$ 和 $\angle 6$ 分別稱為同側內角。
內錯角	上圖中， $\angle 3$ 和 $\angle 6$ ， $\angle 4$ 和 $\angle 5$ 分別稱為內錯角。
比例線段	當四個線段中，兩個線段的比等於另兩個線段的比時，此四個線段稱為比例線段。
相似	一圖形經縮放後與另一圖形全等，則稱此兩圖形相似。
三角形中線	三角形一頂點和對邊中點的相連線段。
切線	平面上一直線和一圓只有一個交點稱此線為圓的一條切線。
圓	平面上和一固定點等距離的所有點形成的圖形稱為圓。 此「固定點」稱為圓心；此「距離」稱為半徑；此「圖形」稱為圓周；圓周上兩點最長的距離稱為直徑。
弦	圓周上任兩相異點的相連線段。
弦心距	圓心到弦的距離。
公切線	同時和兩圓相切的直線。
圓周率	圓周長與直徑之比值成為圓周率，常用的近似值為 3.14。
(圓)弧	圓周的一段。
弓形	由一弦和一弧所圍的圖形。
扇形	圓的兩半徑和一弧所圍成的圖形。
圓心角	以圓心為頂點兩半徑為邊所組成的角。
圓周角	圓上一點和通過此點的兩弦所形成的角。
弦切角	由過圓上同一點的弦和切線所夾的角。
外接圓	過一多邊形所有頂點的圓，稱此圓為多邊形的外接圓。
內切圓	多邊形內部中，與各邊相切的圓，稱為多邊形的內切圓。
外心	若一多邊形有外接圓，則外接圓的圓心稱為此多邊形的外心。外心為各邊垂直平分線的交點。
內心	若一多邊形有內切圓，則內切圓的圓心稱為此多邊形的內心。內心為各角平分線的交點。

三角形重心	三角形三條中線的交點。
正四面體	四面均為正三角形的四面體，亦稱正三角錐。
正方體	六面均為正方形的正四角柱體。
長方體	六面均為方形的正四角柱體。
直圓柱	上下底為兩等圓的直柱體。
直圓錐	由一扇形和圓組合而成的圖形。
表面積	一立體圖形的所有面的面積總和。
側面積	一直柱體的表面積，扣除上下兩底面積稱為直柱體的側面積。一直錐體的表面積，扣除底面積稱為直錐體的側面積。
<b>代數</b>	
等量公理	當等號左右兩邊相等時，於等號兩邊各加、減、乘或除以同一個數(不可同時除以 0)，等號兩邊仍會維持相等。
移項規則	在等式中，將一個數或未知數從等號的一邊移到另一邊應遵守：(1)加換成減；(2)減換成加；(3)乘換成除；(4)移換成乘等規則。 不等式的移項規則原則上相同，不過將「負」的乘數或除數，移至另一邊時，不等號必須轉向，例：若 $-3x < 6$ ，則 $x > 6 \div (-3)$ ，即 $x > -2$ 。
函數	在 A、B 兩組資料中，如果給定 A 組的一個資料，就能決定 B 組的一個資料，就稱 B 是 A 的一個函數。
線型函數	函數圖形為直線的函數，稱為線型函數，包括常數函數和一次函數。
多項式	由數和文字符號進行加法和乘法運算所構成的算式，稱為多項式。 例： $3x, x+4, \frac{1}{6}x-5, x^2+1, \dots$ 。
係數	多項式中，變數以外的部分連同其前面的加減符號合稱為係數。 例： $x^2-3x+4$ ，二次項的係數為 1，一次項的係數為 -3，零次(常數)項的係數為 4。
常數項	多項式中，不含變數的項稱為多項式的常數項。
多項式的次數	多項式中，係數不為 0 的最高次項的次數稱為多項式的次數。
一元一次式	$ax+b$ ，其中 $a, b$ 為常數， $a \neq 0$ 。
二元一次式	$ax+by+c$ ，其中 $a, b, c$ 為常數，同時 $a, b$ 不能同時為 0。
一元二次式	$ax^2+bx+c$ ，其中 $a, b, c$ 為常數， $a \neq 0$ 。
分離係數法	兩多項式的四則運算中，只寫出各項係數，待運算結束後，再將結果以多項式的形式呈現。
解	滿足方程式或不等式的數，稱為解。
判別式	一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的判別式，常以 $D=b^2-4ac$ 代表，依判別式的數值為正或負或零可以判斷根的性質。

統計與機率	
次數	各筆或各組資料出現或發生的「次數」、「人數」等。
相對次數	各筆或各組資料出現或發生的次數除以全部次數的總和。
累積次數	有序資料中依出現或發生的秩序(如：由小至大)累加至各筆或各組的次數。
相對累積次數	有序資料中依出現或發生的秩序(如：由小至大)累加至各筆或各組的相對次數。
平均數	所有資料的總和除以總次數，即所有資料的平均值。
中位數	第 50 百分位數，通常表示比這筆或這組數大和比這筆或這組數小的資料各佔一半。
眾數	出現次數最高的一個或一組數。
四分位數	第 25、50、75 百分位數也分別被稱為第 1、第 2、第 3 四分位數，第 2 四分位數又常被稱為中位數。
百分位數	各筆或各組資料的相對位置，表示有百分之多少的資料比該筆或該組資料的數要小。
全距	資料中最大數與最小數的差。
四分位距	第 3 四分位數與第 1 四分位數的差。
機率	一個事件會發生的機會；機率常以百分率或分數來表示。
長條圖	以長條狀圖形高度或長度代表資料量的統計圖形，又稱 bar chart，其中各長條間並不相連接。
折線圖	以直線連接相鄰兩資料點的圖形。
圓形圖	以圓內各扇形面積代表資料統計量的圖形，又稱 pie chart。
直方圖	以長條狀圖形高度代表資料量的統計圖形，又稱 histogram，其中各相鄰長條間彼此相連接。
盒狀圖	以盒狀圖形表現最大數、最小數、第 1、第 2、第 3 四分位數位置的圖形，又稱 box chart 其中中間方盒的資料約佔 50%。

## 附錄三：計算機規格說明

### 108 數學課綱之計算機規格說明

#### 一、前言

本課綱自國中階段（7 年級）起，要求計算機 (calculator) 融入數學之教材、教法、評量。以下說明相容於國民中學與普通高中之數學科「設備基準」，也符合考選部公告之「國家考試電子計算器措施」。

#### 二、用途

課綱規劃計算機融入數學教學與評量，成為數學教育的一部份，培養學生正確使用工具的素養。計算機可以在適當的時機取代筆算或心算，此外，它還具有更積極的數學教育意義。在適當的時機，計算機促成探究、觀察實驗、歸納臆測、合作討論等教學方法的設計與執行，這本《說明手冊》已經提供了基本的建議與範例。在應用與評量的場合，計算機的操作，使得命題更能夠貼近真實的生活、職業、社會或科技情境。計算機的融入教學與評量，協助教師更容易達成素養導向的教學目標。

#### 三、國中階段之學習所需

為融入國中階段的數學課程，計算機至少需具備以下功能（國中必備功能）：

- 輸入整數與小數、切換相反數（ $\pm$ ）、輸入科學記號數字<sup>1</sup>。
- 浮點數的四則運算（ $+$ 、 $-$ 、 $\times$ 、 $\div$ ）、百分比（ $\%$ ）、平方根（ $\sqrt{\quad}$ ）。
- 調整四則運算之計算順序（括號、後運算堆疊）。
- 連續加入數據（MR、MC、M+、M-）。
- 度量之銳角三角比（ $\sin$ 、 $\cos$ 、 $\tan$ ）。

其他有幫助的功能（國中選備功能）：

- 正整數除法（求得商和餘，或帶分數）、正整數的同餘（ $\text{mod}$ ）。
- 常數  $\pi$ 、亂數產生器。
- 絕對值（ $\text{abs}$ ）、平方（ $x^2$ ）、倒數（ $1/x$ ）。
- 三角比之反運算（ $\sin^{-1}$ 、 $\cos^{-1}$ 、 $\tan^{-1}$ ）。

#### 四、普通高中階段之學習所需

為融入普通高中階段的數學課程，計算機至少需具備以下功能（普高必備功能）：

- 所有國中必備功能。
- 調整四則運算之計算順序（括號、後運算堆疊）。

---

<sup>1</sup> 計算精度在後面說明。

- 常數  $\pi$ 、亂數產生器。
- 絕對值 ( abs )、平方 (  $x^2$  )、任意次方 (  $x^y$  )、倒數 (  $1/x$  )。
- 角的弧度量與度度量互相轉換、度度量的十進制和六十進制轉換。
- 弧度量與度度量之廣義角三角比 ( sin、cos、tan )、反三角 (  $\sin^{-1}$ 、 $\cos^{-1}$ 、 $\tan^{-1}$  )<sup>2</sup>。
- 常用與標準的指數、對數 (  $10^x$ 、log、exp、ln )。
- 階乘 ( n! )、排列數 (  $P_r^n$  )、組合數 (  $C_r^n$  )。

其他有幫助的功能 ( 普高選備功能 ):

- 平面上直角坐標與極坐標的轉換。
- 指定有效位數。
- 一維數據功能，可包含  $\sum x$ 、 $\sum x^2$ 、 $\bar{x}$ 、 $\sigma$  等功能<sup>3</sup>。
- 二維數據功能，可包含  $\sum xy$ 、 $r_{xy}$ 、回歸直線的斜率與截距等功能。

儘管數據功能有助於課堂學習，卻引進了數據儲存功能。而這項功能，是引起考試主管機關疑慮的關鍵項目之一 ( 請看下一節 )。因此，計算機可否具備數據功能，也許值得將會考、學測或指考的規範考慮在內。

## 五、考試的顧慮

完整的課程包括評量，所以，融入計算機的數學課程，必須適度地容許學生在考試時使用計算機。計算機只要滿足各階段的學習需求，就能滿足考試之所需。為了支援考試，計算機並不需要更多功能，反而不能有過多功能。為維護數學考試的公平性，以下列舉計算機不得具備的功能：

- 不得具備輸入文字的功能。
- 不得具備繪圖功能。
- 不得具備程序記憶功能，不能提供使用者自訂函式。
- 不得具備 MR、MC、M+、M- 以外的數值記憶功能 ( 請看下一節詳細說明 )。
- 不得具備通訊、錄音、攝錄影功能。
- 不得發聲、震動。
- 不得提供任何外插或內部擴充功能。
- 不得具備內建鍵盤以外的任何輸入功能。
- 不得具備內建屏幕以外的任何輸出功能。
- 不可外接電源 ( 容許太陽能 )。

## 六、採購的顧慮

<sup>2</sup> 反三角的值域在後面說明。

<sup>3</sup> 數學課程採用母體標準差，計算機可提供母體標準差和樣本標準差。

數學課程融入計算機的理念之一，是培育正確使用工具的素養。計算機應當成為學生的普通常備文具，就像筆和尺一樣，可隨身攜帶、隨時自然地使用。

在前述意義之下，學生的智慧型手機或個人電子裝置，皆能安裝適當的應用程式( App )而成為滿足學習需求的計算機。在教室裡，乃至於在教師自辦的考試時，只要教師和學生達成協議，使用任何有效的工具都可以；甚至包括繪圖、製表、程式設計，只要有助於達成學習目標，皆可。但是，課程綱要考慮以下實務需求，做出掌上型計算機的建議：

- (1) 全體學生都買得起，人手一機，人人有公平的學習機會<sup>4</sup>。
- (2) 儘量維持全班學生一致的操作介面、操作流程和計算結果，以免加重課堂管理的負擔。
- (3) 課程設計包含評量，所以必須在考試(含校內的段考)正常使用工具。

課程綱要建議學生使用滿足前面說明的掌上型計算機。目前還沒有針對國中、高中數學課程需要而設計的專用計算機，而考選部核定的「第二類」國家考試電子計算器，都滿足前述的教學需求及考試顧慮。合格的機型包括以下四款<sup>5</sup>：

E-More FX-127    FuhBao FX-180    Canon F-502G    CASIO FX-82Solar

以上四款計算機都具備「一維數據」功能，所以看起來似乎擁有記憶功能，不符合考選部自己規定的「不得具備 MR、MC、M+、M- 以外的數值記憶功能」。但是，仔細看 FuhBao FX-180 和 CASIO FX-82Solar 的說明書，發現這兩款計算機不能「調出」(Recall) 或「編輯」(Edit) 輸入的數據，只能輸入數據、即時刪除、顯示所有數據的統計值。由此可見，考選部認為這種計算機不算是「擁有記憶功能」。這個認定標準，值得參照。

計算機通常可顯示 8 到 10 位有效數字，而指數部分則可以介於 -99 和 99 之間。支援數學學習的計算機，其實並不需要前述精度的浮點數。但計算機的數值精度至少須符合 IEEE 754 的單精度浮點數規格 (Single-precision Floating-point Format)。計算機顯示的最後一位有效數字，應為下一位正確數值的四捨五入值。

為降低課堂管理的複雜度，採購前宜確認以下運算功能的規範：

- $x^y$ ：當  $y$  是整數， $x$  可為任意數；當  $y$  是浮點數， $x$  不得為負。
- $\sin^{-1}$ 、 $\tan^{-1}$  的值  $\theta$  滿足  $-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$  或等價的弧度量。
- $\cos^{-1}$  的值  $\theta$  滿足  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  或等價的弧度量。
- 發生 overflow 時正確產生  $\pm \text{Inf}$ ，發生 underflow 時正確產生 0 或 -0。
- $1/0$ 、 $\log 0$ 、 $\tan 90^\circ$  等運算應產生  $\text{Inf}$ ，而關於  $\pm \text{Inf}$  的計算應符合 IEEE 規定。

<sup>4</sup> 除了個人採購以外，各級學校的數學科設備標準，將包含採購計算機的建議，而教育部也將另有配套措施。這些支援系統，都不在本《說明手冊》的範圍內。

<sup>5</sup> 民國 106 年 10 月 11 日，在「比價撿便宜」網站上查到的最低價(新台幣)：E-More 110 元，FuhBao 169 元，Casio 350 元，Canon 699 元。

- 其他錯誤或無定義狀況，可產生 NaN 或 Err。

最後，為確保在考場使用計算機的安全性，可優先考慮能具體提供以下保證的機款：

- 關/開電源將清除所有記憶的數據。
- 機體若曾經被開啟，一定會留下痕跡。