

戲說數學

許志農

國立台灣師範大學數學系

September 1, 2011

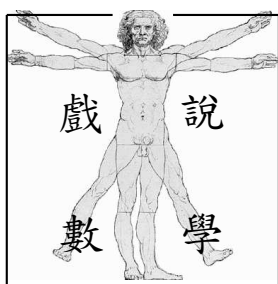


目 錄

1	腳踏車的軌跡…向東或向西騎呢？	2
2	四連方塊拼圖	4
3	六角拼圖	6
4	四方連塊拼正方形遊戲…讓俄羅斯方塊縈繞我心	7
5	砌磚遊戲…橫與豎的對抗	9
6	魯斯偉特棋…黑與白的對抗	11
7	井字上翻烏龜…相煎何太急	13
8	陶哲軒的青蛙跳…是幾何嗎？還是代數呢？	16
9	分田遊戲…幾何圖形的分割與拼湊	18
10	愚公移桌遊戲…與向量連結的能力	20
11	鋸木板的遊戲…橫與豎的巧妙安排	22
12	與3共舞…將地雷數字留下來	24
13	費波納契的遊戲…齊肯多夫定理	25
14	圍貓遊戲…決策能力測試	27
15	戲弄第一象限…抓氣球的遊戲	30
16	華容道…關羽橫讓捉放曹操	33
17	摺地圖的把戲…實作的體會	35
18	納許棋遊戲…剪紙的數學	37

19 達文西的棋盤…聆聽上帝的美學	41
20 佔房子遊戲…天下圍攻	44
21 在正五邊形上跳舞…搶 20 的遊戲	47
22 阿基米德的“胃痛”遊戲…西方的七巧板	49
23 碩大就是美…超過樹狀圖的範圍	55

1 腳踏車的軌跡…向東或向西騎呢？

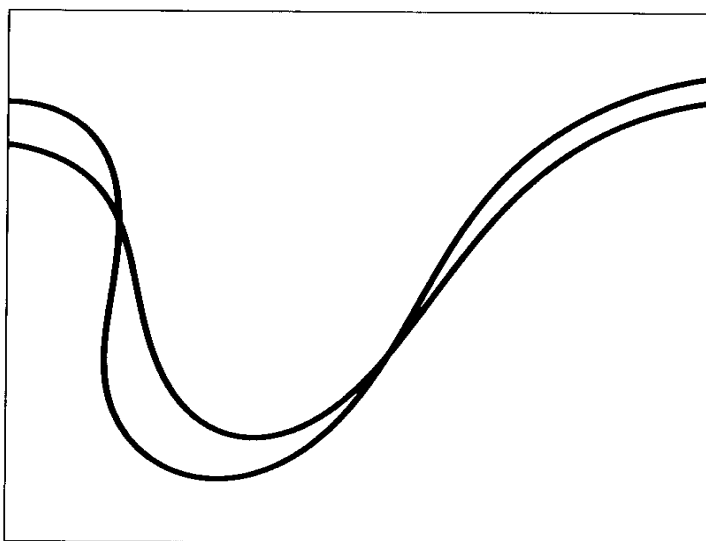


記得鄉下的魚塭在夏秋之際都會將水排掉，讓魚塭可以曝曬太陽，增加養分，曬過太陽的魚塭，在冬天裡，魚、蝦、螃蟹就有充足的微生物當食物，養出來的魚蟹才會肥胖。每當魚塭的水被排乾時，橫行的螃蟹就會沒入泥巴裡，以為這樣就不會被發現。

事實上，螃蟹橫行的腳印會透露出他躲藏的地點，只需跟著腳印走，就可以順藤摸瓜似的抓到螃蟹。這是小時一個有趣的尋蟹之旅，但是有一個問題是需要推敲的「螃蟹橫行的腳印是彎曲的路徑，到底他是從哪一頭往哪一邊橫行呢？」搞錯方向就必須回頭才能抓到螃蟹，有點費時。

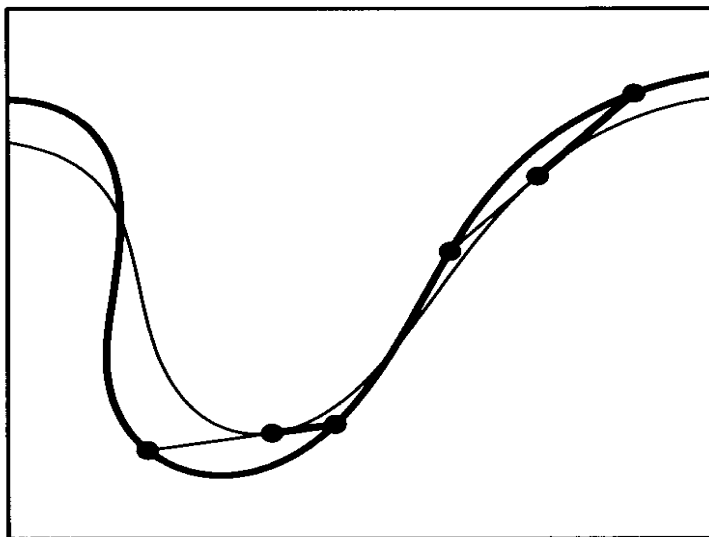
在一本原文書上，我看到一道這類遊戲的腳踏車版，這道數學遊戲出自一本原文書的封面故事：

🚲 1 神探福爾摩斯追蹤一位騎腳踏車逃跑的盜匪。下圖是盜匪腳踏車前後輪所留下的軌跡：

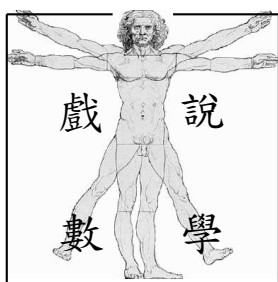


如果你是福爾摩斯的話，你會認為盜匪是騎往那個方向逃跑？

腳踏車只有前輪與後輪兩個輪子，思考一下轉彎時它們的相關位置變化，下圖示原文書所畫的提示：



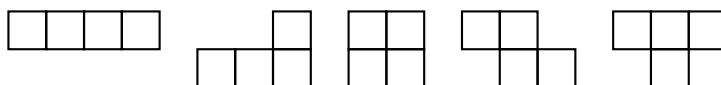
2 四連方塊拼圖



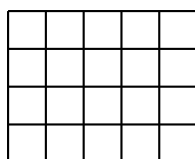
在 1954 年南加州大學數學教授葛羅布 (Solomon W. Golomb) 利用五塊大小相同的正方形，於平面上任意相互連接，在扣除旋轉、鏡射、翻轉之情況下，組合出 12 種不同形狀，稱為「等積異形五連方塊」，這是「連方塊」的起源。後來，俄羅斯數學家利用四連方塊設計出落下型益智遊戲，風靡全世界，稱為俄羅斯方塊遊戲。



所謂四連方塊是指將四塊方形拼湊在一起的可能情形，在要求必須相連的情形下，只會有如下的 5 種情形（翻轉後相同者視為同一種）：

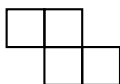


📎 2 是否可以使用五種四連方塊各一塊將 5×4 的長方形鋪滿（四連方塊可旋轉與翻面）：

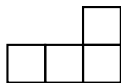


試了幾次之後，發現不容易成功。問題是：如何用圖形或數學的概念解釋無法鋪成呢？

讓我們來挑戰一則更難的拼圖：在使用 15 塊 Z 型拼圖



與 1 塊 L 型拼圖



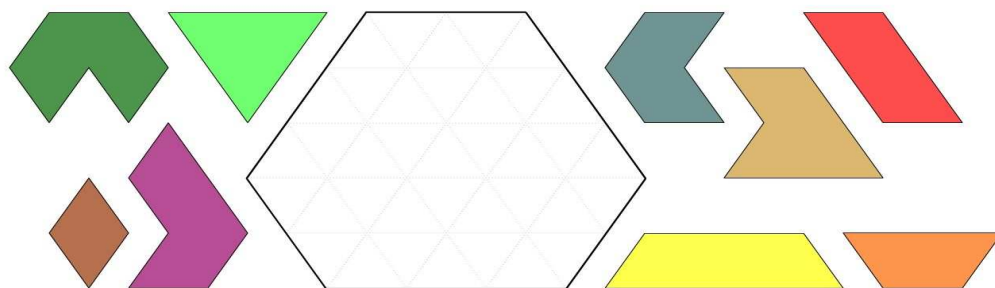
的情形下，可否將 8×8 的正方形鋪滿。

3 六角拼圖



到過國立台灣師範大學數學系館的人，都會在玄關處停下腳步，欣賞門字形展覽櫃的數學教具與益智遊戲模型，有胃痛拼圖，魔術方塊，幻方，紙作的立體幾何，鸚鵡螺剖面圖等各類數學模具。

六角拼圖就是展覽櫃內的一道拼圖的數位版，它是由六邊形拼盤與九塊形狀互異的多邊形組合而成，如下圖所示：



這六邊形拼盤是邊長 2 與 3 交錯而成的平行六邊形，盤內總共可以分割成 37 個小的正三角形，而九塊多邊形也多是由小正三角形拼湊而成。

🔑 3 在移動，旋轉及翻面的操作下，將九塊多邊形放入六邊形拼盤（不許重疊）。

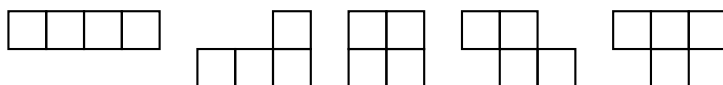
大陸數學家華羅庚題提過「數缺形時，少直覺，形少數時，難入微」，大意是說，算數與幾何是相輔相成的兩個主題，學習時不可偏廢，而是應該像人體的 DNA 一樣，讓兩條長鏈螺旋互相纏繞，方能堅固，富有創意。六邊形拼盤可以當作幾何直覺能力的訓練範本，至少它比胃痛拼圖的難度低很多，只要有耐心，一定可以完成。

關於六邊形拼圖，研究所有可能的拼法是一道不錯的問題。

4 四方連塊拼正方形遊戲…讓俄羅斯方塊縈繞我心



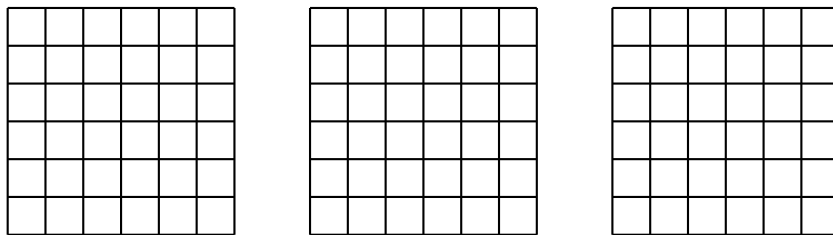
「四方連塊」是指四個單位正方形以邊與邊相連接而成，並扣除圖形旋轉、鏡射，所形成之不同形狀的幾何平面圖形。四方連塊有五種圖形，如下圖所示，分別為 *I* 型、*L* 型、*O* 型、*Z* 型、*T* 型：



使用四方連塊作拼圖是最常見的益智遊戲，但是要拼出正方形卻有點困難。

 4 請完成下列三款四方連塊拼圖：

- (1) (平均型) 在使用 *I* 型、*O* 型、*Z* 型、*T* 型各兩塊及 *L* 型一塊 (共計九塊) 的情形下，將 6×6 的正方格拼滿。
- (2) (懸殊型) 在使用 *I* 型、*O* 型、*L* 型各一塊，*T* 型兩塊及 *Z* 型四塊 (共計九塊) 的情形下，將 6×6 的正方格拼滿。
- (3) (組合型) 在使用 *I* 型、*O* 型各一塊，*T* 型兩塊，*Z* 型兩塊及 *L* 型三塊 (共計九塊) 的情形下，將 6×6 的正方格拼滿。



算出兩款拼圖的拼法是一道不錯的排列組合問題，避免不了使

用樹狀圖來歸類。事實上，研究哪九塊四方連塊可以拼出邊長為 6 的正方形是一道極具挑戰性的問題。

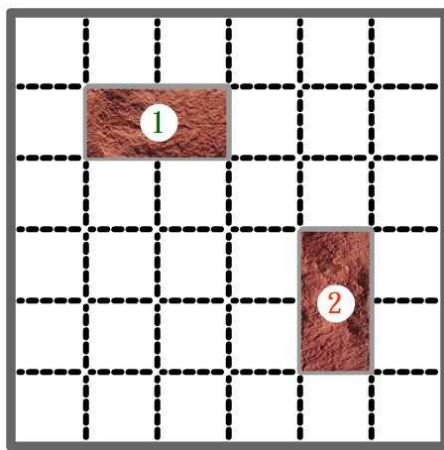
5 砌磚遊戲…橫與豎的對抗



經典廣告詞「鑽石恆久遠，一顆永流傳」是戴比爾斯（DE BEERS）的商品表徵，這家世界鑽石市場龍頭公司甚至在國內申請此句話的商標註冊，而且獲准。事實上，鑽石要恆久遠，必須是顆好的鑽石，同樣地，好的遊戲讓人百玩不膩，可以一直流傳下去，也會有「遊戲恆

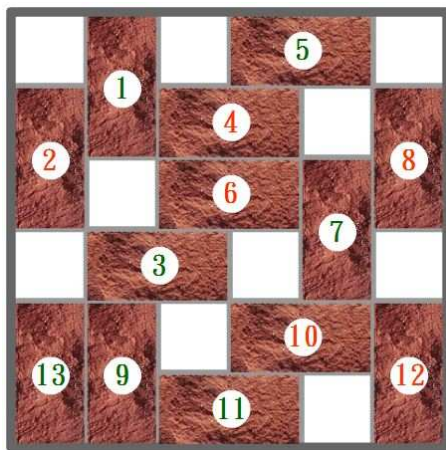
久遠，一道永流傳」的效果。你認為哪道數學遊戲有這種永恆的功效呢？

這裡要介紹一道有趣的遊戲，把它叫做「砌磚遊戲」。眾所周知，磚塊是長方形的建材，在這遊戲中，每塊磚頭都是 1×2 或者 2×1 的大小，在 6×6 的正方形牆壁上，甲、乙兩人輪流砌磚塊，每次每人必須砌一塊磚頭，擺放的方向可以是水平的，也可以是鉛直的，但不能夠重疊。下圖是甲砌編號 1 號磚塊，而乙砌編號 2 號磚塊的情形：



📎 5 在無法繼續砌磚塊者算輸的條件下，誰有必勝的策略，又其策略為何？

這道遊戲的難處在「磚頭可以橫著放，也可以豎著擺，而且可以有間隔」，如下圖所示：



在上圖的砌磚過程中，因為先玩的甲砌了編號 13 號磚塊後，乙無法利用剩下的空格繼續砌磚塊，所以後玩的乙輸。

關於這遊戲，我們可以把它延伸到其它大小的牆壁，例如大小為 6×5 或者 5×5 的牆壁。當你砌過大小不同牆壁之後，或許會發現「所要採取的砌磚策略大不相同」，但究竟什麼概念左右砌磚遊戲的輸贏呢？

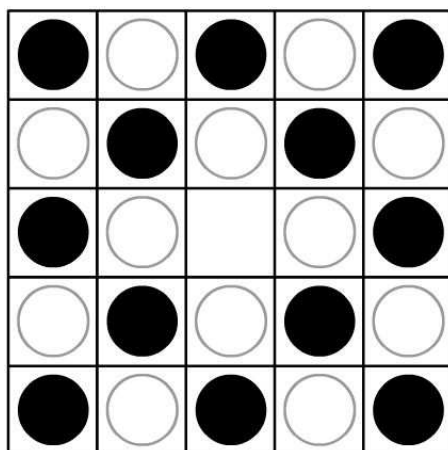
砌磚遊戲是本人與台中女中賴信志老師討論科展問題時，發現的一道遊戲，並不知道以前是否有人或有文獻討論過這個遊戲。直覺上，有一邊為偶數時較容易觀察，兩邊都是奇數時好像比較困難。

6 魯斯偉特棋…黑與白的對抗



兩人對奕，有限回合就會結束，而且一定可以分出勝負的遊戲稱為零和遊戲。零和遊戲最刺激，也最有挑戰性，它的輸贏往往跟玩者的數學素養（包括邏輯推理）好壞有很大的關係。魯斯偉特棋就是一道兩人對奕的零和遊戲，它曾經是數學奧林匹克競賽（IMO）的備選題。

魯斯偉特棋的棋盤很簡單，是規格大小為 5×5 的正方格，除了中間空白格外，剩下的二十四格分別放入 12 顆白棋與 12 顆黑棋，如下圖所示：



魯斯偉特棋的遊戲規格：

- (1) 甲、乙兩人輪流移動棋子，甲移動白棋，乙移動黑棋。
- (2) 每人必須把它的一顆棋子左右或上下移動一格，讓棋子進入空白格子內（此時空白格子會變動）。
- (3) 無法移動棋子的人算輸。

🔍 6 關於魯斯偉特棋，解決以下兩個問題：

- (1) 魯斯偉特棋是否為零和遊戲？（提示：將棋盤塗成西洋棋盤的形式來考慮）

(2) 甲或乙有必勝策略，這策略又是什麼呢？

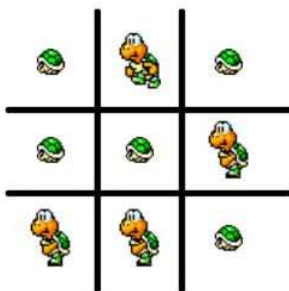
在思考魯斯偉特棋的這兩道問題之前，不妨想想看，從以前至今，玩過或遇過有限回合就會分出勝負的零合遊戲嗎？大家耳熟能詳的兩人猜拳，五子棋，象棋與圍棋是零合遊戲嗎？

7 井字上翻烏龜…相煎何太急

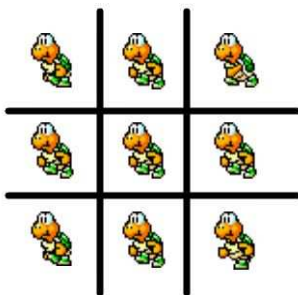


旺宏教育基金會從 2002 年開始，每年舉辦「旺宏科學獎」，該基金會認為科學教育的扎根，在高中階段最顯重要，創新獨立的思考如能從高中階段開始培養，學生的創造力及潛力將超乎想像。旺宏科學獎的獎項有金牌獎、銀牌獎與優等獎，優於金牌獎的作品可得旺宏獎（此獎項可從缺）。這裡所要介紹的這道遊戲來自第三屆旺宏科學獎的旺宏獎作品。

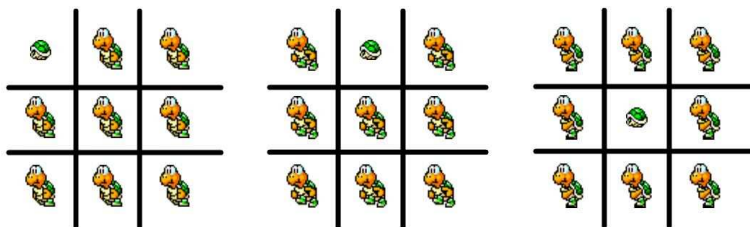
在井字形的九宮格內隨意放置行走或縮頭狀態的九隻烏龜，如下圖所示：



7 每次只能點選其中的一隻烏龜，被點選的烏龜及與其相鄰的烏龜會改變狀態，即行走狀態的烏龜會變成縮頭狀態的烏龜，而縮頭狀態的烏龜會變成行走狀態的烏龜。遊戲的目的就是要將九隻烏龜都變成行走狀態，如下圖所示：

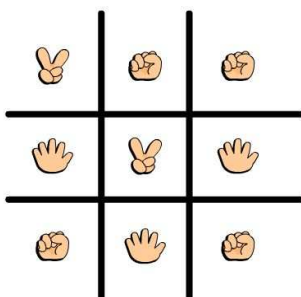


可以從比較簡單的形式操作起，例如下列三種基本的形式：



三種基本形式都可以操作完成後，再來考慮隨意的形式。

如果把這道遊戲延伸成三種狀態，例如剪刀、石頭與布循環出現，每按一格，此格及與此格相鄰的格子內的剪刀、石頭與布狀態會調整為下一個狀態，那麼是否隨意放置的狀態都可以調整為全是“布”的狀態呢？



關於井字上翻烏龜遊戲的啟發與延伸：

- (1) 在翻烏龜的情形，與燈的開關遊戲雷同，只是作者引入矩陣與行列式得到好的結論，這結論也適用於比井字大的棋盤。
- (2) 在剪刀、石頭與布的情形，可以考慮複數平面上滿足 $z^3 = 1$ 的三個根

$$1, \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}, \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}.$$

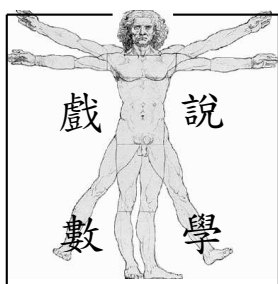
這三個根在複數平面上剛好構成正三角形。

- (3) 將遊戲延伸到多種情況或大棋盤上，就必須使用較困難的行列式求值問題。

參考文獻

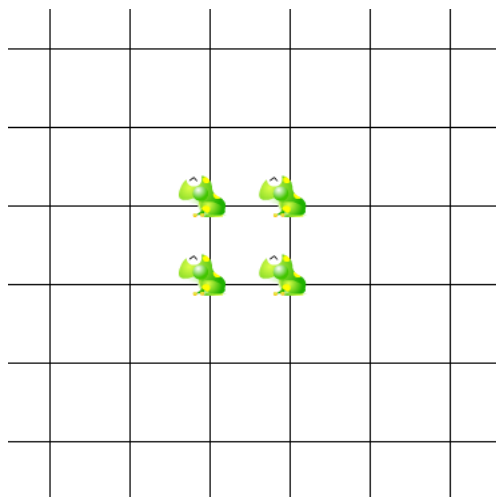
- [1] 旺宏教育基金會第三屆作品觀摩網址：
<http://www.mxeduc.org.tw/ScienceAward/3rd/index.htm>。

8 陶哲軒的青蛙跳…是幾何嗎？還是代數呢？



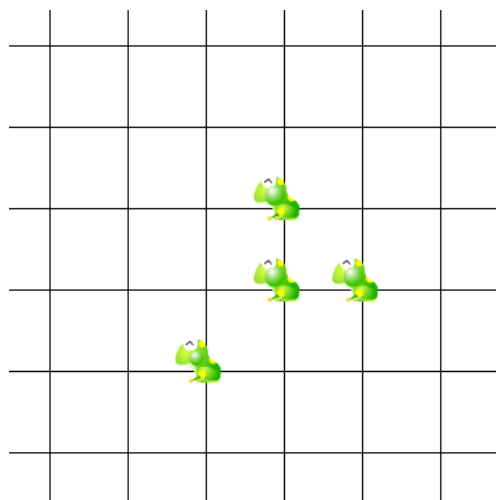
青蛙跳遊戲取自陶哲軒十五歲時所寫的一本書《解題・成長・快樂-陶哲軒教你學數學》。陶哲軒是澳大利亞裔的華人，九歲得國際數學奧林匹克銅牌獎，十歲得銀牌獎，十一歲得金牌獎。陶哲軒更在三十歲時（2006 年）獲得有“數學諾貝爾獎”之稱的“費爾茲獎”，這個獎每四年才頒發一次，且要求得獎者不得超過四

十歲。現在就讓我們來欣賞青蛙跳遊戲：在畫有縱橫格線的棋盤上放置四隻青蛙，且四隻青蛙開始的位置剛好圍成一個邊長為 1 的正方格，如下圖所示：



每隻青蛙都可以跳動，而且必須跳過另一隻青蛙，詳細規則及跳動完成規定如下：

8 每次只有一隻青蛙可以跳動，而且必須越過另一隻青蛙，到達對稱的位置，例如下圖就是右上角的青蛙跳過左下角青蛙的情形。如果縱橫格線的棋盤可以無限延伸，青蛙跳動的次數也沒有受到限制，那麼可以讓四隻青蛙在若干次的跳動之後，其最後的相關位置剛好圍成邊長是 2 的正方形嗎？



這道一人玩的遊戲有兩個困擾需要釐清，否則不容易得到答案：第一個問題是：「這是幾何問題，還是代數問題呢？」第二個問題是：「是有解，還是沒解呢？」想要清楚這兩個問題的答案，最好的方式就是親自動手玩幾次。

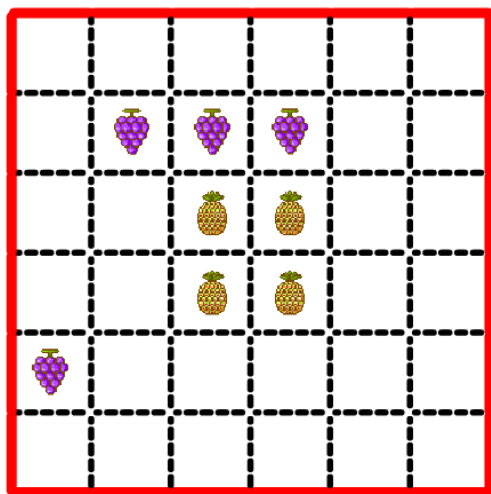
陶哲軒只問：「四隻青蛙是否可以跳出邊長是 2 的正方形。」事實上，我們可以進一步探討：「哪些邊長的正方形是四隻青蛙可以跳出來的？」這中間有很大的複雜性，例如，在縱橫格線的棋盤上，邊長為 5 的正方形是可以歪斜的。這是因為勾股定理的關係，例如，座標為 $(0,0)$, $(4,3)$, $(1,7)$, $(-3,4)$ 的四個點就是邊長為 5 的正方形。

9 分田遊戲…幾何圖形的分割與拼湊



幾何圖形的分割與拼湊是益智遊戲與數學趣題上常見的題目，它的目的是要訓練學生對圖形的操作，理解與洞察能力。第三屆兩岸四地華羅庚金杯少年數學菁英邀請賽於 2010 年在台灣的鹿港舉行，菁英賽的試卷有三種…填充卷，解答卷與遊戲競賽題卷。

在遊戲競賽題卷中，一共出了三道數學遊戲題，其中的第一題就是跟幾何圖形的分割有關。這道幾何題就是要在底下 6×6 的田地上作分割：

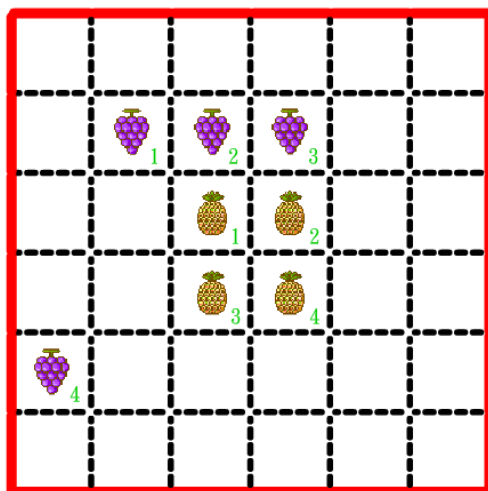


📎 9 在 6×6 的田地上，有四塊葡萄田，四塊鳳梨田，其餘 28 塊是稻米田。今有四兄弟要分田，其父親的遺囑是這樣寫的：「…四兒乖巧，將田地分成形狀與大小相同的四等分，兄弟每人一份，但每人恰得葡萄田與塊鳳梨田各一塊，…。」

請你沿著虛線分田，讓四兄弟所分得的田滿足其父親的遺囑。

根據計算，每人的田地有 9 塊方格，其中 1 格鳳梨田，1 格葡萄

田，7 格空地。把四塊鳳梨田與葡萄田編號如下：



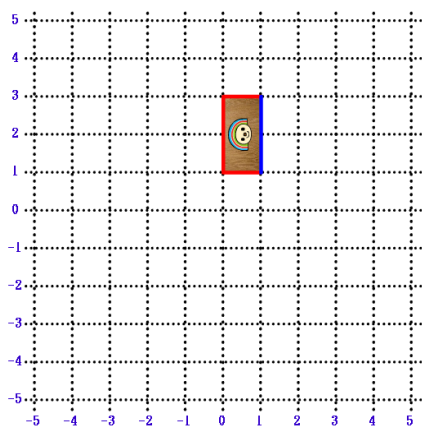
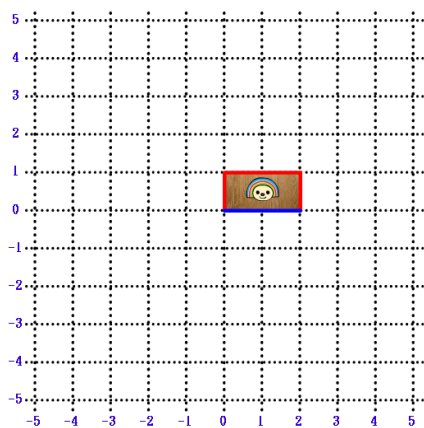
首先，要將鳳梨田與葡萄田配對，哪一對田地是同一個人分得。當我們搞清楚這配對時，每位所分得的田地形狀就比較容易掌握。

10 愚公移桌遊戲…與向量連結的能力



搬過桌子的人都有這樣的經驗：當桌子不大，重量輕時，可以用搬的；桌子大一點，且重量稍重時，只好利用四隻桌腳來滑動；但當桌子夠大，且重量超重時，就只好利用四隻桌腳的一隻作支撐，然後旋轉桌子，慢慢調整了。“旋轉桌子”的概念也可以形成一道有意思的數學

遊戲，我把它命名為「愚公移桌」。這道遊戲取自《數學思考》這本書，它是建國中學數學教師蔡聰池督促建中 49 屆 314 班全體同學合譯的一本數學名著。Open 小將的書桌是 2×1 大小，而且相當的有重量，每次移動時，只能利用四隻桌腳的一隻作支撐，然後旋轉桌子。下圖中的左圖是書桌左下腳位於原點的擺放方式，而右圖是以左上腳作支撐，桌子逆時針旋轉 90° 之後的位置：



📎 10 開始將 Open 小將的書桌之左下腳置於原點（此時右上腳位於座標 $(2,1)$ ），每次只能利用四隻桌腳的一隻作支撐，然後以順時針或者逆時針方向旋轉桌子 90° 。

是否能夠讓書桌在若干次的操作之後，位於以下描述的位置：

- (1) 左下腳的座標為 $(2,0)$ ，且右上腳位於座標 $(4,1)$ 。

(2) 左下腳的座標為 $(1, 1)$ ，且右上腳位於座標 $(3, 2)$ 。

十幾年前，我在師大數學系的《數學解題》的課程中，使用過這道遊戲，當時有一位聰明的學生將高中向量運用在這道遊戲上，而且得到完美的解答。有興趣的讀者可以研究看看「如何將向量概念與旋轉桌子作連結？」

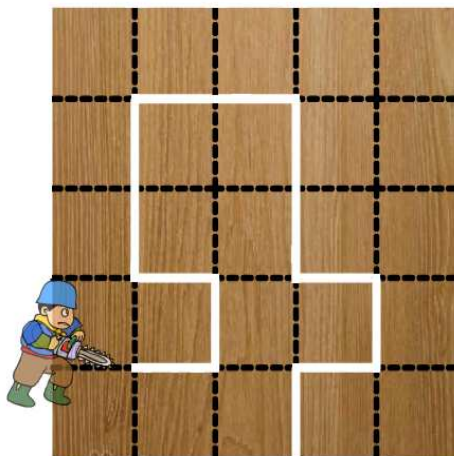
11 鋸木板的遊戲…橫與豎的巧妙安排



與幾何相關的遊戲無外呼在紙上做描點，畫線或者移動的操作。比較有趣的幾何遊戲應該是將這些幾何操作融入日常生活的實例裏，也就是說，找一個常見的生活實例來闡釋我們所設計的幾何遊戲。這樣除了可以增添樂趣外，也可以將遊戲變活。鋸木板的遊戲就是一道這樣的

的實例。

在一塊畫有粗黑虛線的 5×5 木板上，甲、乙兩人輪流鋸這塊木板，每人每次只能沿著粗黑虛線鋸一個單位長度，而且遵守以下的規則：

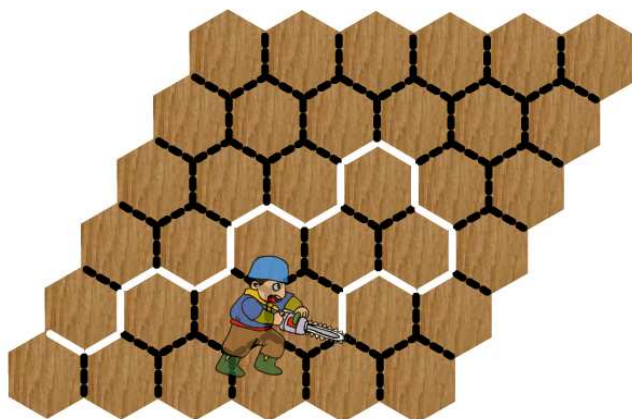


- (1) 甲先開始，從木板邊緣沿粗黑虛線鋸一個單位長度。
- (2) 乙接續甲的最後位置，再鋸一個單位長度（鋸過的不能再鋸）。
- (3) 把木板鋸成兩塊的人輸了。

上圖就是甲、乙在總共十三次操作後的情形，而接下來輪到乙鋸，很顯然地，無論乙往那邊鋸，都會將木板鋸成兩塊，在這種鋸法之下，乙輸了。

11 鋸木板遊戲是先鋸的甲或後鋸的乙有必勝的策略，又其策略為何？

因為每次都需鋸掉一個單位長度的木頭，而且只有橫與豎兩種選擇，所以如何巧妙安排橫與豎的配置是遊戲輸贏的關鍵。鋸木板的遊戲可以延伸到其它形狀的木板上，如矩形或者其它方形的木板等，下圖是在正六邊形格子上進行的鋸木板遊戲：



12 與3共舞…將地雷數字留下來



與數字相關的遊戲多到數不清，有猜數字，請問芳齡，數獨…等，這類遊戲都需要一點算術當基礎，而且它們的設計原理也是在利用一些算術的性質。這裡我們將要介紹一道與算術有關的遊戲。

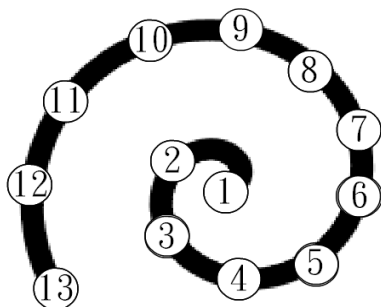
將

$1, 2, 3, 4, 5, \dots, 13$

這 13 個數字讓甲、乙兩人輪流拿取，並計算其總和，拿取規則與輸贏判定如下：

- (1) 每次只能選取一個數字，且選過的數字不能再選。
- (2) 經過六輪選取後，當數字總和為 3 的倍數時，乙贏；非 3 的倍數時，甲贏。

 12 問：先玩的甲或後玩的乙有必勝的策略，又其策略為何？

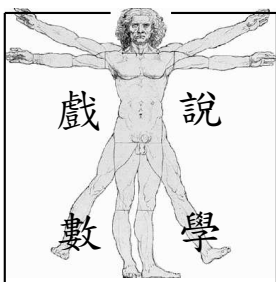


這是一道算術遊戲而且必須逆向思考才容易得到誰有必勝的策略，在考慮必勝策略之前，先算一下十三個數字的總和

$$1 + 2 + 3 + \dots + 13 = 91.$$

從 91 這個數字，你已經看出或者察覺誰有必勝策略了嗎？

13 費波納契的遊戲…齊肯多夫定理



費波納契數列 $\langle f_n \rangle$ 是滿足 $f_1 = 1, f_2 = 1$ 及遞迴關係

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad (n \geq 3)$$

的數列（後項等於前兩項之和），其前幾項可以算得為

$$f_3 = 2, f_4 = 3, f_5 = 5, f_6 = 8, f_7 = 13, f_8 = 21, \dots$$

在 1202 年，義大利數學家費波納契出版了他的「算盤書」，他在書中提出了一道兔子繁殖的問題：有一對兔子每月能生一對小兔（一雄一雌），而每對小兔在牠出生後的第三個月，又能開始生一對小兔。在不發生死亡的情況下，由一對兔子開始，一年後會有多少對兔子？

關於這問題：在第一個月時，只有一對小兔子，過了一個 month，那對兔子成熟了，在第三個月時便生下一對小兔子，這時有兩對兔子。再過多一個月，成熟的兔子再生一對小兔子，而另一對小兔子長大，有三對小兔子。如此推算下去，我們便發現了費波納契數列的規律，也就是說，第 n 個月應該有 f_n 對兔子才是。

費波納契數列雖然起源於兔子問題，但是這數列幾乎與我們的生活息息相關，例如，人體美學的黃金比例，生物世界的規律，股票市場的波浪理論…等都與費波納契數列有很大的關連。

費波納契數列有一個有趣的現象：「每一個正整數都可以寫成若干個不相鄰的費波納契數之和，而且這種寫法是唯一的。」例如 $15 = 2 + 13, 17 = 1 + 3 + 13, 30 = 1 + 8 + 21 \dots$ 等，這個奇妙的現象稱為齊肯多夫定理。齊肯多夫定理有點像「每一個正整數都可以唯一的寫成若干個質數的乘積」現象（算術基本定理）一樣，差別在於：齊肯多夫定理在談加法，使用的數列是

費波納契數列；而算術基本定理在談乘法，使用的數列是質數數列。

現在讓我們來欣賞這節所要介紹的遊戲：

🎒 13 有 $N > 1$ 顆石頭，甲、乙兩人輪流照以下規則取石頭：

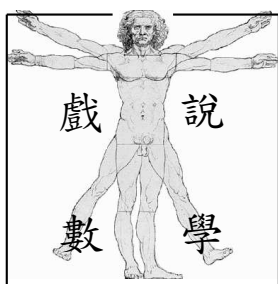
- (1) 每次至少取一顆或一顆以上的石頭。
- (2) 先取的甲在第一輪時，不能將所有的石頭取完（至少留下一顆石頭）。
- (3) 每次取的石頭數目不得超過對方剛取走的石頭數目的兩倍。

取到最後一顆石頭者獲勝。

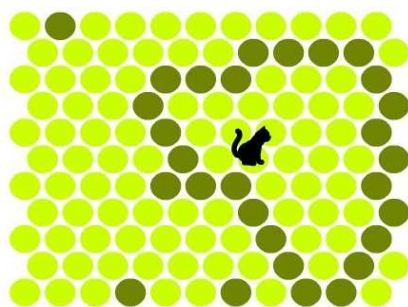
問：哪些數字 N ，後取的乙有必勝的策略，又其策略為何？
（第一次接觸的人可以找一個對手玩 $N = 30$ 的情形）

淡江大學數學系的余成義教授與師大數學系的鄒永灝同學都曾經研究過這道遊戲，我也是從他們哪兒知道這道遊戲的。從規則看，很難看出遊戲與費波納契數的相關性，但是，經過實際操作之後可以約略領悟費波納契數所扮演的重要性。事實上，齊肯多夫定理才是這道遊戲必勝策略的總指導。齊肯多夫定理的另一層解釋為「當你手上有 $1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$ 元硬幣各一枚時，你一定可以用他們來湊足所有的數字，不僅湊法唯一，而且使用到的硬幣也不相鄰。」

14 圍貓遊戲…決策能力測試

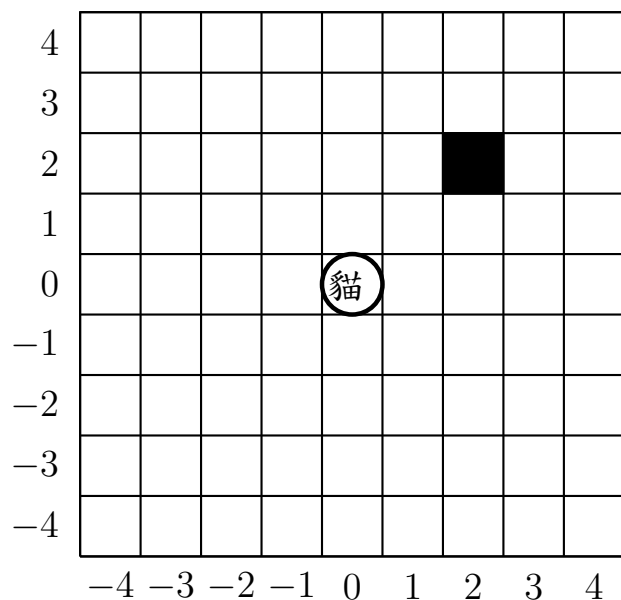


「圍貓遊戲」是線上遊戲的一種，其目的除了好玩之外，還可以測試玩者的決策能力。在佈滿圓形的長方形棋盤上，每個圓形都與六個圓形相連，一隻貓立於棋盤中央的圓形內，玩者每次將一個圓形塗黑來圍堵貓，但貓可以往尚未被塗色的隔壁圓形移動。在玩者圍堵與貓移動的輪流遊戲過程中，若貓被圍住，則玩者贏，否則就是貓逃脫成功。下圖是貓被圍住的一種情形：



圍貓遊戲是心理學家所設計出來的一道數學遊戲，心理學家把貓視為需要接受輔導的對象（或是叛逆的學生），而圍貓的人是輔導專家（或學校的導師），黑色圓圈是貓的朋友或損友，輔導專家或學校的導師必須透過這些朋友或損友的幫忙，將貓咪圍起來才算輔導成功。日本 Game Design 團體將圍貓遊戲數位化，寫成 Flash 的版本，可以在網路上用「圍貓遊戲」四個字搜尋，在線上玩此遊戲。

「圍貓遊戲」是考驗玩者決策能力的一種益智遊戲，這裡我們將它發展成較有推理與數學內容的遊戲：在 9×9 的棋盤正中央放一隻「貓」，然後甲乙兩人玩圍貓的遊戲，規則如下：



- ① 甲每次在一個空白格子內放置黑色障礙物圍堵「貓」。
- ② 乙每次僅能向東，西，南或北將「貓」移動一格（但不得移動到黑色障礙物的格子上），以逃避甲的圍堵。
- ③ 甲先圍堵，乙再移動，然後依甲堵乙動的次序輪流進行。
- ④ 當「貓」完全被堵住時，甲勝，反之，當「貓」被移到棋盤的邊緣時，乙勝（即甲的圍堵失敗）。

📎 14 在圍貓遊戲中，先玩的甲或者是後玩的乙有必勝的策略。

如果將「貓」換成「士」，且將向東，西，南或北的移動換成向東北，西北，東南或西南的移動，那麼圍貓遊戲就變成圍士遊戲。這時的圍堵策略也會有很大的不同。

最後值得一提的是：如果將「貓」換成「馬」，且將向東，西，南或北的移動換成馬步的移動，那麼圍貓遊戲就變成圍馬遊戲。因為馬的移動比較靈活，所以把棋盤擴大。事實上，我們還不知道「是否有辦法將馬圍住」？猜測是圍不住，板中的學生曾經研究過這個問題，似乎還沒有得到好的答案。

我們也可以將圍貓，圍士或圍馬的遊戲延伸到立體的情形，即在三度空間中，進行圍堵遊戲。

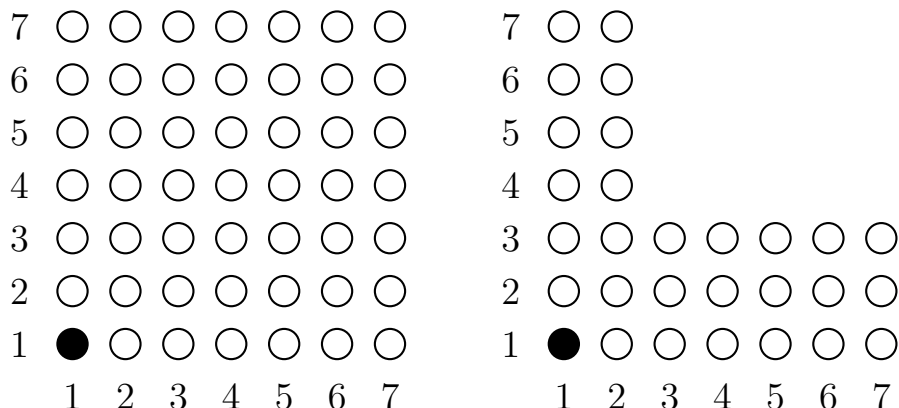
15 戲弄第一象限…抓氣球的遊戲



這裡要介紹的這道遊戲，有人稱它為 Chomp 的遊戲。我是在北一女演講時，想要做科展的學生問我這道遊戲，才知道這道有趣的遊戲。事實上，學生們也是從許介彥教授的一篇文章裡得知 Chomp 這道遊戲。數學概念「對稱」隱藏在這道遊戲裡，希望玩者可以很快的掌握這

道「對稱之美」的遊戲。

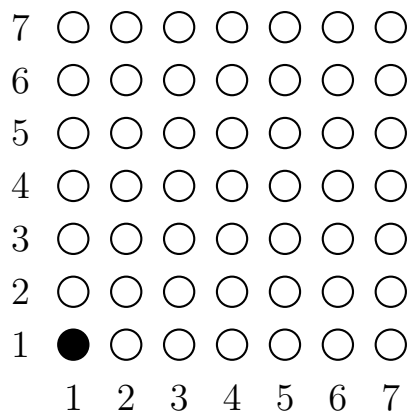
在下圖中，有 1 顆黑色氣球，48 顆白色氣球，當抓住坐標為 (3,4) 的白色氣球時，此氣球向右及往上區域的白色氣球都會消失，如下圖的右圖所示：



現在讓我們來玩這道抓氣球比賽：

📎 15 在下圖中，有 1 顆黑色氣球，48 顆白色氣球，甲、乙兩人輪流抓氣球，規則如下：

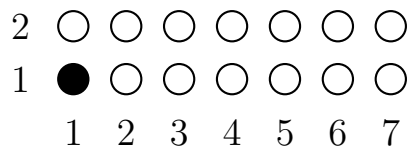
- (1) 每次必須抓台面上還存在的一顆白色氣球。
- (2) 當白色氣球被抓時，此氣球向右及往上區域的白色氣球都會消失。
- (3) 在抓完之後，只剩黑色氣球（即所有白色氣球都消失）的人獲勝。



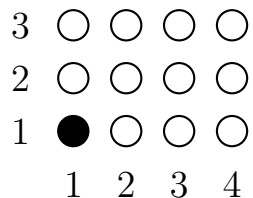
試問：先抓氣球或者後抓氣球者有必勝的策略，詳述其理由。

抓氣球遊戲不僅可以在 7×7 的規模上比賽，還可以在 $m \times n$ 的規模上玩，這類遊戲在有限次的抓氣球之後就可以分出勝負，而且不可能平手。這類遊戲的最大特色就是先玩的人可以勝利，有興趣的讀者不妨想想他的原因（原因不容易想到，但卻很妙）。

如果瞭解了 7×7 規模的抓氣球遊戲，那麼不妨試試看 7×2 規模的情形：



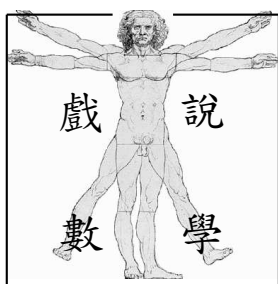
最後再試試 4×3 規模的情形：



我們甚至可以延伸抓氣球遊戲到第一象限上的格子點來比賽，也就是說，在平面座標上，當 x 與 y 都是正整數時，就在

座標 (x, y) 上立一個氣球，除了 $(1, 1)$ 立黑色氣球外，其餘都立白色氣球，同樣依抓氣球的規則來玩這道遊戲。雖然此時有無窮多個白色氣球，但是可以在有限次抓氣球之後，讓所有的白色氣球都消失。真的嗎？不妨想想看原因為何？

16 華容道…關羽橫讓捉放曹操



華容道、孔明棋和魔術方塊被喻為世界三大不可思議的益智遊戲，其中華容道是一道滑板遊戲，出自三國演義中「關羽橫讓捉放曹操」的情節。事實上，華容道是中國古代的一個地名，相傳當年曹操在赤壁之戰後曾經敗走此地。由於當時的華容道是一片沼澤，所以曹操

大軍要割草填地，不少士兵更慘被活埋，慘烈非常。

由於地理的變遷，到了明朝時，華容道已經由一個沼澤變成一片樹林。因此，當羅貫中撰寫《三國演義》時，亦根據當時的地理環境，寫關羽在樹林裡截擊曹操，這件事其實並沒有歷史根據。

📖 16 華容道棋盤為橫四格縱五格的盤面，曹操是占四格的正方形棋子；占兩格的有五虎將的關羽、張飛、趙雲、馬超與黃忠，其中只有關羽是橫兩格，其餘四將均為豎兩格；還有四個各占一格的兵（如下圖所示）。



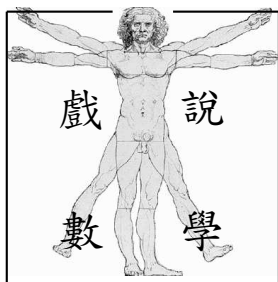
在遊戲時，只能利用盤面上留下的兩個空格來移動棋子，只要想辦法將曹操移到鄰接曹營上方的正中央的位置，即表示我們已成功讓曹操逃回曹營，遊戲至此於是結束。

可否僅透過滑板的移動，讓曹操回到曹營呢？

尋找最少的滑動步數讓曹操回到曹營，是華容道遊戲的另一種數學思維，在今日可以透過電腦的計算幫我們得到最少的滑動步數。

在電腦還沒有普及與成熟之前，滑板遊戲都是用木頭做的方格來操作。現在可以用電腦動畫模擬，而且效果與方便性都不輸給實體的木頭。關於華容道遊戲的源頭有另一種說法，大陸的姜長英在他所著《科學思維鍛煉與消遣》中說，「估計它的歷史不過有幾十年，從前人的筆記中沒有發現有華容道玩具的記載。」目前所見到關於華容道最早的文字記載就是姜長英在1949年出版的《科學消遣》。而且英國數學家哈代發明過一道與華容道極為相似的滑板遊戲…三角旗遊戲，在1907年申請專利，1912年得到批准，有人認為哈代的三角旗遊戲傳到中國，並加上本土的故事，成為本土化的華容道遊戲。

17 摺地圖的把戲…實作的體會



有過攤開或者是摺疊地圖的經驗嗎？只需沿著既有的摺痕就能輕易的將一大張的地圖摺疊成較小張的地圖，方便攜帶。但是，如對摺成的地圖前後次序有些要求，那是否可以摺成呢？這是比較有挑戰性的問題。

讓我們來玩一道與摺疊地圖有關的遊戲：

📁 17 某都市是一個長方形，劃分成八個行政區域，下圖是該都市的地圖，數字所在的區域剛好是八個行政區域。

1	8	7	4
2	3	6	5

現在想沿著格子線把地圖摺好，希望摺數次之後，讓長方形地圖變成看起來是一個正方格大小，但是厚度卻有八張紙張厚的形式。

你是否可以找到好的摺地圖方式，讓摺好之後的地圖，從上而下分別是

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

八個行政區域，也就是說，從上往下數，第 3 張的正面或背面是第 3 行政區域的地圖，…等。

不妨裁一張大小是 4×2 的紙摺摺看，紙張最好不要太小，否則不容易操作。只需操作幾回合，就會發現摺地圖的方法並不

多，但總是摺不出要求的順序來。此遊戲只有唯一的一種摺法，而且是一種很詭異的摺法。

如果你已經找到這道摺紙遊戲的竅門，那麼不妨試試更困難的情形：如下圖所描述的數字分配，一樣摺出

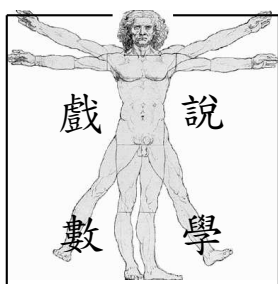
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

的次序來：

1	8	2	7
4	5	3	6

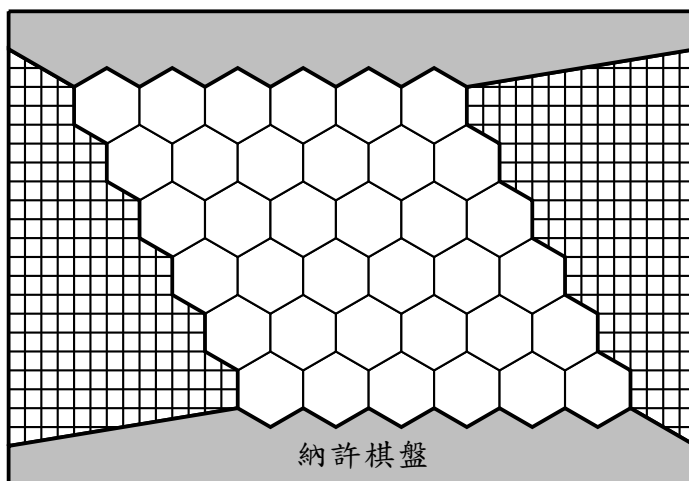
提示：領悟『小蛇吞尾巴』的意思。

18 納許棋遊戲…剪紙的數學



看過電影「美麗境界」嗎？那部電影的主角是一位數學家，叫納許，劇情是演納許對抗病魔三十幾載，最終獲得諾貝爾經濟學獎的動人故事。這裡所要談的納許棋，是納許在普林斯頓高等研究院所發明的一道遊戲。事實上，早在納許發明這道遊戲的十幾年前，丹麥就有人提出過類似的遊戲，而且在丹麥很受歡迎。跟圍

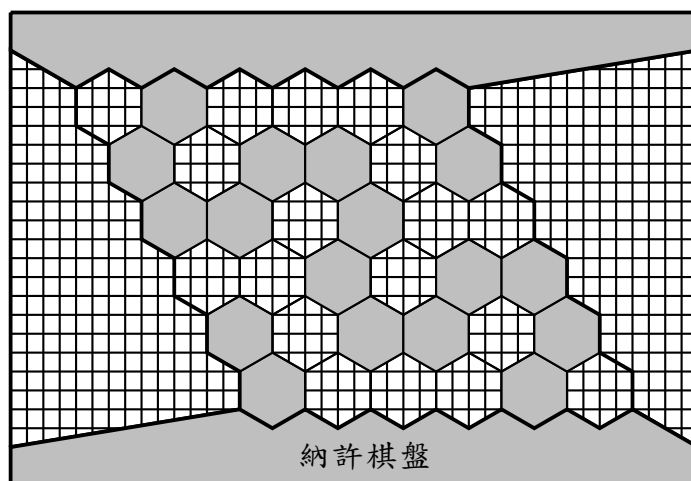
棋及西洋棋不同的地方是，納許棋盤是由正六邊形的格子所構成。我認識納許是從他的納許棋盤開始的，棋盤的樣子如下（這是 6 階的棋盤，共由 $6 \times 6 = 36$ 塊正六邊形土地鋪成）：



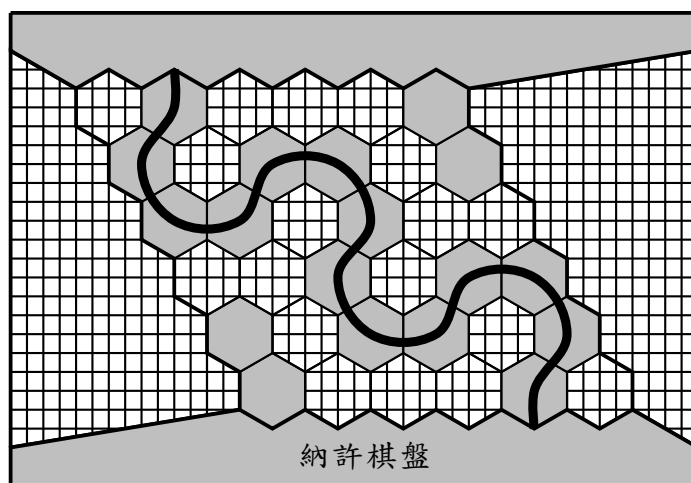
「灰」姑娘與「網」先生正在玩「納許棋」的遊戲。為了公正起見，棋盤內正六邊形土地以外的區域涇渭分明，上、下兩塊為灰姑娘的灰色領土，左、右兩側則是網先生的網狀土地。現在兩人輪流佔領正六邊形的土地，每次只能佔一塊，並將佔領的土地塗成灰色（灰姑娘的領土）或畫成網格（網先生的土地）。在十八回合後，灰姑娘與網先生將分別佔領三十六塊土地的一半。

遊戲的勝負如何判定呢？那要看誰能將她（他）的兩塊土地，用佔領的正六邊形土地連接起來。也就是說，灰姑娘從上

方灰色領土出發，在只能經過她佔領的正六邊形土地的情況下，可以到達下方灰色領土出時，灰姑娘就獲勝；同樣的，若網先生從左側的網狀土地出發，利用他所佔領的正六邊形土地，可以抵達右側的網狀土地，則網先生得勝。例如，下圖是灰姑娘與網先生某次的交戰紀錄（灰色正六邊形為灰姑娘所佔，網格正六邊形為網先生所有）：



在下圖中，因為粗黑線的路徑是灰姑娘從上方灰色領土走到下方灰色領土的一條路徑，所以這盤棋由灰姑娘得勝。



從遊戲的特性不難發現，不可能兩人都獲勝，如果一人可以連接他的領土，那麼另一人的土地肯定被這串連的線所阻隔。也就是說，至多僅有一人可以把他的領土串連起來。有沒有可能

發生兩者都無法串連她們的土地之情況呢？這正是本節所要討論的問題：

🔗 18 無論雙方如何佔領正六邊形土地，最後一定有人會得到勝利，也就是說，納許棋是一種不會平手的遊戲。

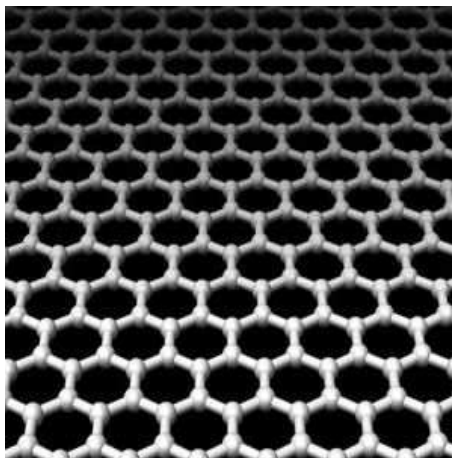
我們可以將納許棋盤設計成電路，當一方將兩片土地串連起來時，電就通了，會亮燈，從亮燈的顏色就可以知道誰獲勝。想把這道遊戲設計成電腦可以玩的遊戲，就需要從電路這個方向來寫程式。幸運的是，網站上有人幫我們完成了這件工作，只要到底下的網站

<http://home.earthlink.net/~vanshel/>

就可以下載納許棋來玩，可以跟電腦玩，也可以兩人玩，甚至可以改變棋盤的大小。

納許棋的棋盤是由正六邊形的幾何圖形所構成，據說普林斯頓高等研究院當時的磁磚就是正六邊形，而這也是啟發納許發明此遊戲的動機之一。到過澎湖的人一定會到有名的天后宮參觀，仔細觀察其地磚，將會發現也用了正六邊形的磁磚。事實上，金門的洋樓或廟宇也會使用正六邊形的磁磚，正六邊形是很好用的幾何圖形，特別是在鑲嵌平面上。

納許棋盤這種蜂窩狀結構除了日常生活中常見外，在科學上也扮演著舉足輕重的角色。俄羅斯出身的學者蓋姆與諾伏西羅夫共同獲得 2010 年諾貝爾物理學獎，他們是研究石墨烯的先驅，而這種薄膜號稱是二十一世紀的神奇材料。瑞典皇家科學院讚揚石墨烯是「完美的原子晶格」，因為這種材料在電腦、家用裝置和運輸方面都有很大發展潛力。

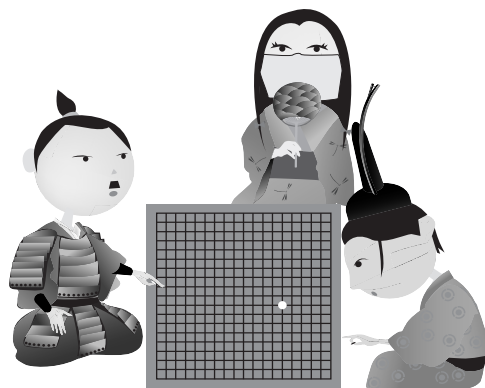


石墨烯的厚度只有一個原子，是世界最薄卻也是最堅強的奈米材料，幾乎透明，而且能夠導電和傳熱。因此，石墨烯獲看好是可能取代矽半導體的材料。

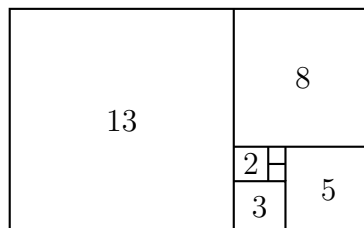
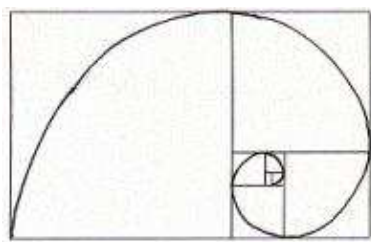
19 達文西的棋盤…聆聽上帝的美學



一幅對弈的畫，一場延續了五百年的棋局，
…，唯有看穿永恆之美的人，才能獲得答案。
這幅畫的場景是「國王和他忠誠的騎士對奕，
一位神秘的黑衣女子在背後觀棋…。」而畫裡的
棋局，不僅讓達文西喜愛不已，就連後來東
方的鐵路工人也著迷。究竟棋局所留下的數學
謎團是什麼呢？且讓我們來介紹。



達文西在他的畫作中充分使用了黃金比例，在今日許許多多的事物也都遵循著這個比例在運作。例如傳統照片規格 3×5 ，廣角照片規格 4×7 及大小為 $15:9$ 的寬螢幕電腦等都是在談論不同長、寬比例的矩形，這種比例接近 1.618 的矩形稱為黃金矩形。

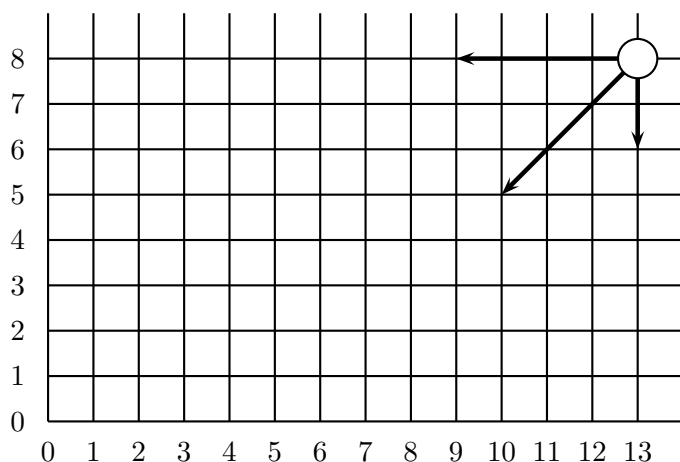


▲螺線與黃金比例

不知是人類 DNA 的遺傳或者是上帝的傑作，人類對這種大小尺寸的黃金矩形，特別情有獨鍾。當你拿出許許多多不同大小的矩形供小孩子挑選時，他們總是會挑到黃金矩形，就像真正的

小法王總是可以選對圓寂法王所留下的法器一樣不可思議。人類這種與生俱來的審美天賦，可以運用在遊戲上擊敗對手嗎？讓我們以一道在圍棋棋盤上玩的遊戲作說明，這遊戲跟圍棋最大的差別是：只需一粒棋子就可以玩這道遊戲。

🎒 19 在圍棋棋盤上放置一粒棋子，接著甲、乙兩人輪流移動這粒棋子，棋盤與移動規則如下：



- (1) 甲、乙輪流移動棋子。
- (2) 移動棋子的原則：每次只能將棋子往正下方、正左方或左斜下方移動，即每次只能從三個方向中選擇一種，但移動格子數需至少一格。
- (3) 將棋子移到原點者贏。

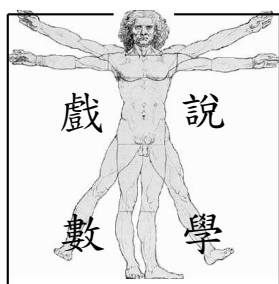
事實上，“一子棋遊戲”只是“拈”的另一種呈現方式，換湯不換藥，究竟什麼是“拈”呢？稍微介紹一下：「拈」這個遊戲本是中國民間的遊戲，英文叫做 Nim，大概這遊戲在當年大批華工到美國去做工，在工作之餘，撿石頭消遣或賭博時，被美國佬學了去。（當年的華工大部分是廣東人，而 Nim 是由廣東話「拈」（取物之意）轉音而來）。遊戲的規定是這樣的，石頭只有兩堆，每堆的個數隨玩者任意規定，兩人輪流取石頭，取的時候，需要任一堆中取一個或多個石頭，或者同時

在兩堆取同樣個數的石頭，直到最後將石頭取光的人贏。“一子棋遊戲”的條件就是“拈”條件的不同呈現方式，我只是將它改頭換面，讓這道拿取石頭的“拈”可以在坐標平面上操作，讓它較為數學化而已。

一子棋這道遊戲是我在恆春當兵時發明的，當我駐守關山崖下的山海里時，在落山風相伴的晚上，與阿兵哥玩一子棋是無聊軍中生活裡的一大樂趣。

參 考 文 獻

- [1] 張鎮華，拈及其各種變形遊戲，數學傳播第三卷第二期。
- [2] 李宗元、黃敏晃，一個名為「拈」的遊戲，科學月刊第七十期。
- [3] 許志農，古老的池塘，青蛙跳入，撲通！…一子棋的誘惑，《與奇人相遇的故事》。
- [4] 雷維特（陳慧瑛譯），法蘭德斯棋盤，漫遊者出版。



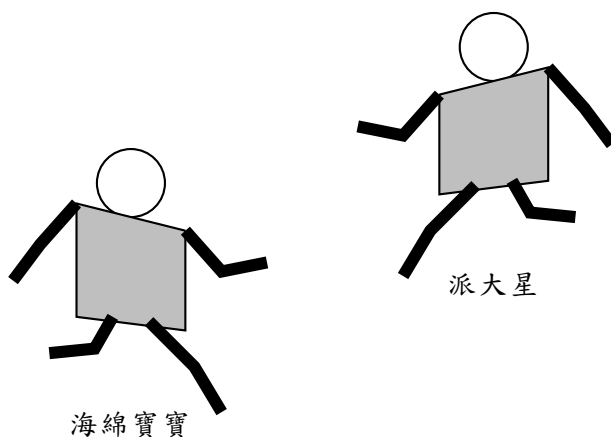
一隻老虎的臉孔，一隻螃蟹的體態，一片葉子的形狀，人類的身體，一個完整的圓以及蜂窩結構等等，乍看之下給人的感覺是完全均衡的，這多半要歸因於他們的對稱。對稱是一種數學均衡的行為，也是讓宇宙和諧的重要支柱，一般所談的對稱有三種：圓周對稱於圓心是「點對稱」，人類身體的左右對稱稱為「線對稱」，例如，達文

西的《維特魯威人》這幅素描就是線對稱，而人照鏡子時，與鏡中人的對稱稱為「面對稱」。又球對稱於球心也是點對稱，圓周對稱於直徑是線對稱，球對稱於通過球心的平面為面對稱。



▲動物的線對稱體態

有過請教練教球的經驗嗎？如果有，那將很容易理解點對稱的好處。

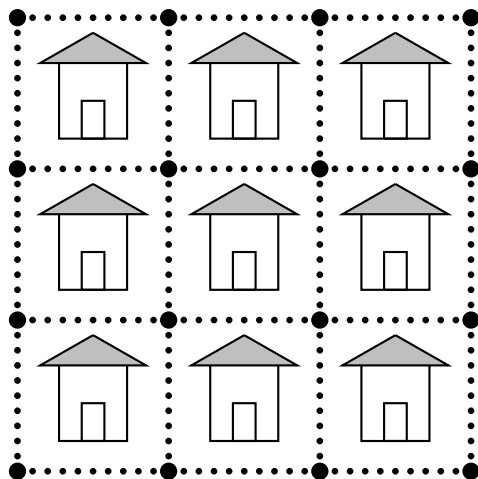


▲海綿寶寶與派大星教練的點對稱練球

當你站在教練的對面，教練命令你拿著拍子跟他一起揮拍時，會發現教練跟你的揮拍動作剛好對稱於你與教練連線的中點，而且這是一種點對稱。與教練同步揮拍，看似模仿與跟隨，或者說拿香跟著拜，但更貼切的說，它是在做對稱這種均衡的運動。他有兩個好處，其一，練好基本動作，其二，在比賽時，只需與對手作完全對稱的動作，就可以把球打回去。所以模仿、跟隨或者說拿香跟著拜一定就不好嗎？不要受到文字的影響，事實上，他們就是對稱的意思。

其實，對稱這道「數」光一直普照著我們的日常生活，但是我們始終對他的理解不夠深入，甚至沒有注意到它的存在。我們希望透過一道遊戲讓讀者更深入的瞭解對稱。

📁 20 甲、乙兩兄弟以蓋房子的圍牆來分祖先所留下來的九間房子，這九間房子的分佈如下圖所示，每間房子有四面圍牆，而相鄰的房子可以共用一面圍牆，所以只需蓋 24 面圍牆（圖中的 24 條虛線），九間房子的圍牆就可完成：



甲、乙蓋圍牆的規則是這樣的：

- (1) 甲、乙輪流，每人每次只能蓋一面圍牆，蓋過的圍牆不能重複蓋。
- (2) 房子屬於蓋第四面圍牆者。

(3) 佔有最多房子者勝。

問：先蓋圍牆者或後蓋圍牆者會贏，又其策略為何？

這道遊戲與坊間書籍所談的「佔房子遊戲」很像，但有很大的差別。一般書籍的遊戲規則是「當佔了一間房子時，還可以再圍一道牆壁」，而這裡是不行的，兩人輪流，每次只能圍一道牆壁。這個差別對遊戲的影響很大，一般書籍所談的「佔房子遊戲」，並沒有很好的數學方法或策略來告訴玩者「誰會贏，用什麼玩法。」

21 在正五邊形上跳舞…搶 20 的遊戲



將船艙改裝成書店，航行在世界各地，販售各國書籍，是一種新鮮的經營模式。記得民國七十六年我在高雄實習時，從報紙上得知有一艘這樣的海上書展船會停泊在高雄港，於是利用假日登船尋寶一番。對於這趟挖寶之旅，只記得一件事情，那也是一則數學遊戲在台灣深根的開端。經過二十年的進化，那道有關累加數字遊戲，早已

從舶來品成長為在正五邊形上操作的移動硬幣遊戲。對於這樣的在地貨，不介紹給大家認識，是有點可惜。

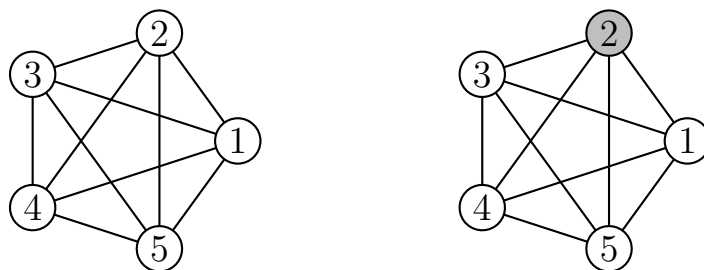
假設遊戲者為甲、乙兩人且甲先玩，並遵守下列規則：遊戲者必須輪流從

1 2 3 4 5

中選擇一數，但不可重複對方剛選的數。如此下去，將兩人所選的數字累加起來，當累加至正整數 20 者算贏（動彈不得或故意讓累加的數字超過 20 者算輸）。問：甲或乙有必勝的策略？這是那道舶來品的原來敘述，後來我把它修改成「將一枚硬幣放置在上述五個數字內，甲、乙兩人輪流移動硬幣並累加的遊戲」。最後，又將此遊戲與正五邊形相連結。

古希臘歐幾里德在他的《幾何原本》中描述了一個用直尺和圓規做出正五邊形的過程，也因為這個緣故，正五邊形成為歐氏學派重要的圖騰。我將那道移動銅板的數字遊戲與正五邊形結合成如下的遊戲：

🔗 21 如下圖的左圖所示，在正五邊形的五個頂點各畫一個圓，並依序寫上 1, 2, 3, 4, 5 等五個數字。甲、乙兩人在這幾何圖形上玩累加數字遊戲，規則如下：

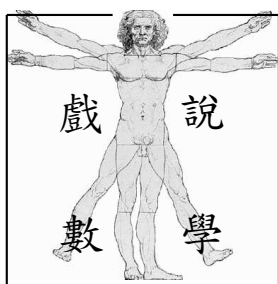


- (1) 先玩的甲拿出一枚拾圓硬幣，放置在五個頂點中的一個（上圖中的右圖代表甲將硬幣置於編號 2 號的頂點）。
- (2) 後玩的乙必須將硬幣依著邊線或對角線，移動至其它編號的頂點。
- (3) 接著甲同樣將硬幣依著邊線或對角線，移動至其它編號的頂點，即硬幣不可以不移動的意思。
- (4) 依此規則，輪流移動硬幣。
- (5) 將移動到的頂點編號累加，當移動完硬幣後，頂點編號累加剛好為 20 者贏，放棄或超過 20 者輸。

關於這道遊戲，先玩或後玩者有必勝的策略呢？

如果我們將累加數 20 改成其餘數字 N ，那麼探討「何者有必勝的策略」是一道不錯的研究問題。顯然，當 $N = 1, 2, 3, 4, 5$ 時，先玩的甲肯定有必勝的策略（只需將硬幣直接置於該數字的頂點上即可）。而當 $N = 6$ 時，誰有必勝的策略呢？不經思索的情況下，很多人會誤認為乙有必勝的策略，但事實並不是這樣。

22 阿基米德的“胃痛”遊戲…西方的七巧板



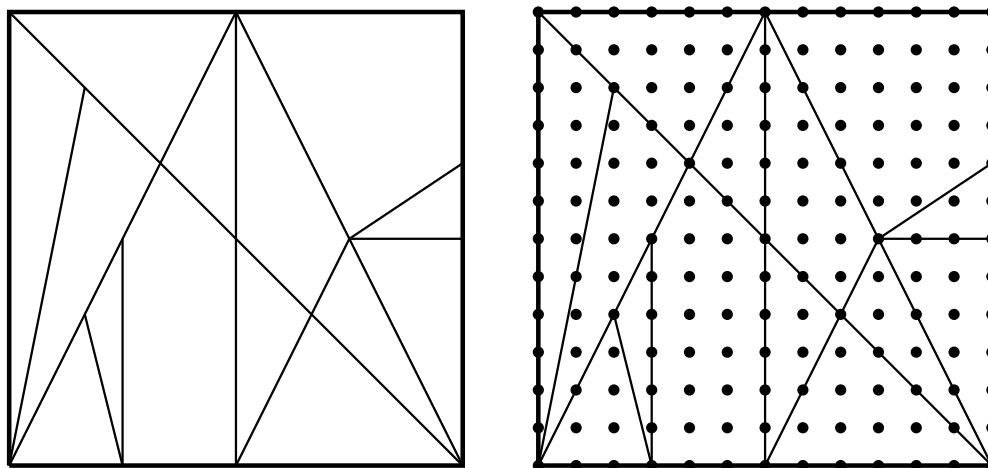
幾年前報紙上刊登過一則有趣的詐騙新聞，兜售太陽眼鏡的生意人向路人宣稱，戴上這高科技眼鏡，可以看穿衣服，讓內在無所遁形，路人甲一時心動買了一副，回去一「視」再「視」，都沒有看到他想看到的，一怒之下，告進法庭。法官傳生意人訊問，生意人說：「沒有

可以看透衣服的眼鏡，這是基本常識，只有色迷心竅的人才會受騙，法官應該問路人甲有否色迷心竅，如果沒有，那代表路人甲早就知道這只是一副普通的眼鏡，無所謂受騙。」路人甲只好啞巴吃黃蓮，有苦說不出的撤回告訴。

這種用高科技騙人的伎倆時有所聞，事實上，高科技經常被用來擷取、儲存資料與還原原始資料。例如，以前的帳目都是記錄在紙本上，沒多久就累積一大疊資料，當政府人員前來查帳時，往往來不及銷毀，留下證據。現在都用電腦記帳，小小的硬碟就可以記錄許多資料，遇到查帳時，只要手指一按就可以銷毀不想被知道的資料。但是，銷毀的硬碟資料是可以被還原的，科技人員可以一層一層的叫回被殺掉的資料。

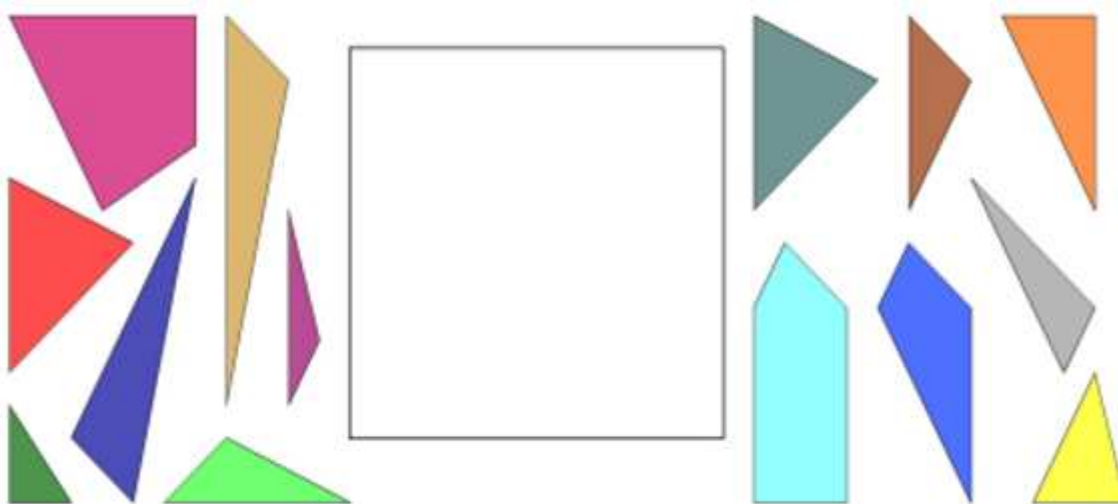
這裡我們將介紹一道差一點就消失，而且是世界上最古老的拼圖遊戲。在加州史丹福大學同步輻射實驗室，古文物復原專家運用紫外光與數位圖像電腦處理技術，讓阿基米德發明的一道遊戲重現天日。在 1998 年 10 月 30 日，《紐約時報》頭版登了一則報導：紐約佳士得拍賣會上，有一本其貌不揚的古書，以美金 200 萬的高價成交。從外表看，這本書就像是中世紀某位修士的祈禱書，磨損不堪，布滿燒焦、水漬、發霉的痕跡。然而在祈禱文的下方，隱約可看見幾乎被擦拭掉的、傳抄自古代科學家阿基米德的抄本。這祈禱書是教士約翰·麥隆納斯於公元 1229 年 4 月 14 日抄寫，想在耶穌復活周年日，當作禮物獻給教會。羊皮紙從古代中世紀開始使用，由於價值極為貴重，通常經過皮面刮削後，重新書寫，被稱為再生羊皮紙，麥隆納斯將祈禱文書寫在再生羊皮紙上。透過高科技的掃描，祈

禱書最後一頁原本是阿基米德稱為《胃痛》的一篇文章。該文章並非談身體的疼痛，而是在論述一道組合學的問題，而且附了一個正方形的插圖：



阿基米德的《胃痛》拼圖

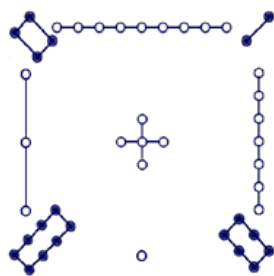
🔗 22 將阿基米德胃痛拼圖的正方形切割成 14 塊之後（如下圖所示），再重新拼湊成為正方形的組合方法有多少種？



在這再生羊皮書上，阿基米德所給的答案是 17152 種！這答案經過電腦科學家比爾·卡特勒驗證無誤，卡特勒也指出：將旋

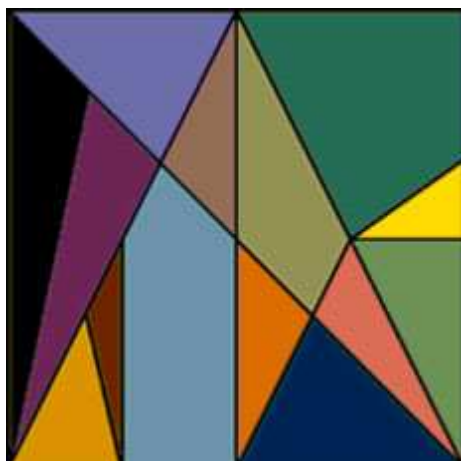
轉或者鏡射視為同一種的話，仍然有 536 種不同的拼法。事實上，幾位鼎鼎有名的數學家，如隆·格拉罕及金芳蓉夫婦檔，都只靠紙與筆就算出這個數字。

相傳在西元前 23 世紀大禹治水的時候，在黃河支流洛水中，浮現出一個大烏龜，甲上背有 9 種花點的圖案，人們將圖案中的花點數了一下，競驚奇地發現 9 種花點數正巧是 1—9 這 9 個數，各數位置的排列也相當奇妙，後來人們就稱這個圖案為洛書。



洛書給出的 9 個數所排成的方陣具有絕妙的性質，橫的 3 行、縱的 3 列以及兩對角線上各自的數字之和都是 15。人們因它的性質之獨特而大感興趣，對其進行了多方面的研究。中國把這“縱橫圖”或西方稱為“幻方”的精巧結構當作組合數學的濫觴。再生羊皮書的出現，西方似乎也把組合數學的濫觴往前推算到阿基米德的《胃痛》遊戲。

現在讓我們動手做一道練習吧！拿剪刀或美工刀將阿基米德的胃痛拼圖沿著黑線剪開，讓它變成 14 塊。然後將這 14 塊填滿底下阿基米德的正方形圖片，並要求轉動後的縫隙不得與原來的圖形一樣：

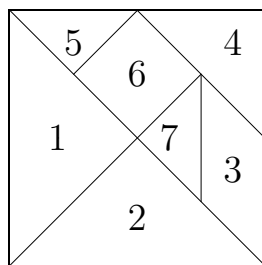


拼成正方形的的方法有 17152 種，如果一位老師每天到學校的第一件事情就是拼出新的正方形，那麼在他退休時，也無法完成所有的拼法。這是否意味著隨便拼都會成功呢？試試看吧！

美國 1977 年發射的尋求外星文明的太空船旅行者 1 號、2 號上，除了有向宇宙人致意的問候訊號外，還帶有一些圖片，這些圖片中就有一張是四階幻方圖。這個四階幻方的構圖，同我國的洛書一樣，也是用不同數量的圖點佈局成的，而且它又是一個具有多種奇妙性質的四階幻方，向宇宙人告示了我們地球人的智慧。

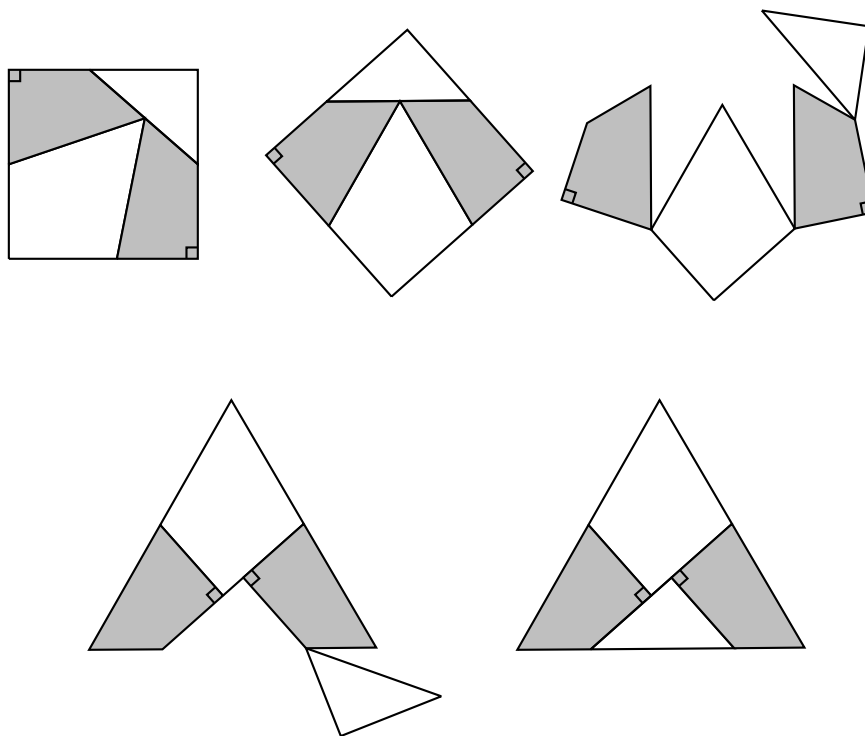
洛書、幻方都是組合學古老的例子，如今加入了《胃痛》遊戲這道啟蒙例子，讓組合學的內涵更多采多姿。從這些例子不難發現，組合學就是在處理離散的情形；而今日的電腦也是以處理離散情形為核心。計算機的使用讓組合學研究一日千里，同樣的，組合學的訓練也使計算機軟體產業得到好的基礎。

阿基米德的羊皮紙手稿，由丹麥學者海伯格於 1906 年在今之伊斯坦堡發現，1920 年再度失蹤，1998 年出現在紐約佳士得拍賣會上。該次拍賣，希臘代表競標至美金 190 萬才退出，而最後的得標者，是一位不願意透露姓名的美國收藏家，這位收藏家說，將來學者可以借閱該手稿。阿基米德的 14 塊拼圖，除了拼成正方形的遊戲之外，也可以玩類似中國七巧板的遊戲，拼各種動物。

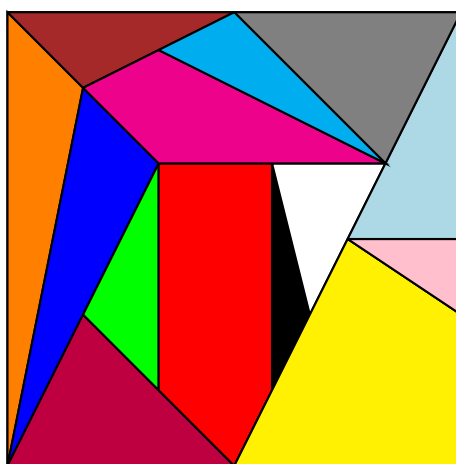


七巧版

《胃痛》拼圖最早出現在中世紀的阿拉伯文譯本上，大家都把它視為類似中國七巧板的遊戲，定位為益智遊戲的一種。事實上，數學家也研究過正方形與正三角形的拼圖，下圖是將正方形分割成四塊，然後逐步拼成正三角形的過程：



直到再生羊皮書的出現，才瞭解阿基米德是在研究拼成正方形的組合方法數，並不是拼圖遊戲或是七巧板之類的益智遊戲。也因為這樣，阿基米德也成為西方組合學的老祖先。這裡附上胃痛拼圖眾多解答中的一種，也是個人覺得很漂亮的拼法：



胃痛拼圖的啟發與延伸：

- (1) 透過格子點的巧妙切割，阿基米德找到了一道有萬餘種拼法的拼圖遊戲，不僅讓我們開了眼界，也替拼圖遊戲增添了豐富的遺產。

- (2) 多邊形的拼圖遊戲，在接觸頂點處牽涉到角度和的問題，由於每塊拼圖的邊長至多是開根號的長度，瞭解這個限制所能形成的角度和問題是值得深思的一道數學問題。
- (3) 尋找面積稍小，拼圖個數也較少（例如八、九或十塊的拼圖），但拼法有數千種的新拼圖遊戲。這樣的拼圖遊戲是否存在？如果可以找到，肯定是一道更膾炙人口的拼圖遊戲。有興趣的讀者可以動手試試看。

參考文獻

- [1] 曹亮吉譯（內茲，諾爾著），《阿基米德寶典—失落的羊皮書》，天下文化出版。

23 碩大就是美…超過樹狀圖的範圍



在數學上，有關計算個數或比較大小的問題，除非有很好的公式可代入精確計算或比較大小，否則使用樹狀圖進行分析、歸類及統計是不得不的一種計算方式。同樣地，在兩人玩的遊戲中，人們也可以畫樹狀圖來進行模擬一番，只是比賽進行中樹狀圖只能在腦海裡想像，無法像解數學題目一樣，在紙張上畫。但是，樹狀圖也有它的缺

點，當樹狀圖產生迴圈或樹狀圖太過複雜（圖繁不及備載）以致於無法從中看出端倪時，樹狀圖的用處就被侷限了。也就是說，樹狀圖只是一種輔助思考的實體，隱藏在樹狀圖背後的規律才是解題的重點。我們來欣賞一道小學競賽的數學遊戲題：

23 將寫有

1, 2, 3, 4, 5, 6

六個數字的六枚金幣隨意的排成一行，例如

③④②⑥⑤①

接下來甲、乙輪流拿取金幣，規則如下：

- (1) 每人每次取一枚金幣，取後不放回。
- (2) 每次只能從兩頭取金幣，也就是說，夾在中間的金幣不能取。
- (3) 在三個輪迴之後，甲乙各取三枚金幣，所取三枚金幣的數字和較大者獲勝。

問：誰有必勝的策略，又這策略跟六枚金幣的排列方式有關嗎？

收集與開發有趣的數學遊戲是一件苦差事，這道遊戲是我到嘉義東石高中演講時，林信權老師聽了我講的幾道遊戲後，忽然間想到最近學生參加競賽所做的一道數學遊戲，提供給我參考的。而那個競賽是九章文教基金會所舉辦的「2007 小學數學競賽選拔賽複賽」，原題是這樣的：

A、B 兩人玩紙牌遊戲，紙牌共 10 張，牌上分別印有數

$$1, 2, 3, \dots, 10.$$

B 將牌依任意次序在桌面上排成一列，每個人都可看到牌上的號碼。由 A 先開始輪流每人每次拿一張牌，每次只能從整列牌的兩端拿牌，直到拿光為止，所取得的牌上的數的總和較大者為贏家。請問無論 B 如何安排這些牌，無論後取牌的 B 如何取牌，A 有無必勝的策略？請詳細說明你的理由。