**111學年度十二年國教課綱國中小階段前導學校協作計畫**

**課程設計、發展與評鑑案例徵選活動**

<心心相映-你是我的唯一>

一、設計理念

1. 源起：

　　「三角形的三心」堪稱為學生學習幾何的大魔王，學生在一單元中必須學習三種很像卻又不一樣的「心」，這三個心的定義、性質、延伸應用，學完全部都混在一起，學生光靠死背硬記是無法學好這個單元的。

　　因此，本教案利用數位優勢，使用平板和繪圖軟體具體操作，讓學生先感受圖形間的關聯，進而從感受中產生需求，接著啟動數學腦來滿足需求、解決問題，最後才下定義、進到課本練習題目，此時學生已在操作中建立心像，知識方能活用。

1. 學生背景分析：

　　本教案於兩個班級進行教學，其中一班為美術班，學生程度較齊，中上居多，一班為普通班，學生程度差異較大，教學時採異質性分組（三人一組）。

部分學習弱勢學生在使用平板操作繪圖軟體時上手較慢，剛開始需要較多的協助，由於使用軟體操作圖形簡便迅速，不會受到自身數學能力的影響，因此在圖形的繪製上學生皆能順利完成。

1. 教材分析：
2. 教材地位

「三角形的三心」為國中第五冊第三章，學生自第四冊開始學習幾何內容，在學過三角形、四邊形和圓形之後，本單元可以說是集幾何之大成，其中內心和外心談的是三角形和圓形的關係，所有學生先前學過的幾何知識在本單元皆派上用場，是非常重要且不好上手的單元。

1. 教學脈絡差異

課本教學脈絡 三心定義🡪三心性質🡪例題🡪隨堂練習

本教案教學脈絡 探究圖形關係🡪臆測圓心位置🡪發展性質🡪下定義🡪例題練習

　　課本在談本單元時，逐一介紹了重心、外心、內心，中規中矩的從定義談到性質，接著進例題練習，學生來不及感受，就開始做題目，無感的跟著老師的步驟解題，學完下一個就忘了上一個，最後全部的性質都混在一起。

本教案從營造需求感出發，先發現內切圓和外接圓的獨特之處，再來探討其圓心的位置及相關性質，最後才給出定義，學生自己發現規則、自己下定義，題目練習毋須多，內、外心知識早已成為數學腦的一部分。

1. 核心素養呼應說明：
2. 本教案使用平板和繪圖軟體進行操作與學習，符合總綱核心素養J-B2中的「具備善用科技、資訊與媒體以增進學習的素養」。
3. 本教案架構為探究實作、數學臆測、統整比較，教學中學生自己嘗試、猜測，最後用自己的語言命名、下結論，符合領綱核心素養數-J-B1中的「具備處理代數與幾何中數學關係的能力，並用以描述情境中的現象。能在經驗範圍內，以數學語言表述平面與空間的基本關係和性質」。
4. 素養導向教學特性說明：
5. 探究實作🡪激發學生內在學習動機。
6. 數學臆測🡪主動營造數學感的過程。
7. 發表討論🡪師生、生生共建數學。

二、教學設計

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 領域  跨領域/科目 | 數學領域 | | | | | | | | |  |
| 實施年級 | 九年級 | | | | 總節數 | 5節 | | | |  |
| 單元名稱 | 三角形的三心(本教案僅談關聯性較大的內心和外心，重心課程另外規劃) | | | | | | | | |  |
| 核心素養 | | | | | | | | | |  |
| 領綱核心素養 | | | 總綱核心素養 | | | | | | |  |
| 數-J-B1  具備處理代數與幾何中數學關係的能力，並用以描述情境中的現象。能在經驗範圍內，以數學語言表述平面與空間的基本關係和性質。~~能以基本的統計量與機率，描述生活中不確定性的程度。~~ | | | J-A2 具備理解情境全貌，並做獨立思考與分析  的知能，運用適當的策略處理解決生活及生命議題。  J-B2  具備善用科技、資訊與媒體以增進學習的素養，並察覺、思辨人與科技、資訊、媒體的互動關係。 | | | | | | |  |
| 學習重點 | 學習  表現 | s-IV-11 理解三角形~~重心~~、外心、內心的意義和其相關性質。 | | | | | | | |  |
| 學習  內容 | S-9-8 **三角形的外心：**外心的意義與外接圓；三角形的外心到三角形的三個頂點等距；直角三角形的外心即斜邊的中點。  S-9-9 **三角形的內心：**內心的意義與內切圓；三角形的內心到三角形的三邊等距；三角形的面積＝周長×內切圓半徑÷2；直角三角形的內切圓半徑＝（兩股和－斜邊）÷2。 | | | | | | | |  |
| 議題融入 | 無 | | | | | | | | |  |
| 教材來源 | 自編，部分設計想法參考數學新世界-國中核心素養(九年級) | | | | | | | | |  |
| 學習資源 | 康軒版課本、自編學習單(附件一)  平板、myViewBoard-Whiteboard APP、直尺+圓規 | | | | | | | | |  |
| 學習目標 | | | | | | | | | |  |
| 1. 學生能利用平板及繪圖軟題，探究三角形與圓形的各種位置關係，並能有系統性的進行分類。(J-B2、數-J-B1) 2. 學生能從探究三角形與圓形的位置關係中，發現獨特且唯一存在的內切圓與外接圓，並在臆測圓心的過程中，發現「到邊等距」或「到頂點等距」的需求，進而發展出完整的內、外心性質。（S-9-8、S-9-9） | | | | | | | | | |  |
| 課程架構 | | | | | | | | | |  |
|  | | | | | | | | | |  |
| 學習活動設計 | | | | | | | | | |
| 學習活動流程 | | | | | | | 時間 | 學習資源 | 學習評量 |
| 第一、二節課  學習目標：學生能利用平板及繪圖軟題，探究三角形與圓形的各種位置關係，並能有系統性的進行分類。   1. 探究三角形與圓形的位置關係 2. 複習直線與圓的位置關係 3. 學生使用myViewBoard-Whiteboard APP畫出直線與圓，並移動圖形觀察直線與圓的三種位置關係。 4. 學生在學習單中列表記錄不同的位置關係，並寫出直線與圓三種不同位置關係的交點數。 5. 教師引導學生觀察三種位置關係，發現直線與圓相切的關係最為獨特(只發生在某個瞬間)，而此時兩者的交點有特別的命名，稱為切點，並口頭提問切線與切點的相關性質作為複習。 6. 觀察紀錄表格，引導學生發現「交點數」可作為不同位置關係分類的量化依據。      1. 探討三角形與圓的位置關係 2. 學生使用myViewBoard-Whiteboard APP，先畫出一個圓和一個三角形，接著透過調整兩者的相對位置或大小，來觀察不同的位置關係，並將這些位置關係的圖形徒手畫在學習單上做紀錄。(類型相當多元，學生先隨意畫一些想的到的)      1. 教師提問：這些類型如何列表紀錄？如何知道是否所有的情形都有畫出來了？透過提問引導學生使用「交點數」進行紀錄。(記錄在學習單第3題，課堂上若未完成者當回家作業) 2. 教師依序由交點數0~6逐一討論各種不同的位置關係。(第二節課進行)        1. 利用myViewBoard的互動功能，由學生將圖形截圖後上傳，教師透過大屏展示給全班同學看。      1. 發現內切圓與外接圓   在探討交點數時，交點數3是關鍵。當圓與三角形的交點數為3時，會有畫出三角形的內切圓與外接圓(此時先不命名)的需求，這兩個圓非常特別，且都只有唯一一個，教師帶領學生探討完所有交點數的種類之後，再回到交點數3的情況進行課堂收斂，引導學生發現內切圓與外接圓的獨特性，為下一堂課的內容埋下伏筆。  課堂作業：學習單4-(1)  第三節課  學習目標：學生能從探究三角形與圓形的位置關係中，發現獨特且唯一存在的內切圓與外接圓，並在臆測圓心的過程中，發現「到邊等距」或「到頂點等距」的需求，進而發展出完整的內、外心性質。   1. 內切圓的探討與命名 2. 臆測🡪檢驗🡪修正：(內切圓)圓心在哪裡？   在探討交點數3時，學生會需要畫出圓與三條直線(三個邊)同時相切的圖形，前一天回家作業先請學生使用圓規在學習單4-(1)的三角形上不斷的嘗試，猜測圓心的位置來抓感覺，課堂上進行學習單4-(2)，使用繪圖APP進行下列三步驟操作：「猜測圓心的位置🡪拉出圓形🡪確認圓是否與三邊都相切？」，沒有成功就重畫，透過不斷調整位置來感受圓心的位置和三邊的關係。    學生猜測四次之後，終於成功了！(每次的圓心留著，做為調整的參考)   1. 釐清數學脈絡   教師透過以下提問，協助學生進行數學思考：   1. 所有的三角形都能畫出與三邊都相切的圓形嗎？(做學習單4-(2)時分配組員畫不同的三角形-銳角、直角、鈍角，再互相觀察彼此的圖形。) 2. 當你猜測圓心位置時，你的眼睛會關注哪些地方？(A：要到三邊都一樣遠) 3. 除了猜測之外，有什麼方法可以精準的找到與三個邊都一樣遠的點？(進到數學性質的運用) 4. 運用數學性質解決問題 5. 欲解決到三邊等距，先從到兩邊等距開始引導，想要到兩邊一樣遠，就必須在兩邊的中間，也就是在必須在角平分線上(教師視情況複習角平分線性質)。 6. 引導學生思考如何求出到三邊等距的精準位置：兩條角平分線的交點。 7. 討論第三條角平分線是否也會通過這個點。 8. 命名賦予數學意義   找到與三邊都等距的點作為圓心，就能畫出與三角形三邊都相切的圓，那麼這個點及這個圓，我們可以如何命名它？引導學生提出想法，並收斂至內切圓及內心這兩個正式的數學名詞。(填入學習單第4題)    這裡最後才填入   1. 實作練習   使用尺規作圖，在學習單第4題-(6)上精準的畫出三角形的內切圓。   1. 內心的定義與性質   學生經歷內切圓的繪圖實作後建立心像，接著便能有脈絡的理解內心的性質，進而自行給出定義：  內心🡪內切圓的圓心。  位置在哪裡🡪到三邊都等距的地方。  如何找到🡪三條角平分線的交點上。   * + 備註：經歷上述三堂課的概念發展後，最後銜接到課本的例題，練習內心相關題型，及真實情境上的應用。   第四節課(本節課教學脈絡同第三節課，引導學生用相同方式思考)  學習目標：學生能從探究三角形與圓形的位置關係中，發現獨特且唯一存在的內切圓與外接圓，並在臆測圓心的過程中，發現「到邊等距」或「到頂點等距」的條件，進而發展出完整的內、外心性質。   1. 外接圓的探討與命名 2. 臆測🡪檢驗🡪修正：(外接圓)圓心在哪裡？   回到交點數為3時的另一種特殊情況，學生會需要畫出同時同過三角形三個頂點的圓形，前一天回家作業先請學生使用圓規在學習單5-(1)的三角形上不斷的嘗試，猜測圓心的位置來抓感覺，課堂上進行學習單5-(2)，使用繪圖APP操作：「猜測圓心的位置🡪拉出圓形🡪確認圓是否同時通過三個頂點？」，沒有成功就重畫，不斷調整位置來抓到感覺。  學生上台搶答  我猜圓心在這  咦？會成功嗎？  成功畫出外接圓！  猜測圓心位置，並慢慢把圓拉大   1. 釐清數學脈絡   教師透過以下提問，協助學生進行數學思考：   1. 所有的三角形都能畫出同時通過三個頂點的圓嗎？(這裡可分配組員畫不同的三角形-銳角、直角、鈍角，再互相觀察彼此的圖形。) 2. 當你猜測圓心位置時，你的眼睛會關注哪些地方？(A：要到三個頂點都一樣遠) 3. 除了猜測之外，有什麼方法可以精準的找到與三個頂點都一樣遠的點？(進到數學性質的運用) 4. 運用數學性質解決問題 5. 欲解決到三頂點等距，先從到兩點等距開始引導，想要到兩個點一樣遠，就必須在兩點的中間，也就是在必須在中垂線上(教師視情況複習中垂線性質)。 6. 引導學生思考如何求出到三頂點等距的精準位置：兩邊中垂線的交點。 7. 討論第三邊中垂線是否也會通過這個點。      1. 命名賦予數學意義   找到與三頂點都等距的點作為圓心，就能畫出同時通過三個頂點的圓，那麼這個點及這個圓，我們可以如何命名它？引導學生提出想法，並收斂至外接圓及外心這兩個正式的數學名詞。(填入學習單第5題)   1. 實作練習   使用尺規作圖，在學習單上精準的畫出鈍角、直角、銳角三角形的外接圓，並探討外心位置的變化。   1. 外心的定義與性質   學生經歷外接圓的繪圖實作後建立心像，接著便能有脈絡的理解外心的性質，進而自行給出定義：  外心🡪外接圓的圓心。  位置在哪裡🡪到三頂點都等距的地方。  如何找到🡪在三邊中垂線的交點上。   * + 備註：經歷這一節課的概念發展後，再銜接到課本的例題，練習外心相關題型，及真實情境上的應用。   完成學習單1-4頁的教學引導後，可銜接課本進行對應的例題練習，待內外心相關練習完成後，再回到學習單第5頁進行統整。  第五節課   1. 內外心重點比較&評量檢核 2. 重點比較：在分別練習過內心、外心的課本例題之後，發下學習單的第6大題，讓學生透過表格整理重點，來幫助學生重新釐清兩者間的關係與脈絡。 3. 評量檢核：以「求角度」、「求長度」兩大重點題型檢核學生對內心/外心的理解程度。    * 備註：這裡刻意使用兩道敘述看起來幾乎相同的題目讓學生觀察、比較，讓學生理解到死背解題方法沒有用，真正從內、外心的性質著手解題才是學習的重點。 4. 內外一心：透過提問引導學生發現正三角形的內心和外心位置相同，幫助學生概念統整。 5. 內心是三角形三內角平分線的交點，外心是三角形三邊中垂線的交點，有甚麼三角形的內角平分線恰好就是某一邊的中垂線呢？ 6. 若是某三角形的三邊中垂線和三內角平分線都恰好重和，此三角形的內心和外心就會在同一個位置，有沒有什麼三角形有這樣的特性呢？ | | | | | | | 15分  10分  20分  40分  5分  10分  10分  10分  5分  5分  5分  10分  10分  10分  5分  5分  5分  15分  25分  5分 | 平板  學習單  平板  學習單  直尺  圓規  平板  學習單  直尺  圓規  學習單 | 完成學習單第1題  口頭提問  1.學生回答表格內容。  2.學生回答切線性質。  完成學習單第2題，教師巡視檢核。  口頭提問  完成學習單第3題  口頭提問，檢核學習單第3題  依組別角色分派繪圖任務，學生圖檔上傳  作業：回家完成學習單4-(1)  學生操作平板，完成學習單第4題-(2)  上台搶答(繪圖)  口頭提問學習單第4題-(3)(4)  口頭提問學習單第4題-(5)  口頭提問由學生發表命名的想法  實作評量-完成學習單第4題-(6)  口頭提問內心相關重點，學生回答並填上重點整理區  回家完成學習單5-(1)  學生操作平板，完成學習單第5題-(2)  上台搶答(繪圖)  口頭提問學習單第5題-(3)(4)  口頭提問學習單第5題-(5)  口頭提問由學生發表命名的想法  實作評量-完成學習單第5題-(6)  口頭提問外心相關重點，學生回答並填上重點整理區  完成學習單第6題  1.內外心重點比較-口頭提問  2.重點試題-學生上台解題  3.內外一心-口頭提問 |
| 教師省思 | | | | 學生回饋 | | | | | |
| 本單元第一次嘗試讓學生用平板上課，課前需要相當多的準備與勇氣，我很感謝自己有跨出這一步。  會想要在三心這個單元使用數位融入，是希望學生對於幾何圖形的理解可以更深入，紙本只能畫出靜態單一的圖，透過繪圖軟體圖形可以輕易的放大縮小、四處移動，這對於學生探究圓與三角形的位置關係相當有利，因此決定在課程上做一個自我突破，結果也相當的令人滿意。  課程進行期間也邀請了校內同仁參與公開觀課，給予教學上的建議，在同仁的回饋中提及教師在小組分工的掌控上較為薄弱，各組搶答時部分學生仰賴同組的組員繪圖，自己就沒事做，也會有學生完成任務後感覺無聊，便使用繪圖軟體畫起其他的圖案，因此在後續課堂操作中，我會特別注意分配任務時每個組員都要操作，提高參與度與教學節奏。  本校因參加前導學校協作計畫，本教案得以有專家教師協助審核，專家教師除了肯定本教案「架構完整、目標明確、環環相扣…」之外，亦給予相當受用的建議：「學習單中分別設計重點整理框供筆記，有效收束重點，惟建議在最後放入內、外心的比較表格，讓學生將兩個重點進行統整，亦可加入內心、外心的基礎練習題或生活情境題，讓學生在掌握學習重點後，能立即牛刀小試。」因此教學後進行教案修正，在學習單的最後加入了統整表格及練習題，讓學生學習過後能進行收斂。  感謝本校教務主任在前導學校計畫中的邀請，讓我得以有契機踩進「生生用平板」的大門，並能完整的將內外心的教學架構重新思考後撰寫下來，這是一次愉快的教學經驗，相信對學生來說，也會是一次愉快的學習經驗。 | | | | ★陳同學  課堂中老師讓我們使用平板畫出不同大小的圓、各式各樣的線條，透過這個活動去「感覺」要使一個圓和某條線有幾個交點，而圓心又應該點在哪裡，再進一步思考究竟為何會是那個點，是直覺嗎？還是多次嘗試後發現了什麼？  其中讓我印象深刻的是「圓與三角形的交點數」，看看左右同學的學習單，會發現每個人寫的都不太一樣，實際畫出來之後才驚覺是相同的圖形，在幾何的世界中，不要只會死背什麼心有哪些性質，老師帶我們一步步去操作重新思考一筆一劃的意義，了解點線面的背後原因。  ★蘇同學  在上三角形的三心這個課程中，老師讓我們體驗了如何找到重心、外心、內心，找重心時老師利用一個實驗，從兩點支撐的物體，慢慢的把兩點靠近，找到屬於這個物體平衡的重心。找內、外心時老師帶我們利用平板繪圖軟體試著找出圓和三角形的各種關係(兩者間交互的交點個數)，也讓我們試著畫出包圍直角、鈍角、銳角三角形的圓，並延伸出這些圓的半徑和三角形三頂點等距的關係，而三角形內切圓則是和三角形三邊相切而成，且半徑與這些相切的點是垂直的關係。  我覺得這樣動手作圖的方式讓記憶更加深刻，而且更有趣，利用平板繪圖相較於手繪更省時間，不會因為每次點不準重複的擦掉又重畫而失去學習的熱忱和意義。  ★郭同學  我在這堂課中學習了圓的三心性質，使用平板進行學習，讓我感受到學習的樂趣和便捷性。  首先，我們使用平板上的圖形軟件繪製了圓和圓心，然後學習了圓的三心性質，包括內心和外心。在學習過程中，我們可以通過平板上的觸摸屏幕進行互動操作，例如繪製圓和標註圓心，這讓我們更容易理解圓的三心性質和它們之間的關係。  其次，使用平板進行學習也非常便捷。相比於傳統的教學方法，平板學習可以更快速地完成任務，並且可以隨時隨地進行學習，這對我們學習圓的三心性質非常有幫助。  最後，使用平板進行學習也非常有趣，這次的體驗也讓我在這個單元更容易判斷圓的三心性質  這次體驗對我的幫助很大，也讓我樂在數學課中。希望以後能有更多這種類型的課程。 | | | | | |

三角形的內心與外心

附件一、學習單

\_\_\_\_年\_\_\_\_班\_\_\_\_號

姓名：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

1. 我們在第二章有學過，圓和一條直線的位置關係有下列三種：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 位置關係圖形 |  |  |  |
| 位置關係描述 |  |  |  |
| 圓心到直線距離(d)與 半徑(r)的大小關係 |  |  |  |
| 圓與直線交點數 |  |  |  |

* + 請你以平板上的whiteboard APP，練習畫出上述三種位置關係的圖形。

1. 圓和一個三角形的位置關係，你可以畫出幾種呢？
   * 請你使用whiteboard APP先畫出一個圓和一個三角形，並透過調整兩者的相對位置或大小，來找到不同的位置關係。請將你觀察到的種類畫在下方。(徒手畫即可)
2. 我們發現圓和三角形的位置關係相當的多種，若要完整記錄，我們可以使用圓和三角形的「交點數」來進行分類。

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 交點數 |  |  |  |  |
| 位置關係  圖形 |  |  |  |  |
| 共有幾種 |  |  |  |  |
| 交點數 |  |  |  |  |
| 位置關係  圖形 |  |  |  |  |
| 共有幾種 |  |  |  |  |

在上述圓與三角形的位置關係中，有兩種圖形很特別，似乎不是那麼容易就能畫出來，我們接下來要來探討這兩種特別的位置關係。

1. 與三角形的三邊都相切的圓：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_。
2. 請你利用圓規，嘗試畫出一個和下方三角形的三邊都相切的圓，試著調整圓心的位置，直到你成功為止。(這裡不需要精準的尺規作圖)
3. 請在平板上使用whiteboard APP畫出一個三角形，試著畫出一個和三角形的三邊都相切的圓形。(同組組員請分配畫出銳角、直角、鈍角三種不同的三角形)
   * 請先在你猜測的圓心位置上點一個點，再用圓形工具拉出一個圓，失敗了就重新猜測圓心，重複直到成功。
4. 所有的三角形(銳角、直角、鈍角)都能畫出與三邊都相切的圓形嗎？可以的打勾。
   * + 銳角三角形 □ 直角三角形 □ 鈍角三角形
5. 當你猜測圓心位置時，你的眼睛會關注哪些地方？
6. 除了猜測之外，有什麼方法可以精準的找到與三個邊都一樣遠的點？

筆記區：

|  |
| --- |
| 重點整理： |

1. 請使用**尺規作圖**，畫出與下列三角形的三邊都相切的圓形。

1. 同時通過三角形三個頂點的圓：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_。
2. 請你利用圓規，嘗試畫出一個同時通過右方三角形三個

頂點的圓，試著調整圓心的位置，直到你成功為止。

(這裡不需要精準的尺規作圖)

1. 請在平板上使用whiteboard APP畫出一個三角形，試著畫出一個同時通過三個頂點的圓形。(同組組員請分配畫出銳角、直角、鈍角三種不同的三角形)
   * 請先在你猜測的圓心位置上點一個點，再用圓形工具拉出一個圓，失敗了就重新猜測圓心，重複直到成功。
2. 所有的三角形(銳角、直角、鈍角)都能畫出同時通過三個頂點的圓形嗎？可以的打勾。
   * + 銳角三角形 □ 直角三角形 □ 鈍角三角形
3. 當你猜測圓心位置時，你的眼睛會關注哪些地方？
4. 除了猜測之外，有什麼方法可以精準的找到與三個頂點都一樣遠的點？

筆記區：

1. 請使用**尺規作圖**，畫出同時通過下列三角形三個頂點的圓。

|  |
| --- |
| 重點整理： |

1. 內外心重點比較：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **內外心比較** | 內心 | 外心 |
| 名稱由來 |  |  |
| 圖形 | 請標出內心的位置 | 請標出外心的位置 |
| 要怎麼找到？ |  |  |
| 有什麼性質？ |  |  |
| 重點補充 |  |  |
| 重點試題  (求角度) | 已知*I*為的內心，，則？ | 已知*O*為的外心，，則？ |
| 重點試題  (求半徑) | 在中，，，則的內切圓半徑為何？ | 在中，，，則的外接圓半徑為何？ |
| 內外一心 | 發現1：內心是三角形三內角平分線的交點，外心是三角形三邊中垂線的交點，\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_三角形的頂角平分線恰好會是底邊的中垂線。  發現2：\_\_\_\_\_\_\_\_三角形的三邊中垂線恰好就是三內角的角平分線，因此\_\_\_\_\_\_\_\_\_三角形的內心和外心會在同一個位置。 | |